УДК 621.391:519.22

ВЗАЄМОКОРЕЛЯЦІЙНИЙ КОГЕРЕНТНИЙ АНАЛІЗ ЦИКЛОСТАЦІОНАРНИХ ПРОЦЕСІВ

Р. М. Юзефович, І. М. Яворський, І. Б. Кравець, І. Й. Мацько

Проаналізовані властивості когерентних оцінок взаємокореляційних функцій циклостаціонарних процесів. Показано, що при заниканні кореляційних зв'язків з ростом зсуву такі оцінки є асимптотично незміщеними й слушними. Отримані формули для зміщення оцінок кореляційної функції при скінченій довжині відрізка реалізації.

При оцінюванні контролю роботи механічних систем слід звертати увагу на діагностику дефектів, які зароджуються, а це в свою чергу призводить до пошуку діагностичних ознак, які реагують на незначні відхилення параметрів технічного стану від норми. Такі ознаки формуються на основі аналізу циклічно нестаціонарних процесів, що мають підвищену чутливість до змін технічного стану. Як показали дослідження [1-3], нові можливості в цьому напрямі відкриваються при аналізі сигналів вібрації з використанням методів теорії і статистики періодично нестаціонарних випадкових процесів. При такому підході діагностичні ознаки формуються на основі тих характеристик, які описують взаємодію повторюваності і стохастичності процесів, а саме їх кореляційних і спектральних компонентів. Взаємний статистичний аналіз вібропроцесів може суттєво полегшити встановлення характеру дефекту, а також його локалізацію.

Розглянемо задачу когерентного взаємокореляційного аналізу на основі двох процесів, відібраних в певних точках механічної системи. Будемо також вважати, що ці процеси описуються математичною моделлю у вигляді періодично корельованих випадкових процесів (ПКВП) $\xi(t)$ і $\eta(t)$. Математичні сподівання таких процесів $m_\xi(t)=E\xi(t)$, $m_\eta(t)=E\eta(t)$ і їх кореляційні функції $b_\xi(t,u)=E\mathring{\xi}(t)\mathring{\xi}(t+u)$ і $b_\eta(t,u)=E\mathring{\eta}(t)\mathring{\eta}(t+u)$, де $\mathring{\xi}(t)=\xi(t)-m_\xi(t)$ і $\mathring{\eta}(t)=\eta(t)-m_\eta(t)$, періодично змінюються за часом, тобто $m_\xi(t)=m_\xi(t+T)$, $m_\eta(t)=m_\eta(t+T)$, $b_\xi(t+T,u)=b_\xi(t,u)$, $b_\eta(t+T,u)=b_\eta(t,u)$, і можуть бути подані у вигляді рядів Фур'є:

$$m_\xi(t)=\sum_{k\in\mathbb{Z}} m_k^{(\xi)}e^{ik\omega_0 t}\ ,\ m_\eta(t)=\sum_{k\in\mathbb{Z}} m_k^{(\eta)}e^{ik\omega_0 t}\ ,$$

$$b_\xi(t,u)=\sum_{k\in\mathbb{Z}} B_k^{(\xi)}(u)e^{ik\omega_0 t}\ ,\ b_\eta(t,u)=\sum_{k\in\mathbb{Z}} B_k^{(\eta)}(u)e^{ik\omega_0 t}\ .$$

Припустимо, що їх взаємокореляційна функція $b_{\xi\eta}(t,u)=E\mathring{\xi}(t)\mathring{\eta}(t+u)$ також є періодичною за часом. Тоді

$$b_{\xi\eta}(t,u)=\sum_{k\in\mathbb{Z}} B_k^{(\xi\eta)}(u)e^{ik\omega_0 t}\ .$$

Величини $B_k^{(\xi\eta)}(u)$ будемо називати взаємокореляційними компонентами [4].

