

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ  
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукопису

**ЦЕБРІЙ Олексій Романович**

УДК 531.01; 517.958

**Малі коливання фізичного маятника з  
порожниною частково заповненою  
рідиною**

01.02.01 - теоретична механіка

**Дисертація**

на здобуття вченого ступеня  
кандидата фізико-математичних наук

Науковий керівник

**Барняк Михайло Якимович**

доктор фізико-математичних наук,  
професор

Київ 2011

## ЗМІСТ

ВСТУП	4
РОЗДІЛ 1. ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ І ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ	13
1.1. Огляд літератури . . . . .	13
1.2. Рівняння руху фізичного маятника з рідиною . . . . .	18
1.3. Задача про власні коливання маятника з порожниною, яка має форму тіла обертання відносно вертикальної осі . . . . .	29
1.4. Дослідження власних коливань маятника з циліндричною порожниною . . . . .	31
1.5. Числова реалізація . . . . .	33
1.6. Висновки до розділу . . . . .	35
РОЗДІЛ 2. МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ ВЛАСНИХ КОЛИВАНЬ	36
2.1. Наближений метод визначення власних коливань маятника з порожниною, що має форму тіла обертання . . . . .	36
2.2. Проекційний метод розв'язування задачі про коливання маятника зі сферичною порожниною . . . . .	39
2.3. Числова реалізація . . . . .	41
2.4. Висновки до розділу . . . . .	55
РОЗДІЛ 3. ВАРІАЦІЙНИЙ МЕТОД	56
3.1. Постановка задачі в нерухомій системі координат . . . . .	56
3.2. Побудова функціоналу для задачі про власні коливання маятника з рідиною, що частково заповнює порожнину . . . . .	64

	3
3.3. Метод Рітца мінімізації функціоналу . . . . .	71
3.4. Побудова розв'язків задачі Коші . . . . .	73
3.5. Числова реалізація . . . . .	76
3.6. Висновки до розділу . . . . .	112
<b>РОЗДІЛ 4. МАЯТНИК З ДВОШАРОВОЮ РІДИНОЮ</b>	<b>115</b>
4.1. Постановка задачі і вивід рівнянь . . . . .	115
4.2. Варіаційний метод для двошарової рідини . . . . .	125
4.3. Числова реалізація . . . . .	129
4.4. Висновки до розділу . . . . .	132
<b>ВИСНОВКИ</b>	<b>133</b>
<b>СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ</b>	<b>135</b>

## ВСТУП

Дисертаційна робота присвячена питанням ефективності застосування проекційних і варіаційних методів до розв'язування задач, що виникають при дослідженні динаміки твердого тіла з порожниною частково заповненою рідиною. Однією серед таких задач є задача про малі коливання фізичного маятника з порожниною, частково заповненою рідиною. У випадку циліндричної порожнини, для побудови розв'язків цієї задачі використовуються розв'язки допоміжної спектральної задачі про коливання рідини в нерухомій посудині та розв'язки задачі визначення потенціалів Стокса–Жуковського. Така методика дослідження, запропонована в роботі [39], ґрунтується на тому факті, що для кругової циліндричної порожнини відомі точні розв'язки цих допоміжних крайових задач.

Зауважимо, що розв'язування більш складних задач динаміки твердого тіла з рідиною також ґрунтується на використанні розв'язків цих допоміжних задач. На перший погляд здається, що методом роботи [39] можна побудувати розв'язок і у випадку порожнини іншої геометричної форми. Та враховуючи, що розв'язки допоміжних задач у випадку порожнин більш складної геометричної форми будуються наближеними методами, питання про допустимість застосування класичного підходу залишається відкритим.

В даній роботі це питання досліджувалося на прикладі задачі про власні коливання маятника з рідиною, що частково заповнює порожнину сферичної форми. Виявилось, що традиційний метод не завжди дає задовільний результат. Тому було проведено дослідження в напрямку побудови інших методів дослідження динаміки такої механічної системи. В результаті запропоновано принципово інший, варіаційний метод розв'язування задачі

про власні коливання маятника з порожниною, частково заповненою рідиною. На його основі побудовано розв'язок задачі про малі коливання (задача Коші) маятника з рідиною, а також розв'язок задачі про власні коливання маятника з порожниною, частково заповненою двошаровою рідиною.

### **Актуальність теми.**

Задачі динаміки твердого тіла з рідиною привертала увагу вчених ще в ХІХ столітті. Коливання рідини в рухомому тілі може спричинити дестабілізаційний вплив на динаміку його руху. Тому дослідження таких задач є важливим з точки зору інженерного моделювання.

Практичним прикладом таких задач є резонансні коливання рідкого палива в рухомих об'єктах (цистернах, суднах, літаках тощо). Також гострої актуальності задачі коливання рідини в порожнині рухомого тіла набувають при створенні об'єктів авіаційної та ракетної техніки.

Яскравим прикладом постає задача про коливання тіла з рідиною в порожнині в сучасній будівельній інженерії. При будівництві хмарочосів, веж та інших висотних будівель виникає потреба у стабілізаційному елементі для амортизації резонансних коливань, спричинених потоком поперечного вітру тощо. Таким елементом виступає рідина, власні коливання якої, співпадають з коливанням будівлі. Світова назва такого підходу Tuned Liquid Dampers (TLD) або Active Liquid Dampers. Розв'язування схожих задач потребують і будівлі в сейсмічно активних районах. За рахунок коливань рідини вдається демпферувати коливання, спричинені поштовхами землетрусу.

Цілий ряд таких об'єктів можна моделювати за допомогою фізичного маятника з порожниною складної геометричної форми, частково заповненої рідиною.

Крім технічного, такі задачі одночасно мають і важливе

теоретичне значення, оскільки зумовлюють розвиток ряду цікавих математичних проблем, які досліджувалися, починаючи з робіт О.Коші, М.В.Остроградського, С.Л.Соболева, С.Г.Крейна, М.М.Мойсеева, С.Г.Наріманова, Б.І.Рабіновича, Л.Н.Стретенського, Д.Е.Оцохимського, І.О.Луковського, І.Б.Богоряда та інших.

При дослідженні динаміки твердого тіла з порожнинами нециліндричної форми традиційним способом, використовують розв'язки задачі про власні коливання рідини в нерухомій порожнині та задачі визначення потенціалів Стокса–Жуковського.

Тому **актуальним** є потреба оцінити точність результатів, що можуть бути отримані традиційним методом у випадку нециліндричної порожнини, коли розв'язки згаданих вище базових задач побудовані наближеним методом, а також перевірити доцільність застосування такого методу, а також розробити альтернативний метод для розв'язування задачі про малі коливання маятника з порожниною, частково заповненою рідиною, який би дав змогу покращити точність розв'язків.

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.** Робота над дисертацією розпочата і виконана у відповідності до планів наукових досліджень відділу динаміки та стійкості багатовимірних систем інституту математики НАН України згідно із загальним планом науково-дослідних робіт в рамках держбюджетної теми №13 "Розробка методів дослідження неklasичних задач динаміки та стійкості складних механічних систем"(номер держ. реєстрації 0106U000282), а також в межах науково-дослідної теми №23 "Математичні методи дослідження динаміки та стійкості об'єктів механіки, гідромеханіки та гемодинаміки"(номер держ. реєстрації 0105U001108) за програмою "Математичне моделювання фізичних

і механічних процесів у сильно неоднорідних середовищах".

### **Мета та задачі дослідження.**

1. Побудова варіаційного методу розв'язування задачі про власні коливання маятника з порожниною нециліндричної форми.

2. Порівняння точності одержаних наближених розв'язків задачі різними методами.

3. Побудова розв'язків задачі про малі коливання маятника (задача Коші).

4. Розробка варіаційного методу розв'язування задачі про власні коливання маятника з порожниною, частково заповненою двошаровою рідиною.

Об'єктом дослідження є малі коливання маятника навколо горизонтальної осі, з порожниною складної геометричної форми, частково заповненої ідеальною рідиною або ідеальною двошаровою рідиною.

Предметом дослідження даної дисертаційної роботи є розробка наближених методів розв'язування задач динаміки маятника з порожниною нециліндричної форми, частково заповненої одношаровою або двошаровою ідеальною рідиною. Аналіз точності наближених розв'язків ґрунтується на порівнянні числових результатів, одержаних на основі використання розв'язків допоміжних задач та безпосереднього використання розроблених проєкційного і варіаційного методів.

Для досягнення мети постають наступні завдання:

1. Провести числову реалізацію класичного методу розв'язування задачі про власні коливання фізичного маятника з порожниною циліндричної і сферичної форми, частково заповненою ідеальною рідиною.

2. Побудувати функціонал, на мінімізації якого, ґрунтується варіаційний метод розв'язування цієї задачі для порожнини складної геометричної

форми. Дослідити взаємозв'язок спектральної задачі та її варіаційного формулювання.

3. Порівняти величини власних значень, які отримані класичним та варіаційним методами розв'язування задачі про коливання маятника із циліндричною порожниною.

4. Реалізувати традиційний метод для розв'язування задачі про коливання маятника з порожниною сферичної форми. Порівняти результати, отримані традиційним та варіаційним методами.

5. Сформулювати та реалізувати проєкційний метод розв'язку задачі про власні коливання фізичного маятника з рідиною.

6. На основі розв'язків задачі про власні коливання побудувати розв'язки задачі про малі коливання маятника з рідиною.

7. Дослідити вплив рідини на стійкість та рух системи тіло–рідина. Порівняти його із відповідним рухом маятника, коли рідина "заморожена".

8. Побудувати варіаційний метод розв'язування задачі про власні коливання маятника з порожниною, частково заповненою двошаровою рідиною.

### **Наукова новизна одержаних результатів.**

1. Розроблено варіаційний метод розв'язування задачі про власні коливання фізичного маятника з порожниною складної геометричної форми, частково заповненою рідиною. На основі принципу Гамільтона–Остроградського виведено рівняння руху маятника з рідиною в нерухомій системі координат.

2. Досліджено малі коливання маятника шляхом подання розв'язків задачі Коші у вигляді узагальненого ряду Фур'є по власних функціях відповідної спектральної задачі.



3. Проведено порівняння числових результатів, одержаних за допомогою традиційного, проєкційного та варіаційного методів розв'язування задачі про власні коливання маятника зі сферичною порожниною.

4. Узагальнено варіаційний метод на випадок задачі про власні коливання маятника з двошаровою рідиною в порожнині.

**Практичне значення одержаних результатів.** Результати дисертаційної роботи можуть бути використані для побудови розв'язків задач, що виникають при дослідженні та проектуванні рухомих об'єктів з рідиною в порожнині складної геометричної форми при наявності вільної поверхні.

**Особистий внесок здобувача.** Особистий внесок автора полягає в обговоренні постановок задач та основних доведень, виконанні розрахунків та формулюванні висновків. Професору М.Я. Барняку належать ідея та постановка задач, рекомендації щодо методів їх розв'язування, поради щодо числової реалізації.

Роботи [5], [6], [52] і [7] написані в співавторстві з професором М.Я. Барняком. Публікація [51] написана здобувачем як продовження і розширення ідеї, започаткованої професором М.Я. Барняком.

**Апробація результатів дисертації.** Результати дисертації доповідались і обговорювалися по мірі їх отримання на семінарах відділу динаміки та стійкості багатовимірних систем інституту математики НАН України, на міжнародній науковій конференції [53], а також на наукових конференціях [54, 55, 56] В цілому дисертація обговорювалася на семінарі інституту математики НАН України "Математичні проблеми в механіці та обчислювальна математика".

**Публікації.** Основні результати дисертації опубліковано в 9 роботах.

Серед них 5 статей [5, 6, 7], [51, 52] в наукових періодичних фахових виданнях та 4 тези доповідей [53]-[56].

**Структура та об'єм роботи.** Дисертація складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків та списку використаних джерел.

У **вступі** окреслено основні проблеми дослідження дисертації. Наведено головні досягнення та практичну цінність. Обґрунтовано актуальність теми, сформульовано мету та завдання дослідження, відображено наукову новизну. Наведено інформацію про зв'язок з науковими програмами, планами, темами, а також історію апробації роботи та передуючі публікації. Розглянуто структуру дисертації.

В **першому** розділі дисертації міститься огляд літератури, а також викладено класичний метод, запропонованим М.М.Мойсеєвим, який використовується для розв'язування задач динаміки руху твердого тіла з рідиною в порожнині. Для цього, в другому параграфі виведені рівняння руху маятника згідно [39], виходячи з закону збереження енергії в рухомій системі координат. Впроваджено безрозмірні координати, поставлено задачу Коші, та записано задачу про власні коливання маятника з порожниною, що має форму тіла обертання. В третьому параграфі наведено реалізацію методу для задачі про власні коливання системи тіло–рідина у випадку порожнини циліндричної форми. Для такої порожнини відомі точні розв'язки допоміжних задач — задачі про власні коливання маятника у нерухомій порожнині, а також задачі знаходження потенціалу Стокса–Жуковського. В кінці розділу наведено числові результати реалізації класичного методу. Власні значення наведено в залежності від висоти наповнення та віддалі від точки підвісу до центра мас тіла.

В **другому** розділі дисертації досліджується одна з найпростіших

задач динаміки тіла з рідиною — задача на власні коливання маятника з рідиною, що частково заповнює порожнину сферичної форми. Для такої порожнини невідомі точні розв'язки допоміжних задач. В першому параграфі реалізовано розширення класичного методу на випадок порожнини сферичної форми. В другому параграфі для порівняння точності і грубої оцінки допустимості застосування класичного підходу, запропоновано проєкційний метод. В третьому параграфі отримано порівняльні характеристики про точність обох методів, та ефективність застосування класичного методу для порожнин нециліндричної форми. Обґрунтовано потребу в альтернативному методі розв'язування задач динаміки твердого тіла з рідиною у випадку нециліндричної порожнини, а також необхідність пошуку методу, який би дав змогу оцінити і покращити, при потребі, точність розв'язків.

В **третьому** розділі роботи представлено варіаційний метод на прикладі розв'язування задачі про власні коливання маятника з порожниною, заповненою рідиною. Для цього в першому параграфі, виведене рівняння руху маятника в нерухомій системі координат, виходячи з принципу найменшої дії в формі Гамільтона–Остроградського. В цьому випадку потенціал Стокса–Жуковського природно не входить в рівняння. Наведено заміну шуканої функції, яка ототожнює рівняння в рухомій та нерухомій системах координат. Поставлено задачу Коші. В другому параграфі викладено варіаційне формулювання задачі. Для побудови відповідного функціоналу задачу записано в операторному вигляді. Доведено теорему про мінімізацію функціоналу для розв'язування задачі про власні коливання фізичного маятника з порожниною, частково заповненою рідиною. В третьому параграфі запропоновано метод Рітца для знаходження мінімуму

побудованого функціоналу. В четвертому параграфі викладено метод побудови розв'язку задачі Коші для маятника з порожниною, частково заповненою рідиною, у вигляді ряду Фур'є по розв'язках задачі про власні коливання цього маятника. В п'ятому параграфі наведено числові результати, отримані варіаційним методом. Для задачі про власні коливання маятника з рідиною отримані результати для порожнин як циліндричної так і сферичної форми. Також зображено розв'язок задачі Коші для випадку вільних коливань маятника з рідиною, що частково заповнює порожнину сферичної форми.

Проведено порівняння точності одержаних результатів варіаційним методом, класичним методом, запропонованим Мойсеєвим та проекційним методом.

В **четвертому** розділі розглядається задача про власні коливання маятника, з порожниною частково заповненою двошаровою рідиною. Рівняння виводяться на основі закону збереження енергії. Застосовується варіаційний підхід. Наведені числові результати значення власних частот на поверхні розділу та на вільній поверхні.

**Висновки** включають в себе підсумки запропонованих методів та результатів, отриманих в роботі.

Список використаних джерел нараховує понад 60 найменувань робіт, що цитуються в тексті дисертації.

Маючи нагоду, висловлюю щире подяку моєму науковому керівнику професору М.Я. Барняку та завідувачу відділу динаміки та стійкості багатовимірних систем академіку НАН України І.О. Луковському за постійну турботу і допомогу в роботі над дисертацією.

## РОЗДІЛ 1

### ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ І ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ

#### 1.1. Огляд літератури

Задачі про рух твердого тіла з порожнинами частково або повністю заповненими рідиною набули прикладного значення у зв'язку з проектуванням та дослідженням динаміки об'єктів авіаційної та космічної техніки.

Найпростіші задачі, зв'язані з рухом тіла з порожнинами, повністю заповненими ідеальною рідиною, розглядалися ще в 19-му столітті в роботах Коші, Остроградського, Стокса, Гельмгольца та інших вчених. Теорія руху твердого тіла з порожниною, повністю заповненою ідеальною нестисливою рідиною, що здійснює потенціальний рух, була детально викладена у роботах Н.Е.Жуковського [12]. При цьому рух тіла з рідиною виявляється еквівалентним руху твердого тіла, тензор інерції якого складається з тензора інерції самого тіла і тензора приєднаних мас для даної порожнини. Цей тензор приєднаних мас визначається на основі розв'язків крайових задач, що залежать тільки від форми порожнини. Ці розв'язки в літературі називаються потенціалами Стокса–Жуковського.

Важливого прикладного значення мають задачі динаміки твердого тіла з порожниною, частково заповненою ідеальною рідиною. Цій тематиці присвячена велика кількість праць, опублікованих в другій половині 20-го століття. Крім питання стійкості тут постає питання вивчення власних коливань тіла з рідиною. Ці задачі розглядалися в основному в лінійному наближенні.

Загальна задача про коливання тіла з порожниною, частково заповненою

ідеальною рідиною, досліджувалась в роботах М.М.Мойсеєва [36], Д.Е.Охоцимського [43], Г.С.Нариманова [41], [42], С.Г.Крейна і М.М.Мойсеєва [37], [40], Б.І.Рабиновича [46], І.Б.Богоряда [8]. В результаті таких праць було встановлено, що для задачі про малі коливання тіла з порожниною, частково заповненою ідеальною рідиною, потрібно, крім визначення потенціалів Стокса–Жуковського, розв’язувати ще і допоміжну задачу про власні коливання в нерухомій порожнині. Точні розв’язки цієї задачі відомі тільки для небагатьох, зокрема для циліндричних, порожнин. Для порожнин складнішої геометричної форми застосовуються числові та варіаційні методи, які викладені в працях А.А.Петрова [45], М.М.Мойсеєва, І.Б.Богоряда, І.О.Луковського [25], Б.І.Рабиновича, Л.В.Докучаєва та інших.

У випадку, коли коливання рідини не можна вважати малими, задача ускладнюється і стає нелінійною. Таким задачам присвячено ряд праць М.М.Мойсеєва, Г.С.Нариманова, Л.В.Докучаєва, І.О.Луковського. Тут найбільша увага приділялась аналітичним і числовим методам, за допомогою яких вдається отримати повну інформацію про всі гідродинамічні коефіцієнти рівнянь руху збудженої системи, включаючи не тільки частоти, але і приєднані маси рідини. Застосування варіаційних методів для таких цілей викладено в роботі І.О.Луковського [28].

У випадку слабкого гравітаційного поля на динаміку твердого тіла з рідиною, крім масових сил можуть впливати також інші сили, а саме сили в’язкості та сили поверхневого натягу.

Такі задачі вивчалися та досліджувалися в роботах С.Г.Крейна [21], Ф.Л.Черноуська [59], А.Д.Мишкіса, М.Д.Копачевського, А.Д.Тюпцова, Л.А. Слобожаніна [35].

Дослідженням коливань фізичного маятника з в’язкою рідиною в

порожнині займався П.С.Краснощеков [20], Р.І.Цебрій [58], [57].

У зв'язку з підвищенням швидкодії і об'єму пам'яті комп'ютерної техніки, з'явилась можливість більш ефективно застосовувати різні варіанти проекційно–різницевих схем, метод скінчених елементів, а також проекційні методи. Для розв'язування задач динаміки тіла з рідиною більш вагомими є не деталі руху рідини, а інтегральні характеристики її впливу на рух тіла. В такій постановці більш ефективними є проекційні методи, які дозволяють побудувати наближені розв'язки крайових задач в аналітичному вигляді.

В кінці минулого століття опубліковані праці М.Я.Барняка [2], [3], І.О.Луковського, М.Я.Барняка, А.Н.Комаренко [27], присвячені різним питанням побудови проекційних методів розв'язування крайових задач для рівнянь руху обмеженого об'єму рідини в порожнині твердого тіла. В цих роботах побудовані різні системи координатних функцій, які задовольняють рівняння Лапласа і Гельмгольца. За допомогою таких функцій реалізованих для проекційного методу вдалось скласти ефективні числові алгоритми дослідження власних коливань маятника з рідиною.

Ряд робіт Ю.М.Кононова [15, 16, 17] присвячено дослідженню динаміки фізичного маятника з порожниною, частково заповненою ідеальною рідиною, зокрема, розглянута задача у випадку двохшарової рідини в циліндричній порожнині, які розділені пружними мембранами або пластинками.

Для побудови розв'язків цих задач в роботах Ю.М.Кононова використовувалися розв'язки допоміжних задач визначення потенціалу Стокса–Жуковського та задачі про власні коливання рідини в нерухомій посудині. Такий підхід виявився ефективним тільки для задачі з циліндричними порожнинами, тобто у випадках, коли відомі точні аналітичні розв'язки цих допоміжних задач. У випадку областей, які мають складнішу

геометричну форму допоміжні задачі можуть бути розв'язані тільки наближено, що вносить додаткові похибки в точність наближеного розв'язку задачі.

Операторні постановки задач про коливання маятника з порожнинами, частково заповненими рідинами містяться в роботах Алі Вадіаа [11], Ю.С.Пашкова [44], М.А.Солдатов [49], в яких досліджено властивості спектра відповідних спектральних задач.

В роботах автора і М.Я.Барняка [5, 6, 51, 52, 7] розроблено варіаційний метод дослідження малих коливань фізичного маятника з порожниною довільної геометричної форми, яка частково заповнена ідеальною рідиною.

Особлива практична потреба застосування задачі про коливання рідини, що частково заповнює порожнину, зустрічається у сучасній будівельній інженерії. Хмарочоси та інші висотні будівлі можуть зазнати катастрофічних руйнувань в силу поперечних коливань зумовлених поривами вітру. В таких спорудах інсталюється контейнер з рідиною. Форма контейнеру і рівень наповнення рідиною підбираються так, щоб власні коливання рідини співпадали з коливанням будівлі, і тим самим амортизували резонансні ефекти. Постає задача на визначення власних частот маятника, з об'ємом рідини з вільною поверхнею. Форма об'єму рідини часто нециліндричної, форми.

Серед публікацій зустрічаємо роботи McNamara.R.J [65], Kareem.A., Sun.W.J. [66], Kareem.A. [67], Kareem.A., Kline.S. [68], A.Y.J. Won, J.A. Pires, M.A. Haroun [71], Bharadwaj Nanda [69].

Впровадження TLD-елементів зустрічаємо в наступних світових спорудах: Берлінська телевізійна вежа — демпфер розташований в шпиль. Bloomberg Tower в Нью-Йорку, Бурдж аль-Араб в Дубаї, Citigroup центр в



Нью-Йорку — один з перших хмарочосів з вмонтованим демпфером, Comcast Center у Філадельфії, штат Пенсільванія — містить найбільший TLCSD в світі (1300 тонн), Дублін Spire у Дубліні — це вузька тонка структура, розроблена з демпфером для забезпечення аеродинамічної стійкості під час штормового вітру, John Hancock Tower в Бостоні — демпфер був доданий до нього після того він був побудований, Лондонський міст Міленіум, Park Tower в Чикаго — перший будинок у США, в якому демпфер вмонтований з самого початку будівництва, Шанхайський всесвітній фінансовий центр у Шанхаї.

Не менш актуальною потребою є впровадженням TLD-об'єктів у будівлях, що знаходяться в зонах сейсмічної активності [70].

## 1.2. Рівняння руху фізичного маятника з рідиною

Однією із найпростіших задач динаміки твердого тіла з рідиною є задача про коливання фізичного маятника відносно нерухомої горизонтальної осі. В маятнику є порожнина, частково заповнена рідиною. Наявність вільної поверхні в рідині відносить таку механічну систему до систем з нескінченним числом ступеней вільності.

Одним із перших розглянув ці задачі М.М. Мойсеев в роботі [36], а потім в роботі [39].

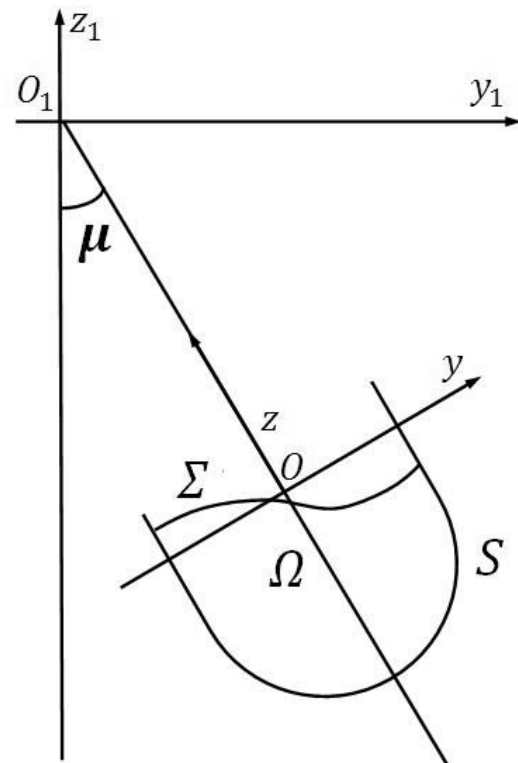
Приведемо, викладений в роботі [39], вивід рівнянь руху маятника.

Розглядаються плоскі коливання маятника відносно горизонтальної нерухомої осі, яку позначено  $Ox_1$ . Вісь  $Oz$  рухомої, зв'язаної з тілом, системи координат  $Oxyz$  суміщена з віссю симетрії тіла, а її початок вибраний на "замороженій" вільній поверхні рідини.

В маятнику є порожнина, яка частково заповнена рідиною.

Збурений стан динамічної системи тіло-рідина в момент часу  $t$  характеризується наступними величинами:

1. Кутом  $\mu(t)$  відхилення маятника від вертикального стану.



Мал. 1.1: Відхилене від стану спокою положення маятника

2. Відхиленням  $N(x, y, t)$  вільної поверхні в напрямку осі  $Oz$  відносно її "замороженого" рівноважного стану.
3. Полем швидкостей  $\vec{v}(x, y, z, t)$  частинок рідини об'єму  $\Omega$ .

Рідина вважається ідеальною і нестисливою, а її рух потенціальним, тобто, вектор швидкостей частинок рідини подається у вигляді

$$\vec{v}(x, y, z, t) = \nabla\varphi(x, y, z, t),$$

де  $\varphi(x, y, z, t)$  — потенціал швидкостей частинок рідини. Із умови нестисливості  $div\vec{v} = 0$  випливає, що

$$\Delta\varphi = 0. \tag{1.1}$$

Кінетична енергія системи тіло–рідина  $T = T_0 + T_1$ , де  $T_0$  - кінетична енергія тіла,  $T_1$ - кінетична енергія рідини.

Для тіла:

$$T_0 = \frac{J_0}{2} \left( \frac{d\mu}{dt} \right)^2,$$

де  $J_0$  - момент інерції тіла відносно нерухомої осі,  $t$ -час.

Для рідини вираз кінетичної енергії

$$T_1 = \frac{\rho}{2} \int_{\Omega} \left( \nabla\vec{\varphi} + \vec{v}^* \right)^2 d\Omega,$$

де  $\Omega$  — об'єм рідини в стані рівноваги,  $\vec{v}^*$  — вектор швидкостей рідини в припущенні, що вільна поверхня замінена твердою кришкою

$$\vec{v}^* = \frac{d\mu}{dt} \nabla\vec{\varphi}^*.$$

Тут  $\varphi^*$  — потенціал Стокса–Жуковського, який залежить тільки від форми порожнини і який визначається як розв'язок крайової задачі

$$\Delta\varphi^* = 0 \text{ в } \Omega, \quad \frac{\partial\varphi^*}{\partial n} = (\vec{r} \times \vec{n}, \vec{i}) \text{ на } S + \Sigma, \quad (1.2)$$

де  $\vec{r}$  — радіус-вектор точки.

Величина кута  $\mu$  відхилення маятника, та величина амплітуди руху частинок рідини вважаються малими в тому сенсі, що їхніми квадратами, добутками та вищими степенями можна знехтувати порівняно з першими їх степенями. Оскільки коливання вважаємо малими, всі характеристики руху системи тіло–рідина можна знести на незбурені об'єми рідин та поверхні, що їх обмежують. Таким чином, кінетична енергія механічної системи тіло–рідина з точністю до величин вищого порядку малості має такий вигляд:

$$T = T_0 + T_1 = \frac{J_0}{2} \left( \frac{d\mu}{dt} \right)^2 + \frac{\rho}{2} \int_{\Omega} (\nabla\varphi)^2 d\Omega + \frac{d\mu}{dt} \rho \int_{\Omega} \nabla\varphi \cdot \nabla\varphi^* d\Omega + \frac{\rho}{2} \left( \frac{d\mu}{dt} \right)^2 \int_{\Omega} (\nabla\varphi^*)^2 d\Omega.$$

Оскільки величина  $\int_{\Omega} (\nabla\varphi^*)^2 d\Omega$  залежить тільки від форми порожнини, тому позначено  $J = J_0 + m$ , який називається моментом інерції еквівалентного твердого тіла. Тут  $m$  приєднаний момент інерції рідини  $m = \rho \int_{\Omega} (\nabla\varphi^*)^2 d\Omega$

Потенціальну енергію також розбито на дві складові

$$\Pi = \Pi_0 + \Pi_1,$$

де  $\Pi_0$  — потенціальна енергія твердого тіла,  $\Pi_1$  — рідини.

Для твердого тіла отримано

$$\Pi_0 = M_0 g \cdot h$$

Тут  $M_0$  — маса твердого тіла,  $g$  — прискорення сил земного тяжіння. Якщо  $l_0$  — віддаль від центра ваги твердого тіла до точки підвісу, то  $h = l_0 - l_0 \cos\mu$ ,

і з точністю до величин другого порядку

$$\Pi_0 = M_0 g l_0 \frac{\mu^2}{2}.$$

Обчислюється потенціальна енергія рідини

$$\Pi_1 = \rho g \int_{\Omega} z_1 d\Omega,$$

тут  $\Omega$  — об'єм рідини, який займає рідина в збуреному стані, який розбито на дві складові  $\Omega = \Omega_0 + \Omega_1$ , де  $\Omega_0$  — об'єм рідини в положенні рівноваги, а  $\Omega_1$  — об'єм, що займає рідина між вільною поверхнею в збуреному стані і площиною, в якій знаходилась вільна поверхня в стані спокою

$$\Pi_1 = \rho g \int_{\Omega_0} z_1 d\Omega + \rho g \int_{\Omega_1} z_1 d\Omega.$$

Перший доданок — то є енергія рідини в припущенні, що вільна поверхня замінена твердою кришкою і можна записати

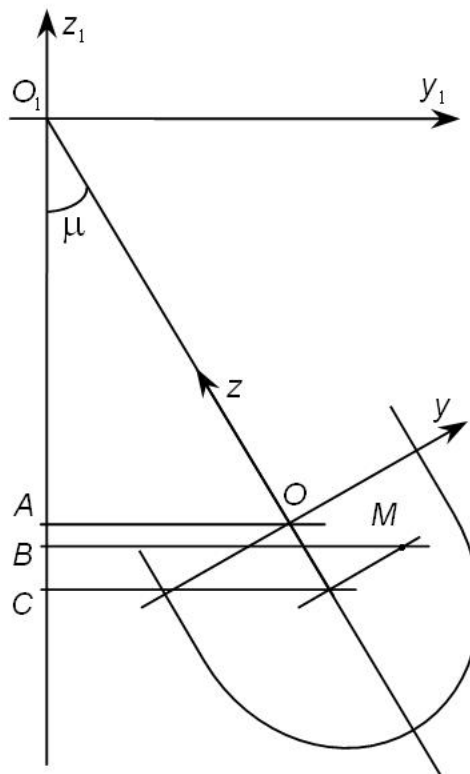
$$\rho g \int_{\Omega_0} z_1 d\Omega = \rho g \Omega_0 z_1^*,$$

де  $z_1^*$  — аппліката центра ваги рідини в стані рівноваги  $z_1^* = -l^* \cos \mu$ .

І з точністю до величин другого порядку малості,

$$z_1^* = l^* \frac{\mu^2}{2} + l^* = l^* \frac{\mu^2}{2} + const,$$

тут  $l^*$  — відстань від точки підвісу до центра ваги рідини  $\Omega_0$ .



