НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Алілуйко Андрій Миколайович

УДК 517.93; 531.36

АНАЛІЗ СТІЙКОСТІ, СТАБІЛІЗАЦІЯ ТА ПОРІВНЯННЯ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

01.02.01 – теоретична механіка

АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ – 2007

Дисертацією є рукопис.
Робота виконана в Інституті математики НАН України.

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник **Мазко Олексій Григорович**, Інститут математики НАН України, провідний науковий співробітник відділу динаміки та стійкості багатовимірних систем.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник **Науменко Констянтин Іванович**, Інститут математики НАН України, провідний науковий співробітник відділу аналітичної механіки;

кандидат фізико-математичних наук **Слинько Віталій Іванович,** Інститут механіки НАН України ім. С.П. Тимошенка, старший науковий співробітник відділу стійкості процесів.

Захист відбудеться "____" ________________ 2008 р. о ____ годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.02 Інституту математики НАН України за адресою: 01601, м. Київ-4, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України.

Автореферат розісланий "____" ________________ 2007 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради Г.П. Пелюх

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Стійкість руху – це одна із головних характеристик якості динамічних об’єктів. Якщо рух реального об'єкта моделюється системою диференціальних або різницевих рівнянь, то його стійкість визначається за допомогою розв’язків системи. Основна проблема теорії стійкості полягає в тому, щоб описати умови стійкості або нестійкості руху механічної системи в термінах вихідних даних (параметрів, функцій, матричних коефіцієнтів і т. п.) побудованої математичної моделі.

Механічні системи, які досліджуються на стійкість, розрізняються за типами матеріальних об’єктів (абсолютно тверді та тверді деформівні тіла, рідина, газ тощо), за властивостями прикладених до них сил (дисипативних, гіроскопічних, потенціальних, неконсервативних та ін.), а також за характером кінематики рухів (поступальних, обертальних, коливальних та ін.). Відповідно математичні моделі таких систем, побудовані на основі законів механіки, мають свої особливості (див. роботи А.І. Лур’є, М.М. Мойсєєва, В.В. Румянцева, О.Ю. Ішлінського, В.М. Кошлякова, І.О. Луковського, В.О. Стороженка та ін.), які у багатьох випадках зображуються аналітично. Наприклад, складові матричних коефіцієнтів диференціальних систем другого порядку, до яких приводять різноманітні задачі механіки і фізики, можуть мати властивості симетрії, кососиметрії, додатної визначеності тощо. Ці властивості коефіцієнтів обумовлюються, наприклад, наявністю в об’єкті дослідження відповідних типів сил. Для таких систем залишаються актуальними задачі побудови нових коефіцієнтних критеріїв стійкості та алгоритмів стабілізації, що враховують вказані особливості і структуру матричних коефіцієнтів.

При проектуванні і дослідженні складних динамічних об'єктів (технічних, біологічних, економічних та ін.) виникають проблеми стійкості, стабілізації та порівняння станів відповідних математичних моделей. На практиці для успішного розв’язання цих проблем слід враховувати і використовувати такі особливості систем, як наявність інваріантних множин у фазовому просторі, властивості позитивності і монотонності відносно конуса та ін. Методи дослідження вказаних класів систем розвиваються на основі теорії конусів та операторів в напівупорядкованому просторі, розвинутої в роботах М.Г. Крейна, М.А Рутмана, М.А Красносельського та ін.

Класи позитивних і монотонних систем виникають в теорії стійкості при застосуванні методів порівняння як узагальнення методу функцій Ляпунова. В результаті аналіз складних (великомасштабних) моделей зводиться до вивчення більш простих класів систем. Зокрема, критеріями стійкості лінійних позитивних систем порівняння є сумісність алгебраїчних систем рівнянь і конусних нерівностей, побудованих із матричних (операторних) коефіцієнтів. Основні положення принципу порівняння, їх розвиток та застосування викладені в роботах В.М. Матросова, Л.Ю. Анапольського, С.М. Васільєва, Р.І. Козлова, А.А. Мартинюка, А.Ю. Оболенського, Н.С. Постнікова, Е.Ф. Сабаєва, О.Г. Мазка, V. Lakshmikantham, S. Leela, R. Bellman та ін.

В теорії стійкості та позитивної стабілізації найбільш вивченими є класи лінійних диференціальних і різницевих систем, що мають інваріантний конус невід'ємних векторів. Даний конус використовується в теорії M-матриць, що лежить в основі конструктивних алгебраїчних методів аналізу динамічних систем (A. Ostrowski, V. Ptak, R. Smith, G. Windisch, A. Berman та ін.). Аналогічні результати отримано в роботах R.J. Stern, H. Wolkowicz, L. Elsner, H. Schneider та ін. із використанням кругового та еліпсоїдального конусів. Диференціальні рівняння Ляпунова і Ріккаті, а також рівняння других моментів для класу стохастичних систем Іто є прикладами позитивних систем відносно конуса симетричних невід'ємно визначених матриць. За аналогією доцільно розвивати та вдосконалювати методи дослідження стійкості та порівняння динаміки об'єктів різної природи із застосуванням більш широких класів конусів.

Отже, вибраний напрямок досліджень дисертаційної роботи, присвячений розробці нових методів аналізу стійкості, стабілізації та порівняння динамічних систем, є актуальним. Важливість та ефективність таких методів підтверджуються при дослідженні розглянутих в роботі моделей обертальних механічних систем.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертація виконана у відділі динаміки та стійкості багатовимірних систем Інституту математики НАН України згідно із загальним планом науково-дослідних робіт в рамках держбюджетної теми № І–13–06 "Розробка методів дослідження некласичних задач динаміки та стійкості складних механічних систем" (номер держ. реєстрації 0106U000282), а також в межах науково-дослідної теми № ІІ–23–05 "Математичні методи дослідження динаміки та стійкості об'єктів механіки, гідромеханіки та гемодинаміки" (номер держ. реєстрації 0105U001108) за програмою "Математичне моделювання фізичних і механічних процесів у сильно неоднорідних середовищах".