Оскільки $b_{\xi\eta}(t,u)=E\mathring{\eta}(t+u)\mathring{\xi}(t)=b_{\eta\xi}(t+u,-u)$, то

$$\sum_{k\in Z} B_k^{(\xi\eta)}(u)e^{ik\omega_0 t}=\sum_{k\in Z} B_k^{(\eta\xi)}(-u)e^{ik\omega_0(t+u)}\ ,$$

а звідси

$$B_k^{(\xi\eta)}(-u)=B_k^{(\xi\eta)}(u)e^{-ik\omega_0 u}\ .$$

Для нульового кореляційного компонента маємо: $B_0^{(\xi\eta)}(-u)=B_k^{(\xi\eta)}(u)e^{-ik\omega_0 u}$

Розглянемо дві оцінки взаємокореляційної функції:

$$\hat{b}_{\xi\eta}^{(1)}(t,u)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left[\xi(t+nT)-\hat{m}_\xi(t+nT)\right]\left[\eta(t+u+nT)-\hat{m}_\eta(t+u+nT)\right]\ , \tag{1}$$

$$\hat{b}_{\xi\eta}^{(2)}(t,u)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\xi(t+nT)\eta(t+u+nT)-\hat{m}_\xi(t)\hat{m}_\eta(t+u)\ , \tag{2}$$

де

$$\hat{m}_{\xi}(t)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\xi(t+nT)\ ,\ \hat{m}_{\eta}(t)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\eta(t+nT)\ . \qquad (3)$$

При цьому припускається, що усереднення виконується при довжині відрізка реалізації $\theta=MT+u_m$, де u_m – найбільше значення зсуву, для якого оцінюється взаємокореляційна функція, а M – натуральне число. Очевидно, що для формули (1) $M=2N$, де N – число періодів усереднення.

Виконуючи певні перетворення для зміщень оцінок (1) – (2) $\varepsilon\left[\hat{b}^{(i)}(t,u)\right]=E\hat{b}(t,u)-b(t,u)$ відповідно отримаємо:

$$\varepsilon\left[\hat{b}_{\xi\eta}^{(1)}(t,u)\right]=-\frac{1}{N}\left[b_{\xi\eta}(t,u)+\frac{1}{N}\sum_{n=-N+1}^{N-1}|n|b_{\xi\eta}(t,u+nT)\right], \qquad (4)$$

$$\varepsilon\left[\hat{b}_{\xi\eta}^{(2)}(t,u)\right]=-\frac{1}{N}\sum_{n=-N+1}^{N-1}\left(1-\frac{|n|}{N}\right)b_{\xi\eta}(t,u+nT). \qquad (5)$$

Якщо взаємокореляційні зв’язки процесів $\xi(t)$ і $\eta(t)$ заникають з ростом зсуву u, тобто

$$\lim_{|u|\to\infty}b_{\xi\eta}(t,u)=0, \qquad (6)$$

то $\varepsilon\left[\hat{b}_{\xi\eta}^{(1)}(t,u)\right]\to 0$ і $\varepsilon\left[\hat{b}_{\xi\eta}^{(2)}(t,u)\right]\to 0$ при $N\to 0$, тобто оцінки (1) і (2) є асимптотично незміщеними. Величини (4) і (5) у першому наближенні відрізняються тим, що зміщення оцінки (2) містить додаткові складові, які визначаються значеннями взаємокореляційної функції при зсувах $u_n=u+nT$. Складові вищого порядку малості є однаковими, однак мають протилежний знак. Якщо кореляційні зв’язки заникають до нуля на інтервалі, меншому від періода корельованості, то $\varepsilon\left[\hat{b}_{\xi\eta}^{(1)}(t,u)\right]\approx\varepsilon\left[\hat{b}_{\xi\eta}^{(2)}(t,u)\right]$.