Мал. 1.2: Рухома і нерухома системи координат

З малюнка 1.2 видно, що для довільної точки  $M$  рідини

$$\begin{aligned} z_1 &= -O_1B = -O_1A - AC + CB = \\ &= -l \cos \mu + z \cos \mu + y \sin \mu = \\ &= (z - l) \cos \mu - y \sin \mu, \end{aligned}$$

де  $l$  — відстань від вільної поверхні до точки підвісу.

Нехай  $N$  — збурення вільної поверхні. Тоді можна записати

$$\rho g \int_{\Omega_1} z_1 d\Omega = \rho g \int_{\Sigma} ds \int_0^N (z - l) \cos \mu - y \sin \mu dz).$$

Оскільки для нестисливої рідини

$$\int_{\Sigma} ds \int_0^N l \cos \mu dz = l \cos \mu \int_{\Sigma} N ds = 0,$$

то, отже,

$$\rho g \int_{\Omega_1} z_1 d\Omega = \frac{\rho g}{2} \int_{\Sigma} N^2 \cos \mu ds + \rho g \int_{\Sigma} y N \sin \mu ds.$$

З точністю до величин другого порядку, отримується вираз для потенціальної енергії системи тіло–рідина

$$\Pi = \frac{k^2 \mu^2}{2} + \frac{\rho g}{2} \int_{\Sigma} N^2 ds + \mu \rho g \int_{\Sigma} y N ds,$$

тут  $k^2 = l_0 M_0 g + l^* \rho_1 g \Omega_0$ . Тепер можна записати лагранжیان

$$L = \int_0^{t_1} (T - \Pi) dt,$$

де  $t_1$  — довільний момент часу.

Із умови  $\delta L = 0$  виводиться рівняння руху

$$\begin{aligned} \delta L = \int_0^{t_1} \left( J_0 \frac{d\mu}{dt} \delta \frac{d\mu}{dt} + \delta \frac{d\mu}{dt} \rho \int_{\Omega} \nabla \varphi^* \nabla \varphi d\Omega + \frac{d\mu}{dt} \rho \int_{\Omega} \nabla \varphi^* \delta \nabla \varphi d\Omega + \right. \\ \left. + \rho \int_{\Omega} (\nabla \varphi) \delta \nabla \varphi d\Omega - k^2 \mu \delta \mu - \rho g \delta \mu \int_{\Sigma} y N dS - \right. \\ \left. - \rho g \mu \int_{\Sigma} y \delta N dS - \rho g \int_{\Sigma} N \delta N dS \delta \mu \right) dt \end{aligned}$$

Застосовуючи формулу Гріна та враховуючи кінематичні умови

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \text{ на } S, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial N}{\partial t} \text{ на } \Sigma, \quad (1.3)$$

отримано перетворення для наступних виразів:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla \varphi^* \nabla \varphi d\Omega = \int_{\Sigma} \varphi^* \frac{\partial N}{\partial t} d\Omega, \quad \int_{\Omega} \nabla \varphi^* \delta \nabla \varphi d\Omega = \int_{\Sigma} \varphi^* \delta \frac{\partial N}{\partial t} d\Omega, \\ \int_{\Omega} \nabla \varphi \delta \nabla \varphi d\Omega = \int_{\Sigma} \varphi \delta \frac{\partial N}{\partial t} d\Omega. \end{aligned}$$

Інтегруючи по частинах:

$$\begin{aligned} \delta L = \int_0^{t_1} \left( J_0 \frac{d}{dt} \left( \frac{d\mu}{dt} \delta \mu \right) - J_0 \delta \mu \frac{d^2 \mu}{dt^2} + \rho \int_{\Sigma} \varphi^* \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial N}{\partial t} \delta \mu \right) dS - \right. \\ \left. - \rho \delta \mu \int_{\Sigma} \varphi^* \frac{\partial^2 N}{\partial t^2} dS + \rho \int_{\Sigma} \varphi^* \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{d\mu}{dt} \delta N \right) dS - \rho \int_{\Sigma} \varphi^* \frac{d^2 \mu}{dt^2} \delta N dS + \right. \\ \left. + \rho \int_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial t} (\varphi \delta N) dS - \rho \int_{\Sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \delta N dS - k^2 \mu \delta \mu - \right. \\ \left. - \rho g \delta \mu \int_{\Sigma} y N dS - \rho g \mu \int_{\Sigma} y \delta N dS - \rho g \int_{\Sigma} N \delta N dS \right) dt \end{aligned}$$

Оскільки на кінцях інтервалу варіації  $\delta\mu = 0$  і  $\delta N = 0$ , то

$$\delta L = \int_0^{t_1} \left( \left( -J_0 \frac{d^2\mu}{dt^2} - \rho \int_{\Sigma} \varphi^* \frac{\partial^2 N}{\partial t^2} dS - k^2\mu - \rho g \int_{\Sigma} yN dS + M \right) \delta\mu - \right. \\ \left. - \rho \int_{\Sigma} \left( \varphi^* \frac{d^2\mu}{dt^2} + \frac{\partial\varphi}{\partial t} + g\mu y + gN \right) \delta N dS \right) dt = 0.$$

Оскільки  $\delta N$  і  $\delta\mu$  довільні та незалежні, то отримується

$$J_0 \frac{d^2\mu}{dt^2} + \rho \int_{\Sigma} \varphi^* \frac{\partial^2 N}{\partial t^2} dS + k^2\mu + \rho g \int_{\Sigma} yN dS = 0, \quad (1.4) \\ \varphi^* \frac{d^2\mu}{dt^2} + \frac{\partial\varphi}{\partial t} + g\mu y + gN = 0 \quad \text{на } \Sigma.$$

Система (1.4) містить невідомі  $N$  та  $\mu$ , які зв'язані кінематичною умовою (1.3), тому доцільно замість потенціалу швидкостей  $\varphi$  використовувати потенціал переміщень  $Q$ , який задається рівністю

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \varphi.$$

Потенціал переміщень  $Q$  згідно (1.1) задовольняє рівняння Лапласа

$$\Delta Q = 0 \quad (1.5)$$

і, враховуючи (1.3), задовольняє крайові умови

$$\frac{\partial Q}{\partial n} = 0 \quad \text{на } S, \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial n} = \frac{\partial Q}{\partial z} = N \quad \text{на } \Sigma. \quad (1.7)$$

Тоді рівняння руху маятника можна записати у такому вигляді:

$$J \frac{d^2\mu}{dt^2} + \rho \int_{\Sigma} \varphi^* \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} \right) dS + k^2\mu + \rho g \int_{\Sigma} y \frac{\partial Q}{\partial z} dS = 0, \quad (1.8)$$



А крайову умову (1.7):

$$\varphi^* \frac{d^2 \mu}{dt^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} + g\mu y + g \frac{\partial Q}{\partial z} = 0 \quad \text{на } \Sigma \quad (1.9)$$

### Задача Коші.

Для однозначного визначення розв'язків рівнянь (1.5) і (1.8) при крайових умовах (1.6), (1.7) і (1.9) потрібно долучити ще початкові умови наступного вигляду:

$$\frac{\partial Q}{\partial n} = q_0; \quad \frac{\partial^2 Q}{\partial n \partial t} = w_0; \quad \mu = \mu_0; \quad \frac{d\mu}{dt} = \omega_0 \quad \text{при } t = 0, \quad (1.10)$$

де  $q_0$  — вертикальне відхилення вільної поверхні рідини,  $w_0$  — нормальна швидкість вільної поверхні рідини,  $\mu_0$  — кут відхилення маятника,  $\omega_0$  — кутова швидкість маятника в початковий момент часу.

### Перехід до безрозмірних величин.

Далі, нехай  $L$  — характерний лінійний розмір області  $\Omega$ . Тоді введемо безрозмірні величини (позначені значком " $\sim$ ")

$$\begin{aligned} x &= \tilde{x} \cdot L, & y &= \tilde{y} \cdot L, & z &= \tilde{z} \cdot L, & Q &= \tilde{Q} \cdot L^2, & N &= \tilde{N} \cdot L, \\ t &= \tilde{t} \cdot g^{-1/2} L^{1/2}, & k^2 &= \rho g L^4 \cdot \tilde{k}^2, & J &= \tilde{J} \rho L^5, & \varphi^* &= \tilde{\varphi}^* \cdot L^2, \\ \vec{n} &= \tilde{\vec{n}} \cdot L, & q_0 &= \tilde{q}_0 \cdot L, & w_0 &= \tilde{w}_0 \cdot L^{1/2} g^{1/2}. \end{aligned}$$

Тоді задача Коші (1.8),(1.6),(1.9), (1.10) приймає такий вигляд (позначення " $\sim$ " опускаємо):

$$\begin{aligned} J \frac{d^2 \mu}{dt^2} + \int_{\Sigma} \varphi^* \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} \right) dS + k^2 \mu + \int_{\Sigma} y \frac{\partial Q}{\partial z} dS &= 0, \\ \Delta Q &= 0 \quad \text{в } \Omega, \quad \frac{\partial Q}{\partial n} = 0 \quad \text{на } S, \\ \varphi^* \frac{d^2 \mu}{dt^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} + g\mu y + g \frac{\partial Q}{\partial z} &= 0 \quad \text{на } \Sigma, \end{aligned} \quad (1.11)$$

при початкових умовах

$$\frac{\partial Q}{\partial n} = q_0; \quad \frac{\partial^2 Q}{\partial n \partial t} = w_0; \quad \mu = \mu_0; \quad \frac{d\mu}{dt} = \omega_0 \quad \text{при } t = 0. \quad (1.12)$$

Нижче, в §3.2 буде розглянуто задачі Коші в нерухомій системі координат, та в §3.6 наведено її розв'язок у вигляді узагальненого ряду Фур'є по власних функціях відповідної спектральної задачі.

### Власні коливання.

Розв'язки системи рівнянь і крайових умов (1.11), які наступним чином залежать від часу:

$$\mu(t) = \sin \sigma t \cdot \theta, \quad Q(x, y, z, t) = \sin \sigma t \cdot \Phi(x, y, z)$$

описують власні, або, нормальні коливання механічної системи.

Тоді

$$\frac{d^2 \mu(t)}{dt^2} = -\sigma^2 \sin \sigma t \cdot \theta, \quad \frac{\partial^2 Q(x, y, z, t)}{\partial t^2} = -\sigma^2 \sin \sigma t \cdot \Phi(x, y, z).$$

В такому разі задача (1.11) приймає такий вигляд (покладаючи  $\lambda = \sigma^2$ ):

$$\begin{aligned} -J\lambda\theta - \lambda \int_{\Sigma} \varphi^* \frac{\partial \Phi}{\partial z} dS + k^2\theta + \int_{\Sigma} \frac{\partial \Phi}{\partial z} y dS &= 0, \\ \Delta \Phi &= 0 \text{ в } \Omega, \end{aligned} \quad (1.13)$$

$$-\lambda \theta \varphi^* - \lambda \Phi + y\theta + \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \text{ на } \Sigma, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \text{ на } S.$$

Для побудови розв'язків задачі (1.13), в роботі [39], функція  $\Phi$  подається у вигляді розвинення в узагальнений ряд Фур'є

$$\Phi = \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k \quad (1.14)$$

по власних функціях крайової спектральної задачі

$$\Delta u = 0 \text{ в } \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ на } S, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \sigma u \text{ на } \Sigma, \quad (1.15)$$

яка описує власні коливання ідеальної рідини в нерухомій порожнині.

Вважається, що власні функції задачі (1.15) нормовані, тобто, виконується умова

$$\int_{\Sigma} u_i u_k dS = \begin{cases} 1, & \text{при } i = k, \\ 0, & \text{при } i \neq k. \end{cases} \quad (1.16)$$

Вираз (1.14) підставляється в рівняння руху і крайову умову на  $\Sigma$  (1.13)

$$-J\lambda\theta - \lambda \int_{\Sigma} \varphi^* \sum_{k=1}^{\infty} c_k \frac{\partial u_k}{\partial z} dS + k^2\theta + \int_{\Sigma} \sum_{k=1}^{\infty} c_k \frac{\partial u_k}{\partial z} y dS = 0, \quad (1.17)$$

$$-\lambda\theta\varphi^* - \lambda \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k + y\theta + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \frac{\partial u_k}{\partial z} = 0. \quad (1.18)$$

Рівняння (1.18) множиться на  $u_i$ , інтегрується по  $\Sigma$  і, враховуючи ортонормованість (1.16), одержується наступне рівняння:

$$-\lambda\theta \int_{\Sigma} \varphi^* u_i dS - \lambda c_i + \theta \int_{\Sigma} y u_i dS + \int_{\Sigma} \sum_{k=1}^{\infty} c_k \frac{\partial u_k}{\partial z} u_i dS = 0. \quad (1.19)$$

Якщо врахувати, що всі  $u_k$ , як розв'язки спектральної задачі (1.15), мають задовольняти умову на  $\Sigma$

$$\frac{\partial u_k}{\partial z} = \sigma_k u_k, \quad (1.20)$$

то рівняння (1.17) та (1.19) можна записати у такому вигляді:

$$-J\lambda\theta - \lambda \int_{\Sigma} \varphi^* \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sigma_k u_k dS + k^2\theta + \int_{\Sigma} \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sigma_k u_k y dS = 0, \quad (1.21)$$

$$-\lambda\theta \int_{\Sigma} \varphi^* u_i dS - \lambda c_i + \theta \int_{\Sigma} y u_i dS + \sigma_i c_i = 0. \quad (1.22)$$

Зауважимо, що умови (1.21) і (1.22) виконуються тільки наближено у випадку, коли умова (1.20) задовольняється наближено, і відповідно (1.21) та

(1.22) виконуються точно тільки у випадку, коли відомий точний розв'язок задачі (1.15).

З (1.22) одержується вираз для коефіцієнтів  $c_i$

$$c_i = \theta \frac{(a_i - \lambda b_i)}{\lambda - \sigma_i}, \quad (1.23)$$

де

$$a_i = \int_{\Sigma} y u_i dS, \quad b_i = \int_{\Sigma} \varphi^* u_i dS.$$

Підставляючи отриманий вираз (1.23) для коефіцієнтів  $c_i$  в (1.21), одержується рівняння

$$k^2 - \lambda J + \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k \frac{(a_k - \lambda b_k)^2}{\lambda - \sigma_k} = 0 \quad (1.24)$$

для визначення значень параметра  $\lambda$ . Це рівняння представлено в роботі [39]. З цього рівняння знаходиться  $\lambda$  і потім коефіцієнти  $c_i$ , і таким чином знаходиться наближений розв'язок шуканої функції  $\Phi$ .

Цей спосіб вважається класичним, але, зауважимо, при цьому вимагає точності розв'язків допоміжних задач.

### 1.3. Задача про власні коливання маятника з порожниною, яка має форму тіла обертання відносно вертикальної осі

Далі обмежимося дослідженням порожнин, які мають форму тіла обертання відносно вертикальної осі. Тому можна перейти до циліндричної системи координат  $(z, r, \eta)$ . Розв'язок шукається у вигляді

$$x = r \cos \eta, \quad y = r \sin \eta.$$

Початок нової системи координат як і попередньої, зв'яжемо з вільною поверхнею рідини в стані спокою.

Це означає, що задача (1.2) для знаходження потенціалу Стокса–Жуковського приймає вигляд:

$$\Delta_1 \varphi^* = 0 \text{ в } G, \quad \frac{\partial \varphi^*}{\partial n} = (r \cos(\vec{n}, z) - (z - l) \cos(\vec{n}, r)) \text{ на } L + \Gamma. \quad (1.25)$$

А тому її розв'язок шукаємо у вигляді

$$\varphi^*(z, r, \eta) = \varphi^*(z, r) \sin \eta.$$

Щодо функції  $\Phi(z, r, \eta)$ , то з усіх можливих

$$\Phi(z, r, \eta) = \Phi(z, r) \sin m\eta, \quad \Phi(z, r, \eta) = \Phi(z, r) \cos m\eta,$$

за рахунок виродженості інтегралів

$$\int_0^{2\pi} \sin m\eta \sin \eta d\eta = 0, \quad \int_0^{2\pi} \cos m\eta \sin \eta d\eta = 0,$$

можемо шукати функцію  $\Phi$  у вигляді

$$\Phi(z, r, \eta) = \Phi(z, r) \sin \eta,$$

оскільки єдиним іншим розв'язком задачі (1.13) є випадок  $\theta = 0$ , що відповідає задачі про коливання рідини в нерухомій посудині.

Функція  $\Phi(z, r)$  задовольняє рівняння

$$(k^2 - J\lambda) \theta + \pi \int_0^{r_0} r \frac{\partial \Phi}{\partial z} (r - \lambda \varphi^*) dr = 0, \quad (1.26)$$

$$\Delta_1 \Phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{1}{r^2} \Phi = 0, \quad (1.27)$$

і крайові умові:

$$-\lambda \theta \varphi^* - \lambda \Phi + r\theta + \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \text{ на } \Gamma, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \text{ на } L. \quad (1.28)$$

Допоміжна задача (1.15) набуває наступного вигляду:

$$\Delta_1 u = 0 \text{ в } G, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ на } L, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \sigma u \text{ на } \Gamma. \quad (1.29)$$

#### 1.4. Дослідження власних коливань маятника з циліндричною порожниною

Для порожнини кругової циліндричної форми з вертикальною віссю симетрії, крайова задача на знаходження потенціалу Стокса–Жуковського (1.25) та задача про власні коливання рідини в нерухомій порожнині (1.29) приймають вигляд:

$$\Delta_1 \varphi^* = 0 \text{ в } G, \quad \frac{\partial \varphi^*}{\partial z} = r, \text{ при } z = 0, z = -h, \quad \frac{\partial \varphi^*}{\partial r} = l - z, \text{ при } r = 1 \quad (1.30)$$

і

$$\Delta_1 u = 0 \text{ в } G, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \sigma u, \text{ при } z = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \text{ при } r = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \text{ при } z = -h, \quad (1.31)$$

де  $G = (z, r) : 0 < r < 1, -h < z < 0$ .

Якщо зробити заміну  $\varphi^* = zr + \Psi$ , то задача (1.30) приймає вигляд:

$$\Delta_1 \Psi = 0 \text{ в } G, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0, \text{ при } z = 0, z = -h, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial r} = l - 2z, \text{ при } r = 1. \quad (1.32)$$

Розв'язок задачі шукаємо у вигляді розкладу в ряд Фур'є по функціях  $\cos\left(\frac{k\pi z}{h}\right)$

$$\Psi = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{k\pi z}{h}\right) \frac{I_1\left(\frac{k\pi r}{h}\right)}{I_1\left(\frac{k\pi}{h}\right)}. \quad (1.33)$$

Тоді одержується вираз потенціалу Стокса–Жуковського у вигляді ряду Фур'є

$$\varphi^* = zr + (l+h)r - \frac{8h}{\pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(2i-1)^2} \left( 1 + \frac{I_2\left(\frac{(2i-1)\pi}{h}\right)}{I_1\left(\frac{(2i-1)\pi}{h}\right)} \right)^{-1}.$$

Відомий точний розв'язок задачі (1.31). Він має вигляд

$$u_k(z, r) = J_1(\xi_k, r) ch(\xi_k(z+h)),$$

де  $\xi_k$  —  $k$ -тий корінь похідної функції Бесселя  $J_1'(r) = 0$ ,  $h$  — висота наповнення рідиною.



### 1.5. Числова реалізація

Згідно з викладеним вище методом, проводилися розрахунки власних значень для маятника з циліндричною порожниною, частково заповненою ідеальною рідиною. Радіус порожнини  $r_0 = 0.1m$ , висота порожнини  $h_0 = 0.2m$ . Тверде тіло має форму циліндра, стінки і дно якого мають однакову товщину. Маса тіла  $M_0 = 1kg$ . Густина рідини  $\rho_0 = 1000 kg/m^3$ .

В таблиці 1.1 наведено наближені значення перших п'яти власних значень задачі в залежності від висоти  $h_1$  наповнення порожнини рідиною, при довжині  $d_0 = 1$  від точки підвісу до центра мас твердого тіла. Тут взято  $N = 20$  координатних функцій і використовувалося  $N_1 = 8$  функцій в розкладі по розв'язках допоміжної задачі.

В таблиці 1.2 наведено наближені значення перших п'яти власних значень задачі в залежності від довжини  $d_0$  від точки підвісу до центра мас твердого тіла, при висоті  $h_1 = 0.15$  наповнення порожнини рідиною. Тут взято  $N = 20$  координатних функцій і використовувалося  $N_1 = 8$  функцій в розкладі по розв'язках допоміжної задачі.

Таблиця 1.1: Власні значення при довжині підвісу  $d_0 = 1$ , кількість координатних функцій  $N = 20$ , кількість функцій у розкладі  $N_1 = 8$

$h_1$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$
0.10	0.097478046	2.630768429	5.441073313	8.573469402	11.724526466
0.12	0.098193200	2.552610507	5.415292966	8.564980532	11.720398673
0.14	0.098972401	2.465216603	5.397572480	8.559191891	11.717564418
0.16	0.099796635	2.385266202	5.385157539	8.555096195	11.715542864
0.18	0.100654175	2.316684639	5.376147576	8.552083420	11.714045369

Таблиця 1.2: Власні значення при висоті наповнення рідиною  $h_1 = 0.15$ , кількість координатних функцій  $N = 20$ , кількість функцій у розкладі  $N_1 = 8$

$d_0$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$
0.00	-0.446841165	1.979974824	5.382781152	8.562374813	11.721494221
0.01	0.017876419	1.908426556	5.366329351	8.554570673	11.716970503
0.02	0.467454845	1.849138754	5.351187646	8.547273795	11.712719951
0.03	0.808453984	1.826844941	5.339929877	8.541703627	11.709450966
0.04	0.991817863	1.866303279	5.333552611	8.538260882	11.707380367
0.05	1.040919920	1.954236909	5.331464523	8.536652707	11.706335492
0.06	1.019279261	2.049664577	5.332358428	8.536328384	11.706009816
0.07	0.970395811	2.130467210	5.334974904	8.536782583	11.706126979
0.08	0.913614691	2.193222078	5.338404461	8.537653690	11.706489887
0.09	0.856772431	2.240729878	5.342087166	8.538713952	11.706973503
0.10	0.802961050	2.276629633	5.345714873	8.539830795	11.707503777
0.11	0.753267815	2.303970998	5.349135917	8.540931770	11.708039018
0.12	0.707904241	2.325038172	5.352287962	8.541980119	11.708556983
0.13	0.666700656	2.341480906	5.355156586	8.542959472	11.709046745
0.14	0.629333507	2.354480375	5.357751410	8.543864739	11.709503810
0.15	0.595432242	2.364884941	5.360092929	8.544696832	11.709927249
0.16	0.564629175	2.373309192	5.362205498	8.545459669	11.710318034
0.17	0.536581516	2.380203294	5.364113745	8.546158494	11.710678083
0.18	0.510979636	2.385900937	5.365840859	8.546798952	11.711009716
0.19	0.487548610	2.390652482	5.367407880	8.547386602	11.711315356
0.20	0.466046589	2.394647999	5.368833512	8.547926676	11.711597363

## 1.6. Висновки до розділу

Описаний вище метод добре працює для порожнини циліндричної форми, оскільки відомий точний розв'язок допоміжної задачі.

Залишається відкритим питання про можливість перенесення такого підходу на задачі з порожниною складнішої форми, для яких побудовані тільки наближені розв'язки допоміжних задач. Такі дослідження дадуть змогу оцінити точність методів, що використовуються для дослідження руху твердого тіла з порожнинами частково заповненими ідеальною рідиною, і які будуються на основі наближених розв'язків базових крайових задач, які описують власні коливання рідини в нерухомій посудині.

**РОЗДІЛ 2**

**МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ ВЛАСНИХ КОЛИВАНЬ**  
**МАЯТНИКА З ОСЕСИМЕТРИЧНОЮ ПОРОЖНИНОЮ,**  
**ЧАСТКОВО ЗАПОВНЕНОЮ РІДИНОЮ**

**2.1. Наближений метод визначення власних коливань маятника з порожниною, що має форму тіла обертання**

В попередньому розділі показано, що класичний метод побудови розв'язків задачі про власні коливання маятника може бути ефективно реалізований для випадку кругової циліндричної порожнини, для якої відомі точні розв'язки спектральної задачі. Для дослідження питання, чи допустимо застосовувати такий підхід у випадку, коли розв'язок може бути знайдений тільки наближено, обмежимося порожнинами, які мають форму тіла обертання. Для таких порожнин, як правило, не відомі точні розв'язки допоміжних крайових задач (1.25) та (1.29). В залежності від форми меридіального перерізу  $G$  області  $\Omega$ , ми зможемо з певною точністю побудувати наближені розв'язки цих крайових задач. Ця точність впливатиме на точність наближеного розв'язку задачі (1.26)–(1.28).

Зауважимо, що в даному випадку умова  $\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0$  на  $L$  та  $\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \sigma \Phi$  на  $\Gamma$  задовольняються наближено, що є істотною відмінністю від випадку для циліндричної порожнини, де ці умови задовольняються точно.

Наближений розв'язок задачі (1.27)–(1.28) подамо у вигляді скінченної суми

$$\Phi = \sum_{k=1}^{N_1} d_k u_k, \quad (2.1)$$

де  $u_k$  — наближені розв'язки задачі (1.29).

В такому випадку, після аналогічної підстановки підстановки (2.1) в (1.26) і відповідних перетворень як і у §1.2, одержуємо трансцендентне рівняння (1.24), коефіцієнти  $a_i, b_i$  якого, в силу згаданого вище зауваження, обчислюються тільки наближено.

Числові результати такого підходу представлені в §2.3.

Однією з альтернативних реалізацій класичного підходу, тобто, побудованого на використанні розв'язків допоміжних задач, є зведення задачі (1.26)–(1.28) до розв'язування системи лінійних рівнянь, замість розв'язування трансцендентного рівняння.

Для цього спочатку вираз (2.1) підставимо в (1.26)

$$(k^2 - \lambda J) \theta + \pi \int_0^{r_0} r \sum_{k=1}^{N_1} d_k \frac{\partial u_k}{\partial z} (r - \lambda \varphi^*) dr = 0. \quad (2.2)$$

А потім підставимо вираз (2.1) ще і в умову (1.28) на  $\Gamma$ , помножимо на  $r u_i$ , проінтегруємо по  $\Gamma$ , і одержимо  $N_1$  рівнянь для кожного  $i = (1, N_1)$

$$-\lambda \theta \int_0^{r_0} r \varphi^* u_i dr - \lambda \int_0^{r_0} r \sum_{k=1}^{N_1} d_k u_k u_i dr + \theta \int_0^{r_0} r^2 u_i dr + \int_0^{r_0} \sum_{k=1}^{N_1} d_k \frac{\partial u_k}{\partial z} r u_i dr = 0. \quad (2.3)$$

Враховуючи, що  $\frac{\partial u_i}{\partial z} = \sigma_i u_i$  на  $\Gamma$ , та вводячи позначення  $d_0 = \theta$ , одержимо систему алгебраїчних однорідних лінійних рівнянь для визначення значень спектрального параметра  $\lambda$  і коефіцієнтів  $d_k$

$$\sum_{k=0}^{N_1} (\mu_{ik} - \lambda \nu_{ik}) d_k = 0, \quad (2.4)$$

де

$$\begin{aligned}
\mu_{oo} &= k^2, & \nu_{oo} &= J, \\
\mu_{ok} &= \pi \int_0^{r_0} r^2 \frac{\partial u_k}{\partial z} dr = \pi \sigma_k \int_0^{r_0} r^2 u_k dr, \\
\nu_{ok} &= \pi \int_0^{r_0} r \frac{\partial u_k}{\partial z} \varphi^* dr = \pi \sigma_k \int_0^{r_0} r u_k \varphi^* dr, \\
\mu_{io} &= \int_0^{r_0} r^2 u_i dr, & \nu_{io} &= \int_0^{r_0} r u_i \varphi^* dr, \\
\mu_{ik} &= \begin{cases} \sigma_i \int_0^{r_0} r u_i^2 dr, & \text{при } i = k, \\ 0, & \text{при } i \neq k, \end{cases} & \nu_{ik} &= \begin{cases} \int_0^{r_0} r u_i^2 dr, & \text{при } i = k, \\ 0, & \text{при } i \neq k. \end{cases}
\end{aligned}$$

Враховуючи умову (1.16) про ортонормованість власних функцій  $u_i$  можемо записати

$$\mu_{ik} = \begin{cases} \sigma_i, & \text{при } i = k, \\ 0, & \text{при } i \neq k, \end{cases} \quad \nu_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{при } i = k, \\ 0, & \text{при } i \neq k. \end{cases}$$

## 2.2. Проекційний метод розв'язування задачі про коливання маятника зі сферичною порожниною

Розв'язок задачі (1.27), (1.26) і (1.28), згідно з методом Рітца, будемо шукати у вигляді розкладу по системі однорідних многочленів

$$\Phi = \sum_{k=1}^N a_k w_k, \quad (2.5)$$

які визначаються за допомогою рекурентних формул [27]

$$w_1 = r, \quad w_2 = zr, \quad w_{k+1} = \frac{(2k+1)zw_k - (k-1)(r^2 + z^2)w_{k-1}}{k+2}, \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial w_k}{\partial z} = (k-1)w_{k-1}, \quad r \frac{\partial w_k}{\partial r} = kw_k - (k-1)zw_{k-1},$$

і задовольняють рівняння (1.27).

Підставимо вираз (2.5) в крайові умови (1.28) на  $\Gamma$  та на  $L$ , домножимо на  $(r w_i)$ , проінтегруємо їх відповідно по  $\Gamma$  і по  $L$  і додамо

$$\int_{L+\Gamma} \sum_{k=1}^N a_k \frac{\partial w_k}{\partial n} r w_i dl + \theta \int_0^{r_0} r^2 w_i dr - \lambda \int_0^{r_0} \sum_{k=1}^N a_k w_k r w_i dr - \lambda \theta \int_0^{r_0} r \varphi^* w_i dr = 0, \quad (i = \overline{1, N}).$$

А якщо підставити вираз (2.5) в рівняння руху (1.26), то отримаємо

$$(k^2 - \lambda J) \theta + \pi \int_0^{r_0} r \sum_{k=1}^N a_k \frac{\partial U_k}{\partial z} (r - \lambda \varphi^*) dr = 0.$$

Якщо позначити  $\theta = a_0$ , то можна записати наступну систему рівнянь:

$$\sum_{k=0}^N (\alpha_{ik} - \lambda \beta_{ik}) a_k = 0,$$

де

$$\begin{aligned}\alpha_{oo} &= k^2, & \beta_{oo} &= J, \\ \alpha_{ok} &= \pi \int_0^{r_0} r^2 \frac{\partial w_k}{\partial z} dr, & \beta_{ok} &= \pi \int_0^{r_0} r \frac{\partial w_k}{\partial z} \varphi^* dr, \\ \alpha_{io} &= \int_0^{r_0} r^2 w_i dr, & \beta_{io} &= \int_0^{r_0} r w_i \varphi^* dr, \\ \alpha_{ik} &= \int_{L+\Gamma} r w_i \frac{\partial w_k}{\partial n} dl, & \beta_{ik} &= \int_0^{r_0} r w_i w_k dr.\end{aligned}$$

Потенціал Стокса–Жуковського визначається варіаційним методом.

Коефіцієнти  $b_k$  визначаються з умов

$$\varphi^* = \sum_{k=1}^N b_k w_k, \quad \int_{L+\Gamma} r \frac{\partial \varphi^*}{\partial n} w_i dl = \int_{L+\Gamma} r (r \cos nz - z \cos nr) w_i dl.$$



### 2.3. Числова реалізація

Щоб оцінити точність та допустимість застосування класичного методу проводилися розрахунки для однієї із основних задач динаміки рідини в рухомому тілі — задачі про власні коливання маятника з рідиною в порожнині. В якості дослідження власних коливань маятника з нециліндричною порожниною, взято задачу про коливання маятника зі сферичною порожниною, частково заповненою ідеальною рідиною. Для порівняння точності власних значень задачі про коливання маятника зі сферичною порожниною, проводилися розрахунки згідно з описаними вище класичним та проєкційним методами. Класичний метод реалізовано двома способами — шляхом розв’язування трансцендентного рівняння (1.24) і системи лінійних однорідних рівнянь (2.4).

Розрахунки проводилися для тіла, що має форму сфери радіуса  $r = 0.1m$ , зі сталою товщиною поверхні, маса якого  $M_0 = 1kg$ . Густина рідини  $\rho_0 = 1000 kg/m^3$ .