Мета і завдання дослідження. Метою дисертаційної роботи є розробка нових методів аналізу стійкості, стабілізації та порівняння динамічних систем, їх застосування при дослідженні механічних об'єктів. В зв'язку з цим представляється доцільним:

- розробити методи аналізу стійкості та позитивності лінійних диференціальних, різницевих та диференціально-різницевих систем відносно типових конусів та їх узагальнень;
- розвинути методику побудови інваріантних множин нелінійних диференціальних систем у вигляді конусних нерівностей;
- розв'язати задачі позитивної стабілізації диференціальних та різницевих систем відносно заданих конусів;
- узагальнити принцип порівняння для скінченого сімейства незалежних диференціальних систем;
- розробити нові алгебраїчні методи дослідження стійкості та стабілізації диференціальних систем другого порядку;
- продемонструвати ефективність нових матричних методів в задачах стійкості та побудови стабілізуючого керування для обертальних механічних систем типу роторів та моделей обертання балки.

Об'єктом дослідження є диференціальні, різницеві, диференціально-різницеві системи та моделі спеціальних механічних систем.

Предметом дослідження є властивості стійкості та позитивності динамічних систем, інваріантні множини, стабілізація та порівняння систем.

Методи дослідження. Використовуються перший і другий методи Ляпунова дослідження стійкості та їх узагальнення, методи лінійної алгебри, функціонального аналізу, якісної теорії диференціальних рівнянь та теорії керування.

Наукова новизна одержаних результатів. Основні результати дисертаційної роботи полягають у наступному:

- розроблено нові алгебраїчні методи дослідження стійкості класів позитивних динамічних систем (диференціальних, різницевих та диференціальних систем із запізненням);
- встановлено умови позитивності диференціальних та різницевих систем відносно конусів типу кругових, еліпсоїдальних та їх узагальнень;
- розвинуто методику побудови інваріантних множин нелінійних диференціальних систем у вигляді конусних нерівностей. Як наслідок, сформульовано узагальнений

принцип порівняння для сімейства диференціальних систем, що функціонують у різних просторах;
- розроблено способи позитивної стабілізації динамічних систем відносно заданих конусів;
- побудовано нові матричні методи аналізу стійкості та алгоритми стабілізації лінійних диференціальних систем другого порядку;
- досліджено спектральні властивості гіперболічних пучків матриць і наведено їх застосування в задачах стійкості обертальних рухів механічних систем;
- розроблені матричні методи аналізу стійкості та синтезу керування застосовано до типових моделей роторних систем.

Практичне значення одержаних результатів. Результати дисертаційної роботи можуть бути використані в задачах аналізу та синтезу динамічних об'єктів, що мають особливу структуру та природні властивості (багатозв'язні моделі високої розмірності, позитивні системи з інваріантними конусами, механічні системи, що описуються диференціальними або різницевими рівняннями другого порядку та ін.), а також при порівнянні динаміки об'єктів різної природи.

Особистий внесок здобувача. В роботах, що опубліковані у співавторстві, особистий внесок автора полягає в обговоренні постановок задач, виконанні всіх основних доведень, розрахунків та формулюванні висновків. Співавтору О.Г. Мазку належать постановка задач та загальні рекомендації щодо методів їх розв'язування.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації доповідались і обговорювались на семінарах відділу динаміки та стійкості багатовимірних систем Інституту математики НАН України, відділу стійкості процесів Інституту механіки НАН України ім. С.П.Тимошенка, а також на таких міжнародних конференціях: "Dynamical system modelling and stability investigation" (травень 2005 р., Київ); "International Workshop on Free Boundary Flows and Related Problems of Analysis" (вересень 2005 р., Київ); VIII Кримська міжнародна математична школа "Метод функций Ляпунова и его приложения" (вересень 2006 р., Алушта); "Dynamical system modelling and stability investigation" (травень 2007 р., Київ).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано в 9 роботах. Серед них 5 статей [1–5] в наукових періодичних фахових виданнях та 4 тез доповідей [6–9] на міжнародних наукових конференціях.

Структура роботи. Дисертаційна робота складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків та списку використаних літературних джерел, що містить 112 найменувань. Дисертація також містить 11 ілюстрацій. Повний обсяг дисертації становить 123 сторінки друкованого тексту.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми, сформульовано мету дослідження, відображено наукову новизну, практичну цінність та апробацію роботи. Розглянуто структуру дисертації, а також наведено головні положення та результати, які виносяться на захист.

У **першому** розділі проведено огляд літератури та перелік основних задач, пов'язаних з темою дисертаційної роботи. Вказано також на деякі нерозв'язані проблеми з даного напрямку дослідження.

Другий розділ присвячено дослідженню позитивних динамічних систем з використанням теорії конусів і операторів у напівупорядкованому просторі.

У підрозділі 2.1 наведено основні поняття з теорії конусів і операторів у напівупорядкованому просторі та деякі допоміжні твердження, які використовуються в дисертації.

Опукла замкнута множина K дійсного нормованого простору Е називається *конусом*, якщо $K \cap -K = \{0\}$ та $\alpha K + \beta K \subset K$, $\forall \alpha, \beta \geq 0$. Динамічна система, що має інваріантний конус є *позитивною*.

У підрозділі 2.2 розглянуто конуси невід'ємних та невід'ємно визначених матриць та наведені умови їх інваріантності в диференціальних системах.

У підрозділі 2.3 доведено необхідні та достатні умови існування інваріантного еліпсоїдального конуса для лінійних диференціальних та різницевих систем у вигляді матричних нерівностей.

Розглянемо в просторі R^{n+1} множину

$$K(Q) = \{z \in R^{n+1} : z^T Qz \geq 0, z^T h \geq 0\} \tag{1}$$

де $Q = Q^T$ – симетрична матриця з інерцією $i(Q) = \{1, n, 0\}$, h – нормований власний вектор матриці Q, що відповідає її єдиному додатному власному значенню. Ця множина є еліпсоїдальним конусом.

Отримано наступні критерії інваріантності конуса (1) у фазовому просторі лінійних різницевих та диференціальних систем.