Підкреслимо, що для оцінювання взаємокореляційної функції також може бути використана статистика:

$$\hat{b}_{\xi\eta}^{(3)}(t,u)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left[\xi(t+nT)\eta(t+u+nT)-\hat{m}_{\xi}(t+nT)\hat{m}_{\eta}(t+u+nT)\right]. \qquad (7)$$

Перепишемо її у формі

$$\hat{b}_{\xi\eta}^{(3)}(t,u)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left[\left[\overset{\circ}{\xi}(t+nT)+m_{\xi}(t)\right]\left[\overset{\circ}{\eta}(t+u+nT)+m_{\eta}(t+u)\right]-\right.$$

$$\left.-\left[\overset{\circ}{\hat{m}}_{\xi}(t+nT)+m_{\xi}(t)\right]\left[\overset{\circ}{\hat{m}}_{\eta}(t+u+nT)+m_{\eta}(t+u)\right]\right]=$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left[\begin{array}{l}\overset{\circ}{\xi}(t+nT)\overset{\circ}{\eta}(t+u+nT)+m_{\xi}(t)\overset{\circ}{\eta}(t+u+nT)+\\ +m_{\eta}(t+u)\overset{\circ}{\xi}(t+nT)-m_{\xi}(t)\overset{\circ}{\hat{m}}_{\eta}(t+u+nT)-\\ -\overset{\circ}{\hat{m}}_{\xi}(t+nT)\overset{\circ}{\hat{m}}_{\eta}(t+u+nT)-m_{\eta}(t+u)\overset{\circ}{\hat{m}}_{\xi}(t+nT)\end{array}\right].$$

Звідси легко знаходимо, що зміщення оцінки (7) співпадає зі зміщенням оцінки (2).

Якщо припустити, що математичне сподівання процесів $\xi(t)$ і $\eta(t)$ оцінюється тільки для $t\in[0,T]$, а для всіх інших t обчислюється за формулою $\hat{m}_{\xi}(t+nT)=\hat{m}_{\xi}(t)$, $\hat{m}_{\eta}(t+nT)=\hat{m}_{\eta}(t)$, $n\in\mathbb{Z}$, то для оцінки (1) отримуємо:

$$\hat{b}_{\xi\eta}^{(3)}(t,u)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left[\xi(t+nT)-\hat{m}_{\xi}(t)\right]\left[\eta(t+u+nT)-\hat{m}_{\eta}(t+u)\right]=$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\xi(t+nT)\eta(t+u+nT)-\frac{\hat{m}_{\xi}(t)}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\eta(t+u+nT)-\frac{\hat{m}_{\eta}(t)}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\xi(t+nT)+\hat{m}_{\xi}(t)\hat{m}_{\eta}(t+u)\ .$$

Приймаючи до уваги співвідношення (3), приходимо до формули, що визначає статистику $\hat{b}_{\xi\eta}^{(2)}(t,u)$. Такий самий вигляд при такому оцінюванні математичного сподівання приймає також оцінка (7). Очевидно, що в цьому випадку всі три оцінки будуть мати однакове зміщення (5).

Періодичні зміни за часом кореляційної функції приводять до таких самих змін зміщення, тому

$$\varepsilon\left[\hat{b}_{\xi\eta}(t,u)\right]=\varepsilon_0(u)+\sum_{l\in\mathbb{Z}}\left[\varepsilon_l^c(u)\cos l\omega_0 t+\varepsilon_l^s(u)\sin l\omega_0 t\right].$$

Легко бачити, що при періодичних оцінках математичного сподівання

$$\varepsilon_0(u)=-\frac{1}{N}\sum_{n=-N+1}^{N-1}\left(1-\frac{|n|}{N}\right)B_0^{(\xi\eta)}(u+nT),$$

$$\varepsilon_l^c(u)=-\frac{1}{N}\sum_{n=-N+1}^{N-1}\left(1-\frac{|n|}{N}\right)C_k^{(\xi\eta)}(u+nT),$$

$$\varepsilon_l^s(u)=-\frac{1}{N}\sum_{n=-N+1}^{N-1}\left(1-\frac{|n|}{N}\right)S_0^{(\xi\eta)}(u+nT),$$

при цьому $C_k^{(\xi\eta)}(u)=B_k^{(\xi\eta)}(u)+B_{-k}^{(\xi\eta)}(u)$, $S_k^{(\xi\eta)}(u)=i\left[B_k^{(\xi\eta)}(u)-B_{-k}^{(\xi\eta)}(u)\right]$.