В таблицях 2.1 і 2.2 наведено наближені значення перших п’яти власних значень задачі, отриманих класичним методом, розв’язуючи трансцендентне рівняння і розв’язуючи систему алгебраїчних рівнянь відповідно. Результати наведено для різної висоти  $h_1$  наповнення порожнини рідиною, при довжині  $d_0 = 1$  від точки підвісу до центра ваги твердого тіла. Тут взято  $N = 30$  координатних функцій і використовувалося  $N_1 = 6$  функцій в розкладі по розв’язках допоміжної задачі.

В таблиці 2.3 наведено такі ж результати, отримані проєкційним методом. Тут також наведено власні значення в залежності від висоти  $h_1$  наповнення рідиною, при довжині  $d_0 = 1$  від точки підвісу до центра ваги твердого тіла, координатних функцій  $N = 20$ .

В таблиці 2.4 наведено наближені значення перших п'яти власних значень задачі, отримані класичним методом, в залежності від висоти  $h_1$  наповнення порожнини рідиною, при довжині  $d_0 = 0.2$  від точки підвісу до центра ваги твердого тіла. Тут взято  $N = 20$  координатних функцій і використовувалося  $N_1 = 6$  функцій в розкладі по розв'язках допоміжної задачі.

В таблиці 2.5 наведено такі ж результати, отримані проекційним методом. Тут також наведено власні значення для різної висоти  $h_1$  наповнення рідиною, при довжині  $d_0 = 0.2$  від точки підвісу до центра ваги твердого тіла, координатних функцій  $N = 20$ .

В таблиці 2.6 наведено результати, отримані класичним методом, беручи  $N = 30$  координатних функцій. Віддаль від точки підвісу до центра ваги твердого тіла  $d_0 = 0.2$ , кількість функцій в розкладі по розв'язках допоміжної задачі  $N_1 = 6$ .

В таблиці 2.7 наведено результати, отримані проекційним методом, беручи  $N = 30$  координатних функцій. Віддаль від точки підвісу до центра ваги твердого тіла  $d_0 = 0.2$ .

В таблиці 2.8 наведено результати, отримані класичним методом, в залежності від кількості координатних функцій. Віддаль від точки підвісу до центра ваги твердого тіла  $d_0 = 0.2$ , висота наповнення рідиною  $h_1 = 0.15$ , кількість функцій в розкладі по розв'язках допоміжної задачі  $N_1 = 6$ .

В таблиці 2.9 наведено результати, отримані проекційним методом, в залежності від кількості координатних функцій. Віддаль від точки підвісу до центра ваги твердого тіла  $d_0 = 0.2$ , висота наповнення рідиною  $h_1 = 0.15$ .

В таблиці 2.10 наведено результати, отримані класичним методом, в залежності від кількості функцій  $N_1$  в розкладі по розв'язках допоміжної задачі. Віддаль від точки підвісу до центра ваги твердого тіла  $d_0 = 1$ , висота

наповнення рідиною  $h_1 = 0.1$ , кількість координатних функцій  $N = 30$ .

В таблиці 2.11 наведено результати, отримані класичним методом, в залежності від віддалі  $d_0$  від точки підвісу до центра ваги твердого тіла. Висота наповнення рідиною  $h_1 = 0.15$ , кількість координатних функцій  $N = 30$ , кількість функцій в розкладі по розв'язках допоміжної задачі  $N_1 = 6$ .

В таблиці 2.12 наведено ті ж результати, отримані проекційним методом, в залежності від віддалі  $d_0$  від точки підвісу до центра ваги твердого тіла. Висота наповнення рідиною  $h_1 = 0.15$ , кількість координатних функцій  $N = 30$ .

В таблиці 2.13 наведено результати, отримані класичним методом для висоти наповнення рідиною  $h_1 = 0.18$ , в залежності від віддалі  $d_0$  від точки підвісу до центра ваги твердого тіла. Кількість координатних функцій  $N = 30$ , кількість функцій в розкладі по розв'язках допоміжної задачі  $N_1 = 6$ .

В таблиці 2.14 наведено ті ж результати, отримані проекційним методом для висоти наповнення рідиною  $h_1 = 0.18$ , в залежності від віддалі  $d_0$  від точки підвісу до центра ваги твердого тіла. Кількість координатних функцій  $N = 30$ .

Таблиця 2.1: Результати, отримані класичним методом, розв'язуючи трансцендентне рівняння, при довжині підвісу  $d_0 = 1$ , кількість координатних функцій  $N = 30$ , кількість функцій в розкладі  $N_1 = 6$

$h_1$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$
0.10	0.097232528	2.610629316	5.397280225	8.548467253	11.706428719
0.09	0.096981596	2.517596879	5.341246542	8.524071015	11.703298768
0.08	0.096794634	2.395535137	5.323023884	8.577208655	11.812291814
0.07	0.096695870	2.238000796	5.344024457	8.714901796	12.045349762
0.06	0.096714837	2.045214710	5.407986527	8.952464945	12.427927921
0.05	0.096884879	1.826094534	5.519937980	9.317311853	13.006943769

Таблиця 2.2: Результати, отримані класичним методом, розв'язуючи систему рівнянь, при довжині підвісу  $d_0 = 1$ , кількість координатних функцій  $N = 30$ , кількість функцій в розкладі  $N_1 = 6$

$h_1$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$
0.10	0.097232528	2.610629316	5.397280225	8.548467253	11.706428719
0.09	0.096981596	2.517596879	5.341246542	8.524071015	11.703298768
0.08	0.096794634	2.395535137	5.323023884	8.577208655	11.812291814
0.07	0.096695870	2.238000796	5.344024457	8.714901796	12.045349762
0.06	0.096714837	2.045214710	5.407986527	8.952464945	12.427927921
0.05	0.096884879	1.826094534	5.519937980	9.317311853	13.006943769

З таблиці 2.1 та таблиці 2.2 бачимо, що реалізація класичного методу дає практично ідентичні результати, розв'язуючи трансцендентне рівняння і розв'язуючи систему алгебраїчних рівнянь.

Таблиця 2.3: Результати, отримані проекційним методом при довжині підвісу  $d_0 = 1$ , кількість координатних функцій  $N = 30$ , кількість функцій в розкладі  $N_1 = 6$

$h_1$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$
0.10	0.097232527	2.610495288	5.397135609	8.548337749	11.706304512
0.09	0.096981596	2.517512422	5.341192249	8.524044793	11.703294269
0.08	0.096794634	2.395486628	5.323007532	8.577218191	11.812316673
0.07	0.096695870	2.237977670	5.344022138	8.714916273	12.045383120
0.06	0.096714837	2.045206355	5.407986946	8.952472114	12.427980907
0.05	0.096884879	1.826092385	5.519938479	9.317302301	13.005193586

Порівнюючи вміст таблиці 2.1 та таблиці 2.3, бачимо, що класичний і проекційний метод дає майже ті самі результати і для висот наповнення  $h_1 = 0.05$  і для висоти наповнення  $h_1 = 0.1$  порожнини рідиною. При таких висотах є хороший розв'язок допоміжної крайової задачі. Проте можемо спостерігати певні відмінності у результатах двох методів.

Таблиця 2.4: Результати, отримані класичним методом при довжині підвісу  $d_0 = 0.2$ , кількість координатних функцій  $N = 20$ , кількість функцій в розкладі  $N_1 = 6$

$h_1$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$
0.190	0.483000853	5.953865480	13.501030401	63.380048439	5531.186700786
0.185	0.481298860	4.904719484	10.921859158	22.140942655	371.250222850
0.180	0.479041052	4.310782951	9.547048347	15.609617714	78.796586721
0.175	0.476305559	3.929951361	8.631516845	13.514227102	33.753126204
0.170	0.473166617	3.667234768	7.973082998	12.401121423	21.870338184
0.165	0.469695602	3.477941121	7.473612996	11.622251809	17.601330414
0.160	0.465958885	3.337695020	7.082576785	11.018645102	15.681428015
0.155	0.462016808	3.231735490	6.768694727	10.534187540	14.621075030

Таблиця 2.5: Результати, отримані проекційним методом при довжині підвісу  $d_0 = 0.2$ , кількість координатних функцій  $N = 20$

$h_1$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$
0.190	0.483000916	5.949055974	13.770170333	89.033415441	
0.185	0.481299043	4.897057415	10.917661396	25.910420203	704.897349525
0.180	0.479041366	4.304491735	9.539702963	16.486676881	128.355093310
0.175	0.476305925	3.924086037	8.623351247	13.730092189	46.634606028
0.170	0.473167165	3.661586853	7.964574835	12.446556464	26.453964224
0.165	0.469696161	3.473359464	7.466408504	11.625776658	19.523828629
0.160	0.465959330	3.334078293	7.076509795	11.013309692	16.575167225
0.155	0.462017218	3.228548428	6.763099599	10.527141200	15.075905483

З таблиці 2.4 та таблиці 2.5 бачимо, що, коли висота наповнення рідиною вища, результати двох методів доволі відрізняються.

Таблиця 2.6: Результати, отримані класичним методом при довжині підвісу  $d_0 = 0.2$ , кількість координатних функцій  $N = 30$ , кількість функцій в розкладі  $N_1 = 6$

$h_1$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$
0.190	0.483000406	5.948493477	13.248468287	20.624664539	52.137484046
0.185	0.481298038	4.901855173	10.904374394	16.916360164	23.981520251
0.180	0.479040485	4.310045929	9.539395381	14.809977552	20.092885626
0.175	0.476304812	3.929529250	8.627421180	13.400475311	18.175159668
0.170	0.473166028	3.667038500	7.970407190	12.386425124	16.805391333
0.165	0.469695225	3.477910363	7.472380069	11.617196852	15.765232752
0.160	0.465958554	3.337745901	7.082040406	11.014812179	14.953308355
0.155	0.462016508	3.231833105	6.768328534	10.531166104	14.302922284

Таблиця 2.7: Результати, отримані проекційним методом при довжині підвісу  $d_0 = 0.2$ , кількість координатних функцій  $N = 30$

$h_1$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$
0.190	0.483000430	5.943991669	13.243826324	20.785423396	65.124476454
0.185	0.481298119	4.897924906	10.900089378	16.911529384	24.994780439
0.180	0.479040650	4.306173339	9.533963819	14.803601404	20.158215405
0.175	0.476305002	3.926436935	8.622798236	13.395505814	18.170696641
0.170	0.473166280	3.664163394	7.965897698	12.380974889	16.800163046
0.165	0.469695443	3.475671410	7.468704662	11.612806985	15.761381210
0.160	0.465958753	3.335765489	7.078704098	11.010727278	14.948948120
0.155	0.462016678	3.230158164	6.765382028	10.527540468	14.298815673

З таблиці 2.6 та таблиці 2.7 бачимо, що враховуючи більшу кількість координатних функцій, все ще спостерігаємо істотні відмінності результатів

Таблиця 2.8: Результати, отримані класичним методом в залежності від кількості координатних функцій, довжина підвісу  $d_0 = 0.2$ , висота наповнення рідиною  $h_1 = 0.15$ , кількість функцій в розкладі  $N_1 = 6$

$N$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$
20	0.457924099	3.150536509	6.511872020	10.138271570	13.927582367
21	0.457924013	3.150533048	6.511775005	10.137328884	13.834924663
22	0.457923999	3.150533739	6.511724096	10.136812456	13.799815943
23	0.457923997	3.150539150	6.511725980	10.136734528	13.785879327
24	0.457923965	3.150549243	6.511710253	10.136716289	13.779095342
25	0.457923939	3.150566704	6.511677164	10.136582853	13.775305692
26	0.457923943	3.150591903	6.511671747	10.136488938	13.773532127
27	0.457923950	3.150619368	6.511687650	10.136494277	13.773109541
28	0.457923939	3.150642651	6.511689896	10.136478597	13.773119630
29	0.457923927	3.150659817	6.511680004	10.136408702	13.773030182
30	0.457923928	3.150672071	6.511679203	10.136368488	13.772919552



Таблиця 2.9: Результати, отримані проєкційним методом, довжина підвісу

 $d_0 = 0.2$ , висота наповнення рідиною  $h_1 = 0.15$ 

$N$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$
20	0.457924504	3.147726619	6.506611804	10.131332931	14.176300684
21	0.457924382	3.148062905	6.507010736	10.131465895	13.936630637
22	0.457924275	3.148456755	6.507712997	10.132100456	13.832032495
23	0.457924245	3.148556653	6.507971364	10.132345198	13.791395506
24	0.457924227	3.148574951	6.507956928	10.132232691	13.776996177
25	0.457924168	3.148784401	6.508250791	10.132394537	13.772108874
26	0.457924110	3.149020904	6.508698164	10.132826330	13.770501382
27	0.457924095	3.149077918	6.508848096	10.133019955	13.769811412
28	0.457924087	3.149092294	6.508847360	10.132996883	13.769393785
29	0.457924054	3.149230472	6.509059044	10.133167637	13.769359331
30	0.457924020	3.149382943	6.509356176	10.133490829	13.769599120

Варто зауважити, що ні класичний метод, ні проєкційний не дає збіжності при збільшенні кількості координатних функцій, що ми бачимо з таблиці 2.8 і таблиці 2.9.

Таблиця 2.10: Результати, отримані класичним методом, довжина підвісу  $d_0 = 1$ , висота наповнення рідиною  $h_1 = 0.1$ , кількість координатних функцій  $N = 30$

$N_1$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$
3	0.097232528	2.611362223	5.397634976		
4	0.097232528	2.610886154	5.397394390	8.548552924	
5	0.097232528	2.610709623	5.397314484	8.548490872	11.706452836
6	0.097232528	2.610629316	5.397280225	8.548467253	11.706428719
7	0.097232528	2.610585898	5.397262384	8.548455732	11.706418284
8	0.097232527	2.610553377	5.397249418	8.548447753	11.706411585
9	0.097232527	2.610526421	5.397239035	8.548441681	11.706406833
10	0.097232527	2.610514594	5.397234675	8.548439277	11.706405082
11	0.097232527	2.610513655	5.397234345	8.548439104	11.706404964
12	0.097232527	2.610513644	5.397234341	8.548439102	11.706404963
13	0.097232527	2.610513644	5.397234341	8.548439102	11.706404963

Таблиця 2.11: Результати, отримані класичним методом в залежності від довжини підвісу  $d_0$ , висота наповнення рідиною  $h_1 = 0.15$ , кількість координатних функцій  $N = 30$ , кількість функцій в розкладі  $N_1 = 6$

$d_0$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$
0.20	0.457923928	3.150672071	6.511679203	10.136368488	13.772919552
0.19	0.478899336	3.155500085	6.511694533	10.136240841	13.772810660
0.18	0.501773536	3.160629390	6.511657536	10.136077658	13.772677942
0.17	0.526794870	3.166060062	6.511549030	10.135869112	13.772515331
0.16	0.554250869	3.171776478	6.511342683	10.135602179	13.772314883
0.15	0.584473842	3.177736355	6.511001998	10.135259413	13.772066080
0.14	0.617845972	3.183852663	6.510475846	10.134817173	13.771754837
0.13	0.654802415	3.189963459	6.509691807	10.134243058	13.771362076
0.12	0.695829278	3.195780960	6.508546107	10.133492127	13.770861650
0.11	0.741450268	3.200804339	6.506888405	10.132501360	13.770217327
0.10	0.792189524	3.204168392	6.504498841	10.131181546	13.769378421
0.09	0.848485393	3.204377956	6.501054162	10.129405706	13.768273616
0.08	0.910502887	3.198840079	6.496080561	10.126993531	13.766802741
0.07	0.977732289	3.183051292	6.488897707	10.123693649	13.764827417
0.06	1.048116203	3.149265868	6.478583951	10.119173496	13.762165562
0.05	1.116060015	3.084704913	6.464065659	10.113048637	13.758605856
0.04	1.167537549	2.970920433	6.444583373	10.105030442	13.753982930
0.03	1.167239524	2.792151925	6.420886694	10.095319880	13.748384404
0.02	1.030642908	2.571979677	6.396855927	10.085241873	13.742510895
0.01	0.633732701	2.408854112	6.379207127	10.077460502	13.737875968

Таблиця 2.12: Результати, отримані проєкційним методом в залежності від довжини підвісу  $d_0$ , висота наповнення рідиною  $h_1 = 0.15$ , кількість координатних функцій  $N = 30$

$d_0$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$
0.20	0.457924020	3.149382943	6.509356176	10.133490829	13.769599120
0.19	0.478899425	3.154199944	6.509359621	10.133352360	13.769479182
0.18	0.501773618	3.159317141	6.509310266	10.133178230	13.769335435
0.17	0.526794935	3.164734453	6.509189021	10.132958795	13.769162047
0.16	0.554250901	3.170436076	6.508969719	10.132681313	13.768951418
0.15	0.584473818	3.176379519	6.508616137	10.132328764	13.768693544
0.14	0.617845856	3.182477517	6.508077597	10.131878151	13.768375106
0.13	0.654802147	3.188567880	6.507282401	10.131298049	13.767978158
0.12	0.695828767	3.194362588	6.506127937	10.130545001	13.767478262
0.11	0.741449371	3.199360664	6.504465725	10.129558259	13.766841757
0.10	0.792188017	3.202697003	6.502078904	10.128252116	13.766021884
0.09	0.848482941	3.202877180	6.498649069	10.126505036	13.764953353
0.08	0.910499021	3.197310504	6.493710264	10.124145185	13.763545286
0.07	0.977726493	3.181499374	6.486594744	10.120934313	13.761673588
0.06	1.048108453	3.147712271	6.476400406	10.116559652	13.759177659
0.05	1.116053227	3.083202864	6.462081425	10.110664648	13.755876642
0.04	1.167547919	2.969589653	6.442909744	10.102993632	13.751642373
0.03	1.167340521	2.791205445	6.419648284	10.093769208	13.746591084
0.02	1.031117568	2.571594263	6.396129478	10.084287834	13.741403298
0.01	0.635150169	2.408828202	6.378940807	10.077096205	13.737473730

Таблиця 2.13: Результати, отримані класичним методом в залежності від довжини підвісу  $d_0$ , висота наповнення рідиною  $h_1 = 0.18$ , кількість координатних функцій  $N = 30$ , кількість функцій в розкладі  $N_1 = 6$

$d_0$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$
0.20	0.479040485	4.310045929	9.539395381	14.809977552	20.092885626
0.19	0.502255123	4.311088994	9.539319469	14.809893673	20.092815190
0.18	0.527726916	4.312165831	9.539214884	14.809790839	20.092730683
0.17	0.555780443	4.313265312	9.539072984	14.809664086	20.092628602
0.16	0.586799285	4.314368729	9.538882128	14.809506860	20.092504350
0.15	0.621237378	4.315445566	9.538626445	14.809310389	20.092351827
0.14	0.659631452	4.316446755	9.538284002	14.809062783	20.092162822
0.13	0.702613144	4.317293702	9.537824050	14.808747683	20.091926129
0.12	0.750917196	4.317860145	9.537202803	14.808342243	20.091626217
0.11	0.805377508	4.317941522	9.536356871	14.807814028	20.091241218
0.10	0.866892543	4.317202271	9.535192937	14.807116239	20.090739842
0.09	0.936319253	4.315083510	9.533571370	14.806180285	20.090076623
0.08	1.014204777	4.310639535	9.531280414	14.804904346	20.089184673
0.07	1.100152995	4.302249757	9.527996924	14.803136405	20.087965033
0.06	1.191369593	4.287134836	9.523233028	14.800651939	20.086272847
0.05	1.279371951	4.260676396	9.516288827	14.797135353	20.083906119
0.04	1.342774600	4.216081275	9.506309184	14.792206625	20.080622725
0.03	1.333123006	4.147047862	9.492749169	14.785620418	20.076264489
0.02	1.157729353	4.059410901	9.476758048	14.777867209	20.071135741
0.01	0.706092300	3.985491393	9.462936532	14.771038521	20.066579344

Таблиця 2.14: Результати, отримані проекційним методом в залежності від довжини підвісу  $d_0$ , висота наповнення рідиною  $h_1 = 0.18$ , кількість координатних функцій  $N = 30$

$d_0$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$
0.20	0.479040650	4.306173339	9.533963819	14.803601404	20.158215405
0.19	0.502255306	4.307207912	9.533880812	14.803510920	20.158134280
0.18	0.527727118	4.308276190	9.533769805	14.803402481	20.158038321
0.17	0.555780663	4.309367217	9.533622546	14.803271615	20.157923948
0.16	0.586799521	4.310462548	9.533427953	14.803112454	20.157786532
0.15	0.621237626	4.311532074	9.533170954	14.802917204	20.157619947
0.14	0.659631702	4.312527353	9.532830774	14.802675366	20.157415996
0.13	0.702613379	4.313370766	9.532378363	14.802372602	20.157163558
0.12	0.750917392	4.313937582	9.531772453	14.801989029	20.156847315
0.11	0.805377629	4.314025679	9.530953456	14.801496626	20.156445836
0.10	0.866892561	4.313303446	9.529833869	14.800855278	20.155928664
0.09	0.936319206	4.311218538	9.528283124	14.800006679	20.155251878
0.08	1.014204987	4.306836288	9.526103789	14.798865083	20.154351407
0.07	1.100154830	4.298555088	9.522995594	14.797303868	20.153133421
0.06	1.191378018	4.283628494	9.518507094	14.795138593	20.151462356
0.05	1.279404271	4.257493792	9.511994423	14.792115196	20.149152795
0.04	1.342889950	4.213441500	9.502679263	14.787939473	20.145990673
0.03	1.333512319	4.145245820	9.490087939	14.782453890	20.141858640
0.02	1.158893572	4.058639162	9.475333960	14.776141256	20.137097367
0.01	0.708730582	3.985473022	9.462713035	14.770802602	20.133021984

Ми можемо спостерігати відмінності у результатах отриманих класичним та проекційним методами з таблиць 2.11-2.14.

## 2.4. Висновки до розділу

Порівнюючи власні значення, отримані за допомогою двох запропонованих методів, можемо оцінити доцільність застосування класичного методу в залежності від параметрів задачі.

Класичний метод дає ще точні результати для невисокої висоти наповнення, тому може бути якісно застосований, оскільки є досить точні розв'язки допоміжних крайових задач.

Але, коли висота наповнення рідиною вища, результати двох методів доволі відрізняються і, отже, потрібно мати більш точний розв'язок крайових допоміжних задач, для того щоб було доцільно застосовувати класичний метод.

Збільшення кількості координатних функцій та збільшення кількості функцій в ряді розкладу по розв'язках базової задачі, не дає можливості оцінити точність.

В роботах М.Я. Барняка, О.Н.Комаренка [27] та [4] запропоновано методи для отримання більш точних розв'язків крайової допоміжної задачі, на основі врахування особливості розв'язків в околі кутових точок області.

Ні класичний метод, ні проекційний не дає збіжності при збільшенні кількості координатних функцій. Тому можемо тільки оцінити відмінності, проте важко оцінити точність отриманих розв'язків тим чи іншим методом.

Залишається потреба у методі, який би дав змогу оцінити точність та покращити розв'язок задачі про коливання маятника з порожниною, частково заповненою рідиною.

## РОЗДІЛ 3

### ВАРІАЦІЙНИЙ МЕТОД ПОБУДОВИ РОЗВ'ЯЗКІВ ЗАДАЧІ ПРО КОЛИВАННЯ МАЯТНИКА

#### 3.1. Постановка задачі в нерухомій системі координат

Поставимо перед собою задачу вивести рівняння руху твердого тіла з порожниною, частково заповненою рідиною, безпосередньо в нерухомій системі координат, враховуючи дію зовнішніх сил. А також запропонувати метод, який би дав змогу покращити точність розв'язків задачі у випадку нециліндричної порожнини, зокрема сферичної форми.

##### **Вивід рівнянь в нерухомій системі координат.**

Нехай вісь  $Ox_1$  нерухомої системи координат  $Ox_1y_1z_1$  співпадає з нерухомою віссю, як і вісь  $Ox$  рухомої системи координат  $Oxyz$ . Вісь  $Oz_1$  направимо вертикально вгору. Початок нерухомої системи координат виберемо в точці підвісу маятника. Для виведення рівняння руху фізичного маятника використаємо варіаційний принцип найменшої дії в формі Гамільтона–Остроградського, згідно якого для дійсного руху будь-якої механічної системи з ідеальними геометричними в'язями, виконуються співвідношення

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta(T - \Pi) + \delta A) dt = 0, \quad (3.1)$$

де  $t_0$  і  $t_1$  — фіксовані межі інтегрування,  $T$  і  $\Pi$  — кінетична і потенціальна енергії системи,  $A$  — робота зовнішніх сил, що здійснюється на можливому переміщенні системи.

Як і при виведенні рівнянь в рухомій системі координат, кінетична енергія системи тіло–рідина складається з двох складових  $T = T_0 + T_1$ , де  $T_0$  —



кінетична енергія тіла,  $T_1$  — кінетична енергія рідини.

Для тіла вираз кінетичної енергії такий же

$$T_0 = \frac{J_0}{2} \left( \frac{d\mu}{dt} \right)^2,$$

де  $J_0$  — момент інерції тіла відносно нерухомої осі.

А от кінетична енергія  $T_1$  рідини в нерухомій системі координат має інший вигляд

$$T_1 = \frac{\rho}{2} \int_{\Omega} (\nabla\varphi)^2 d\Omega,$$

де  $\Omega$  - об'єм рідини.

Кінетична енергія механічної системи тіло–рідина, з точністю до величин вищого порядку малості, має вигляд

$$T = \frac{J_0}{2} \left( \frac{d\mu}{dt} \right)^2 + \frac{\rho}{2} \int_{\Omega} (\nabla\varphi)^2 d\Omega.$$

Для потенціальної енергії маємо  $\Pi = \Pi_0 + \Pi_1$ , де  $\Pi_0$  — потенціальна енергія твердого тіла,  $\Pi_1$  — рідини. Для твердого тіла з точністю до величин другого порядку малості маємо

$$\Pi_0 = l_0 M_0 g \frac{\mu^2}{2}.$$

Потенціальна енергія рідини  $\Pi_1$  в нерухомій системі координат зумовлена трьома складовими: приростом потенціальної енергії рідини при відхиленні маятника при збереженні горизонтального положення стану вільної поверхні, приростом потенціальної енергії рідини при відхиленні вільної поверхні від горизонтального положення і додаткового збурення вільної поверхні рідини. Якщо відхилити маятник при фіксованій вільній поверхні ("заморожена рідина"), то з точністю до другого порядку малості потенціальна енергія

збільшиться на величину

$$\Pi_1^1 = \frac{\mu^2}{2} l_1 \rho g \Omega,$$

де  $l_1$  — віддаль від центра ваги рідини до точки підвісу. Якщо після цього вільна поверхня рідини при фіксованому відхиленні маятника займе горизонтальне положення, то при цьому частинки вільної поверхні перемістяться на величину  $-y\mu$  і потенціальна енергія зменшиться на величину

$$\Pi_1^2 = \frac{\mu^2}{2} \rho g \int_{\Sigma} y^2 dS,$$

тут  $\Sigma$  — вільна поверхня рідини.

Додаткове збурення  $N$  вільної поверхні рідини приведе до збільшення потенціальної енергії рідини на величину

$$\Pi_1^3 = \frac{\rho g}{2} \int_{\Sigma} N^2 dS$$

Таким чином сумарна потенціальна енергія системи тіло–рідина

$$\begin{aligned} \Pi = \Pi_0 + \Pi_1^1 + \Pi_1^2 + \Pi_1^3 &= l_0 M_0 g \frac{\mu^2}{2} + \frac{\mu^2}{2} l_1 \rho g \Omega - \frac{\mu^2}{2} \rho g \int_{\Sigma} y^2 dS + \\ &+ \frac{\rho g}{2} \int_{\Sigma} N^2 dS = k^2 \frac{\mu^2}{2} + \frac{g}{2} \rho \int_{\Sigma} N^2 dS, \end{aligned}$$

де  $D = l_0 M_0 g + l_1 \rho g \Omega - \rho g \int_{\Sigma} y^2 dS$ .

Нехай на тверде тіло діють зовнішні сили, момент яких відносно осі підвісу  $M(t)$ . Тоді  $\delta A = M(t) \delta \mu$ . Обчислимо величину  $\delta U = \delta(T - \Pi) + \delta A$ .

Тоді ліва сторона рівності 3.1 приймає вигляд

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta U = \int_{t_0}^{t_1} \left( J_0 \frac{d\mu}{dt} \delta \frac{d\mu}{dt} + \rho \int_{\Omega} \nabla \varphi \delta \nabla \varphi d\Omega - D \mu \delta \mu - \rho g \int_{\Sigma} N \delta N dS + M \delta \mu \right) dt.$$

Використовуючи формулу Гріна отримаємо

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta U = \int_{t_0}^{t_1} \left( J_0 \frac{d\mu}{dt} \delta \frac{d\mu}{dt} + \rho \int_{S+\Sigma} \varphi \delta \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS - D\mu \delta \mu - \rho g \int_{\Sigma} N \delta N dS + M \delta \mu \right) dt.$$

Врахуємо кінематичні умови

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial N}{\partial t} \quad \text{на } \Sigma, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{d\mu}{dt} \cdot f_s \quad \text{на } S, \quad (3.2)$$

де  $f_s = (\vec{r} \times \vec{n}, \vec{i}) = y \cos(\vec{n}, z) - z \cos(\vec{n}, y)$ ,  $\vec{r}$  — радіус-вектор точки,  $S$  — тверда стінка.

Тоді

$$\int_{S+\Sigma} \varphi \delta \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = \int_S \varphi f_s \delta \frac{d\mu}{dt} dS + \int_{\Sigma} \varphi \delta \frac{\partial N}{\partial t} dS.$$

Інтегруючи по частинах

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \delta U = \int_{t_0}^{t_1} \left( J_0 \frac{d}{dt} \left( \frac{d\mu}{dt} \delta \mu \right) - J_0 \frac{d^2 \mu}{dt^2} \delta \mu - \rho \int_S f_s \frac{\partial}{\partial t} (\varphi \delta \mu) dS - \rho \int_S f_s \frac{\partial \varphi}{\partial t} \delta \mu dS + \right. \\ \left. + \rho \int_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial t} (\varphi \delta N) dS - \rho \int_{\Sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \delta N dS - D\mu \delta \mu - \rho g \int_{\Sigma} N \delta N dS \right) dt. \end{aligned}$$

Враховуючи, що  $\delta \mu = 0$  і  $\delta N = 0$  на кінцях інтервалу інтегрування, то

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \delta U = \int_{t_0}^{t_1} \left( \left( -J_0 \frac{d^2 \mu}{dt^2} - \rho \int_S f_s \frac{\partial \varphi}{\partial t} dS - D\mu + M \right) \delta \mu - \right. \\ \left. - \rho \int_{\Sigma} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \rho g N \right) \delta N dS \right) dt = 0 \end{aligned}$$

Оскільки  $\delta N$  і  $\delta \mu$  незалежні і довільні, то отримуємо систему з двох рівнянь

$$\begin{aligned} J_0 \frac{d^2 \mu}{dt^2} + \rho \int_S f_s \frac{\partial \varphi}{\partial t} dS + D\mu - M = 0, \quad \text{в } \Omega, \\ \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \rho g N = 0, \quad \text{на } \Sigma. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Система (3.3) містить невідомі  $N$  та  $\mu$ , які зв'язані кінематичними умовами (3.2), тому доцільно замість потенціалу швидкостей  $\varphi$  використовувати потенціал переміщень  $U$ , який задається рівністю

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \varphi.$$

Враховуючи (1.1), потенціал переміщень  $U$  задовольняє рівняння Лапласа

$$\Delta U = 0 \quad (3.4)$$

і крайові умови

$$\frac{\partial U}{\partial n} = \mu f_s \quad \text{на } S, \quad \frac{\partial U}{\partial n} = \frac{\partial U}{\partial z} = N \quad \text{на } \Sigma, \quad (3.5)$$

то рівняння можна записати в наступному вигляді:

$$J_0 \frac{d^2 \mu}{dt^2} + \rho \int_S f_s \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} dS + D\mu - M = 0, \quad \text{в } \Omega, \quad (3.6)$$

$$\rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \rho g \frac{\partial U}{\partial z} = 0, \quad \text{на } \Sigma.$$

**Відповідність рівнянь у рухомій та нерухомій системах координат.**

Зауважимо, що поклавши  $M = 0$ , різницю між рівняннями, виведеними в рухомій та нерухомій системах координат, можна виразити у відповідності потенціалів переміщень  $Q$  в рухомій та  $U$  в нерухомій системі відповідно:

$$U = Q + \varphi^* \mu.$$

Тоді для  $U$  крайова умова на  $S$  має вигляд

$$\frac{\partial U}{\partial n} = \frac{\partial Q}{\partial n} + \frac{\partial \varphi^*}{\partial n} \mu = f_s \mu$$

Враховуючи, що  $\frac{\partial \varphi^*}{\partial z} = y$ , крайову умову на  $\Sigma$  можна записати у вигляді

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + g \frac{\partial U}{\partial z} = 0. \quad (3.7)$$

Рівняння руху теж перетворимо

$$\begin{aligned} & J \frac{d^2 \mu}{dt^2} + \rho \int_{\Sigma} \varphi^* \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \varphi^* \frac{d^2 \mu}{dt^2} \right) dS + k^2 \mu + \rho g \int_{\Sigma} y \left( \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial \varphi^*}{\partial z} \mu \right) dS - M = \\ & = J \frac{d^2 \mu}{dt^2} + \rho \int_{S+\Sigma} \varphi^* \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \right) dS - \rho \int_S \varphi^* \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \right) dS - \rho \int_{S+\Sigma} \varphi^* \frac{\partial \varphi^*}{\partial n} \frac{d^2 \mu}{dt^2} dS + \\ & \quad + \rho \int_S \varphi^* \frac{\partial \varphi^*}{\partial n} \frac{d^2 \mu}{dt^2} dS + k^2 \mu + \rho g \int_{\Sigma} y \frac{\partial U}{\partial z} dS - \rho g \int_{\Sigma} y \frac{\partial \varphi^*}{\partial z} \mu dS - M = \\ & = J \frac{d^2 \mu}{dt^2} + \rho \int_{S+\Sigma} \frac{\partial \varphi^*}{\partial n} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} dS - \rho \int_S \varphi^* \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial U}{\partial n} \right) dS - \rho \frac{d^2 \mu}{dt^2} \int_{S+\Sigma} \varphi^* \frac{\partial \varphi^*}{\partial n} dS + \\ & \quad + \rho \int_S \varphi^* f_s \frac{d^2 \mu}{dt^2} dS + k^2 \mu + \rho g \int_{\Sigma} y \frac{\partial U}{\partial z} dS - \rho g \int_{\Sigma} y^2 \mu dS - M = \\ & = (J - m) \frac{d^2 \mu}{dt^2} + \rho \int_S f_s \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} dS + \rho \int_{\Sigma} y \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} dS - \rho \int_S \varphi^* \frac{d^2}{dt^2} (f_s \mu) dS + \\ & \quad + \rho \int_S \varphi^* f_s \frac{d^2 \mu}{dt^2} dS + \left( k^2 - \rho g \int_{\Sigma} y^2 dS \right) \mu + \rho g \int_{\Sigma} y \frac{\partial U}{\partial z} dS. \end{aligned}$$

Накінець, враховуючи умову (3.7), отримаємо рівняння в нерухомій системі координат (яке отримали вище, безпосередньо виводячи в нерухомій системі координат)

$$J_0 \frac{d^2 \mu}{dt^2} + \rho \int_S f_s \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} dS + D \mu - M = 0, \quad (3.8)$$

тут  $D = k^2 - \rho g \int_{\Sigma} y^2 dS$ .