Теорема 2.1. $K(Q)$ *є інваріантним конусом різницевої системи*

$$z_{k+1} = Mz_k,\ z \in R^{n+1},\ k = 0,1,\ldots, \tag{2}$$

тоді і тільки тоді, коли для деякого $\alpha \geq 0$ *виконуються умови*

$$h^T Mh \geq 0,\ h^T MQ^{-1}M^T h \geq 0,\ M^T QM \geq \alpha Q. \tag{3}$$

Теорема 2.2. *$K(Q)$ є інваріантним конусом диференціальної системи*

$$\dot{z} = Mz\,,\; z \in R^{n+1}\,,\; t \geq 0\,, \tag{4}$$

тоді і тільки тоді, коли для деякого $\alpha \in R^1$ виконується нерівність

$$M^T Q + QM \geq \alpha Q\,.$$

Для системи (4) встановлено також умови існування інваріантного світлового конуса $K_a = \{z \in R^{n+1} : \|z\| \leq (a,z)\}$, де $(a,z) = a^T z$ – скалярний добуток, a – заданий вектор з нормою $\|a\| > 1$.

У підрозділі 2.4 для дослідження класу багатозв'язних систем введено нові типи конусів

$$K_\mu(\alpha, p) = \{z \in R^{n+m} : z^T = [x^T, u^T], u \in R_+^m, \|x\|_p \leq \mu_\alpha(u)\} \tag{5}$$

$$K_\sigma(\beta, q) = \{w \in R^{n+m} : w^T = [y^T, v^T], v \in R_+^m, \|y\|_q \leq \sigma_\beta(v)\}\,, \tag{6}$$

де $\mu_\alpha(u) = \alpha \min\limits_k u_k$, $\sigma_\beta(v) = \beta \sum\limits_k v_k$, $R_+^m \subset R^m$ – конус векторів з невід'ємними елементами, $\|x\|_p$ – одна із типових векторних норм. Встановлено, що при деяких обмеженнях наведені конуси є взаємно спряженими, тобто $K_\mu^*(\alpha, p) = K_\sigma(\beta, q)$.

У підрозділі 2.5 для нелінійної диференціальної системи розроблено методику побудови інваріантних множин у вигляді конусних нерівностей.

Розглянемо нелінійну диференціальну систему

$$\dot{X} = F(X,t)\,,\; X \in \mathrm{X}\,,\; t \geq 0\,, \tag{7}$$

що задовольняє умови існування та єдиності розв'язків $X(t)$ в деякій області $\Omega \subset \mathrm{X}$, та сформулюємо умови інваріантності множин типу

$$I_t = \{X \in \Omega : V(X,t) \overset{K}{\geq} 0\}\,, \tag{8}$$

де $V : \mathrm{X} \times [0,\infty) \to \mathrm{E}$ – деякий оператор, $\overset{K}{\geq}$ – нерівність породжена заданим конусом K у просторі E. Для цього визначимо оператор диференціювання в силу системи

$$D_t V(X,t) = \frac{d}{d\tau} V(\Psi(\tau,t,X),\tau)\,|_{\tau=t}$$

як (сильну) похідну складної функції. Тут $X(\tau) = \Psi(\tau,t,X)$ – розв'язок системи (7) з початковою умовою $X(t) = X$.

Теорема 2.5. *Нехай K – тілесний конус. Тоді I_t є інваріантною множиною системи (7) тоді і тільки тоді, коли при кожному $t \geq 0$ виконується умова*

$$X \in I_t,\ \varphi \in K^*,\ \varphi(V(X,t)) = 0 \ \ \Rightarrow \ \ \varphi(D_t V(X,t)) \geq 0\,. \qquad (9)$$

Відомі результати стосовно інваріантності конусів R_+^n та $K(Q)$ є частинними випадками встановленого критерію. При побудові інваріантних множин є корисним наступне твердження.

Зауваження 2.2. Умова (9) має місце, якщо для деякого $\alpha \geq 0$ виконується конусна нерівність

$$D_t V(X,t) + \alpha V(X,t) \overset{K}{\geq} 0\,,\ X \in \partial I_t\,,\ t \geq 0\,.$$

Запропоновану методику побудови інваріантних множин розвинуто для диференціальних систем вищих порядків. За аналогією для таких систем встановлено критерій інваріантності множин типу (8). Наведено приклади застосування запропонованої методики для диференціальних систем першого і другого порядків.

У підрозділі 2.6 побудовано умови інваріантності конусів типу (5), (6) для класу лінійних різницевих систем

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k\,, \quad u_{k+1} = Cx_k + Du_k\,, \quad k = 0,1,\ldots\,.$$

У підрозділі 2.7 доведено критерій позитивності класу диференціальних систем із запізненням

$$\dot{x}(t) + Lx(t) = G(x(t-\tau))\,,\ G(0) = 0\,,\ t \geq t_0 \geq 0\,, \qquad (10)$$

де L і G – відповідно лінійний та нелінійний оператори в просторі R^n, $\tau > 0$ – стале запізнення.

Теорема 2.7. *Диференціальна система (10) позитивна відносно конуса K тоді і тільки тоді, коли для довільних $t_0 \geq 0$ і $t \geq t_0$ виконуються включення*

$$e^{-L(t-t_0)} K \subseteq K\,, \quad G(K) \subseteq K\,,$$

де $e^{-L(t-t_0)}$ – експоненціальний оператор.

Третій розділ присвячено дослідженню стійкості та стабілізації позитивних динамічних систем.

У підрозділі 3.1 наведено означення та деякі допоміжні факти, які використовуються при дослідженні стійкості позитивних систем. Встановлено алгебраїчні умови експоненціальної стійкості лінійної диференціальної системи у вигляді позитивної оборотності двох операторів.

Теорема 3.4. *Якщо для деякого γ_0 виконуються умови*

$$K \subset -MK \cap (\gamma_0 E - M)K\ ,\ \gamma_0 > \frac{\rho^2(M) - r^2(M)}{2r(M)}\ ,$$

де $r(M) = \min\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(M)\}$, $\rho(M)$ – *спектральний радіус оператора* M *, то система (4) експоненціально стійка.*

У підрозділі 3.2 доведено достатні умови стійкості лінійних диференціальних та різницевих систем з інваріантним еліпсоїдальним конусом у вигляді матричних нерівностей.