З умови (11) випливають граничні рівності

$$\lim_{|u|\to\infty}B_0^{(\xi\eta)}(u)=0,\ \lim_{|u|\to\infty}C_k^{(\xi\eta)}(u)=0,\ \lim_{|u|\to\infty}S_k^{(\xi\eta)}(u)=0.$$

При їх виконанні $\varepsilon_0(u)\to 0$, $\varepsilon_l^{c,s}(u)\to 0$, якщо $N\to\infty$. Це значить, що оцінки взаємокореляційної функції (1) – (2) і (7) є слушними.

Звідси випливає висновок: якщо процеси описуються ПКВП, то середня за часом похибка оцінювання їх взаємокореляційної функції не може бути визначена, виходячи тільки з характеристик їх стаціонарних наближень. Отримані співвідношення для статистичних характеристик оцінок взаємокореляційних функцій можуть бути конкретизовані для певного типу їх апроксимацій. Також можуть бути отримані залежності величини похибок оцінювання від довжини відрізка реалізації, а також параметрів, які описують кореляційну структуру циклостаціонарних процесів. Ці результати є основою для підготовки рекомендацій для вибору таких довжин реалізацій, які забезпечать потрібну якість обробки.

Список використаних джерел

1. Яворський І.М. Методи і нові технічні засоби вібродіагностики підшипникових вузлів та зубчатих передач / Яворський І.М., Драбич П.П., Драбич О.П. та ін. // Проблеми ресурсу і безпеки експлуатації конструкцій, споруд та машин. – Київ: Інститут електрозварювання ім. Є. О. Патона НАН України. – 2006. – С. 52 – 56.
2. Яворський І.М. Розробка інформаційно-вимірювальної системи для вібродіагностики підшипників великих стаціонарних агрегатів / Яворський І.М., Драбич П.П., Ісаєв І.Ю. та ін. // Проблеми ресурсу і безпеки експлуатації конструкцій, споруд та машин. – Київ: Інститут електрозварювання ім. Є.О. Патона НАН України. – 2009. – С. 113 – 122.
3. Яворський І.М. Методи і засоби ранньої діагностики обертових механізмів / Яворський І.М., Драбич П.П., Кравець І.Б. та ін. // Праці міжнар. наук.- техн. конф. “Ресурс, надійність та ефективність використання енергетичного обладнання”. – Харків, 2010. – С. 31 – 38.
4. Яворський І.М. Взаємозв’язані періодично корельовані випадкові процеси / Яворський І.М, Кравець І.Б., Юзефович Р.М. // Відбір і обробка інформації. – 2011. – № 34 (110). – С. 69 – 77.

УДК 51:303.115

ІМІТАЦІЙНА МОДЕЛЬ ДИСКРЕТНОГО ВИРОБНИЧОГО ПРОЦЕСУ

Яворський М.В.[1], Гончар Л.І.[2], Гончар Т.В.[3]

Тернопільський національний економічний університет

[1] магістр; [2] к.е.н., доцент; [3] інженер

На підприємствах серійного машинобудування, які мають дискретний характер виробництва, процес руху напівфабрикатів складається із заготівельної, механічної та складальної стадій. Якщо в заготівельних і складальних підрозділах заводу виробничий процес, в принципі, регламентований, а отже, і легко керований, то механічне виробництво має, як правило, стохастичну природу і не підлягає детермінованому описанню [1].

Фактично механічні підрозділи підприємства являють собою деякий кібернетичний "чорний ящик", на вхід якого в певному порядку подаються заготовки, а на виході утворюється деякий вектор, компоненти якого — час випуску і кількість стандартних деталей у виготовленій партії — є випадко-вими величинами. З метою підтримання ритмічності складального цеху на початок планового періоду