Рівняння в нерухомій системі координат мають складнішу умову на твердій стінці  $S$ , проте не містять потенціалу Стокса–Жуковського  $\varphi^*$  і таким чином не вимагають розв'язування допоміжної задачі (1.2).

**Задача Коші.** Початкові умови для потенціалу переміщень  $U$  в нерухомій системі координат задамо наступним чином:

$$\frac{\partial U}{\partial n} = u_0, \quad \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial U}{\partial n} \right) = v_0 \text{ на } \Sigma, \quad \mu = \mu_0, \quad \frac{d\mu}{dt} = \omega_0 \text{ при } t = 0, \quad (3.9)$$

де  $u_0$  і  $v_0$  — вертикальне відхилення вільної поверхні рідини і нормальна швидкість вільної поверхні рідини відповідно в нерухомій системі координат,  $\mu_0$  і  $\omega_0$  — ті ж що і в (1.10): кут відхилення маятника і кутова швидкість маятника в початковий момент часу відповідно.

### Перехід до безрозмірних величин.

Як і в §2.1. перейдемо до безрозмірних величин. Якщо  $L$  характерний лінійний розмір області  $\Omega$ , то

$$\begin{aligned} x &= \tilde{x} \cdot L, & y &= \tilde{y} \cdot L, & z &= \tilde{z} \cdot L, & U &= \tilde{U} \cdot L^2, & N &= \tilde{N} \cdot L, \\ t &= \tilde{t} \cdot g^{-1/2} L^{1/2}, & D &= \rho g L^4 \cdot \tilde{D}, & J_0 &= \tilde{J}_0 \rho L^5, & f_s &= \tilde{f}_s \cdot L, \\ \vec{n} &= \tilde{\vec{n}} \cdot L, & u_0 &= \tilde{u}_0 \cdot L, & v_0 &= \tilde{v}_0 \cdot L^{1/2} g^{1/2}, & M &= \rho g L^4 \tilde{M}. \end{aligned}$$

Опускаючи значок " $\sim$ " над безрозмірними величинами, маємо наступну задачу:

$$J_0 \frac{d^2 \mu}{dt^2} + \int_S f_s \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} dS + D\mu = M, \quad \Delta U = 0 \text{ в } \Omega, \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \frac{\partial U}{\partial z} = 0 \text{ на } \Sigma, \quad \frac{\partial U}{\partial n} = \theta f_s \text{ на } S,$$

при початкових умовах

$$\frac{\partial U}{\partial n} = u_0, \quad \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial U}{\partial n} \right) = v_0 \text{ на } \Sigma, \quad \mu = \mu_0, \quad \frac{d\mu}{dt} = \omega_0 \text{ при } t = 0. \quad (3.11)$$

### Власні коливання.

Розв'язки початково–крайової задачі (3.10), (3.11) подаються у вигляді узагальненого ряду Фур'є по власних функціях задачі про власні коливаннями маятника з рідиною. Для задачі, що описує рух маятника в нерухомій системі координат при  $M = 0$ , ці розв'язки мають такий вигляд:

$$\mu(t) = \cos(\sqrt{\lambda} t) \cdot \theta, \quad U(x, y, z, t) = \cos(\sqrt{\lambda} t) \cdot \Psi(x, y, z),$$

Тоді

$$\frac{d^2\mu(t)}{dt^2} = -\lambda \cos(\sqrt{\lambda} t) \cdot \theta, \quad \frac{\partial^2 U(x, y, z, t)}{\partial t^2} = -\lambda \cos(\sqrt{\lambda} t) \cdot \Psi(x, y, z)$$

Тоді задача (3.10) приймає вигляд:

$$\begin{aligned} -J_0\lambda\theta - \lambda \int_S \Psi f_s dS + D\theta &= 0, \quad \Delta\Psi = 0 \text{ в } \Omega, \\ -\lambda\Psi + \frac{\partial\Psi}{\partial z} &= 0 \text{ на } \Sigma, \quad \frac{\partial\Psi}{\partial n} = \theta \cdot f_s \text{ на } S. \end{aligned} \tag{3.12}$$

### 3.2. Побудова функціоналу для задачі про власні коливання маятника з рідиною, що частково заповнює порожнину, та зведення крайової задачі до задачі мінімізації функціоналу

Поставимо перед собою задачу безпосереднього варіаційного формулювання задачі (3.12), яке б дало можливість побудови її розв'язків у випадку довільних осесиметричних порожнин.

Задача полягає у визначенні тих значень спектрального параметра  $\lambda$ , при яких існує ненульовий розв'язок задачі (3.12). Якщо порівняти задачу (1.15), яка описує власні коливання ідеальної рідини в нерухомій посудині, то побачимо, що спектральний параметр  $\lambda$  тут міститься також в крайовій умові на  $\Sigma$ . Також замість умови  $\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0$  на  $S$  одержуємо складнішу умову  $\frac{\partial \Psi}{\partial n} = \theta \cdot f_s$  на  $S$ .

Варіаційний метод розв'язування задачі (1.15) ґрунтується на мінімізації функціоналу

$$K(\Phi) = \frac{\int_{\Omega} (\nabla \Phi)^2 d\Omega}{\int_{\Sigma} \Phi^2 dS}$$

на класі функцій  $\Phi \in W_2^1(\Omega)$ , де  $W_2^1(\Omega)$  — простір Соболева функцій, інтегрованих з квадратом разом з першими частинними похідними по області  $\Omega$ , що задовольняють умову

$$\int_{\Sigma} \Phi dS = 0.$$

Щоб записати відповідний функціонал для задачі (3.12), яка описує власні коливання фізичного маятника з рідиною, запишемо цю задачу в симетричному вигляді:



$$\begin{aligned} \Delta\Psi &= 0 \text{ в } \Omega, \quad \frac{\partial\Psi}{\partial z} = \lambda\Psi \text{ на } \Sigma, \\ \frac{\partial\Psi}{\partial n} &= \frac{\lambda \cdot f_s}{D} \left( J_0\theta + \int_S \Psi \cdot f_s dS \right) \text{ на } S, \\ \theta &= \frac{\lambda}{D} \left( J_0\theta + \int_S \Psi \cdot f_s dS \right). \end{aligned} \quad (3.13)$$

**Операторна постановка задачі.** Нехай  $\Psi_\Sigma$  і  $\Psi_S$  — функції, задані на  $\Sigma$  і  $S$ , такі, що  $\Psi_\Sigma = \Psi_S$  на  $l$ , де  $l = \Sigma \cap S$ , крім того, для них існує розв'язок задачі Діріхле

$$\Delta\Psi = 0 \text{ в } \Omega, \quad \Psi = \Psi_\Sigma \text{ на } \Sigma, \quad \Psi = \Psi_S \text{ на } S, \quad (3.14)$$

що належить простору Соболева  $W_2^1(\Omega)$ . На цьому класі функцій визначаємо вектор-функції  $\vec{P} = [\Psi_\Sigma, \Psi_S, \theta]$ , де  $\theta$  — скаляр.

Вектор-функції  $\vec{P} = [\Psi_\Sigma, \Psi_S, \theta]$  належать до гільбертового простору  $H$  елементів із скалярним добутком

$$([\Psi_{\Sigma,1}, \Psi_{S,1}, \theta_1], [\Psi_{\Sigma,2}, \Psi_{S,2}, \theta_2]) = \int_\Sigma \Psi_{\Sigma,1} \Psi_{\Sigma,2} dS + \int_S \Psi_{S,1} \Psi_{S,2} dS + \theta_1 \theta_2. \quad (3.15)$$

Розглянемо інтегро-диференціальний оператор  $A$ , який ставить вектор-функції  $\vec{P} = [\Psi_\Sigma, \Psi_S, \theta]$  у відповідність вектор-функцію

$$A\vec{P} = \left[ \frac{\partial\Psi}{\partial z}, \frac{\partial\Psi}{\partial n}, J_0\theta \right], \quad (3.16)$$

де  $\Psi$  — розв'язок задачі Діріхле (3.14). Крім того, розглянемо інтегро-диференціальний оператор  $B$ , який діє наступним чином:

$$B\vec{P} = \left[ \Psi_\Sigma, \frac{f_s}{D} \left( J_0\theta + \int_S \Psi_S \cdot f_s dS \right), \frac{1}{D} \left( J_0^2\theta + J_0 \int_S \Psi_\Sigma \cdot f_s dS \right) \right]. \quad (3.17)$$

Покажемо, що оператор  $A$  симетричний і додатньо визначений

$$\begin{aligned} (A\vec{P}_1, \vec{P}_2) &= \int_{S+\Sigma} \frac{\partial \Psi_1}{\partial n} \Psi_2 dS + J_0 \theta_1 \theta_2 = \\ &= \int_{\Omega} (\nabla \Psi_1, \nabla \Psi_2) d\Omega + J_0 \theta_1 \theta_2 = (\vec{P}_1, A\vec{P}_2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (A\vec{P}, \vec{P}) &= \int_{S+\Sigma} \frac{\partial \Psi}{\partial n} \Psi dS + J_0 \theta^2 = \int_{\Omega} (\nabla \Psi)^2 d\Omega + J_0 \theta^2 \geq \\ &\geq C_1 \left( \int_{\Sigma} (\Psi_{\Sigma})^2 dS + \int_S (\Psi_S)^2 dS \right) + J_0 \theta^2 \geq \min(C_1, J_0) \|\Psi_{\Sigma}, \Psi_S, \theta\|^2. \end{aligned}$$

Покажемо, що оператор  $B$  симетричний і невід'ємний при  $D > 0$

$$\begin{aligned} (B\vec{P}_1, \vec{P}_2) &= \int_{\Sigma} \Psi_{\Sigma,1} \Psi_{\Sigma,2} dS + \frac{1}{D} \int_S f_S (J_0 \theta_1 + \int_S f_S \Psi_{S,1} dS) \Psi_{S,2} dS + \\ &+ \frac{1}{D} (J_0^2 \theta_1 + J_0 \int_S f_S \Psi_{S,1} dS) \theta_2 = \int_{\Sigma} \Psi_{\Sigma,1} \Psi_{\Sigma,2} dS + \\ &+ \frac{1}{D} (J_0 \theta_1 + \int_S f_S \Psi_{S,1} dS) (J_0 \theta_2 + \int_S f_S \Psi_{S,2} dS) = (\vec{P}_1, B\vec{P}_2), \end{aligned}$$

$$(BP, P) = \int_{\Sigma} (\Psi_{\Sigma})^2 dS + \frac{1}{D} (J_0 \theta + \int_S f_S \Psi_S dS)^2 \geq 0.$$

Тепер на основі визначених вище операторів розглянемо спектральну задачу

$$A\vec{P} = \lambda B\vec{P}, \text{ або } A[\Psi_{\Sigma}, \Psi_S, \theta] = \lambda B[\Psi_{\Sigma}, \Psi_S, \theta]. \quad (3.18)$$

Тут  $\Psi_{\Sigma}, \Psi_S$  — функції із визначеного вище класу,  $\theta_i \in R$  — константа.

Зауважимо, що задачу Коші (3.10), (3.11) також можемо записати в операторному вигляді:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} B\vec{P} + A\vec{P} = \vec{P}_0 M(t), \text{ де } \vec{P}_0 = \left[ 0, \frac{f_S}{D}, \frac{J_0}{D} \right], \quad (3.19)$$

при початкових умовах

$$A\vec{P} = [u_0, f_S\theta_0, J_0\theta_0], \quad \frac{\partial}{\partial t}A\vec{P} = [v_0, f_S\omega_0, J_0\omega_0] \text{ при } t = 0. \quad (3.20)$$

Перевіримо відповідність між операторним поданням (3.19), (3.20) та рівнянням (3.10) і крайовими умовами (3.11). Для цього випишемо компоненти векторного рівняння (3.19)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \frac{\partial U}{\partial n} &= 0 \text{ на } \Sigma, \\ \frac{f_s}{D} \left( J_0 \frac{d^2\theta}{dt^2} + \int_S \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} f_s dS \right) + \frac{\partial U}{\partial n} &= f_s \frac{M(t)}{D} \text{ на } S, \\ \frac{1}{D} \left( J_0^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} + J_0 \int_S \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} dS \right) + J_0\theta &= J_0 \frac{M(t)}{D}. \end{aligned}$$

Помножимо останнє рівняння на  $f_s$ , та поділимо його на  $J_0$  і віднімемо його від другого рівняння. В результаті одержимо

$$\frac{f_s}{D} \left( \frac{\partial U}{\partial n} - f_s\theta \right) = 0 \text{ на } S.$$

Крім того, якщо поділити останнє рівняння на  $J_0$  і помножити на  $D$ , то одержимо перше із рівнянь (3.10), що і потрібно було довести.

Якщо момент зовнішніх сил  $M(t) \equiv 0$ , то задача (3.19) описує малі вільні коливання фізичного маятника з рідиною.

Задача (3.18) про власні коливання маятника витікає з рівняння (3.20) задачі Коші при поданні розв'язку рівняння при  $M = 0$  у вигляді:

$$\vec{P}(x, y, z, t) = \vec{P}(x, y, z) \cos(\sqrt{\lambda} t).$$

На класі вектор-функцій  $\vec{P} = [\Psi_\Sigma, \Psi_S, \theta]$  розглядається функціонал

$$K(\vec{P}) = \frac{(AP, P)}{(BP, P)}. \quad (3.21)$$

Якщо скалярна функція  $\Psi(x, y, z)$  є розв'язком задачі Діріхле (3.14), то функціонал  $K(\vec{P})$  набирає вигляду

$$K(\Psi, \theta) = \frac{\int_{\Omega} (\nabla \Psi)^2 d\Omega + J_0 \theta^2}{\int_{\Sigma} \Psi^2 dS + \frac{1}{D} \left( J_0 \theta + \int_S f_s \Psi dS \right)^2}. \quad (3.22)$$

Розглядаючи функціонал (3.23) на більш широкому класі функцій  $\Psi \in W_2^1(\Omega)$ , справедлива така теорема:

**Теорема 1.** *Мінімум функціоналу (3.23) на класі функцій  $\Psi \in W_2^1(\Omega) \cap L_2(\Sigma)$  досягається на функції  $\Psi_1$  та константі  $\theta_1$ , що задовольняють задачу (3.12), а значення функціоналу  $K(\Psi_1, \theta_1)$  дорівнює найменшому власному значенні  $\lambda_1$  задачі (3.12). Наступні власні значення задачі (3.12) визначаються як мінімум функціоналу  $K(\Psi, \theta)$  на класі функції  $\Psi \in W_2^1(\Omega) \cap L_2(\Sigma)$ , що задовольняють умови ортогональності*

$$\int_{\Sigma} \Psi \Psi_i dS + \frac{1}{D} \left( J_0 \theta + \int_S f_s \Psi dS \right) \left( J_0 \theta_i + \int_S f_s \Psi_i dS \right) = 0,$$

де  $i = 1, 2, \dots, n - 1$ , а  $[\Psi_i, \theta_i]$ —  $i$ -та власна вектор-функція задачі.

**Доведення.** Нехай функція  $\Psi = \Psi_0$  та константа  $\theta = \theta_0$  надають мінімум функціоналу (3.21) і цей мінімум дорівнює  $\lambda_0$ , тоді

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} K(\Psi_0 + \varepsilon \Psi, \theta_0 + \varepsilon \theta) \Big|_{\varepsilon=0} &= 0. \\ \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \frac{\int_{\Omega} (\nabla \Psi_0 + \varepsilon \nabla \Psi)^2 d\Omega + J_0 (\theta_0 + \varepsilon \theta)^2}{\int_{\Sigma} (\Psi_0 + \varepsilon \Psi)^2 dS + \frac{1}{D} \left( J_0 (\theta_0 + \varepsilon \theta) + \int_S f_s (\Psi_0 + \varepsilon \Psi) dS \right)^2} \Big|_{\varepsilon=0} &= \\ &= \frac{2 \int_{\Omega} \nabla \Psi_0 \nabla \Psi d\Omega + 2 J_0 \theta_0 \theta}{\int_{\Sigma} \Psi_0^2 dS + \frac{1}{D} \left( J_0 \theta_0 + \int_S f_s \Psi_0 dS \right)^2} = \end{aligned}$$

$$-\lambda_0 \frac{2 \left( \int_{\Sigma} \Psi_0 \Psi dS + \frac{1}{D} (J_0 \theta + \int_S f_s \Psi_0 dS) (J_0 \theta_0 + \int_S f_s \Psi dS) \right)}{\int_{\Sigma} \Psi_0^2 dS + \frac{1}{D} (J_0 \theta + \int_S f_s \Psi_0 dS)^2} = 0,$$

$$\text{де } \lambda_0 = \frac{\int_{\Omega} (\nabla \Psi_0)^2 d\Omega + J_0 \theta_0^2}{\int_{\Sigma} \Psi_0^2 dS + \frac{1}{D} (J_0 \theta_0 + \int_S f_s \Psi_0 dS)^2}.$$

Константа  $\theta$  та функція  $\Psi$  вибираються незалежними одна від одної, а тому ми можемо окремо прирівняти до нуля обидві частини рівності. Прирівнюючи до нуля коефіцієнт при  $\theta$ , отримуємо

$$J_0 \theta \theta_0 - \lambda_0 \frac{1}{D} \left( J_0 \theta_0 + \int_S f_s \Psi_0 dS \right) J_0 \theta_0 = 0,$$

тобто,

$$D \theta_0 - \lambda_0 \left( J_0 \theta_0 + \int_S f_s \Psi_0 dS \right) = 0. \quad (3.23)$$

Прирівнюючи до нуля суму членів одержаної рівності, які містять в собі довільну функцію  $\Psi$ , отримуємо

$$\int_{\Omega} \nabla \Psi_0 \nabla \Psi d\Omega - \lambda_0 \int_{\Sigma} \Psi_0 \Psi dS + \frac{\lambda_0}{D} \left( J_0 \theta_0 + \int_S f_s \Psi_0 dS \right) \int_S f_s \Psi dS = 0.$$

Використаємо формулу Гріна

$$\int_{S+\Sigma} \frac{\partial \Psi_0}{\partial n} \Psi dS - \int_{\Omega} \Delta \Psi_0 \Psi d\Omega - \lambda_0 \int_{\Sigma} \Psi_0 \Psi dS - \frac{\lambda_0}{D} \left( J_0 \theta_0 + \int_S f_s \Psi_0 dS \right) \int_S f_s \Psi dS = 0.$$

Враховуючи (3.32), маємо

$$\int_S \left( \frac{\partial \Psi_0}{\partial n} - \theta_0 f_s \right) \Psi dS + \int_{\Omega} \Delta \Psi_0 \Psi d\Omega - \int_{\Sigma} \left( \frac{\partial \Psi_0}{\partial n} - \lambda_0 \Psi_0 \right) \Psi dS = 0.$$

Якщо вибрати в якості функції  $\Psi$  фінітну в області  $\Omega$  функцію, то, із повноти в  $L_2(\Omega)$  фінітних функцій, витікає, що функція  $\Psi_0$  задовольняє рівняння Лапласа в узагальненому смислі

$$\Delta \Psi_0 = 0 \text{ в } \Omega.$$

Нарешті, із можливості довільного вибору функції  $\Psi$  на  $S$  і  $\Sigma$  випливає, що функція  $\Psi_0$  задовольняє в узагальненому сенсі також і крайові умови

$$\frac{\partial \Psi_0}{\partial n} = \theta f_s \text{ на } S, \quad \frac{\partial \Psi_0}{\partial z} = \lambda_0 \Psi_0 \text{ на } \Sigma.$$

Твердження доведено.

### 3.3. Метод Рітца мінімізації функціоналу

Розглянемо функціонал (3.21) на класі гармонійних функцій  $\Psi$ , на яких він набуває вигляду

$$K(\Psi, \theta) = \frac{\int_{S+\Sigma} \Psi \frac{\partial \Psi}{\partial n} d\Omega + J_0 \theta^2}{\int_{\Sigma} \Psi^2 dS + \left( \frac{1}{D} J_0 \theta + \int_{\Sigma} f_s \Psi dS \right)^2}. \quad (3.24)$$

Далі обмежимося розглядом порожнин, які мають форму тіла обертання відносно вертикальної осі. Крім того, вважаємо, що центр ваги тіла і рідини в стані спокою лежать на осі симетрії посудини, яку приймемо за вісь  $Oz$ . Лінія підвісу тіла також співпадає з віссю  $Oz$ . Переходимо до циліндричної системи координат

$$x = r \cos \eta, \quad y = r \sin \eta.$$

Початок системи координат зв'яжемо з вільною поверхнею рідини в стані спокою. Тоді функція  $f_s = y \cos nz - (z - l) \cos ny$ , де  $l$  — відстань від вільної поверхні до лінії підвісу, тобто  $f_s = (r \cos n z - (z - l)) \sin \eta$ . Це означає, що розв'язки задачі (3.13) матимуть вигляд

$$\Psi(z, r, \eta) = \Psi(z, r) \sin \eta,$$

де  $\Psi(z, r)$  задовольняє рівняння

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} - \frac{1}{r^2} \Psi = 0. \quad (3.25)$$

В якості системи функцій, які задовольняють рівняння (3.25), виберемо систему однорідних многочленів, які визначаються за допомогою

рекурентних формул [27]

$$w_1 = r, w_2 = zr, w_{k+1} = \frac{(2k+1)zw_k - (k-1)(r^2 + z^2)w_{k-1}}{k+2},$$

$$\frac{\partial w_k}{\partial z} = (k-1)w_{k-1}, \quad r \frac{\partial w_k}{\partial r} = kw_k - (k-1)zw_{k-1}. \quad (3.26)$$

Згідно з методом Рітца, апроксимуємо шуканий розв'язок задачі скінченою сумою вигляду

$$\theta = a_0, \quad \Psi = \sum_{k=1}^N a_k w_k \sin \eta. \quad (3.27)$$

Тоді для визначення невідомих констант  $a_k, k = 0, 1, 2, \dots, N$  і параметра  $\lambda$  одержимо із умови мінімуму функціоналу (3.24) систему лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{k=0}^N a_k (\alpha_{ik} - \lambda \beta_{ik}) = 0,$$

де

$$\alpha_{oo} = J_o, \quad \alpha_{oi} = 0, \quad \alpha_{ij} = \int_{S+\Sigma} w_i \frac{\partial w_j}{\partial n} dS,$$

$$\beta_{oo} = \frac{J_o^2}{D}, \quad \beta_{oi} = \frac{J_o}{D} \int_S f_s w_i dS,$$

$$\beta_{ij} = \int_{\Sigma} w_i w_j dS + \frac{1}{D} \int_S f_s w_i dS \int_S f_s w_j dS.$$



### 3.4. Побудова розв'язків задачі Коші

#### Нормування власних функцій.

Нехай  $\lambda_i, \lambda_j$  — довільні власні значення задачі (3.18), а  $P_i, P_j$  — їхні відповідні власні функції. Тобто

$$AP_i = \lambda_i BP_i, \quad i, \quad AP_j = \lambda_j BP_j \quad (3.28)$$

Домножимо скалярно перше з цих рівнянь на  $\vec{P}_j$ , а друге на  $\vec{P}_i$

$$\left( A\vec{P}_i, \vec{P}_j \right) = \left( \lambda_i B\vec{P}_i, \vec{P}_j \right), \quad \left( A\vec{P}_i, \vec{P}_j \right) = \left( \lambda_i B\vec{P}_i, \vec{P}_j \right). \quad (3.29)$$

Якщо відняти перше рівняння від другого, та врахувати симетричність операторів  $A$  та  $B$ , то можемо записати

$$(\lambda_i - \lambda_j) \left( B\vec{P}_i, \vec{P}_j \right) = 0.$$

Для  $i \neq j$ , власні значення  $\lambda_i \neq \lambda_j$ , і отже

$$\left( B\vec{P}_i, \vec{P}_j \right) = 0 \quad (3.30)$$

і враховуючи (3.29), отримаємо

$$\left( A\vec{P}_i, \vec{P}_j \right) = 0. \quad (3.31)$$

Якщо розписати скалярні добутки в (3.30) і (3.31) згідно (3.15), можемо записати умови ортогональності для власних функцій задачі (3.18) в наступному вигляді:

$$\int_{\Sigma} \Psi_i \Psi_j d\Sigma + \frac{1}{D} \left( J_0 \theta_i + \int_S f_S \Psi_i dS \right) \left( J_0 \theta_j + \int_S f_S \Psi_j dS \right) = 0, \quad (3.32)$$

$$\int_{\Omega} \nabla \Psi_i \nabla \Psi_j d\Omega + J_0 \theta_i \theta_j = 0, \quad \text{якщо } i \neq j.$$

Пронормуємо крім того ці функції, щоб виконувалася ще і умова

$$\left( A\vec{P}_i, \vec{P}_i \right) = \int_{\Omega} (\nabla \Psi_i)^2 d\Omega + J_0 \theta_i^2 = 1,$$

звідки витікає така рівність:

$$\left( B\vec{P}_i, \vec{P}_i \right) = \int_{\Sigma} \Psi_i^2 d\Sigma + \frac{1}{D} \left( J_0 \theta_i + \int_S f_S \Psi_i dS \right)^2 = \frac{1}{\lambda_i}.$$

Покладаючи  $\Psi_{\Sigma,i} = \Psi_i$  на  $\Sigma$ , а  $\Psi_{S,i} = \Psi_i$  на  $S$ , маємо, що вектор-функції  $\vec{P}_i = [\Psi_{\Sigma,i}, \Psi_{S,i}, \theta_i]$  є власними функціями задачі (3.18), які задовольняють відповідні умови ортогональності

$$\left( B\vec{P}_i, \vec{P}_j \right) = 0, \quad \left( A\vec{P}_i, \vec{P}_j \right) = 0, \quad \text{якщо } i \neq j \quad (3.33)$$

і умови нормування

$$\left( B\vec{P}_i, \vec{P}_i \right) = \frac{1}{\lambda_i}, \quad \left( A\vec{P}_i, \vec{P}_i \right) = 1. \quad (3.34)$$

Розв'язок задачі (3.10) — (3.11) подамо у вигляді узагальненого ряду Фур'є по розв'язках задачі про власні коливання цього маятника

$$U(x, y, z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t) \Psi_k(x, y, z), \quad \mu(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t) \theta_k. \quad (3.35)$$

При позначеннях  $\vec{P} = [\Psi_{\Sigma}, \Psi_S, \theta]$  і відповідно  $\vec{P}_k = [\Psi_{\Sigma,k}, \Psi_{S,k}, \theta_k]$  можемо записати

$$P(x, y, z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t) P_k(x, y, z). \quad (3.36)$$

Коефіцієнти  $a_k(t)$  визначаються шляхом підстановки виразу (3.36) в рівняння (3.19) і початкові умови (3.20) та наступного скалярного множення на власну функцію  $\vec{P}_i = [\Psi_{\Sigma,i}, \Psi_{S,i}, \theta_i]$ . На основі умов ортогональності (3.33) і умов (3.34), одержуємо послідовність диференціальних рівнянь

$$\frac{d^2 a_i}{dt^2} + \lambda_i a_i = M \lambda_i (\vec{P}_0, \vec{P}_i). \quad (3.37)$$

Якщо скалярно помножити початкові умови (3.20) на власні функції задачі (3.18), то одержимо такі значення коефіцієнтів  $a_i(t)$  та їх похідних при  $t = 0$

$$\begin{aligned} a_i(0) &= ([u_0, f_S \theta_0, J_0 \theta_0], [\Psi_{\Sigma, i}, \Psi_{S, i}, \theta_i]), \\ \frac{da_i}{dt}(0) &= ([v_0, f_S \omega_0, J_0 \omega_0], [\Psi_{\Sigma, i}, \Psi_{S, i}, \theta_i]). \end{aligned} \quad (3.38)$$

Побудова розв'язків рівнянь (3.37) при виписаних вище початкових умовах дає можливість одержати розв'язок задачі у вигляді (3.35).

У випадку **вільних коливань**, коли момент зовнішніх сил дорівнює нулю, рівняння (3.19) приймає вигляд

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} B \vec{P} + A \vec{P} = 0.$$

А система рівнянь (3.37) перетворюється на однорідну

$$\frac{d^2 a_i}{dt^2} + \lambda_i a_i = 0. \quad (3.39)$$

І відповідно коефіцієнти  $a_i(t)$  шукаються у вигляді

$$a_i(t) = \alpha_i \cos(\sqrt{\lambda_i} t) + \beta_i \sin(\sqrt{\lambda_i} t).$$

Вирази (3.38) набувають наступного вигляду

$$\begin{aligned} \alpha_i &= ([u_0, f_S \theta_0, J_0 \theta_0], [\Psi_{\Sigma, i}, \Psi_{S, i}, \theta_i]), \\ \lambda_i \beta_i &= ([v_0, f_S \omega_0, J_0 \omega_0], [\Psi_{\Sigma, i}, \Psi_{S, i}, \theta_i]). \end{aligned} \quad (3.40)$$

Звідки отримуємо явний вигляд складових  $\alpha_i$  та  $\beta_i$  коефіцієнтів  $a_i$  у розкладі (3.35) шуканої функції

$$\begin{aligned} \alpha_i &= ([u_0, f_S \theta_0, J_0 \theta_0], [\Psi_{\Sigma, i}, \Psi_{S, i}, \theta_i]), \\ \beta_i &= \frac{([v_0, f_S \omega_0, J_0 \omega_0], [\Psi_{\Sigma, i}, \Psi_{S, i}, \theta_i])}{\lambda_i}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

### 3.5. Числова реалізація

Згідно з розробленим вище наближеним методом, проводилися розрахунки власних значень для двох форм порожнини маятника — циліндричної і сферичної.

У випадку **порожнини циліндричної форми**: радіус порожнини  $r_0 = 0.1m$ , висота порожнини  $h_0 = 0.2m$ . Тверде тіло має форму циліндра, стінки і дно якого мають однакову товщину. Маса тіла  $M_0 = 1kg$ . Густина рідини  $\rho_0 = 1000 kg/m^3$ .