Теорема 3.5. *Нехай існують симетрична матриця* Q *з інерцією* $i(Q) = \{1, n, 0\}$ *і константи* $\alpha \in R^1$ *і* $\beta > 0$, *для яких виконуються нерівності*

$$M^T Q + QM \ge \alpha Q,\ M^T QM \le \beta Q\ ,\ h^T M^{-1} h \le 0,\ h^T (M^T QM)^{-1} h \ge 0\ ,$$

де h *– власний вектор матриці* Q, *що відповідає її єдиному додатному власному значенню. Тоді диференціальна система (4) експоненціально стійка і позитивна відносно конуса* $K(Q)$.

Теорема 3.6. *Нехай існують симетрична матриця* Q *з інерцією* $i(Q) = \{1, n, 0\}$ *і константи* $\alpha > 0$ *і* $\beta > 0$, *для яких разом з (3) виконуються нерівності*

$$M_1^T QM_1 \le \beta Q\ ,\ h^T M_1^{-1} h \ge 0\ ,\ h^T (M_1^T QM_1)^{-1} h \ge 0,$$

де $M_1 = I - M$ *. Тоді різницева система (2) асимптотично стійка і позитивна відносно конуса* $K(Q)$.

Підрозділ 3.3 присвячено розробці методів дослідження стійкості та позитивності диференціальних систем довільного порядку.

Розглянемо диференціальну систему s -го порядку

$$A_0 x(t) + A_1 x^{(1)}(t) + \ldots + A_s x^{(s)}(t) = 0\ ,\ x^{(i)}(0) = x_0^{(i)}\ ,\ i = \overline{0, s-1}\ , \qquad (11)$$

де $x(t) \in R^n$ – вектор фазових координат, $t \ge 0$, $A_i \in R^{n \times n}$ – коефіцієнти регулярного матричного полінома $F(\lambda) = A_0 + \lambda A_1 + \ldots + \lambda^s A_s$. Систему (11) можна звести до диференціальної системи першого порядку

$$Ay(t) = B\dot{y}(t)\ ,\quad y(0) = y_0\ ,$$

де A і B – деякі блочні матриці, а вектор-функція $y(t) = [x(t), x^{(1)}(t), \ldots, x^{(s-1)}(t)]^T$ характеризує повний стан системи. Тому інваріантні множини і властивості позитивності даної системи відносно конусів будемо визначати у фазовому просторі R^{ns} :

$$y(0)=\begin{bmatrix} x(0) \\ x^{(1)}(0) \\ \vdots \\ x^{(s-1)}(0) \end{bmatrix} \in \hat{K} \quad \Rightarrow \quad y(t)=\begin{bmatrix} x(t) \\ x^{(1)}(t) \\ \vdots \\ x^{(s-1)}(t) \end{bmatrix} \in \hat{K}\,, \quad \hat{K}=\begin{bmatrix} K_0 \\ K_1 \\ \vdots \\ K_{s-1} \end{bmatrix}, \quad t \geq 0\,.$$

Для формулювання умов позитивності та експоненціальної стійкості системи (11) використовуються поняття максимальних власних пар матричного полінома. Нехай (U,T) – довільна (права) власна пара матричного полінома $F(\lambda)$, що визначається з умов

$$A_0T + A_1TU + \ldots + A_sTU^s = 0\,, \; rangE = m\,, \; E=\begin{bmatrix} T \\ TU \\ \vdots \\ TU^{s-1} \end{bmatrix}, \qquad (12)$$

де $T \in C^{n\times m}$, $U \in C^{m\times m}$. Співвідношення (12) визначають блочну (праву) спектральну задачу для матричного полінома $F(\lambda)$. Власну пару (U,T) матричного полінома $F(\lambda)$ будемо називати *максимальною*, якщо у співвідношеннях (12) число m набуває максимально можливого значення. Використовуючи структуру матриці E і канонічну форму Кронекера регулярного пучка матриць, отримано наступні твердження.

Лема 3.3. *Нехай* (U,T) *– власна пара матричного полінома* $F(\lambda)$. *Тоді* $\hat{K}=EK$ *є інваріантною множиною системи (11) тоді і тільки тоді, коли* K *– інваріантна множина системи*

$$\dot{z}=Uz\,, \quad z(0)=z_0\,, \quad t \geq 0\,. \qquad (13)$$

Зокрема, система (11) позитивна відносно конуса $\hat{K}=EK$ *лише тоді, коли система (13) позитивна відносно конуса* K.

Теорема 3.7. *Нехай* (U,T) *– максимальна власна пара матричного полінома* *така, що система (13) позитивна відносно нормального тілесного конуса* K. *Тоді наступні твердження еквівалентні:*

1) система (11) експоненціально стійка;

2) $\mathrm{Re}\,\lambda < 0 \quad \forall \lambda \in \sigma(U)$*;*

3) $K \subset -UK$*;*

4) $\exists z_0 \in \mathrm{int}K : Uz_0 \in -\mathrm{int}K$.

Теорема 3.9. *Якщо для деякої максимальної власної пари* (U,T) *матричного полінома* $F(\lambda)$ *виконується включення*

$$K \subset (\gamma I - U)K \quad \forall \gamma \geq 0,$$

де K *– нормальний відтворюючий конус, то система (11) експоненціально стійка і має інваріантний конус* $\hat{K} = EK$.

У підрозділі 3.4 розв'язано задачу про абсолютну стійкість для диференціальних систем із запізненням. За допомогою функціоналу Ляпунова-Красовського встановлено достатні умови абсолютної стійкості позитивної системи (10).

Теорема 3.10. *Нехай виконуються умови*

$$e^{-L(t-t_0)}x \overset{K}{\geq} 0, \; 0 \overset{K}{\leq} G(x) \overset{K}{\leq} Px, \; x \in K,$$

де P *– лінійний позитивний оператор, та існують лінійні рівномірно позитивні функціонали* $\varphi, \psi \in K^*$*, які задовольняють рівняння*

$$M^*\varphi = \psi,$$

де $M = L - P$. *Тоді розв'язок* $x \equiv 0$ *системи (10) абсолютно стійкий.*

Як наслідок, отримано алгебраїчні та спектральні умови абсолютної стійкості лінійних систем із запізненням, позитивних відносно заданого конуса.