В таблиці 3.1 наведено наближені власні значення  $\lambda_0$  (в припущенні, що рідина "замерзла") і перші чотири власні значення задачі (3.18) в залежності від відстані  $d_0$  від точки підвісу до центра ваги твердого тіла для висоти наповнення рідиною  $h_1 = 0.15m$ .

В таблиці 3.2 наведено наближені значення перших п'яти власних значень задачі (3.18) в залежності від висоти  $h_1$  наповнення порожнини рідиною, при довжині  $d_0 = 1$  від точки підвісу до центра мас твердого тіла. Тут взято  $N = 20$  координатних функцій.

В таблиці 3.3 наведено результати, отримані варіаційним методом, в залежності від кількості координатних функцій. Віддаль від точки підвісу до центра ваги твердого тіла  $d_0 = 1$ , висота наповнення рідиною  $h_1 = 0.15m$ .

На малюнку 3.1 зображено залежність власних значень  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$  від довжини підвісу  $d_0$  при висоті наповнення рідиною  $h_1 = 0.05m$ .

На малюнку 3.2 зображено залежність власних значень  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$  від довжини підвісу  $d_0$  при висоті наповнення рідиною  $h_1 = 0.2m$ .

На малюнку 3.3 зображено залежність власних значень  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$  від висоти  $h_1$  наповнення рідиною при довжині підвісу  $d_0 = 0.01$ .

На малюнку 3.4 зображено залежність власних значень  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$  від

висоти  $h_1$  наповнення рідиною при довжині підвісу  $d_0 = 0.001$ .

У випадку **порожнини сферичної форми** тверде тіло має форму сфери радіуса  $r = 0.1m$ , зі сталою товщиною поверхні, маса якого  $M_0 = 1kg$ . Густина рідини  $\rho_0 = 1000 kg/m^3$ .

В таблиці 3.4 наведено наближені значення перших п'яти власних значень задачі (3.18) в залежності від висоти  $h_1$  наповнення порожнини рідиною, при довжині  $d_0 = 1$  від точки підвісу до центра мас твердого тіла. Тут взято  $N = 30$  координатних функцій.

В таблиці 3.5 наведено наближені значення перших п'яти власних значень задачі (3.18) в залежності від висоти  $h_1$  наповнення порожнини рідиною, при довжині  $d_0 = 0.2$  від точки підвісу до центра мас твердого тіла. Тут взято  $N = 30$  координатних функцій.

На малюнку 3.5 зображено залежність власних значень  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$  від довжини підвісу  $d_0$  при висоті наповнення рідиною  $h_1 = 0.1m$ .

На малюнку 3.6 зображено залежність власних значень  $\lambda_0, \lambda_1$  від висоти  $h_1$  наповнення рідиною при довжині підвісу  $d_0 = 0.01m$ .

На малюнку 3.7 зображено залежність власних значень  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$  від висоти  $h_1$  наповнення рідиною при довжині підвісу  $d_0 = 0.01m$ .

В таблицях 3.6 — 3.10 наведено наближені значення першого, другого, третього, четвертого та п'ятого відповідно власного значення задачі (3.18) отриманого класичним, проєкційним і варіаційним методами, в залежності від висоти  $h_1$  наповнення порожнини рідиною, при довжині  $d_0 = 0.2m$  від точки підвісу до центра мас твердого тіла. Тут взято  $N = 30$  координатних функцій, для класичного методу взято  $N_1 = 8$  розв'язків допоміжної задачі.

В таблиці 3.11 наведено результати, отримані варіаційним методом, в залежності від кількості координатних функцій. Віддаль від точки підвісу до

центра ваги твердого тіла  $d_0 = 0.2m$ , висота наповнення рідиною  $h_1 = 0.15m$ .

В таблиці 3.12 наведено результати, отримані варіаційним методом, в залежності від довжини підвісу  $d_0$ . Кількість координатних функцій  $N = 30$ , висота наповнення рідиною  $h_1 = 0.15m$ .

В таблиці 3.13 наведено результати, отримані варіаційним методом, в залежності від довжини підвісу  $d_0$ . Кількість координатних функцій  $N = 30$ , висота наповнення рідиною  $h_1 = 0.18m$ .

В таблиці 3.14 наведено наближені власні значення  $\lambda_0$  (в припущенні, що рідина "замерзла") і перші чотири власні значення задачі (3.18) в залежності від відстані  $d_0$  від точки підвісу до центра ваги твердого тіла для висоти наповнення рідиною  $h_1 = 0.1m$ .

**Задача Коші** досліджувалася для трьох випадків вільних коливань. У **першому випадку** при наступних початкових умовах:

вертикальне відхилення вільної поверхні рідини  $u_0 = 0$ ,

нормальна швидкість вільної поверхні рідини  $v_0 = 0$ ,

кут відхилення маятника  $\mu_0 \neq 0$ ,

кутова швидкість маятника в початковий момент часу  $\omega_0 = 0$ .

При таких початкових умовах величини (3.41) приймають вигляд ( $k = (1, \infty)$ ):

$$\alpha_k = \theta_0 \left( \int_S f_S \Psi_k dS + J_0 \theta_0 \theta_k \right), \quad \beta_k = 0.$$

І тоді з (3.35) можемо записати вираз для кута відхилення

$$\mu(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos(\sqrt{\lambda_k} t) \theta_k. \quad (3.42)$$

У таблиці 3.15 наведено значення перших п'яти значень  $\lambda_k, \alpha_k, \theta_k$ , при висоті наповнення порожнини рідиною  $h_1 = 0.15$ , довжині від точки підвісу

до центра мас твердого тіла  $d_0 = 1$ . Тут взято  $N = 20$  координатних функцій.

На малюнках (3.8),(3.9) зображено зміну кута  $\mu(t)$  відхилення маятника в залежності від часу у діапазонах  $t = (0..100)$  та  $t = (10..20)$  відповідно, згідно (3.42), для значень  $\lambda_k, \alpha_k, \theta_k$ , взятих з таблиці 3.15.

У таблиці 3.16 наведено значення перших п'яти значень  $\lambda_k, \alpha_k, \theta_k$ , при висоті наповнення порожнини рідиною  $h_1 = 0.18$ , довжині від точки підвісу до центра мас твердого тіла  $d_0 = 1$ . Тут взято  $N = 20$  координатних функцій.

На малюнках (3.8),(3.9) зображено зміну кута  $\mu(t)$  відхилення маятника в залежності від часу у діапазонах  $t = (0..100)$  та  $t = (10..20)$  відповідно, згідно (3.42), для значень  $\lambda_k, \alpha_k, \theta_k$ , взятих з таблиці 3.16.

У таблиці 3.17 наведено значення перших п'яти значень  $\lambda_k, \alpha_k, \theta_k$ , при висоті наповнення порожнини рідиною  $h_1 = 0.15$ , довжині від точки підвісу до центра мас твердого тіла  $d_0 = 0.2$ . Тут взято  $N = 20$  координатних функцій.

На малюнках (3.8),(3.9) зображено зміну кута  $\mu(t)$  відхилення маятника в залежності від часу у діапазонах  $t = (0..100)$  та  $t = (10..20)$  відповідно, згідно (3.42), для значень  $\lambda_k, \alpha_k, \theta_k$ , взятих з таблиці 3.17.

У таблиці 3.18 наведено значення перших п'яти значень  $\lambda_k, \alpha_k, \theta_k$ , при висоті наповнення порожнини рідиною  $h_1 = 0.18$ , довжині від точки підвісу до центра мас твердого тіла  $d_0 = 0.2$ . Тут взято  $N = 20$  координатних функцій.

На малюнках (3.8),(3.9) зображено зміну кута  $\mu(t)$  відхилення маятника в залежності від часу у діапазонах  $t = (0..100)$  та  $t = (10..20)$  відповідно, згідно (3.42), для значень  $\lambda_k, \alpha_k, \theta_k$ , взятих з таблиці 3.18.

У другому випадку задача Коші досліджувалася для випадку вільних коливань при початкових умовах:

вертикальне відхилення вільної поверхні рідини  $u_0 = 0$ ,  
 нормальна швидкість вільної поверхні рідини  $v_0 = 0$ ,  
 кут відхилення маятника  $\mu_0 = 0$ ,  
 кутова швидкість маятника в початковий момент часу  $\omega_0 \neq 0$ .

При таких початкових умовах величини (3.41) приймають вигляд ( $k = (1, \infty)$ ):

$$\alpha_k = 0, \quad \beta_k = 0 = \frac{\omega_0}{\lambda_k} \left( \int_S f_S \Psi_k dS + J_0 \theta_0 \theta_k \right)$$

І тоді з (3.35) можемо записати вираз для кута відхилення

$$\mu(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \sin(\sqrt{\lambda_k} t) \theta_k. \quad (3.43)$$

У таблиці 3.19 наведено значення перших п'яти значень  $\lambda_k$ ,  $\beta_k$ ,  $\theta_k$ , при висоті наповнення порожнини рідиною  $h_1 = 0.15$ , довжині від точки підвісу до центра мас твердого тіла  $d_0 = 0.2$ . Тут взято  $N = 20$  координатних функцій.

На малюнку (3.16) зображено зміну кута  $\mu(t)$  відхилення маятника в залежності від часу у діапазоні  $t = (0..100)$ , згідно (3.43), для значень  $\lambda_k$ ,  $\beta_k$ ,  $\theta_k$ , взятих з таблиці 3.19.

У **третьому випадку задача Коші** розв'язувалась при наступних початкових умовах:

вертикальне відхилення вільної поверхні рідини  $u_0 = 0$ ,  
 нормальна швидкість вільної поверхні рідини  $v_0 = 0$ ,  
 кут відхилення маятника  $\mu_0 \neq 0$ ,  
 кутова швидкість маятника в початковий момент часу  $\omega_0 \neq 0$ .

При таких початкових умовах зміна кута відхилення наступним чином



залежить від часу

$$\mu(t) = \theta_0 \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos(\sqrt{\lambda_k t}) \theta_k + \omega_0 \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \sin(\sqrt{\lambda_k t}) \theta_k. \quad (3.44)$$

У таблиці 3.20 наведено значення перших п'яти значень  $\lambda_k, \alpha_k, \theta_k$ , при висоті наповнення порожнини рідиною  $h_1 = 0.1$ , довжині від точки підвісу до центра мас твердого тіла  $d_0 = 1$ . Тут взято  $N = 30$  координатних функцій, і  $\eta = \pi/3$ , де, вважаємо,  $\theta_0 = \sin \eta$ ,  $\omega_0 = \cos \eta$ .

На малюнках (3.17) і (3.18) зображено зміну кута  $\mu(t)$  відхилення маятника в залежності від часу у діапазонах  $t = (0..100)$  та  $t = (10..20)$  відповідно, згідно (3.44), для значень  $\lambda_k, \alpha_k, \theta_k$ , взятих з таблиці 3.20.

Таблиця 3.1: Порожнина циліндричної форми, заповнена рідиною на висоту

$$h_1 = 0.15m$$

$d_0$	$\lambda_0$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$
0.000	0.0799	-0.4469	1.9800	5.3828	8.5624
0.002	0.1181	-0.3578	1.9655	5.3795	8.5608
0.004	0.1558	-0.2659	1.9510	5.3762	8.5593
0.006	0.1929	-0.1721	1.9366	5.3729	8.5577
0.008	0.2290	-0.0773	1.9223	5.3696	8.5561
0.010	0.2642	0.0178	1.9084	5.3663	8.5546
0.020	0.4211	0.4674	1.8491	5.3512	8.5473
0.030	0.5406	0.8084	1.8268	5.3399	8.5417
0.040	0.6220	0.9918	1.8663	5.3336	8.5383
0.050	0.6701	1.0409	1.9542	5.3315	8.5367
0.060	0.6925	1.0193	2.0497	5.3324	8.5363
0.080	0.6882	0.9136	2.1932	5.3384	8.5377
0.100	0.6512	0.8030	2.2766	5.3457	8.5398
0.200	0.4360	0.4661	2.3946	5.3688	8.5479
0.400	0.2399	0.2443	2.4195	5.3827	8.5535
0.600	0.1632	0.1646	2.4228	5.3873	8.5554
0.800	0.1234	0.1240	2.4237	5.3895	8.5564
1.000	0.0991	0.0994	2.4239	5.3908	8.5570
1.200	0.0828	0.0829	2.4239	5.3917	8.5574
1.400	0.0710	0.0711	2.4239	5.3923	8.5576
1.600	0.0622	0.0623	2.4239	5.3928	8.5579
1.800	0.0553	0.0554	2.4239	5.3932	8.5580
2.000	0.0498	0.0499	2.4238	5.3934	8.5581

Таблиця 3.2: Циліндрична порожнина при довжині підвісу  $d_0 = 1$ , кількість координатних функцій  $N = 20$

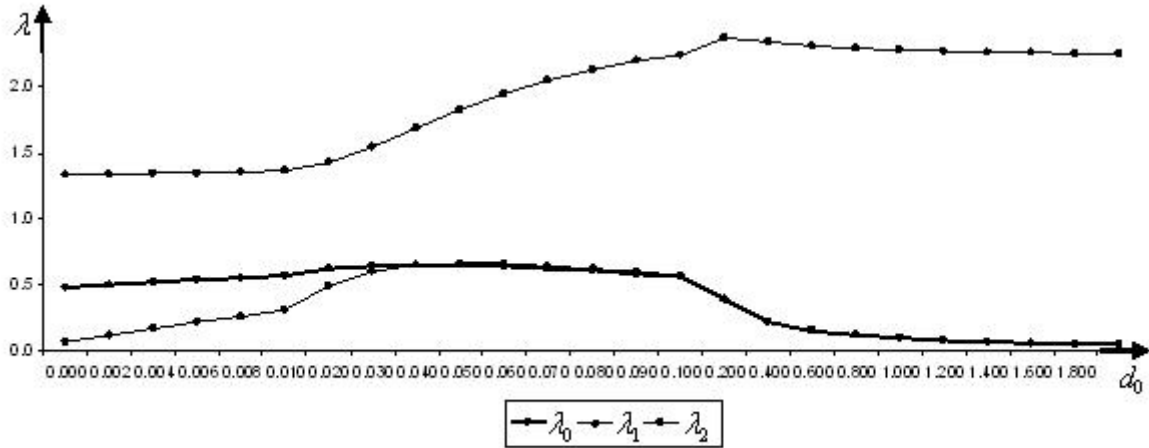
$h_1$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$
0.10	0.097478047	2.630738147	5.441061543	8.573475557	11.748023483
0.11	0.097826010	2.594795609	5.426979043	8.568822721	11.758335869
0.12	0.098193200	2.552590376	5.415286136	8.565016704	11.773549343
0.13	0.098576204	2.508551533	5.405608908	8.561889391	11.794560865
0.14	0.098972400	2.465203057	5.397568293	8.559307952	11.822288861
0.15	0.099379746	2.423891888	5.390838102	8.557172765	11.857563298
0.16	0.099796635	2.385256903	5.385154869	8.555412272	11.901060903
0.17	0.100221786	2.349522368	5.380311303	8.553977724	11.953318760
0.18	0.100654175	2.316678076	5.376145804	8.552838801	12.014818666
0.19	0.101092970	2.286588266	5.372532454	8.551980342	12.086105251

Таблиця 3.3: Циліндрична порожнина, заповнена рідиною на висоту  $h_1 = 0.15$ , при довжині підвісу  $d_0 = 1$

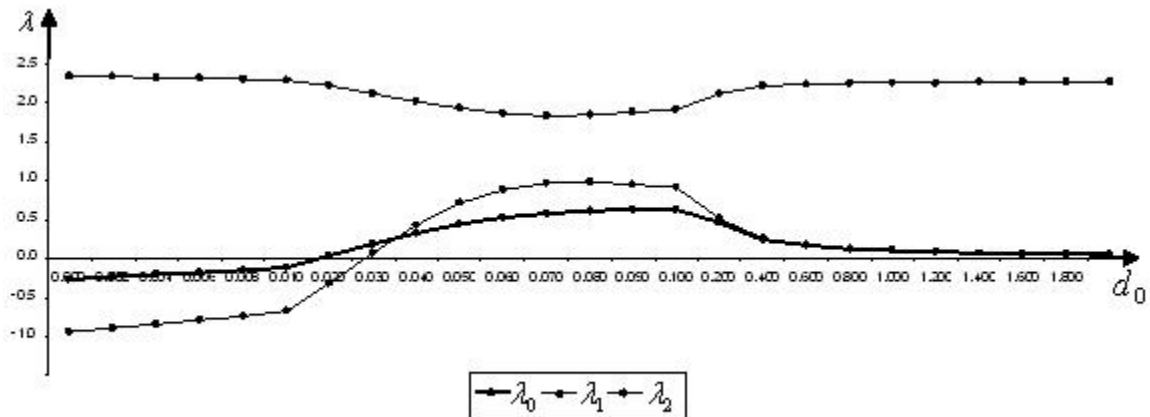
$N$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$
17	0.099379747	2.423892233	5.390838603	8.570831357	13.121458793
18	0.099379747	2.423892220	5.390838428	8.560781976	12.399249476
19	0.099379746	2.423892067	5.390838262	8.557899242	12.039532812
20	0.099379746	2.423891888	5.390838102	8.557172765	11.857563298
21	0.099379746	2.423891814	5.390838032	8.557014965	11.772901665

Порівнюючи результати отримані класичним методом (таблиця 1.1) і варіаційним методом (таблиця 3.2) бачимо, що у випадку циліндричної порожнини результати співпадають. Проте варто зауважити, що, оскільки варіаційний метод полягає у мінімізації функціоналу, він дозволяє оцінити точність за рахунок збільшення кількості координатних функцій, як видно результатів наведених у таблиці (3.3).

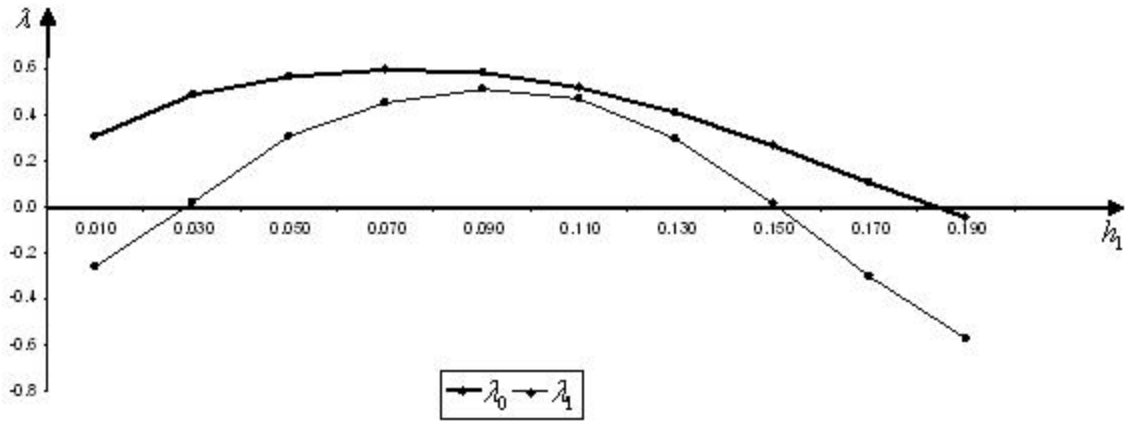
Мал. 3.1: Циліндрична порожнина, залежність власних значень  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$  від довжини підвісу  $d_0$  при висоті наповнення рідиною  $h_1 = 0.05m$



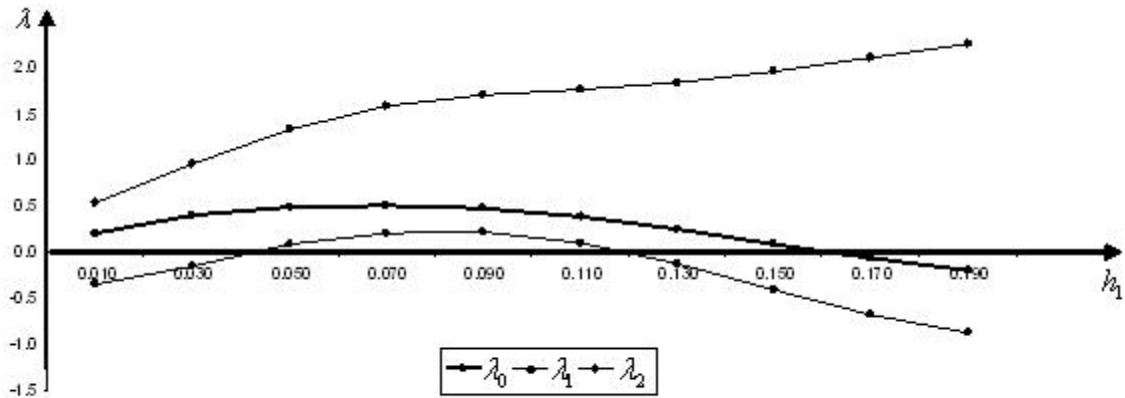
Мал. 3.2: Циліндрична порожнина, залежність власних значень  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$  від довжини підвісу  $d_0$  при висоті наповнення рідиною  $h_1 = 0.2m$



Мал. 3.3: Циліндрична порожнина, залежність власних значень  $\lambda_0, \lambda_1$  від висоти  $h_1$  наповнення рідиною при довжині підвісу  $d_0 = 0.01$



Мал. 3.4: Циліндрична порожнина, залежність власних значень  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$  від висоти  $h_1$  наповнення рідиною при довжині підвісу  $d_0 = 0.001$



Таблиця 3.4: Порожнина сферичної форми при довжині підвісу  $d_0 = 1$ ,  
кількість координатних функцій  $N = 30$

$h_1$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$
0.10	0.097232527	2.610513644	5.397234396	8.548439284	11.706405446
0.09	0.096981596	2.517518539	5.341219445	8.524055265	11.703285914
0.08	0.096794634	2.395490117	5.323010650	8.577201359	11.812286100
0.07	0.096695870	2.237979840	5.344019340	8.714899128	12.045347793
0.06	0.096714837	2.045207285	5.407985047	8.952464229	12.427927375
0.05	0.096884879	1.826092697	5.519937686	9.317311688	13.006942571

Таблиця 3.5: Порожнина сферичної форми при довжині підвісу  $d_0 = 0.2$ ,  
кількість координатних функцій  $N = 30$

$h_1$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$
0.190	0.483000567	5.951267676	13.272690939	24.355033131	276.976711270
0.185	0.481298328	4.902693126	10.910405014	17.021940317	43.074559992
0.180	0.479040656	4.310285708	9.542103958	14.811942805	22.915664771
0.175	0.476305031	3.929652549	8.628650829	13.404813830	18.602196422
0.170	0.473166196	3.667082644	7.971168934	12.389554947	16.871622665
0.165	0.469695323	3.477882641	7.472683835	11.618559419	15.785428759
0.160	0.465958638	3.337668970	7.082175651	11.015366611	14.964784974
0.155	0.462016557	3.231718478	6.768397889	10.531609964	14.309083720

В таблицях 3.4 і 3.5 наведено результати для порівняння їх з відповідними результатами, отриманими застосовуючи класичний і проєкційний методи, що наведено в таблицях 2.1 і 2.3 та 2.6 і 2.7 відповідно.

Таблиця 3.6: Порівняння власного значення  $\lambda_1$  отриманого різними методами для сферичної порожнини для сферичної порожнини. Довжина підвісу  $d_0 = 1$ , кількість координатних функцій  $N = 30$

$h_1$	Варіаційний	Класичний	Проекційний
0.190	0.09981531931	0.09981531799	0.09981531822
0.185	0.09975017853	0.09975017609	0.09975017656
0.180	0.09966466100	0.09966465957	0.09966466038
0.175	0.09956154595	0.09956154408	0.09956154498
0.170	0.09944332301	0.09944332152	0.09944332269
0.165	0.09931224435	0.09931224334	0.09931224442
0.160	0.09917036160	0.09917036058	0.09917036170
0.155	0.09901955913	0.09901955830	0.09901955938
0.150	0.09886158970	0.09886158929	0.09886159013
0.145	0.09869810186	0.09869810155	0.09869810229
0.140	0.09853066647	0.09853066617	0.09853066681
0.135	0.09836080340	0.09836080325	0.09836080368
0.130	0.09819000668	0.09819000668	0.09819000694
0.125	0.09801976939	0.09801976943	0.09801976961
0.120	0.09785160933	0.09785160939	0.09785160948
0.115	0.09768709614	0.09768709623	0.09768709622
0.110	0.09752787988	0.09752787999	0.09752787992
0.105	0.09737572185	0.09737572198	0.09737572188
0.100	0.09723252794	0.09723252806	0.09723252795

Таблиця 3.7: Порівняння власного значення  $\lambda_2$  отриманого різними методами для сферичної порожнини. Довжина підвісу  $d_0 = 1$ , кількість координатних функцій  $N = 30$

$h_1$	Варіаційний	Класичний	Проекційний
0.190	5.94433386990	5.94155083864	5.93713817922
0.185	4.88825724253	4.88741019943	4.88363067718
0.180	4.28680563904	4.28656142197	4.28290015756
0.175	3.89598313466	3.89585543765	3.89298162364
0.170	3.62236442007	3.62231789835	3.61969152035
0.165	3.42149230109	3.42152048328	3.41950783702
0.160	3.26918974841	3.26926809712	3.26751383764
0.155	3.15091533766	3.15103161448	3.14956758832
0.150	3.05733776662	3.05748416504	3.05637089232
0.145	2.98208507444	2.98225084700	2.98131432440
0.140	2.92057072658	2.92074780778	2.91997179940
0.135	2.86933392882	2.86951712283	2.86892644867
0.130	2.82563632523	2.82582103003	2.82535614110
0.125	2.78720701930	2.78738870922	2.78700207653
0.120	2.75207668277	2.75225123216	2.75193823776
0.115	2.71846694605	2.71863073894	2.71838429574
0.110	2.68471759816	2.68486753921	2.68466901294
0.105	2.64924295439	2.64937659057	2.64921278481
0.100	2.61051364440	2.61062931634	2.61049528825



Таблиця 3.8: Порівняння власного значення  $\lambda_3$  отриманого різними методами для сферичної порожнини. Довжина підвісу  $d_0 = 1$ , кількість координатних функцій  $N = 30$

$h_1$	Варіаційний	Класичний	Проекційний
0.190	3.27273648401	13.24851139193	13.24397734501
0.185	0.91000448337	10.90397118667	10.89987137251
0.180	9.54112117650	9.53841048353	9.53323503705
0.175	8.62699036976	8.62575869078	8.62140546083
0.170	7.96876228837	7.96799906973	7.96380456558
0.165	7.46948135224	7.46917771421	7.46580149493
0.160	7.07814927596	7.07801482329	7.07498093498
0.155	6.76353835815	6.76346988629	6.76082334438
0.150	6.50597737837	6.50600113542	6.50393606792
0.145	6.29236154707	6.29242733963	6.29066143136
0.140	6.11345476124	6.11352929695	6.11201631069
0.135	5.96259771171	5.96268185678	5.96152806551
0.130	5.83488201249	5.83497255129	5.83408986381
0.125	5.72659959941	5.72668844580	5.72596327395
0.120	5.63490644700	5.63498919966	5.63442124199
0.115	5.55761009185	5.55768511356	5.55728238311
0.110	5.49302543999	5.49309146841	5.49281013198
0.105	5.43987702854	5.43993309216	5.43972825385
0.100	5.39723439674	5.39728022565	5.39713560960

Таблиця 3.9: Порівняння власного значення  $\lambda_4$  отриманого різними методами для сферичної порожнини. Довжина підвісу  $d_0 = 1$ , кількість координатних функцій  $N = 30$

$h_1$	Варіаційний	Класичний	Проекційний
0.190	24.35609761859	20.62501700733	20.78599885557
0.185	17.02226859432	16.91664989359	16.91202136952
0.180	14.81215835130	14.81019385638	14.80409881757
0.175	13.40493228119	13.40059360374	13.39592164951
0.170	12.38956401824	12.38643419951	12.38132092187
0.165	11.61845613897	11.61709452830	11.61303049019
0.160	11.01515614607	11.01460356211	11.01083481341
0.155	10.53130388316	10.53086231929	10.52755352422
0.150	10.13618421373	10.13598684382	10.13337947486
0.145	9.80994631381	9.80990990866	9.80769620173
0.140	9.53857458799	9.53856109138	9.53665548881
0.135	9.31196245827	9.31197336954	9.31051306885
0.130	9.12279171807	9.12283479320	9.12174012954
0.125	8.96563474826	8.96568847866	8.96480818679
0.120	8.83640216085	8.83645292429	8.83577154857
0.115	8.73202482939	8.73207100416	8.73160250794
0.110	8.65023421083	8.65027539728	8.64996880425
0.105	8.58940302593	8.58943789130	8.58923272978
0.100	8.54843928498	8.54846725303	8.54833774912

Таблиця 3.10: Порівняння власного значення  $\lambda_5$  отриманого різними методами для сферичної порожнини. Довжина підвісу  $d_0 = 1$ , кількість координатних функцій  $N = 30$

$h_1$	Варіаційний	Класичний	Проекційний
0.190	277.02580199615	52.14126988857	65.13598657491
0.185	43.07895240968	23.98212478008	24.99661224366
0.180	22.91672440221	20.09325735135	20.15878849084
0.175	18.60270968116	18.17551311489	18.17135858466
0.170	16.87200720456	16.80573634277	16.80091372095
0.165	15.78577504929	15.76556934723	15.76209278512
0.160	14.96511739109	14.95363894491	14.94960648220
0.155	14.30941212163	14.30325204773	14.29947887499
0.150	13.77562702162	13.77325539989	13.77022857512
0.145	13.33731879441	13.33682216950	13.33423013065
0.140	12.97496131023	12.97491297632	12.97267240751
0.135	12.67415107828	12.67413683521	12.67240294474
0.130	12.42471576111	12.42472680007	12.42343819913
0.125	12.21935444804	12.21938081015	12.21836048136
0.120	12.05264204468	12.05266809379	12.05187787305
0.115	11.92053035127	11.92055762877	11.92001629849
0.110	11.82005766792	11.82008732089	11.81974478309
0.105	11.74913550577	11.74916356223	11.74894773229
0.100	11.70640544624	11.70642871959	11.70630451234

Таблиця 3.11: Порожнина сферичної форми, заповнена рідиною на висоту  $h_1 = 0.15$ , при довжині підвісу  $d_0 = 0.2$

$N$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$
20	0.457924769	3.150561353	6.512543212	10.263026898	23.982206472
21	0.457924494	3.150555012	6.512401366	10.173268619	18.341254578
22	0.457924250	3.150543590	6.512100936	10.147360676	15.821177954
23	0.457924205	3.150539072	6.511919992	10.141190517	14.674400315
24	0.457924192	3.150539072	6.511907997	10.139386045	14.155117794
25	0.457924098	3.150536278	6.511871902	10.138271490	13.927582290
26	0.457924013	3.150532137	6.511774538	10.137328569	13.834924388
27	0.457923997	3.150530717	6.511722547	10.136811407	13.799815077
28	0.457923991	3.150530696	6.511721635	10.136731575	13.785876937
29	0.457923953	3.150529387	6.511699979	10.136709255	13.779089654
30	0.457923917	3.150527633	6.511656678	10.136568610	13.775294027

Враховуючи, що варіаційний метод дозволяє підвищити точність розв'язку за рахунок підвищення кількості координатних функцій, і дає при цьому збіжні зверху результати (таблиця 3.11), можемо порівнювати отримані результати з результатами, отриманими вище згаданими методами — проекційним та класичним, що наведено у таблицях 3.6 — 3.10. Маючи результати для більшої кількості координатних функцій, можемо бачити похибку, яку дає класичний і проекційний методи.

Таблиця 3.12: Порожнина сферичної форми, заповнена рідиною на висоту  $h_1 = 0.15$ , кількість координатних функцій  $N = 30$

$d_0$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$
0.20	0.457923917	3.150527633	6.511656678	10.136568610	13.775294027
0.19	0.478899316	3.155356635	6.511672579	10.136441527	13.775185545
0.18	0.501773503	3.160487162	6.511636283	10.136279020	13.775053308
0.17	0.526794819	3.165919354	6.511528643	10.136071289	13.774891267
0.16	0.554250790	3.171637669	6.511323369	10.135805346	13.774691498
0.15	0.584473721	3.177599934	6.510984020	10.135463787	13.774443508
0.14	0.617845790	3.183719264	6.510459546	10.135023033	13.774133247
0.13	0.654802137	3.189833912	6.509677624	10.134450758	13.773741679
0.12	0.695828851	3.195656357	6.508534612	10.133702124	13.773242712
0.11	0.741449605	3.200686128	6.506880346	10.132714243	13.772600182
0.10	0.792188474	3.204058489	6.504495193	10.131398081	13.771763490
0.09	0.848483691	3.204278881	6.501056186	10.129626880	13.770661418
0.08	0.910500056	3.198755047	6.496089854	10.127220597	13.769193898
0.07	0.977727424	3.182984145	6.488916176	10.123928146	13.767222621
0.06	1.048107507	3.149220448	6.478613621	10.119417161	13.764565461
0.05	1.116043700	3.084683097	6.464108087	10.113303101	13.761010772
0.04	1.167505012	2.970918001	6.444638541	10.105296538	13.756392348
0.03	1.167169789	2.792155097	6.420951899	10.095596659	13.750796409
0.02	1.030488937	2.571977075	6.396926462	10.085526232	13.744922450
0.01	0.633447207	2.408855068	6.379279389	10.077748636	13.740285069

Результати, отримані варіаційним методом, що наведено в таблиці 3.12, можемо порівняти з аналогічними результатами, отриманими класичним і проекційним методами, що наведено в таблицях 2.11 і 2.12 відповідно.

Таблиця 3.13: Порожнина сферичної форми, заповнена рідиною на висоту  $h_1 = 0.18$ , кількість координатних функцій  $N = 30$

$d_0$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$
0.20	0.479040656	4.310285708	9.542103958	14.811942805	22.915664771
0.19	0.502255321	4.311328521	9.542028050	14.811859273	22.915487492
0.18	0.527727146	4.312405085	9.541923491	14.811756866	22.915276000
0.17	0.555780712	4.313504271	9.541781647	14.811630641	22.915021905
0.16	0.586799603	4.314607369	9.541590886	14.811474071	22.914714234
0.15	0.621237756	4.315683864	9.541335353	14.811278423	22.914338447
0.14	0.659631907	4.316684686	9.540993136	14.811031856	22.913875030
0.13	0.702613695	4.317531245	9.540533514	14.810718083	22.913297411
0.12	0.750917872	4.318097283	9.539912744	14.810314353	22.912568860
0.11	0.805378342	4.318178254	9.539067500	14.809788373	22.911637794
0.10	0.866893583	4.317438621	9.537904555	14.809093546	22.910430605
0.09	0.936320559	4.315319555	9.536284421	14.808161578	22.908840638
0.08	1.014206420	4.310875449	9.533995556	14.806891092	22.906711428
0.07	1.100155050	4.302485900	9.530715145	14.805130741	22.903812163
0.06	1.191372099	4.287371909	9.525955815	14.802656999	22.899805904
0.05	1.279374814	4.260915707	9.519018370	14.799155700	22.894223885
0.04	1.342777401	4.216325060	9.509048491	14.794248587	22.886504711
0.03	1.333124858	4.147299170	9.495501633	14.787691582	22.876279379
0.02	1.157729481	4.059671638	9.479525599	14.779973167	22.864245171
0.01	0.706091208	3.985758964	9.465716500	14.773175458	22.853521303

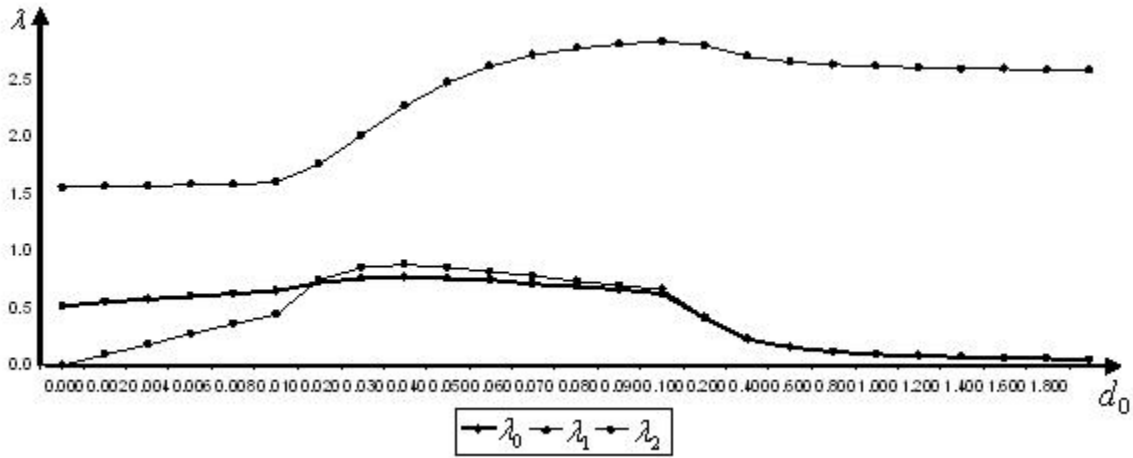
Результати, отримані варіаційним методом, що наведено в таблиці 3.13, можемо порівняти з аналогічними результатами, отриманими класичним і проекційним методами, що наведено в таблицях 2.13 і 2.14 відповідно.

Таблиця 3.14: Порожнина сферичної форми, заповнена рідиною на висоту

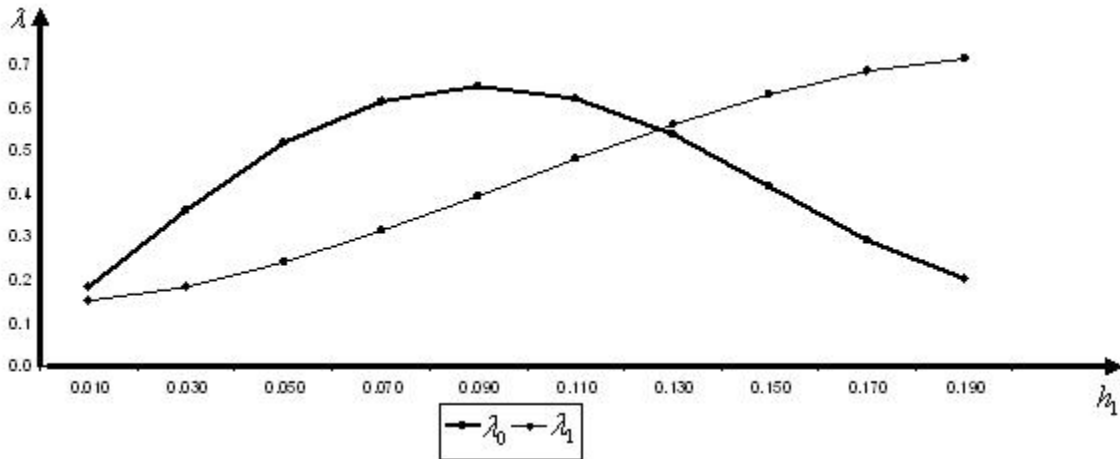
 $h_1 = 0.10m$ , кількість координатних функцій  $N = 20$ 

$d_0$	$\lambda_0$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$
0.000	0.5210	0.0000	1.5602	5.2764	9.1100
0.002	0.5501	0.0927	1.5614	5.2765	9.1100
0.004	0.5771	0.1842	1.5653	5.2768	9.1102
0.006	0.6020	0.2735	1.5724	5.2773	9.1105
0.008	0.6249	0.3594	1.5834	5.2781	9.1110
0.010	0.6457	0.4405	1.5987	5.2790	9.1116
0.020	0.7218	0.7415	1.7545	5.2871	9.1162
0.030	0.7592	0.8596	2.0127	5.3001	9.1230
0.040	0.7690	0.8766	2.2704	5.3161	9.1310
0.050	0.7607	0.8548	2.4727	5.3327	9.1389
0.060	0.7413	0.8192	2.6153	5.3481	9.1460
0.080	0.6873	0.7389	2.7705	5.3719	9.1571
0.100	0.6285	0.6634	2.8282	5.3867	9.1644
0.200	0.4096	0.4173	2.7954	5.4051	9.1760
0.400	0.2297	0.2310	2.6932	5.4033	9.1777
0.600	0.1582	0.1586	2.6487	5.4009	9.1775
0.800	0.1204	0.1206	2.6251	5.3994	9.1773
1.000	0.0971	0.0972	2.6105	5.3985	9.1771
1.200	0.0814	0.0814	2.6007	5.3978	9.1769
1.400	0.0700	0.0700	2.5935	5.3973	9.1768
1.600	0.0614	0.0615	2.5882	5.3969	9.1767
1.800	0.0547	0.0547	2.5840	5.3966	9.1766
2.00000	0.0493	0.0493	2.5806	5.3964	9.1765

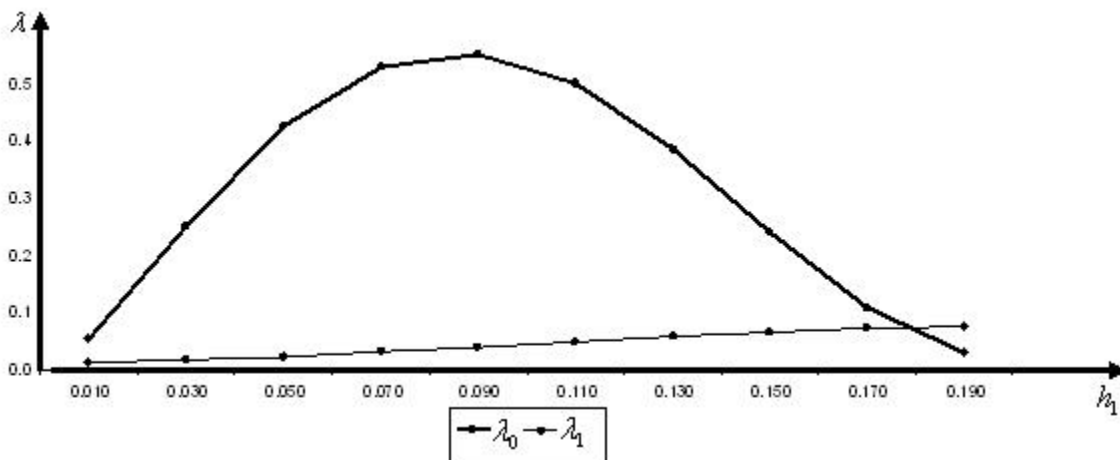
Мал. 3.5: Порожнина сферичної форми, залежність власних значень  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$  від довжини підвісу  $d_0$  при висоті наповнення рідиною  $h_1 = 0.1m$



Мал. 3.6: Порожнина сферичної форми, залежність власних значень  $\lambda_0, \lambda_1$  від висоти  $h_1$  наповнення рідиною при довжині підвісу  $d_0 = 0.01$



Мал. 3.7: Порожнина сферичної форми, залежність власних значень  $\lambda_0, \lambda_1$  від висоти  $h_1$  наповнення рідиною при довжині підвісу  $d_0 = 0.01$





Таблиця 3.15: Власні значення та відповідні коефіцієнти ряду Фур'є розкладу кута відхилення маятника для задачі Коші у випадку  $\theta_0 \neq 0$ . Висота наповнення рідиною  $h_1 = 0.15$ , довжина підвісу  $d_0 = 1$ , кількість координатних функцій  $N = 20$

k	1	2	3	4	5
$\lambda_k$	0.09886159	3.05734875	6.50619495	10.13788792	13.92800162
$\alpha_k$	4.67732536	-2.55118356	0.82053096	-0.32960111	1.83026703
$\theta_k$	0.04645386	-0.02545646	0.00840362	-0.00446053	0.00319498

Таблиця 3.16: Власні значення та відповідні коефіцієнти ряду Фур'є розкладу кута відхилення маятника для задачі Коші у випадку  $\theta_0 \neq 0$ . Висота наповнення рідиною  $h_1 = 0.18$ , довжина підвісу  $d_0 = 1$ , кількість координатних функцій  $N = 20$

k	1	2	3	4	5
$\lambda_k$	0.86689597	4.31792855	9.54285970	15.60508094	78.74265836
$\alpha_k$	0.68098451	-0.22929765	0.06812990	-0.01549392	0.13875379
$\theta_k$	0.40850135	-0.13830965	0.04214945	-0.02829762	0.03649075

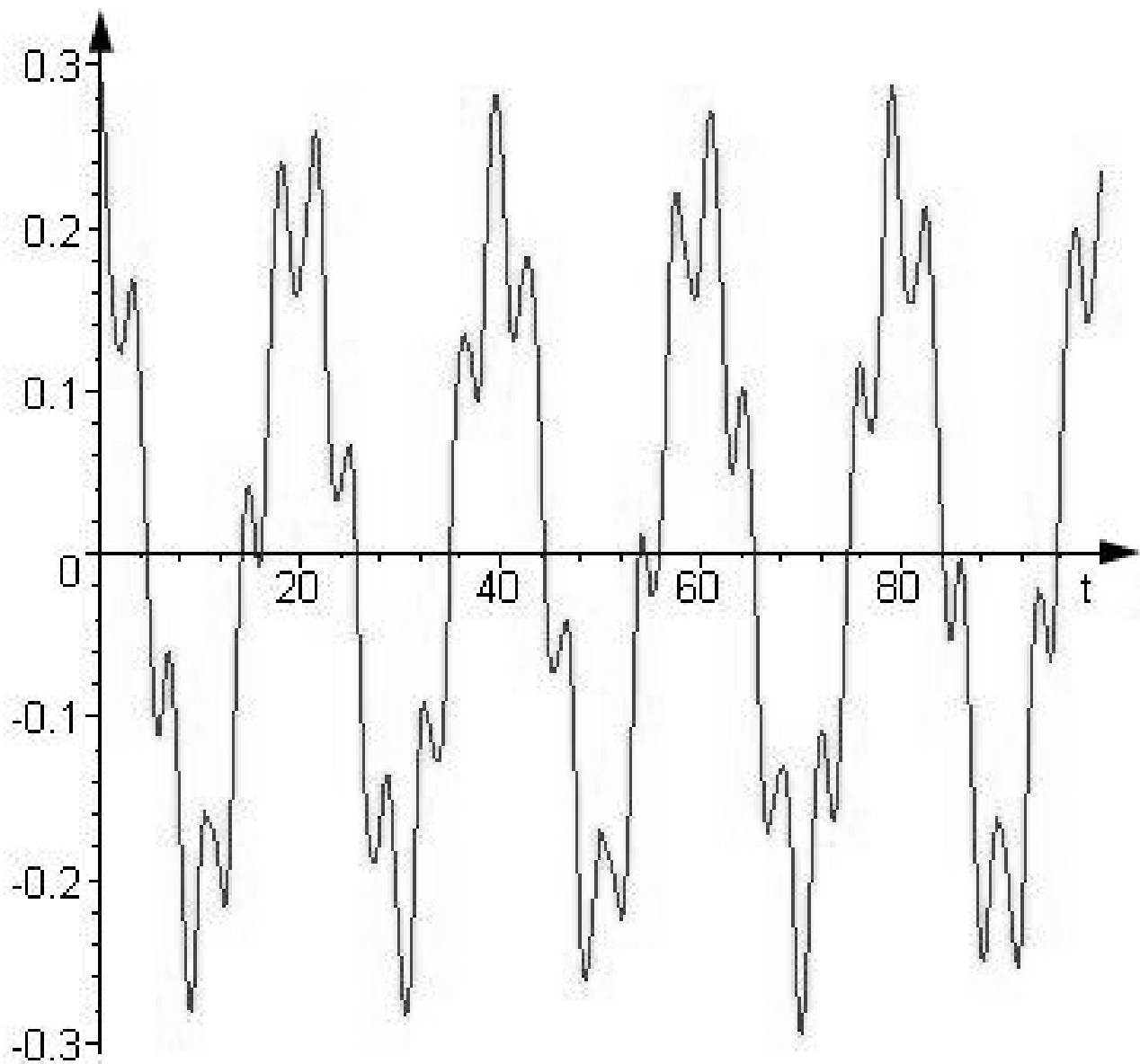
Таблиця 3.17: Власні значення та відповідні коефіцієнти ряду Фур'є розкладу кута відхилення маятника для задачі Коші у випадку  $\theta_0 \neq 0$ . Висота наповнення рідиною  $h_1 = 0.15$ , довжина підвісу  $d_0 = 0.2$ , кількість координатних функцій  $N = 20$

k	1	2	3	4	5
$\lambda_k$	0.45792409	3.15053627	6.51187190	10.13827149	13.92758229
$\alpha_k$	1.01900688	-0.64371030	0.19524228	-0.06227958	0.60994251
$\theta_k$	0.21801170	-0.13867516	0.04373481	-0.02243763	0.01582321

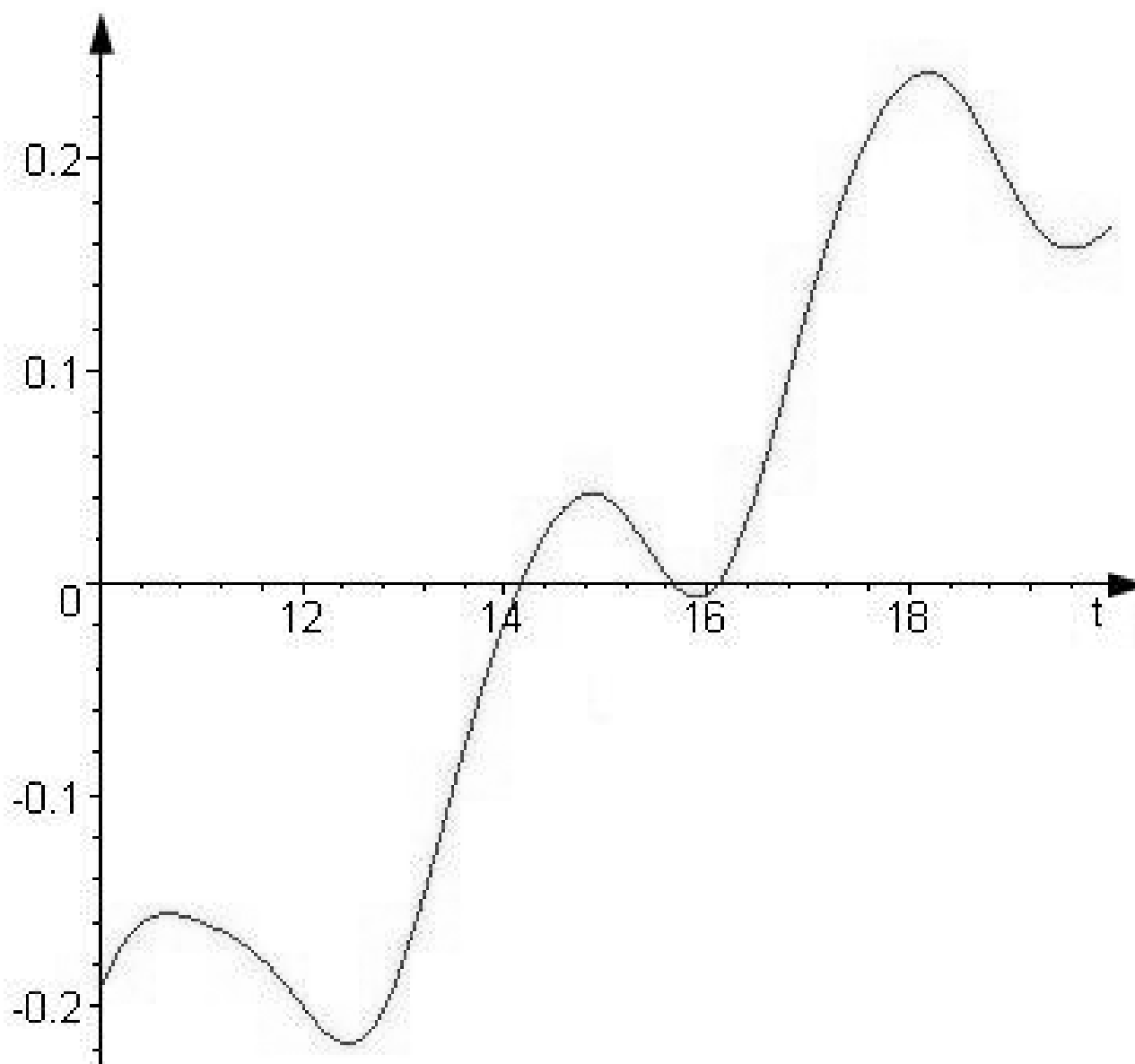
Таблиця 3.18: Власні значення та відповідні коефіцієнти ряду Фур'є розкладу кута відхилення маятника для задачі Коші у випадку  $\theta_0 \neq 0$ . Висота наповнення рідиною  $h_1 = 0.18$ , довжина підвісу  $d_0 = 0.2$ , кількість координатних функцій  $N = 20$

k	1	2	3	4	5
$\lambda_k$	0.47904105	4.31078295	9.54704829	15.60961744	78.79658634
$\alpha_k$	1.00830160	-0.31724452	0.10168310	-0.04122847	0.16685858
$\theta_k$	0.21604869	-0.06822834	0.02221482	-0.01521707	0.02005296

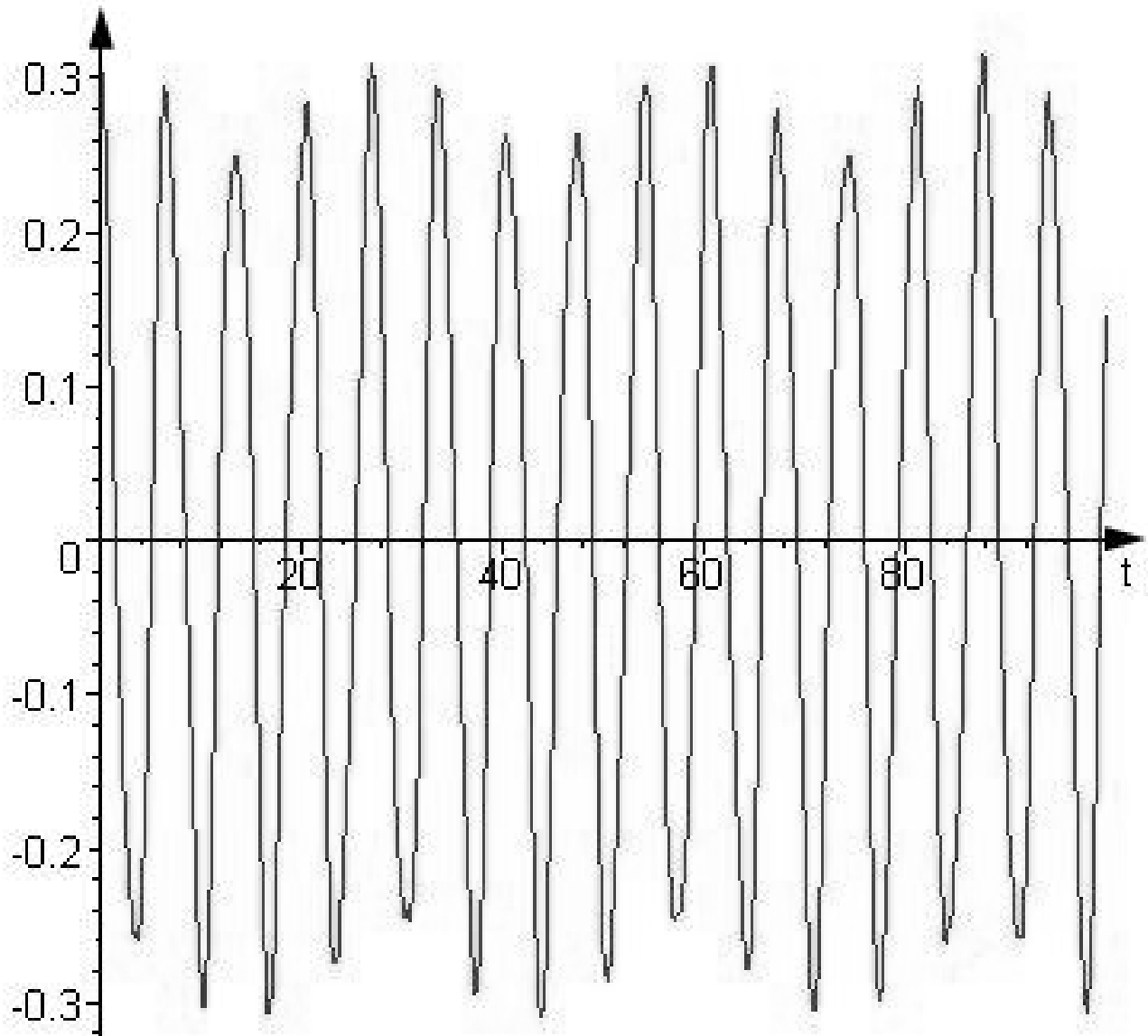
Мал. 3.8: Кут відхилення маятника в залежності від часу ( $t = (0..100)$ ) у випадку  $\theta_0 \neq 0$  Висота наповнення рідиною  $h_1 = 0.15$ , довжина підвісу  $d_0 = 1$ , кількість координатних функцій  $N = 20$



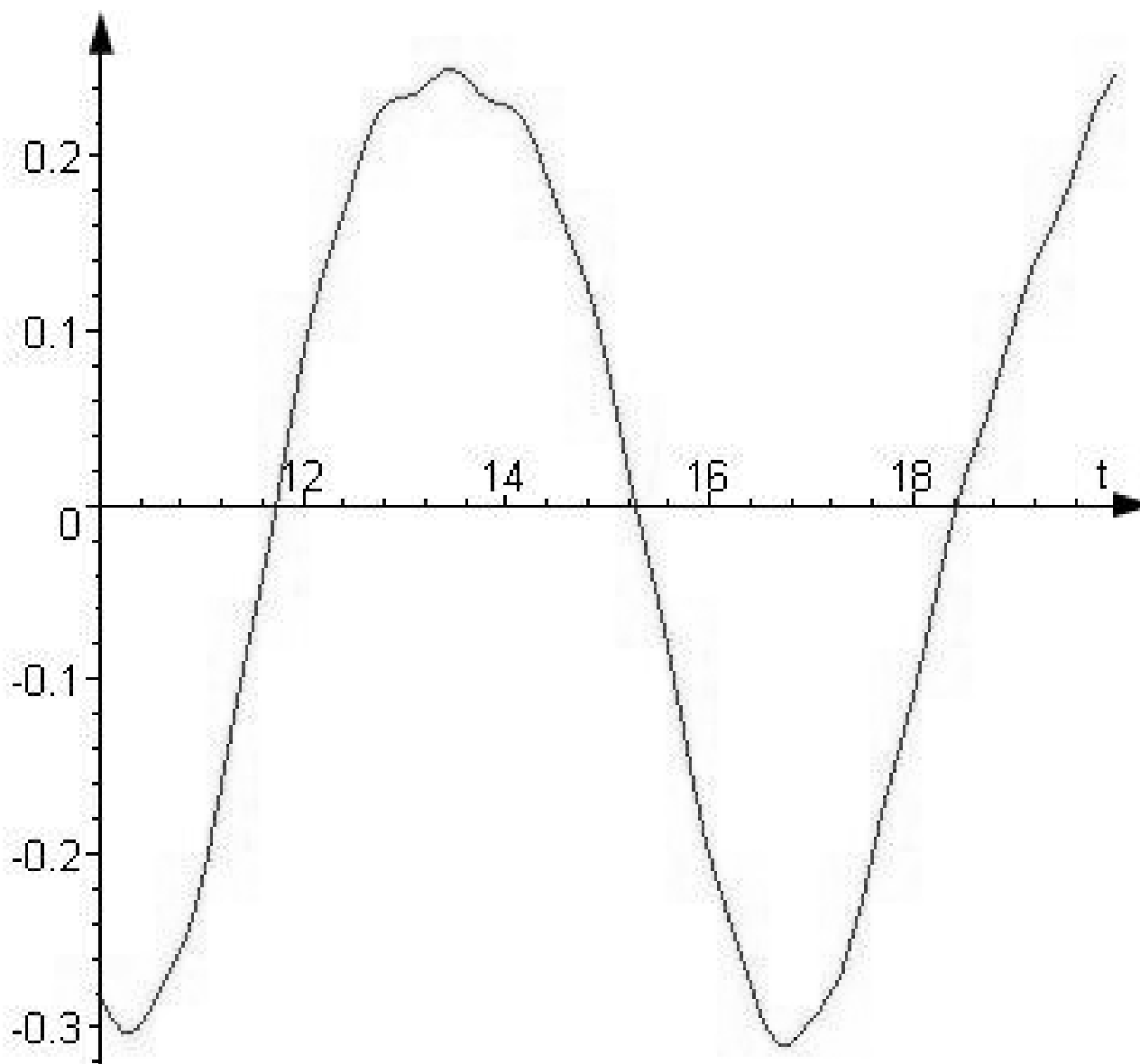
Мал. 3.9: Кут відхилення маятника в залежності від часу ( $t = (10..20)$ ) у випадку  $\theta_0 \neq 0$ . Висота наповнення рідиною  $h_1 = 0.15$ , довжина підвісу  $d_0 = 1$ , кількість координатних функцій  $N = 20$



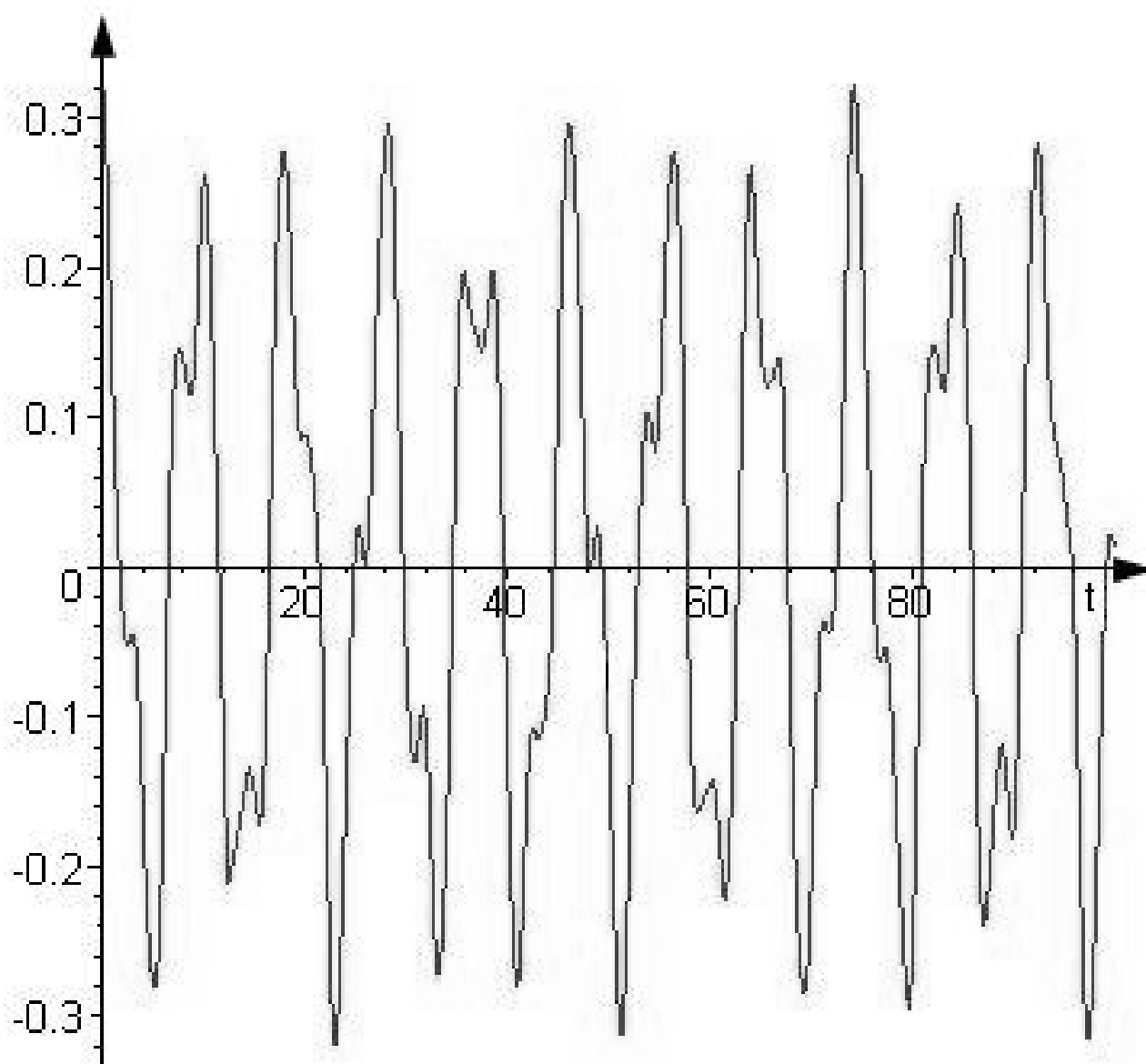
Мал. 3.10: Кут відхилення маятника в залежності від часу ( $t = (0..100)$ ) у випадку  $\theta_0 \neq 0$  Висота наповнення рідиною  $h_1 = 0.18$ , довжина підвісу  $d_0 = 1$ , кількість координатних функцій  $N = 20$