У підрозділі 3.5, користуючись отриманими в підрозділах 2.5, 2.6, 3.1 та 3.2 результатами, запропоновано способи позитивної стабілізації динамічних систем відносно заданих конусів, тобто способи відшукання керування у вигляді зворотного зв'язку або динамічного компенсатора, що забезпечують одночасно властивості позитивності та стійкості відповідної замкнутої системи.

У підрозділі 3.6 розглянуто узагальнену методику порівняння диференціальних систем. Дана методика є наслідком теореми 2.5 і дозволяє порівнювати динамічні властивості двох і більше двох динамічних систем, що функціонують у різних просторах.

Розглянемо сімейство незалежних систем

$$(S_i): \; \dot{X}_i = F_i(X_i, t), \; X_i \in \mathrm{X}_i, \; t \geq 0, \; i = \overline{1,s}. \qquad (14)$$

Для спрощення запису введемо позначення:

$$X = [X_1, \ldots, X_s], \; F(X,t) = [F_1(X_1,t), \ldots, F_s(X_s,t)], \; \mathrm{X} = \mathrm{X}_1 \times \ldots \times \mathrm{X}_s$$

У деякому просторі E з конусом K задамо *оператор порівняння* $W: \mathrm{X} \times [0,\infty) \to \mathrm{E}$ для сімейства систем (14).

Означення 3.5. Системи (14) називаємо *порівняними*, якщо для довільного $t_0 \geq 0$ виконується умова

$$W(X(t_0), t_0) \overset{K}{\geq} 0 \;\; \Rightarrow \;\; W(X(t), t) \overset{K}{\geq} 0, \;\; t > t_0.$$

Теорема 3.12. *Нехай* K *– тілесний конус. Тоді системи (14) є порівняними тоді і тільки тоді, коли при кожному* $t \geq 0$ *виконується умова*

$$W(X,t)\overset{K}{\geq}0\,,\ \varphi \in K^*,\ \varphi(W(X,t)) = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi(D_t W(X,t))\overset{K}{\geq}0\,.$$

Показано, що основні твердження відомого принципу порівняння для двох і трьох систем з нульовими положеннями рівноваги можна вважати наслідками теореми 3.12. Сформульовано задачі впорядкування і виявлення домінуючої (у певному сенсі) системи сімейства $s \geq 2$ незалежних систем у вигляді загальної задачі порівняння.

Четвертий розділ присвячено розробці нових методів дослідження стійкості механічних систем, лінеаризовані моделі яких описуються у вигляді систем диференціальних рівнянь другого порядку.

У підрозділі 4.1 досліджено умови гіперболічності, майже гіперболічності та еліптичності квадратичного пучка матриць.

Розглянемо квадратичний пучок матриць (КПМ)

$$F(\lambda) = A + \lambda B + \lambda^2 C\,,\ A = A^*,\ B = B^*,\ C = C^* > 0 \qquad (15)$$

та відповідну квадратичну спектральну задачу (КСЗ)

$$F(\lambda)z = 0\,,\ \lambda \in \sigma(F)\,,\ z \in C^n,\ z \neq 0\,. \qquad (16)$$

КСЗ (16) називаємо: *гіперболічною*, *майже гіперболічною* та *еліптичною*, якщо для довільного ненульового вектора $z \in C^n$ виконуються відповідні нерівності $\delta(z) > 0$, $\delta(z) \geq 0$ та $\delta(z) < 0$, де $\delta(z) = (z^* B z)^2 - 4 z^* A z z^* C z$.

Доведено критерій майже гіперболічності КСЗ (16) в термінах її середніх власних значень.

Теорема 4.2. *Наступні твердження еквівалентні:*

1) КСЗ (16) є майже гіперболічною;

2) $\exists \alpha \in R^1 : F(\alpha) \leq 0$*;*

3) КПМ (15) має дійсні власні значення $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n \leq \lambda_{n+1} \leq \ldots \leq \lambda_{2n}$ *і* $F(\alpha) \leq 0$ *при кожному* $\alpha \in [\lambda_n, \lambda_{n+1}]$.

У підрозділі 4.2 проведено аналіз стійкості виродженої диференціальної системи другого порядку за допомогою розв’язків блочної спектральної задачі для квадратичного пучка (15).

Розглянемо автономну диференціальну систему другого порядку

$$Ax + B\dot{x} + C\ddot{x} = 0\,,\ A, B, C \in C^{n \times n},\ t \geq 0\,. \qquad (17)$$

У випадку, коли матриця коефіцієнтів C може бути виродженою, доведено критерій асимптотичної стійкості системи (17) в термінах максимальних власних пар регулярного пучка (15).

Теорема 4.3. *Нехай* (U,T) *– максимальна ліва власна пара квадратичного пучка матриць* $F(\lambda)$. *Тоді диференціальна система (17) асимптотично стійка в тому і лише в тому випадку, коли існують матриці* $X = X^* > 0$ *і* $Y = Y^* > 0$, *що задовольняють рівняння*

$$U^* X + XU = -Y .$$

При цьому функція Ляпунова визначається у вигляді

$$v(y) = y^* R^* XRy ,\ R = \left[TB + UTC, TC\right],\ y = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix},$$

і на нетривіальних розв'язках системи задовольняє співвідношення

$$v(y) > 0 ,\ \frac{dv(y)}{dt} = -y^* R^* YRy < 0 .$$

У підрозділі 4.3 розроблено алгебраїчні методи дослідження стійкості системи (17) та побудови функцій Ляпунова, в яких враховується структура матричних коефіцієнтів A, B і C. Отримано коефіцієнтні умови стійкості системи (17), що зводяться до розв'язання систем матричних нерівностей.

Теорема 4.5. *Нехай* $C = C^* > 0$ *та існують матриці* H *і* $U \in C^{n\times n}$, *що задовольняють систему матричних нерівностей*

$$H = H^* > 0 ,\ U + U^* > 0 ,\ (L^* - H)W(L - H) \le E , \qquad (18)$$

де

$$W = (U + U^*)^{-1},\ L = A + U^* C^{-1}(B - U),$$

$$E = A^* C^{-1}(B - U) + (B - U)^* C^{-1} A .$$

Тоді диференціальна система (17) стійка за Ляпуновим. Якщо до того ж в (18) остання матрична нерівність є строгою, то система (17) асимптотично стійка.