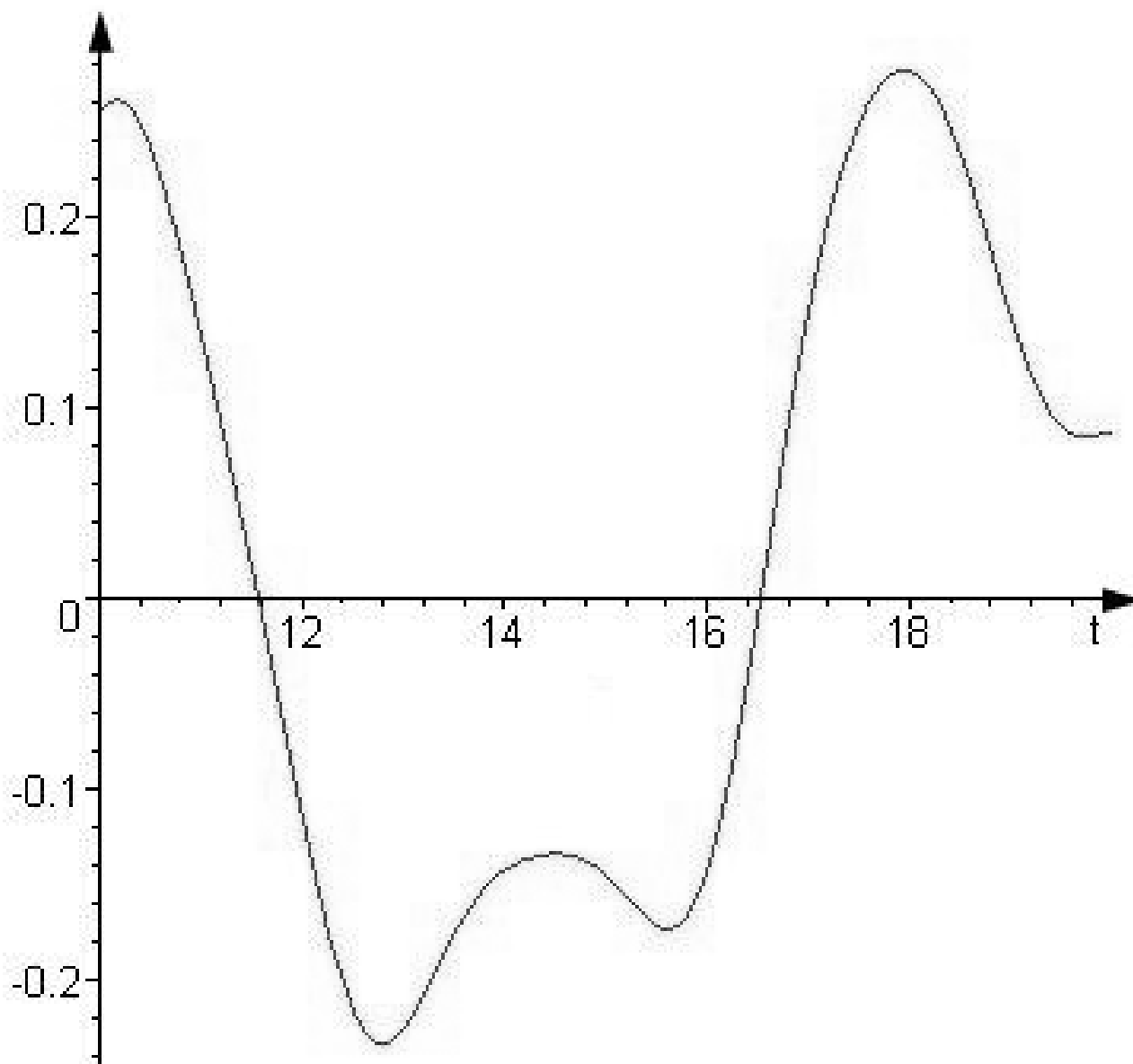
Мал. 3.11: Кут відхилення маятника в залежності від часу ( $t = (10..20)$ ) у випадку  $\theta_0 \neq 0$ . Висота наповнення рідиною  $h_1 = 0.18$ , довжина підвісу  $d_0 = 1$ , кількість координатних функцій  $N = 20$



Мал. 3.12: Кут відхилення маятника в залежності від часу ( $t = (0..100)$ ) у випадку  $\theta_0 \neq 0$  Висота наповнення рідиною  $h_1 = 0.15$ , довжина підвісу  $d_0 = 0.2$ , кількість координатних функцій  $N = 20$

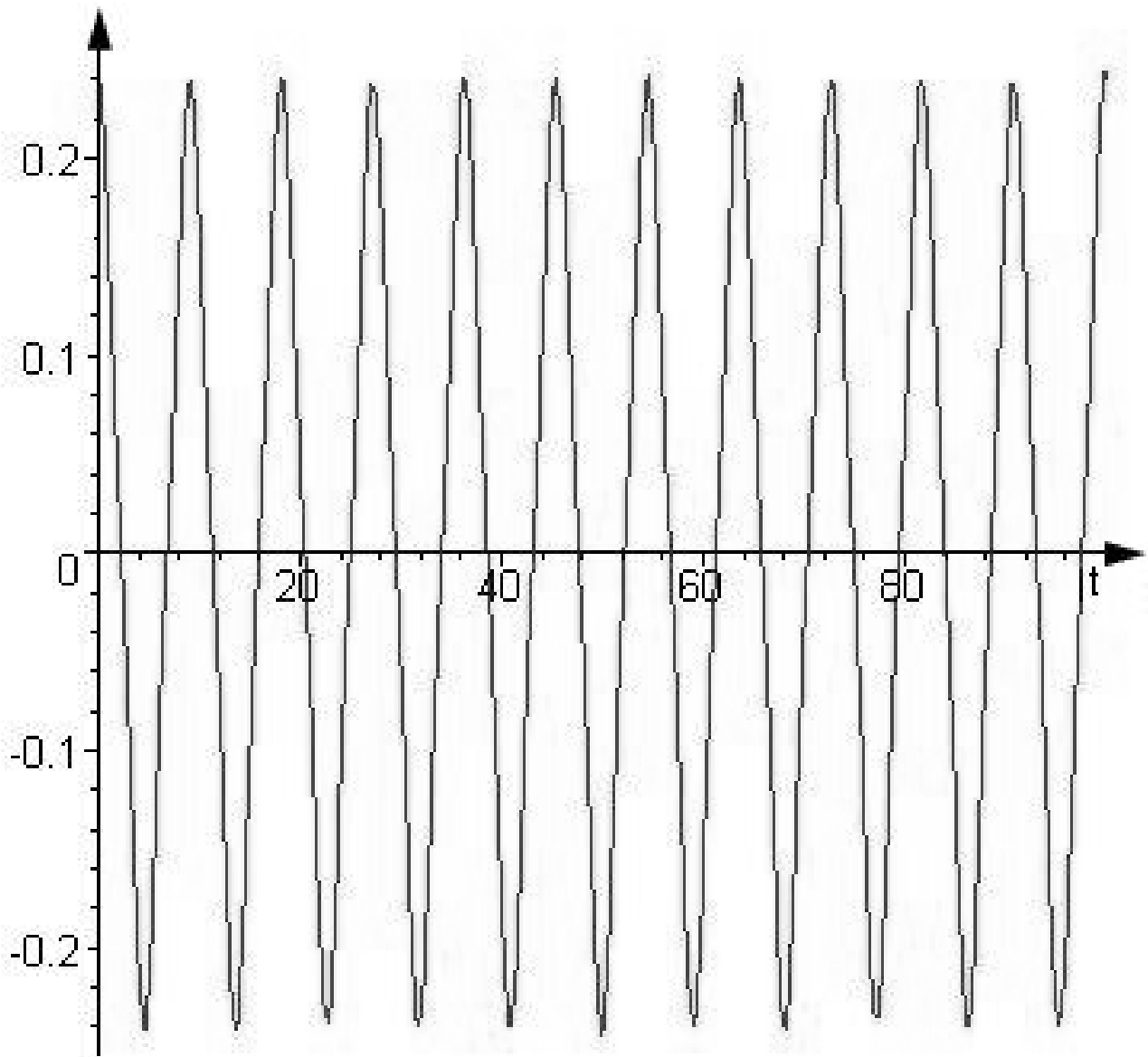


Мал. 3.13: Кут відхилення маятника в залежності від часу ( $t = (10..20)$ ) у випадку  $\theta_0 \neq 0$ . Висота наповнення рідиною  $h_1 = 0.15$ , довжина підвісу  $d_0 = 0.2$ , кількість координатних функцій  $N = 20$

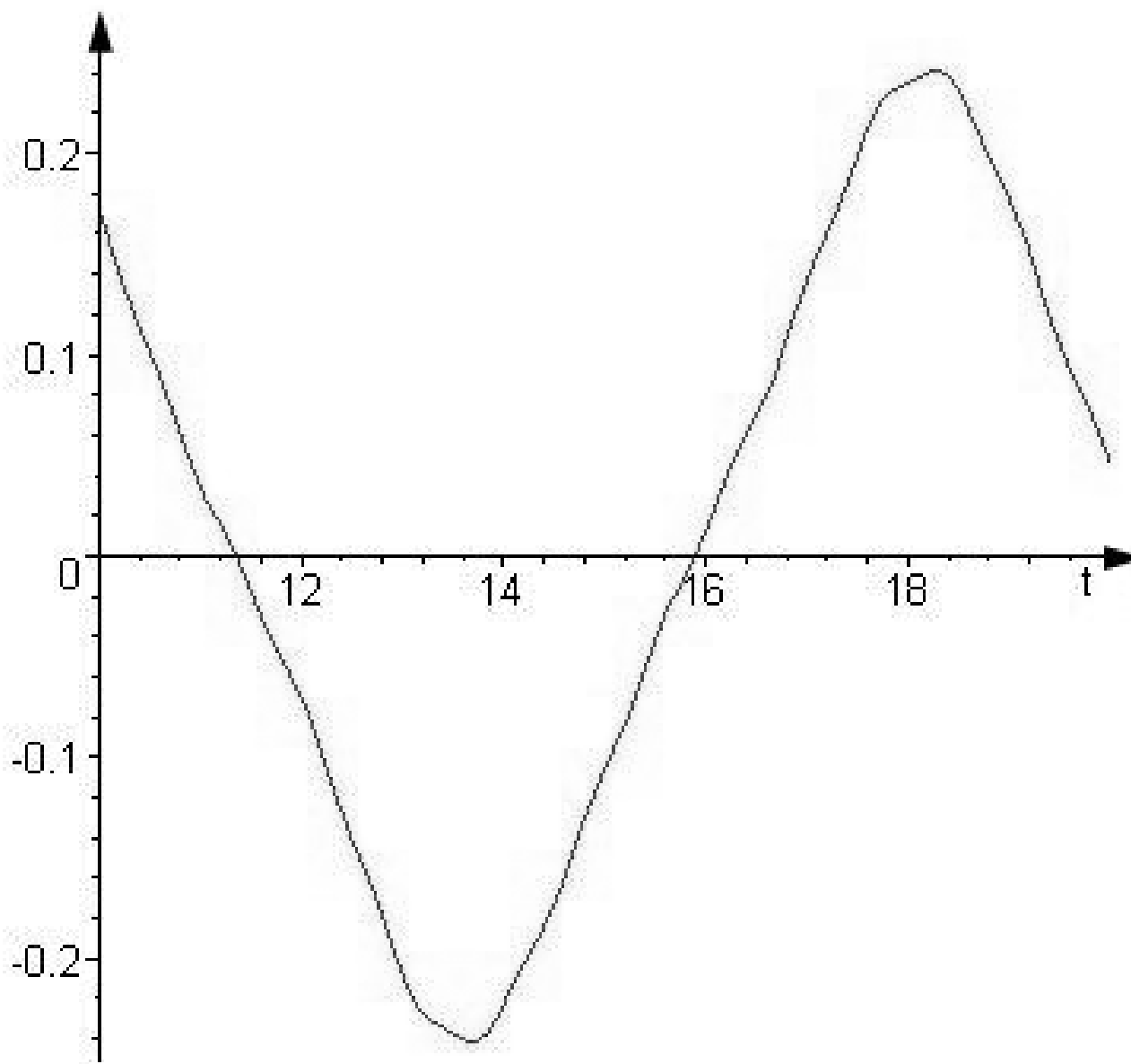




Мал. 3.14: Кут відхилення маятника в залежності від часу ( $t = (0..100)$ ) у випадку  $\theta_0 \neq 0$ . Висота наповнення рідиною  $h_1 = 0.18$ , довжина підвісу  $d_0 = 0.2$ , кількість координатних функцій  $N = 20$



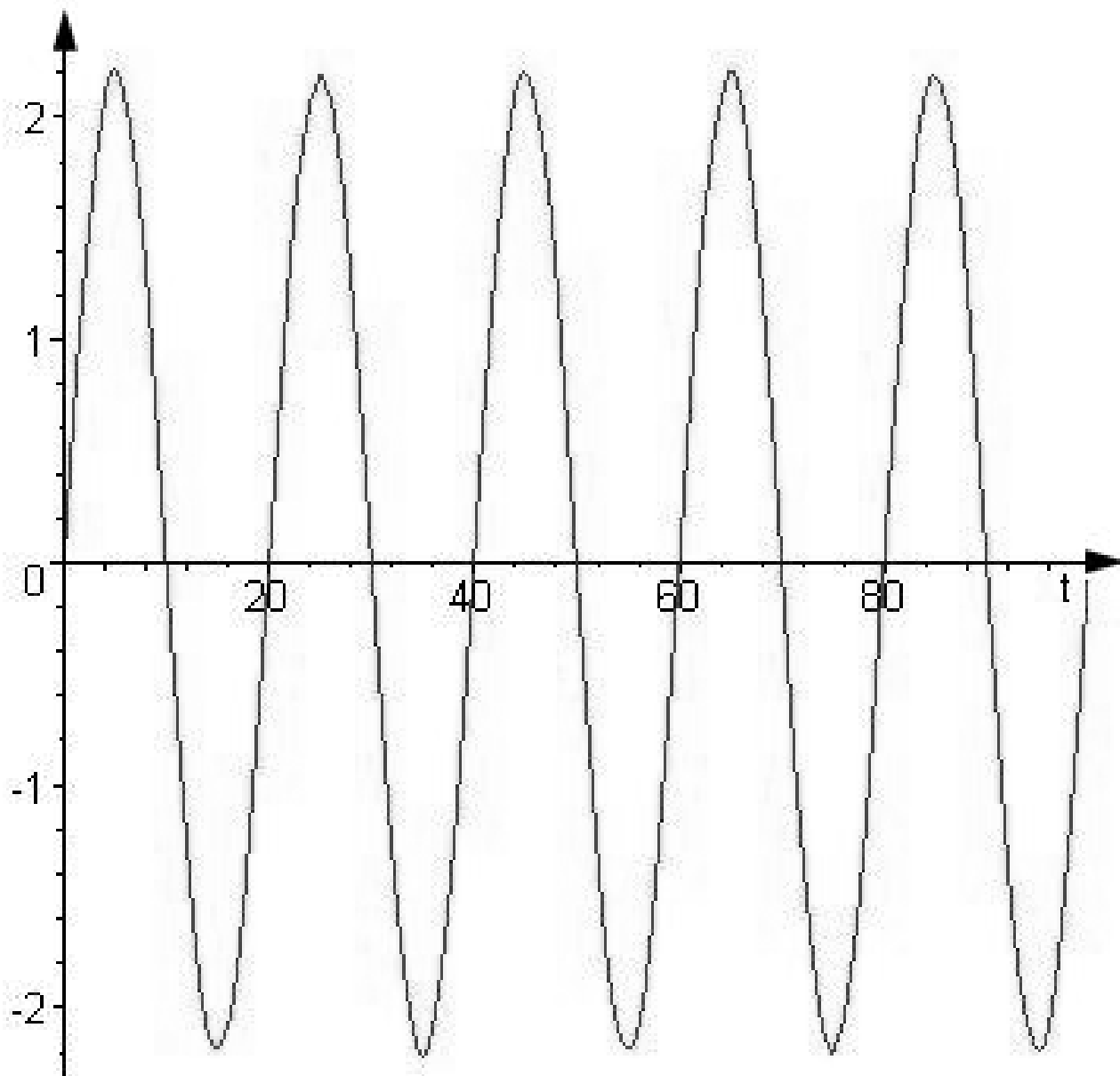
Мал. 3.15: Кут відхилення маятника в залежності від часу ( $t = (10..20)$ ) у випадку  $\theta_0 \neq 0$ . Висота наповнення рідиною  $h_1 = 0.18$ , довжина підвісу  $d_0 = 0.2$ , кількість координатних функцій  $N = 20$



Таблиця 3.19: Власні значення та відповідні коефіцієнти ряду Фур'є розкладу кута відхилення маятника для задачі Коші у випадку  $\omega_0 \neq 0$ . Висота наповнення рідиною  $h_1 = 0.15$ , довжина підвісу  $d_0 = 0.2$ , кількість координатних функцій  $N = 20$

k	1	2	3	4	5
$\lambda_k$	0.45792409	3.15053627	6.51187190	10.13827149	13.92758229
$\beta_k$	2.22527463	-0.20431769	0.02998251	-0.00614301	0.04379385
$\theta_k$	0.21801170	-0.13867516	0.04373481	-0.02243763	0.01582321

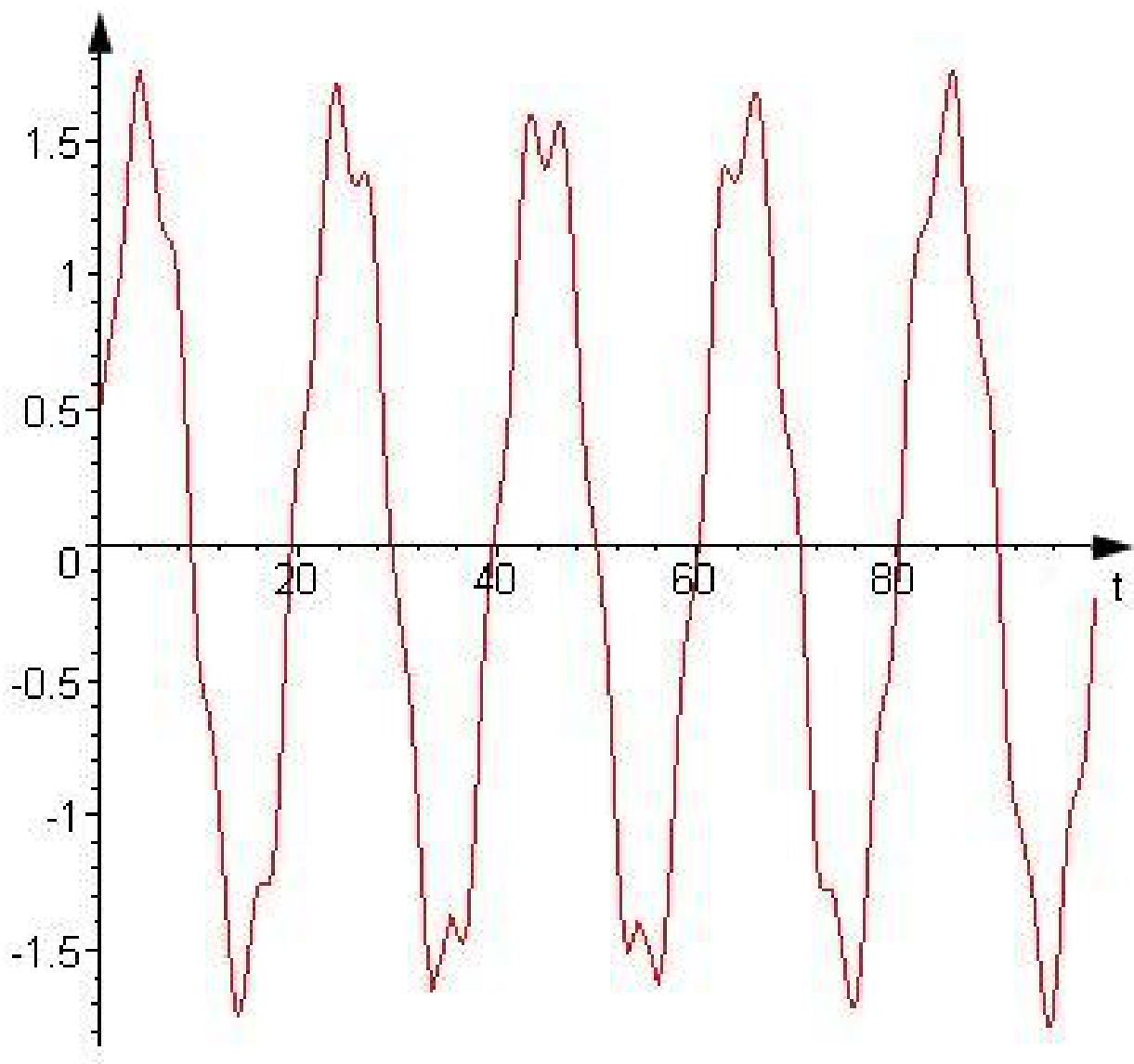
Мал. 3.16: Кут відхилення маятника в залежності від часу ( $t = (0..100)$ ) у випадку  $\omega_0 \neq 0$ . Висота наповнення рідиною  $h_1 = 0.15$ , довжина підвісу  $d_0 = 0.2$ , кількість координатних функцій  $N = 20$



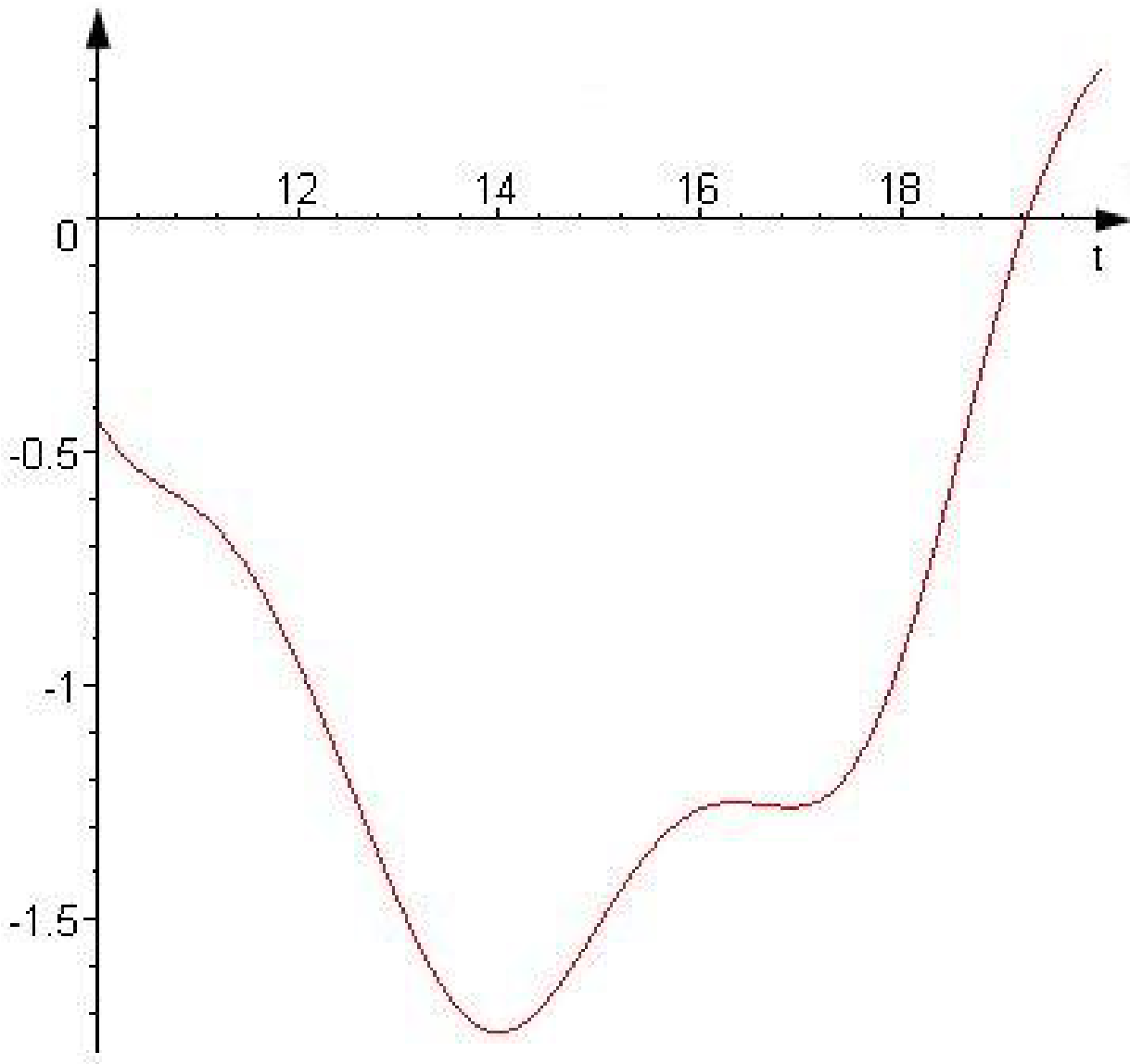
Таблиця 3.20: Власні значення та відповідні коефіцієнти ряду Фур'є розкладу кута відхилення маятника для задачі Коші у випадку  $\theta \neq 0$ ,  $\omega_0 \neq 0$ . Висота наповнення рідиною  $h_1 = 0.1$ , довжина підвісу  $d_0 = 1$ , кількість координатних функцій  $N = 30$

k	1	2	3	4	5
$\lambda_k$	0.09723252	2.61051364	5.39723434	8.54843910	11.70640496
$\alpha_k$	-5.53196045	4.67670353	1.71498123	1.15161758	0.97446698
$\beta_k$	-56.89413377	1.79148787	0.31775185	0.13471670	0.08324220
$\theta_k$	-0.05530645	0.04629054	0.0129645308	0.00584323	0.00350502

Мал. 3.17: Кут відхилення маятника в залежності від часу ( $t = (0..100)$ ) у випадку  $\theta \neq 0$ ,  $\omega_0 \neq 0$ . Висота наповнення рідиною  $h_1 = 0.1$ , довжина підвісу  $d_0 = 1$ , кількість координатних функцій  $N = 30$



Мал. 3.18: Кут відхилення маятника в залежності від часу ( $t = (0..20)$ ) у випадку  $\theta \neq 0$ ,  $\omega_0 \neq 0$ . Висота наповнення рідиною  $h_1 = 0.1$ , довжина підвісу  $d_0 = 1$ , кількість координатних функцій  $N = 30$



### 3.6. Висновки до розділу

Варіаційний метод полягає у мінімізації функціоналу, і таким чином забезпечує збіжність зверху при збільшенні кількості координатних функцій. Тому такий метод дозволяє оцінити точність.

Для циліндричної порожнини, при малій відстані  $d_0$  від центра ваги твердого тіла до точки підвісу перше власне значення  $\lambda_1$  суттєво відрізняються від значення  $\lambda_0$  ("замерзла" рідина), що демонструє вплив рідини на частоту коливань системи тіло–рідина, і хоч лінія підвісу знаходиться вище центра ваги маятника,  $\lambda_1$  може приймати від'ємні значення (таблиця 3.1, мал. 3.2,3.3,3.4), а це означає, що рідина додає нестійкості системі. При збільшенні відстані  $d_0$  перше власне значення  $\lambda_1$  прямує до  $\lambda_0$ .

Для сферичної порожнини таке явище не спостерігається, тобто рідина не додає нестійкості маятнику.

Як видно із наведених даних варіаційний метод дає можливість з достатньо великою точністю визначити перші чотири  $i$ , навіть у деяких випадках, більше власних значень задачі про власні коливання маятника, що вказує на його ефективність.

При виведенні рівнянь в нерухомій системі координат потенціал Стокса–Жуковського явно не входить у виведені рівняння, що дозволяє уникнути розв'язування відповідної допоміжної крайової задачі, а застосування варіаційного підходу дозволяє уникнути і розв'язування другої допоміжної — спектральної задачі на коливання рідини у нерухомій посудині. А це відповідно дає змогу розв'язувати задачу про власні коливання маятника у випадках коли розв'язок допоміжної задачі знайдений тільки наближено з невеликою точністю.

Аналізуючи результати отримані класичним методом (у таблиці 2.10)



бачимо, що послідовність наближень в залежності від числа врахованих власних функцій допоміжної задачі прямує до результатів, отриманих варіаційним методом (у таблиці 3.4).

Як бачимо з наведених результатів, зокрема з таблиць 3.6 - 3.10, майже у всіх випадках (висота наповнення  $h_1 < 0.16$ ) варіаційний метод дає менші значення, а враховуючи збіжність зверху по кількості координатних функцій можемо стверджувати, що ці значення є точніші. При збільшенні висоти наповнення  $h_1$ , точність всіх представлених методів, в тому числі і визначення розв'язків базових задач варіаційним методом, погіршується. Це зв'язано із збільшенням кута перетину твірних вільної поверхні і твердої стінки, що призводить до підвищення впливу особливості розв'язку в околі кутової точки, яка має характер  $\rho^{\pi/\gamma}$  [14], де  $\rho$  — віддаль від кутової точки,  $\gamma$  — величина кута розхилу кутової точки.

Зауважимо, кожне наступне власне значення допоміжної задачі і відповідна власна функція визначаються з меншою точністю. При збільшенні числа врахованих функцій допоміжної задачі, обчислювальний алгоритм виявляється нестійким. Для випадку  $N = 30$  координатних функцій, вдалося отримати тільки 13 власних функцій допоміжної задачі.

Сформульована задача Коші і задача про власні коливання маятника у відповідному операторному вигляді, дає змогу легко будувати розв'язок задачі Коші по розв'язках задачі про власні коливання отриманих варіаційним методом. Результати реалізації запропонованого методу наведено у таблицях 3.15–3.19 і на малюнках (3.8), (3.16), де зображено залежність кута відхилення від часу.

Така методика є прямим узагальненням варіаційного методу розв'язування задачі (1.15) [27, 39] і може бути узагальнена також для

побудови розв'язків інших крайових задач динаміки обмеженого об'єму рідини, яка частково заповнює порожнину рухомого твердого тіла.

## РОЗДІЛ 4

### ДОСЛІДЖЕННЯ ВЛАСНИХ КОЛИВАНЬ МАЯТНИКА З ДВОШАРОВОЮ РІДИНОЮ

#### 4.1. Постановка задачі для порожнини з двошаровою рідиною та вивід рівнянь

Нехай дві рідини різної густини  $\rho_1 < \rho_2$  частково заповнюють порожнину твердого тіла, займаючи в стані рівноваги область  $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2$ . Рідини вважаємо ідеальними, а їхній рух потенціальним. Силами поверхневого натягу нехтуємо, а тому вважаємо, що в стані рівноваги вільна поверхня  $\Sigma_1$  першої рідини та поверхня  $\Sigma_2$  розділу рідин плоскі.

Розглянемо малі плоскі коливання фізичного маятника відносно нерухомої горизонтальної осі. Рух такої механічної системи характеризується кутом  $\theta(t)$  відхилення маятника відносно рівноважного стану, та полем швидкостей рідини  $\vec{v}(x, y, z, t)$ , в нерухомій системі координат. Тут  $t$  — час, а  $(x, y, z)$  — нерухома декартова система координат. Вісь  $Oz$  направимо вертикально вгору, а вісь  $Ox$  сумістимо з нерухомою віссю підвісу маятника. Рівняння руху механічної системи одержимо на основі варіаційного принципу Гамільтона. Як і в §3.1. запишемо кінетичну і потенціальну енергію системи тіло–рідина.