Теорема 4.6. *Нехай для деякого* $\xi \in R^1$ *виконуються умови*

$$\xi(A + A^*) \ge 0 ,\ B + B^* > 0 ,\ C = C^* > 0 ,\ \Gamma_\xi = \xi^2 P + \xi R + Q \ge 0\ \ (> 0) ,$$

де

$$P = -(A + A^*)(B + B^*)^{-1}(A + A^*) ,$$

$$R = 2(A + A^*)(B + B^*)^{-1} A + 2A^*(B + B^*)^{-1}(A + A^*) ,$$

$$Q = A^* C^{-1} B + B^* C^{-1} A - 4A^*(B + B^*)^{-1} A .$$

Тоді диференціальна система (17) стійка (асимптотично стійка).

Як наслідок теорем 4.3 та 4.6, доведено достатні умови стійкості (асимптотичної стійкості) системи (17), що зводяться до оцінки середніх власних значень деякої майже гіперболічної (гіперболічної) спектральної задачі.

Наслідок 4.5. *Нехай виконуються умови* $A + A^* > 0$, $B + B^* > 0$, $C = C^* > 0$. *Тоді система (17) стійка (асимптотично стійка), якщо*

$$\Gamma_\xi \geq 0 \;\; 0 \leq \gamma_n \leq \xi \leq \gamma_{n+1} \;\; (\Gamma_\xi > 0 \;\; 0 \leq \gamma_n < \xi < \gamma_{n+1}),$$

де $0 \leq \gamma_1 \leq \ldots \leq \gamma_{2n}$ *– впорядковані власні значення пучка* Γ_ξ.

Аналогічне твердження виконується у випадку $A + A^* < 0$.

У підрозділі 4.4 розроблено алгоритм побудови регуляторів, що стабілізують диференціальну систему другого порядку.

Розглянемо систему керування

$$Ax + B\dot{x} + C\ddot{x} = Fu\,, \tag{19}$$

де x – n-вектор стану системи, u – l-вектор керування, A, B, C і F – відомі матриці відповідних розмірів. Для системи (19) отримано алгоритм стабілізації у вигляді зворотного зв'язку $u = -L_0 x - L_1 \dot{x}$. Невідомі матриці L_0 і L_1 мають наступну структуру

$$L_0 = -L_1 V^* P^{-1}\,,\;\; L_1 = \tau \Psi F^* C^{-1*} \Delta^{-1}\,,$$

де $\tau > 0$ – достатньо велике число, а матриці V, P, Q і Ψ задовольняють систему співвідношень

$$\Psi + \Psi^* > 0\,,\; V + V^* < 0\,,\; P = P^* > 0\,,\; \Delta = Q - V^* P^{-1} V > 0\,,$$

$$F^{\perp *}[BQC^* + CQB^* + AVC^* + CV^* A^* +$$

$$+ (AP - CQ + BV^*)(V + V^*)^{-1}(PA^* - QC + VB^*)]F^{\perp} > 0$$

Тут матриця ортогонального доповнення $F^{\perp}$ знаходиться з умов

$$F^* F^{\perp} = 0\,,\;\; \det[F, F^{\perp}] \neq 0\,.$$

У підрозділі 4.5 розроблені методи аналізу стійкості та синтезу керування застосовано при дослідженні деяких механічних систем (ротора Лаваля та моделі обертання балки).

Розглянемо клас роторних систем, що описуються диференціальними рівняннями типу

$$\begin{bmatrix} K & S \\ -S & K \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} D & G \\ -G & D \end{bmatrix} \dot{y} + \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \ddot{y} = 0\,,\;\; y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \tag{20}$$

де $M = M^T > 0$ – матриця мас, $D = D^T \geq 0$ – матриця демпфування, $G = G^T \geq 0$ – гіроскопічна матриця, $K = K^T > 0$ – матриця жорсткості,

$S = S^T \geq 0$ – циркуляторна матриця, $y \in R^{2n}$ – вектор узагальнених координат. Дійсна вектор-функція $y(t)$ є розв'язком системи (20) тоді і тільки тоді, коли комплексна вектор-функція $x(t) = y_1(t) - iy_2(t)$ задовольняє диференціальну систему

$$(K + iS)x + (D + iG)\dot{x} + M\ddot{x} = 0\,, \quad x \in C^n\,. \tag{21}$$

При дослідженні системи (21) враховано наступні співвідношення

$$D = D_0 + D_1\,,\ G = \omega G_0\,,\ S = \omega D_0\,,$$

де D_0 і D_1 – складові внутрішнього та зовнішнього демпфування, ω – кутова швидкість обертання ротора.

Приклад 4.3. Для проведення чисельних та аналітичних досліджень розглянуто роторну систему (21) з матричними коефіцієнтами

$$M = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} d & -p \\ -p & p+h \end{bmatrix},\ K = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k+r \end{bmatrix},\ S = \begin{bmatrix} \omega p & -\omega p \\ -\omega p & \omega p \end{bmatrix}, \tag{22}$$

де $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, x_1 і x_2 характеризують зміщення центрів відповідно головної маси m і додаткової маси s, p і q – відповідно внутрішнє та зовнішнє демпфування, $d = p + q > 0$, h і r – відповідно демпфування та коефіцієнт пружності на опорах, $k > 0$ – коефіцієнт пружності невагомого стержня, причому гіроскопічні сили не враховуються $(G = 0)$. Ця модель описує так званий ротор Лаваля.

Побудовано алгебраїчну систему співвідношень, яка описує повну область асимптотичної стійкостійкості в просторі параметрів системи (21), (22). Вона дає можливість аналітично оцінити критичну кутову швидкість обертання ротора ω_c (при $0 \leq \omega < \omega_c$ система (21) асимтотично стійка, а при $\omega = \omega_c$ дана властивість системи втрачається). Чисельні розрахунки, проведені для ротора Лаваля, продемонстрували той факт, що умови стійкості, представлені теоремою 4.6, узагальнюють та посилюють аналогічний відомий результат. Встановлено можливість стабілізувати систему за допомогою керування, що впливає лише на рух приєднаної маси s.

Приклад 4.5. Розглянуто модель обертання балки довжини l із закріпленим твердим диском маси m, що разом обертаються зі сталою кутовою швидкістю ω. Вважаємо, що балка є однорідна з погонною масою m_0 та мало гнучкою з модулем пружності E. В рухомій системі координат $0xyz$ осі x і y паралельні площині поперечного перерізу балки, що обертається навколо осі z і має моменти інерції J_x і J_y. Кріплення балки дозволяють рухи по осі z та забезпечують відновлюючі згинаючі моменти і кутові відхилення з коефіцієнтами пропорційності k_1 і k_2 відповідно при $z=0$ та $z=l$. Внутрішнє та зовнішнє демпфування характеризують параметри p і q.

Диференціальні рівняння руху балки, що випливають із принципу Гамільтона та методу Гальоркіна, мають вигляд

$$\begin{bmatrix} K_1 & S \\ -S & K_2 \end{bmatrix} w(t) + \begin{bmatrix} D_1 & G \\ -G & D_2 \end{bmatrix} \dot{w}(t) + \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} \ddot{w}(t) = f(t). \quad (23)$$

Тут w – вектор узагальнених координат, f – вектор зовнішніх сил, а матричні коефіцієнти задаються наступними співвідношеннями:

$$M_1 = M_2 = \left\| m_{ij} \right\|_1^n, \; m_{ij} = m_0 \delta_{ij} + 2m \sin\frac{i\pi}{2} \sin\frac{j\pi}{2}, \; K_1 = \left\| k_{1ij} \right\|_1^n,$$

$$K_2 = \left\| k_{2ij} \right\|_1^n,$$

$$k_{1ij} = EJ_x \left(\frac{i\pi}{l}\right)^2 \left(\frac{j\pi}{l}\right)^2 l\delta_{ij} - \omega^2 m_{ij} + 2(k_1 + k_2 \cos i\pi \cos j\pi) \frac{i\pi}{l} \frac{j\pi}{l},$$

$$k_{2ij} = EJ_y \left(\frac{i\pi}{l}\right)^2 \left(\frac{j\pi}{l}\right)^2 l\delta_{ij} - \omega^2 m_{ij} + 2(k_1 + k_2 \cos i\pi \cos j\pi) \frac{i\pi}{l} \frac{j\pi}{l},$$

$$G = -2\omega M, \; D_1 = D_2 = (p+q) l I_n, \; S = -q\omega l I_n, \; i,j = 1,2,\ldots,n,$$

де I_n – одинична матриця порядку n, а δ_{ij} – символ Кронекера. Всі блоки матричних коефіцієнтів системи є симетричними, причому M_1 і M_2 додатно визначені, а D_1 і D_2 – невід'ємно визначені матриці.

Систему (23) стабілізовано двома способами за допомогою блоку керування

$$f = Fu, \; u = -L_0 x - L_1 \dot{x},$$

де F – задана матриця розміру $2n \times k$. Невідомі матриці керування L_0 та L_1 знайдено із системи матричних нерівностей для замкнутої системи (наслідок 4.5), а також за допомогою алгоритму стабілізації, що наведений в підрозділі 4.4.

В дисертаційній роботі аналітичні викладки та чисельні обрахунки були здійснені та перевірені за допомогою математичних систем Matlab, Maple і Mathcad.

ВИСНОВКИ

В дисертації розроблено нові теоретично обгрунтовані методи аналізу стійкості, стабілізації та порівняння динамічних систем.

Основні результати роботи полягають у наступному:

- розроблено нові алгебраїчні методи дослідження стійкості класів позитивних динамічних систем (диференціальних, різницевих та диференціальних систем із запізненням);
- встановлено умови позитивності диференціальних та різницевих систем відносно конусів типу кругових, еліпсоїдальних та їх узагальнень;
- розвинуто методику побудови інваріантних множин нелінійних диференціальних систем у вигляді конусних нерівностей. Як наслідок, сформульовано узагальнений принцип порівняння для сімейства диференціальних систем, що функціонують у різних просторах;
- розроблено способи позитивної стабілізації динамічних систем відносно заданих конусів;
- побудовано нові матричні методи аналізу стійкості та алгоритми стабілізації лінійних диференціальних систем другого порядку;
- досліджено спектральні властивості гіперболічних пучків матриць і наведено їх застосування в задачах стійкості обертальних рухів механічних систем;
- розроблені матричні методи аналізу стійкості та синтезу керування застосовано до типових моделей роторних систем.

Результати дисертаційної роботи можуть бути використані при розв’язуванні практичних задач аналізу стійкості та стабілізації механічних систем, при дослідженні динаміки складних фізичних об’єктів, позитивних систем з інваріантними конусами тощо.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Алілуйко А.М., Мазко О.Г. Інваріантні конуси та стійкість багатозв'язних систем // Проблеми динаміки та стійкості багатовимірних систем : Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2005. – Т.2, № 1. – С. 28–45.
2. Алілуйко А.М., Мазко О.Г. Інваріантні конуси та стійкість лінійних динамічних систем // Укр. мат. журн. – 2006. – Т.58, № 11. – С. 1446–1461.
3. Алілуйко А.М., Мазко О.Г. Стійкість та стабілізація диференціальних систем другого порядку // Проблеми аналітичної механіки : Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2006. – Т. 3, № 1. – С. 7–24.
4. Алілуйко А.М., Мазко О.Г. Інваріантні множини та порівняння динамічних систем // Нелінійні коливання. – 2007. – Т. 10, № 2. – С. 163–176.
5. Алілуйко А.М. Алгебраїчні умови стійкості диференціальних систем другого порядку // Динамические системы. – 2007. – Вып. 22. – С. 96–108.
6. Алилуйко А.Н., Мазко А.Г. Инвариантные конусы и монотонность динамических систем // Dynamical system modelling and stability investigation : Тези доповідей міжнародної наукової конференції (23–25 травня 2005 р., Київ). – Київ: Нац. ун-т ім. Тараса Шевченка, 2005. – С. 19.
7. Алилуйко А.Н., Мазко А.Г. Инвариантные конусы и устойчивость многосвязных систем // International Workshop on Free Boundary Flows and Related Problems of Analysis : Тези доповідей міжнародної наукової конференції (25–30 вересня 2005 р., Київ). – Київ: Ін-т математики НАН України, 2005. – С. 43–44.
8. Алилуйко А.Н., Мазко А.Г. Инвариантные множества и устойчивость линейных дифференциальных систем произвольного порядка // Метод функций Ляпунова и его приложения : Тези Восьмої Кримської Міжнародної математичної школи (10–17 вересня 2006 р., Алушта). – Сімферополь: Нац. Таврійський ун-т України, 2006. – С. 10.
9. Алілуйко А.М. Матричні нерівності в задачах стійкості і стабілізації механічних систем // Dynamical system modelling and stability investigation : Тези доповідей міжнародної наукової конференції (22–25 травня 2007 р., Київ). – Київ: Нац. ун-т ім. Тараса Шевченка, 2007. – С. 263.

АНОТАЦІЇ

Алілуйко А.М. Аналіз стійкості, стабілізація та порівняння динамічних систем. – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.02.01 – теоретична механіка. – Інститут математики НАН України, Київ, 2007.

В дисертації розроблено нові алгебраїчні методи дослідження стійкості класів позитивних динамічних систем (диференціальних, різницевих та диференціальних систем із запізненням). Встановлено умови позитивності диференціальних та різницевих систем відносно конусів типу кругових, еліпсоїдальних та їх узагальнень. Розвинуто методику побудови інваріантних множин нелінійних диференціальних систем у вигляді конусних нерівностей. Як наслідок, сформульовано узагальнений принцип порівняння для сімейства диференціальних систем, що функціонують у різних просторах. Запропоновано способи позитивної стабілізації динамічних систем відносно заданих конусів. Побудовано нові матричні методи аналізу стійкості та алгоритми стабілізації лінійних диференціальних систем другого порядку. Досліджено спектральні властивості гіперболічних пучків матриць та наведено їх застосування в задачах стійкості обертальних механічних систем. Розроблені матричні методи аналізу стійкості та синтезу керування застосовано для типових моделей роторних систем.

Ключові слова: механічна система, стійкість, інваріантний конус, позитивна система, стабілізація, принцип порівняння, пучок матриць, роторна система.

Алилуйко А.Н. Анализ устойчивости, стабилизация и сравнение динамических систем. – Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.02.01 – теоретическая механика. – Институт математики НАН Украины, Киев, 2007.

Диссертационная работа посвящена разработке новых методов анализа устойчивости, стабилизации и сравнения динамических систем, а также их применению при исследовании механических объектов.

В первом разделе приведены обзор и анализ литературы, а также перечень основных задач, связанных с темой диссертационной работы.

Второй раздел посвящен исследованию позитивных динамических систем с использованием теории конусов и операторов в полу-упорядоченном пространстве. Доказаны критерии инвариантности

эллипсоидальных конусов в виде матричных неравенств. Введены новые типы конусов, обобщающие круговые и эллипсоидальные, и сформулированы критерии их инвариантности для линейных дифференциальных и разностных систем. Сформулирован также критерий позитивности нелинейных дифференциальных систем с запаздыванием. Разработана методика построения инвариантных множеств нелинейных дифференциальных систем в виде конусных неравенств с применением оператора дифференцирования в силу системы. В виде следствий обобщены известные условия инвариантности некоторых типов конусов в линейных системах.

В третьем разделе рассмотрены задачи устойчивости и стабилизации позитивных динамических систем. Предложены новые алгебраические методы исследования устойчивости линейных позитивных систем на основе результатов, изложенных в разделе 2. В виде матричных неравенств сформулированы достаточные условия устойчивости линейных дифференциальных и разностных систем с инвариантным эллипсоидальным конусом. В терминах максимальных собственных пар матричного полинома сформулированы условия экспоненциальной устойчивости линейных дифференциальных систем произвольного порядка. Методом функционала Ляпунова-Красовского установлены достаточные условия абсолютной устойчивости позитивных дифференциальных систем с запаздыванием. Предложены некоторые варианты решения задачи о позитивной стабилизации систем относительно заданых конусов. Как следствие метода построения инвариантных множеств приведено обобщенную методику сравнения дифференциальных систем. Эта методика позволяет сравнивать динамические свойства двух и более чем двух динамических систем, функционирующих в разных пространствах.

Четвертый раздел посвящен разработке новых матричных методов исследования устойчивости механических систем, линеарызованые модели которых описываются в виде систем дифференциальных уравнений второго порядка. На основе метода функций Ляпунова получены коэффициентные условия устойчивости таких систем, сводящиеся к решению систем матричных неравенств. Сформулированы условия устойчивости (асимптотической устойчивости) рассматриваемого класса систем в терминах средних собственных значений соответствующей почти гиперболической (гиперболической) квадратичной спектральной задачи. Построен класс регуляторов типа обратной связи по состоянию, стабилизирующих дифференциальную систему второго порядка. Эффективность предложенных матричных методов продемонстрирована при исследовании устойчивости и построении стабилизирующих регуляторов для вращательных механических систем (ротора Лаваля и модели вращения балки). Проведены аналитические и численные исследования.

Ключевые слова: механическая система, устойчивость, инвариантный конус, позитивная система, стабилизация, принцип сравнения, пучок матриц, роторная система.

Aliluyko A.M. Stability analysis, stabilization and comparison of dynamic systems. – Manuscript.

Thesis for the candidate of physical and mathematical sciences degree in speciality 01.02.01 – theoretical mechanics. – Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2007

In the thesis new algebraic methods for stability investigation of the classes of positive dynamic systems (differential, difference and differential delay systems) are developed. Positivity conditions are established for differential and difference systems with respect to circular and ellipsoidal cones and their generalizations. Technique for construction of invariant sets of differential systems is developed in the form of cone inequalities. As a consequence, the generalized comparison principle is formulated for a set of differential systems in different spaces. Methods for positive stabilization of dynamic systems with respect to specified cones are offered. New matrix methods of stability analysis and stabilization algorithms for the second order linear differential systems are constructed. Spectral properties of hyperbolic matrix pencils are investigated and used in stability problems of rotational mechanical systems. The developed matrix methods for stability analysis and control synthesis are applied in typical models of rotor systems.

Keywords: mechanical system, stability, invariant cone, positive system, stabilization, comparison principle, matrix pencil, rotor system.