Кінетична енергія системи тіло–рідина має три складові

$$T = T_0 + T_1 + T_2,$$

де  $T_0$  — кінетична енергія твердого тіла,  $T_1$  і  $T_2$  — кінетична енергія першої та другої рідини відповідно. Для тіла

$$T_0 = \frac{J_0}{2} \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2,$$

де  $J_0$  — момент інерції тіла відносно нерухомої осі. Для рідин, при умові їх потенціального руху

$$T_i = \frac{\rho_i}{2} \int_{\Omega_i} (\nabla \varphi_i)^2 d\Omega,$$

де  $\varphi_i(x, y, z, t)$  — потенціал швидкостей руху  $i$ -ої рідини в нерухомій системі координат. Величину кута  $\theta$  відхилення маятника, та величини амплітуд руху частинок рідин вважаємо малими в тому сенсі, що їхніми квадратами, добутками та вищими степенями можна знехтувати порівняно з першими їх степенями. Крім того всі характеристики руху рідини завдяки малості амплітуд можна знести на незбурені об'єми рідин та поверхні, що їх обмежують. Таким чином, кінетична енергія механічної системи тіло–рідина з точністю до величин вищого порядку малості має вигляд

$$T = \frac{J_0}{2} \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \frac{\rho_1}{2} \int_{\Omega_1} (\nabla \varphi_1)^2 d\Omega + \frac{\rho_2}{2} \int_{\Omega_2} (\nabla \varphi_2)^2 d\Omega. \quad (4.1)$$

Потенціальну енергію системи також розіб'ємо на три складові

$$\Pi = \Pi_0 + \Pi_1 + \Pi_2,$$

де  $\Pi_0$  — потенціальна енергія твердого тіла,  $\Pi_1$  і  $\Pi_2$  — потенціальні енергії першої та другої рідини, відповідно. Для твердого тіла маємо

$$\Pi_0 = l_0 M_0 g \frac{\theta^2}{2},$$

тут  $l_0$  - віддаль від центра ваги твердого тіла до точки підвісу,  $M_0$  — маса твердого тіла,  $g$  — прискорення сил земного тяжіння. Обчислимо потенціальну енергію кожної з рідин, яка зумовлена трьома складовими: приростом потенціальної енергії рідини при відхиленні маятника при "заморожених" рідинах, тобто при фіксованих, відносно твердого тіла,

вільній поверхні і поверхні розділу, приростом потенціальної енергії рідини при відхиленні вільної поверхні та поверхні розділу відносно "замороженого стану" до горизонтального положення і додаткового приросту потенціальної енергії внаслідок збурення вільної поверхні та поверхні розділу. Якщо відхилити маятник при фіксованих вільній поверхні та поверхні розділу («заморожена рідина»), то з точністю до другого порядку малості потенціальна енергія збільшиться на величину

$$\Pi_i^1 = \frac{\theta^2}{2} l_i \rho_i g \Omega_i, \quad (i = 1, 2), \quad (4.2)$$

де  $l_i$  — віддаль від центра ваги  $i$ -ої рідини до точки підвісу. Якщо після цього вільна поверхня і поверхня розділу, при фіксованому відхиленні маятника, займуть горизонтальне положення, то при цьому частинки вільної поверхні та поверхні розділу перемістяться на величину  $-y\theta$  і потенціальна енергія зменшиться на величину

$$\Pi_1^2 + \Pi_2^2 = \frac{\theta^2}{2} \rho_1 g \int_{\Sigma_1} y^2 dS + \frac{\theta^2}{2} (\rho_2 - \rho_1) g \int_{\Sigma_2} y^2 dS. \quad (4.3)$$

Зауважимо, що у випадку, коли виявиться, що величина (4.3) більша ніж сума величин (4.2), то система тіло–рідина буде нестійкою.

Додаткові збурення  $N_1$  вільної поверхні та збурення  $N_2$  поверхні розділу приведе до збільшення потенціальної енергії рідини на величину

$$\Pi_1^3 + \Pi_2^3 = \frac{\rho_1 g}{2} \int_{\Sigma_1} N_1^2 dS + \frac{(\rho_2 - \rho_1) g}{2} \int_{\Sigma_2} N_2^2 dS. \quad (4.4)$$

Зауважимо, що із умови збереження об'єму нестисливих рідин випливає, що

$$\int_{\Sigma_1} N_1 dS = 0, \quad \int_{\Sigma_2} N_2 dS = 0. \quad (4.5)$$

Таким чином сумарна потенціальна енергія системи тіло–рідина

$$\begin{aligned}
\Pi &= \Pi_0 + (\Pi_1^1 + \Pi_2^1) - (\Pi_1^2 + \Pi_2^2) + (\Pi_1^3 + \Pi_2^3) = \\
&= l_0 M_0 g \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^2}{2} l_1 \rho_1 g \Omega_1 + \frac{\theta^2}{2} l_2 \rho_2 g \Omega_2 - \frac{\theta^2}{2} \rho_1 g \int_{\Sigma_1} y^2 dS - \\
&- \frac{\theta^2}{2} (\rho_2 - \rho_1) g \int_{\Sigma_2} y^2 dS + \frac{\rho_1 g}{2} \int_{\Sigma_1} N_1^2 dS + \frac{(\rho_2 - \rho_1) g}{2} \int_{\Sigma_2} N_2^2 dS = \\
&= D \frac{\theta^2}{2} + \frac{g}{2} \rho_1 \int_{\Sigma_1} N_1^2 dS + \frac{g(\rho_2 - \rho_1)}{2} \int_{\Sigma_2} N_2^2 dS,
\end{aligned} \tag{4.6}$$

де  $D = l_0 M_0 g + l_1 \rho_1 g \Omega_1 + l_2 \rho_2 g \Omega_2 - \rho_1 g \int_{\Sigma_1} y^2 dS - (\rho_2 - \rho_1) g \int_{\Sigma_2} y^2 dS$ .

Тепер можемо записати лагранжіан в довільний момент часу  $t = t_1$

$$\begin{aligned}
L &= \int_0^{t_1} (T - \Pi) dt = \int_0^{t_1} \left( \frac{J_0}{2} \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \frac{\rho_1}{2} \int_{\Omega_1} (\nabla \varphi_1)^2 d\Omega + \frac{\rho_2}{2} \int_{\Omega_2} (\nabla \varphi_2)^2 d\Omega \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} D \theta^2 - \frac{g}{2} \rho_1 \int_{\Sigma_1} N_1^2 dS + \frac{g(\rho_2 - \rho_1)}{2} \int_{\Sigma_2} N_2^2 dS \right) dt
\end{aligned}$$

Для дійсного руху системи згідно принципу Гамільтона  $\delta L = 0$ . Спочатку запишемо і перетворимо варіацію лагранжіана

$$\begin{aligned}
\delta L &= \int_0^{t_1} \left( J_0 \frac{d\theta}{dt} \delta \frac{d\theta}{dt} + \rho_1 \int_{\Omega_1} \nabla \varphi_1 \delta \nabla \varphi_1 d\Omega + \rho_2 \int_{\Omega_2} \nabla \varphi_2 \delta \nabla \varphi_2 d\Omega - \right. \\
&\quad \left. - D \theta \delta \theta - g \rho_1 \int_{\Sigma_1} N_1 \delta N_1 dS + g(\rho_2 - \rho_1) \int_{\Sigma_2} N_2 \delta N_2 dS \right) dt =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{t_1} \left( J_0 \frac{d}{dt} \left( \frac{d\theta}{dt} \delta\theta \right) - J_0 \frac{d^2\theta}{dt^2} \delta\theta - D\theta\delta\theta + \right. \\
&+ \rho_1 \int_{\Omega_1} \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \varphi_1 \delta \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \varphi_1 \delta \frac{\partial\varphi_1}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \varphi_1 \delta \frac{\partial\varphi_1}{\partial z} \right) - \varphi_1 \delta \Delta\varphi_1 \right) d\Omega + \\
&+ \rho_2 \int_{\Omega_2} \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \varphi_2 \delta \frac{\partial\varphi_2}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \varphi_2 \delta \frac{\partial\varphi_2}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \varphi_2 \delta \frac{\partial\varphi_2}{\partial z} \right) - \varphi_2 \delta \Delta\varphi_2 \right) d\Omega - \\
&\left. - g\rho_1 \int_{\Sigma_1} N_1 \delta N_1 dS + g(\rho_2 - \rho_1) \int_{\Sigma_2} N_2 \delta N_2 dS \right) dt.
\end{aligned}$$

Враховуючи, що  $\Delta\varphi_1 = 0$  в  $\Omega_1$ ,  $\Delta\varphi_2 = 0$  в  $\Omega_2$ , і використовуючи формулу Гріна, отримаємо

$$\begin{aligned}
\delta L = & \int_0^{t_1} \left( \rho_1 \int_{S_1 + \Sigma_1} \varphi_1 \delta \frac{\partial\varphi_1}{\partial n} dS + \rho_1 \int_{\Sigma_2} \varphi_1 \delta \frac{\partial\varphi_1}{\partial n} dS + \right. \\
& \rho_2 \int_{\Sigma_2} \varphi_2 \delta \frac{\partial\varphi_2}{\partial n} dS - \rho_2 \int_{\S_2} \varphi_2 \delta \frac{\partial\varphi_2}{\partial n} dS - J_0 \frac{d^2\theta}{dt^2} \delta\theta - D\theta\delta\theta + \\
& \left. - g\rho_1 \int_{\Sigma_1} N_1 \delta N_1 dS + g(\rho_2 - \rho_1) \int_{\Sigma_2} N_2 \delta N_2 dS \right) dt
\end{aligned}$$

Враховуючи, що  $\vec{n}$  — зовнішня, по відношенню до  $\Omega_1$ , нормаль до  $\Sigma_2$  і  $\frac{\partial\varphi_1}{\partial z} = \frac{\partial\varphi_2}{\partial z} = -\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}$  на  $\Sigma_2$ , отримуємо

$$\begin{aligned}
\delta L = & \int_0^{t_1} \left( \rho_1 \int_{S_1 + \Sigma_1} \varphi_1 \delta \frac{\partial\varphi_1}{\partial n} dS + \int_{\Sigma_2} (\rho_1\varphi_1 - \rho_2\varphi_2) \delta \frac{\partial\varphi_1}{\partial n} dS + \right. \\
& + \rho_2 \int_{\S_2} \varphi_2 \delta \frac{\partial\varphi_2}{\partial n} dS - J_0 \frac{d^2\theta}{dt^2} \delta\theta - D\theta\delta\theta - \\
& \left. - g\rho_1 \int_{\Sigma_1} N_1 \delta N_1 dS + g(\rho_2 - \rho_1) \int_{\Sigma_2} N_2 \delta N_2 dS \right) dt.
\end{aligned}$$

Далі, оскільки

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} &= \frac{\partial N_1}{\partial t} \text{ на } \Sigma_1, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = \frac{\partial N_2}{\partial t} \text{ на } \Sigma_2 \\ (4.7) \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} &= \frac{d\theta}{dt} f_S \text{ на } S_1, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = \frac{d\theta}{dt} f_S \text{ на } S_2, \end{aligned}$$

де  $f_s = (\vec{r} \times \vec{n}, \vec{i}) = y \cos(\vec{n}, z) - z \cos(\vec{n}, y)$ ,  $\vec{r}$  — радіус-вектор точки, то перший доданок в останньому виразі для варіації лагранжіана можемо перетворити до наступного вигляду:

$$\begin{aligned} \int_0^{t_1} \left( \rho_1 \int_{S_1 + \Sigma_1} \varphi_1 \delta \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} dS \right) dt &= \int_0^{t_1} \left( \rho_1 \int_{\Sigma_1} \varphi_1 \delta \frac{\partial N_1}{\partial t} dS + \right. \\ &\left. \rho_1 \int_{S_1} \varphi_1 f_s \delta \frac{\partial \theta}{\partial t} dS \right) dt = \int_0^{t_1} \left( \rho_1 \int_{\Sigma_1} \frac{\partial}{\partial t} (\varphi_1 \delta N) dS - \rho_1 \int_{\Sigma_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \delta N dS + \right. \\ &\left. \rho_1 \int_{S_1} f_s \frac{\partial}{\partial t} (\varphi_1 \delta \theta) dS - \rho_1 \int_{S_1} f_s \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \delta \theta dS \right) dt. \end{aligned}$$

А другий і третій доданки перетворимо наступним чином:

$$\begin{aligned} \int_0^{t_1} \left( \int_{\Sigma_2} (\rho_1 \varphi_1 - \rho_2 \varphi_2) \delta \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} dS + \rho_2 \int_{S_2} \varphi_2 \delta \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} dS \right) dt &= \\ \int_0^{t_1} \left( \int_{\Sigma_2} (\rho_2 \varphi_2 - \rho_1 \varphi_1) \delta \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} dS + \rho_2 \int_{S_2} \varphi_2 \delta \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} dS \right) dt. \end{aligned}$$

Далі, внаслідок рівностей(4.7)

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = \frac{\partial N_2}{\partial t} \text{ на } \Sigma_2, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = \frac{d\theta}{dt} \cdot f_S \text{ на } S_2,$$



можемо продовжити

$$\begin{aligned}
& \int_0^{t_1} \left( \int_{\Sigma_2} (\rho_2 \varphi_2 - \rho_1 \varphi_1) \delta \frac{\partial N_2}{\partial t} dS + \rho_2 \int_{S_2} \varphi_2 f_s \delta \frac{\partial \theta}{\partial t} dS \right) dt = \\
& \int_0^{t_1} \left( \int_{\Sigma_2} \frac{\partial}{\partial t} \left( (\rho_2 \varphi_2 - \rho_1 \varphi_1) \delta N_2 dS + \rho_2 \int_{S_2} f_s \frac{\partial}{\partial t} \varphi_2 \delta \theta \right) dS \right) dt - \\
& - \int_0^{t_1} \left( \left( \int_{\Sigma_2} \left( \rho_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} - \rho_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \right) \delta N_2 - \rho_2 \int_{S_2} f_s \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} \delta \theta \right) dS \right) dt.
\end{aligned}$$

Оскільки  $\delta N_1, \delta N_2$  і  $\delta \theta$  рівні 0 на кінцях інтервалу, маємо

$$\begin{aligned}
\delta L = & \int_0^{t_1} \left( -\rho_1 \int_{\Sigma_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \delta N_1 dS - \rho_1 \int_{S_1} f_s \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \delta \theta dS - \right. \\
& \int_{\Sigma_2} \left( \rho_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} - \rho_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \right) \delta N_2 dS - \rho_2 \int_{S_2} f_s \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} \delta \theta dS - J_0 \frac{d^2 \theta}{dt^2} \delta \theta - \\
& \left. - D \theta \delta \theta - \rho_1 g \int_{\Sigma_1} N_1 \delta N_1 dS + (\rho_2 - \rho_1) g \int_{\Sigma_2} N_2 \delta N_2 dS \right) dt = \\
& \int_0^{t_1} \int_{\Sigma_1} \left( \rho_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \rho_1 g N_1 \right) \delta N_1 dS dt - \\
& \int_0^{t_1} \int_{\Sigma_2} \left( \rho_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} - \rho_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + g(\rho_2 - \rho_1) N_2 \right) \delta N_2 dS dt - \\
& - \int_0^{t_1} \left( J_0 \frac{d^2 \theta}{dt^2} + D \theta + \rho_1 \int_{S_1} f_s \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} dS + \rho_2 \int_{S_2} f_s \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} dS \right) \delta \theta dt.
\end{aligned}$$

Оскільки  $\delta N_1, \delta N_2$  і  $\delta \theta$  незалежні і задовільняють умови (4.5), то

отримуємо наступні умови:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + gN_1 = C_1 \text{ на } \Sigma_1, \quad (4.8)$$

$$\rho_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} - \rho_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + g(\rho_2 - \rho_1)N_2 = C_2 \text{ на } \Sigma_2.$$

Тут  $C_1, C_2$  — константи.

$$J_0 \frac{d^2 \theta}{dt^2} + D\theta + \rho_1 \int_{S_1} f_s \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} dS + \rho_2 \int_{S_2} f_s \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} dS = 0. \quad (4.9)$$

Власними, або нормальними коливаннями маятника називається такий його рух, при якому величини, що його характеризують, наступним чином залежать від часу:

$$\theta(t) = \cos \omega t \cdot \mu,$$

$$\varphi_1(x, y, z, t) = -\omega \sin \omega t \cdot \Psi_1(x, y, z), \quad \varphi_2(x, y, z, t) = -\omega \sin \omega t \cdot \Psi_2(x, y, z),$$

$$N_1(x, y, t) = \cos \omega t \cdot N_1(x, y), \quad N_2(x, y, t) = \cos \omega t \cdot N_2(x, y).$$

Тоді

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = -\omega \sin \omega t \cdot \mu, \quad \frac{d^2 \theta(t)}{dt^2} = -\omega^2 \cos \omega t \cdot \mu, \quad (4.10)$$

$$\frac{\varphi_i(x, y, z, t)}{dt} = -\omega^2 \cos \omega t \cdot \Psi_i(x, y, z), \quad i = (\overline{1, 2}).$$

З динамічних умов (4.8) і (4.9) випливає

$$C_1 = C_2 = 0,$$

$$-\omega^2 \Psi_1 + gN_1 = 0 \text{ на } \Sigma_1, \quad (4.11)$$

$$-\rho_2 \omega^2 \Psi_2 + \rho_1 \omega^2 \Psi_1 + g(\rho_2 - \rho_1)N_2 = 0 \text{ на } \Sigma_2, \quad (4.12)$$

$$-J_0\omega^2\mu + D\mu - \rho_1\omega^2 \int_{S_1} f_s\Psi_1 dS - \rho_2\omega^2 \int_{S_2} f_s\Psi_2 dS = 0. \quad (4.13)$$

А з кінематичних умов (4.7)

$$\frac{\partial\Psi_1}{\partial n} = N_1 \text{ на } \Sigma_1, \quad \frac{\partial\Psi_2}{\partial n} = N_2 \text{ на } \Sigma_2, \quad (4.14)$$

$$\frac{\partial\Psi_1}{\partial n} = \mu \cdot f_S \text{ на } S_1, \quad \frac{\partial\Psi_2}{\partial n} = \mu \cdot f_S \text{ на } S_2.$$

Нехай  $L$  — характерний лінійний розмір області  $\Omega$ . Тоді введемо безрозмірні величини (позначені значком " $\sim$ ")

$$x = \tilde{x} \cdot L, \quad y = \tilde{y} \cdot L, \quad z = \tilde{z} \cdot L, \quad \Psi_i = \tilde{\Psi}_i \cdot L^2, \quad i = (\overline{1, 2}),$$

$$\omega^2 = \frac{\lambda g}{L}, \quad D = \rho_1 g L^4 \cdot \tilde{D}, \quad J_0 = \rho_1 L^5 \tilde{J}_0, \quad \vec{n} = \tilde{\vec{n}} \cdot L, \quad f_s = f_s \cdot L.$$

Крім того позначимо  $k = \frac{\rho_2}{\rho_1}$ , а тоді

$$D = l_0 M_0 + l_1 \rho_1 \Omega_1 + l_2 k \rho_1 \Omega_2 - \rho_1 \int_{\Sigma_1} y^2 dS - \rho_1 (k - 1) \int_{\Sigma_2} y^2 dS.$$

Тоді з (4.7), (4.11), (4.12), (4.13), (4.14) отримаємо рівняння руху і крайові умови у вигляді (позначення " $\sim$ " опускаємо)

$$-J_0\lambda\mu + D\mu - \lambda \int_{S_1} f_s\Psi_1 dS - k\lambda \int_{S_2} f_s\Psi_2 dS = 0,$$

$$\Delta\Psi_1 = 0 \text{ в } \Omega_1, \quad \Delta\Psi_2 = 0 \text{ в } \Omega_2, \quad \frac{\partial\Psi_1}{\partial z} = \frac{\partial\Psi_2}{\partial z} \text{ на } \Sigma_2, \quad (4.15)$$

$$\frac{\partial\Psi_1}{\partial n} = \lambda\Psi_1 \text{ на } \Sigma_1, \quad \frac{\partial\Psi_1}{\partial n} = \frac{\partial\Psi_2}{\partial n} = \lambda \frac{k\Psi_2 - \Psi_1}{k - 1} \text{ на } \Sigma_2,$$

$$\frac{\partial\Psi_1}{\partial n} = \mu \cdot f_S \text{ на } S_1, \quad \frac{\partial\Psi_2}{\partial n} = \mu \cdot f_S \text{ на } S_2.$$

Задача полягає у визначенні тих власних значень параметра  $\lambda$ , при яких існує нетривіальний її розв'язок, та визначенні власних функцій  $\Psi_1$  і  $\Psi_2$  та константи  $\mu$ .

#### 4.2. Варіаційний метод побудови розв'язків задачі про коливання маятника з порожниною частково заповненою двошаровою рідиною

На класі функцій  $\Psi_1 \in W_2^1(\Omega_1) \cap L_2(\Sigma_1) \cap L_2(\Sigma_2)$  і  $\Psi_2 \in W_2^1(\Omega_2) \cap L_2(\Sigma_2)$ , та константі  $\mu \in R$ , розглянемо функціонал

$$F(\Psi_1, \Psi_2, \mu) = \tag{4.16}$$

$$= \frac{\int_{\Omega_1} (\nabla \Psi_1)^2 d\Omega + k \int_{\Omega_2} (\nabla \Psi_1)^2 d\Omega + J_0 \mu^2}{\int_{\Sigma_1} (\Psi_1)^2 dS + \frac{1}{k-1} \int_{\Sigma_2} (k\Psi_2 - \Psi_1)^2 dS + \frac{1}{D} \left( J_0 \mu + \sum_{i=1}^2 \int_{S_i} f_s \Psi_i dS \right)^2},$$

який є узагальненням функціоналу (3.21) з розділу 3.

Аналогічно із теоремою 1 доводиться твердження наступної теореми

**Теорема 2.** *Мінімум функціоналу (4.16) на класі функцій*

$\Psi_1 \in W_2^1(\Omega_1) \cap L_2(\Sigma_1) \cap L_2(\Sigma_2)$  і  $\Psi_2 \in W_2^1(\Omega_2) \cap L_2(\Sigma_2)$ ,  $\mu \in R$  досягається на функціях  $\Psi_{1,1}, \Psi_{2,1}$  та константі  $\mu_1$ , що задовольняють задачу (4.15), а його значення  $F(\Psi_{1,1}, \Psi_{2,1}, \mu_1)$  дорівнює найменшому власному значенню  $\lambda_1$  задачі (4.15). Наступне власне значення задачі (4.15) знаходиться як мінімум функціоналу (4.16) на класі функцій  $\Psi_1 \in W_2^1(\Omega_1) \cap L_2(\Sigma_1) \cap L_2(\Sigma_2)$  і  $\Psi_2 \in W_2^1(\Omega_2) \cap L_2(\Sigma_2)$ , та константі  $\mu \in R$ , що задовольняють наступну умову

$$\int_{\Sigma_1} \Psi_{1,i} \Psi_1 dS + \frac{1}{k-1} \int_{\Sigma_2} (k\Psi_{2,i} - \Psi_2) (k\Psi_2 - \Psi_1) dS + \frac{1}{D} \left( J_0 \mu_i + \int_{S_1} f_s \Psi_{1,i} dS + \int_{S_2} f_s \Psi_{2,i} dS \right) \left( J_0 \mu_i + \int_{S_1} f_s \Psi_1 dS + \int_{S_2} f_s \Psi_2 dS \right) = 0$$

$$(i = \overline{1, n-1}).$$

де  $[\Psi_{1,i}, \Psi_{2,i}, \mu_i]$  —  $i$ -та власна вектор-функція задачі (4.15)

Функціонал (4.16) на класі гармонічних функцій, використовуючи формулу Гріна, можна записати в наступному вигляді:

$$F(\Psi_1, \Psi_2, \mu) = \frac{\int_{\Sigma_1 + \Sigma_2 + S_1} \Psi_1 \frac{\partial \Psi_1}{\partial n} dS + k \int_{\Sigma_2 + S_2} \Psi_2 \frac{\partial \Psi_2}{\partial n} dS}{\int_{\Sigma_1} (\Psi_1)^2 dS + \frac{1}{k-1} \int_{\Sigma_2} (k\Psi_2 - \Psi_1)^2 dS + \frac{1}{D} \left( J_0 \mu + \sum_{i=1}^2 \int_{S_i} f_s \Psi_i dS \right)^2}. \quad (4.17)$$

Далі обмежимося розглядом порожнин, які мають форму тіла обертання відносно вертикальної осі. Крім того, вважаємо, що центр ваги тіла і рідини в стані спокою лежать на осі симетрії посудини, яку приймемо за вісь  $Oz$ . Переходимо до циліндричної системи координат  $(\zeta, r, \eta)$

$$x = r \cos \eta, \quad y = r \sin \eta, \quad \zeta = z + l.$$

Початок системи координат зв'яжемо з вільною поверхнею рідини в стані спокою ( $z = \zeta - l$ , де  $l$  — відстань від вільної поверхні до точки підвісу). Тоді функція

$$f_s = (r \cos \eta \sin \zeta - (\zeta - l)) \sin \eta.$$

А розв'язки задачі (4.15) шукаємо у вигляді

$$\Psi_1(\zeta, r, \eta) = \Psi_1(\zeta, r) \sin \eta, \quad \Psi_2(\zeta, r, \eta) = \Psi_2(\zeta, r) \sin \eta, \quad (4.18)$$

де функції  $\Psi_i(\zeta, r)$  задовольняють рівняння

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \zeta^2} - \frac{1}{r^2} \Psi = 0. \quad (4.19)$$

В якості системи функцій, які задовольняють рівняння (4.19), виберемо систему однорідних многочленів, які визначаються за допомогою рекурентних формул [27]

$$w_1 = r, \quad w_2 = \zeta r, \quad w_{k+1} = \frac{(2k+1)\zeta w_k - (k-1)(r^2 + \zeta^2)w_{k-1}}{k+2}, \quad (4.20)$$

$$\frac{\partial w_k}{\partial \zeta} = (k-1)w_{k-1}, \quad r \frac{\partial w_k}{\partial r} = kw_k - (k-1)\zeta w_{k-1}.$$

На класі функцій (4.18), які задовольняють рівняння (4.19), функціонал (4.17) приймає вигляд:

$$F(\Psi_1, \Psi_2, \mu) = \quad (4.21)$$

$$= \frac{\int_{\Gamma_1 + \Gamma_2 + L_1} r \Psi_1 \frac{\partial \Psi_1}{\partial n} dl + k \int_{\Gamma_2 + L_2} r \Psi_2 \frac{\partial \Psi_2}{\partial n} dl}{\int_{\Gamma_1} r (\Psi_1)^2 dl + \frac{1}{k-1} \int_{\Gamma_2} r (k\Psi_2 - \Psi_1)^2 dl + \frac{1}{D} \left( J_0 \mu + \sum_{i=1}^2 \int_{L_i} r f_s \Psi_i dl \right)^2},$$

де  $L_1, L_2, \Gamma_1, \Gamma_2$  — меридіальні перерізи поверхонь  $S_1, S_2, \Sigma_1, \Sigma_2$  відповідно

Згідно з методом Рітца, апроксимуємо шуканий розв'язок задачі скінченими сумами вигляду

$$\mu = a_0, \quad \Psi_1 = \sum_{k=1}^{N_1} a_k w_k^1, \quad \Psi_2 = \sum_{k=1}^{N_2} a_{k+N_1} w_k^2. \quad (4.22)$$

Тоді з умови мінімуму функціоналу (4.17), для визначення невідомих констант  $a_k, k = 0, 1, 2, \dots, N_1 + N_2$  і параметра  $\lambda$ , одержимо систему лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{k=0}^N a_k (\alpha_{ik} - \lambda \beta_{ik}) = 0,$$

де

$$\begin{aligned} \alpha_{0,0} &= J_0, \quad \alpha_{0,i} = 0 \quad (1 \leq i \leq N_1 + N_2), \\ \alpha_{ik} &= \int_{\Gamma_1 + \Gamma_2 + L_1} r \frac{\partial w_i^1}{\partial n} w_k^1 dl \quad (1 \leq i \leq N_1, 1 \leq k \leq N_1), \\ \alpha_{i, k+N_1} &= 0 \quad (1 \leq i \leq N_1, 1 \leq k \leq N_2), \\ \alpha_{i+N_1, k+N_1} &= \int_{\Gamma_2 + L_2} r \frac{\partial w_i^2}{\partial n} w_k^2 dl \quad (1 \leq i \leq N_2, 1 \leq k \leq N_2), \\ \beta_{0,0} &= \frac{J_0^2}{D}, \\ \beta_{0,i} &= \frac{1}{D} \int_{L_1} r f_s w_i^1 dl \quad (1 \leq i \leq N_1), \quad \beta_{0,i} = \frac{1}{D} \int_{L_1} r f_s w_i^2 dl \quad (1 \leq i \leq N_2), \\ \beta_{i,k} &= \int_{\Gamma_1} r w_i^1 w_k^1 dl + \frac{1}{(k-1)} \int_{\Gamma_2} r w_i^1 w_k^1 dl + \\ &+ \frac{1}{D} \int_{L_1} r f_s w_i^1 dl \int_{L_2} r f_s w_k^1 dl \quad (1 \leq i \leq N_1, 1 \leq k \leq N_1), \\ \beta_{i, k+N_1} &= \frac{k}{(k-1)} \int_{\Gamma_2} r w_i^1 w_k^2 dl + \\ &+ \frac{k}{D} \int_{L_1} r f_s w_i^1 dl \int_{L_2} r f_s w_k^2 dl \quad (1 \leq i \leq N_1, 1 \leq k \leq N_2), \\ \beta_{i+N_1, k+N_1} &= \frac{k^2}{(k-1)} \int_{\Gamma_2} r w_i^2 w_k^2 dl + \\ &+ \frac{k^2}{D} \int_{L_1} r f_s w_i^2 dl \int_{L_2} r f_s w_k^2 dl \quad (1 \leq i \leq N_2, 1 \leq k \leq N_2). \end{aligned}$$



### 4.3. Числова реалізація і порівняльні характеристики

Згідно з розробленим вище наближеним методом, проведено реалізацію методу Рітца для мінімізації функціоналу (4.17) у випадку маятника із циліндричною порожниною, частково заповненою рідинами густини  $\rho_1 = 1000 \frac{kg}{m^3}$  на висоту  $0.05m$  і густини  $\rho_2 = 1200 \frac{kg}{m^3}$  на висоту  $0.1m$ . Радіус порожнини  $r_0 = 0.1m$ , маса циліндра, стінки якого і дно мають однакову сталу товщину,  $M_0 = 1kg$ . Віддаль від точки підвісу до центра мас тіла  $d_0 = 2m$ . В результаті реалізації числового алгоритму, при збереженні  $N = 18, 19, 20, 21$  функцій  $w_k^1$  і стільки ж функцій  $w_k^2$ , одержано наступні величини власних значень:

Таблиця 4.1: Циліндрична порожнина

$N$	18	19	20	21
$\lambda_1$	0.0991450159	0.0991450159	0.0991450158	0.0991450158
$\lambda_2$	0.1361595700	0.1361595700	0.1361595700	0.1361595700
$\lambda_3$	0.4819286983	0.4819286983	0.4819286983	0.4819286982
$\lambda_4$	0.5534960389	0.5534960389	0.5534960362	0.5534960353
$\lambda_5$	0.7759180851	0.7759152051	0.7759149533	0.7759142675
$\lambda_6$	1.0685076435	1.0656452160	1.0646639026	1.0642400874
$\lambda_7$	1.5063174764	1.4332968504	1.3928760313	1.3701148277
$\lambda_8$	2.7641781189	2.5630186480	2.1697486873	1.9458041417
$\lambda_9$	3.2340428466	2.7643618844	2.7642647352	2.7642413649
$\lambda_{10}$	5.4194430833	5.4194414555	5.3726462058	4.0636075869
$\lambda_{11}$	8.5642890510	8.0733923967	5.4195075359	5.4194434446
$\lambda_{12}$	11.7199411614	8.5642932020	8.5642881298	8.5642878399
$\lambda_{13}$	14.4243838312	11.7213087876	11.7199394199	11.7197467934
$\lambda_{14}$	16.4623683701	15.0832126347	14.9332417891	14.8510645946
$\lambda_{15}$	26.5070869904	21.2636634352	19.4436335679	16.3829616047

Аналогічні обчислення проводилися для маятника із сферичною порожниною, частково заповненою двошаровою рідиною. Радіус сфери вибрано  $r_0 = 0.1m$ . Густина рідин, як і попередньому прикладі вибрано такими:  $\rho_1 = 1000 \frac{kg}{m^3}$ ,  $\rho_2 = 1200 \frac{kg}{m^3}$ . Висота першої рідини  $h_1 = 0.05m$ , висота другої —  $h_2 = 0.10m$ . Маса сфери  $M_0 = 1kg$ , стінки якої мають однакову сталу товщину. Віддаль від точки підвісу до центра мас сфери  $d_0 = 2m$ . В результаті реалізації числового алгоритму, при збереженні  $N = 18, 19, 20, 21$  функцій  $w_k^1$  і стільки ж функцій  $w_k^2$ , одержано наступні власні значення:

Таблиця 4.2: Сферична порожнина

$N$	18	19	20	21
$\lambda_1$	0.0911916182	0.0911916182	0.0911916182	0.0911916182
$\lambda_2$	0.1280222263	0.1280222071	0.1280222062	0.1280222004
$\lambda_3$	0.4770940035	0.4770939748	0.4770939629	0.4770939609
$\lambda_4$	0.5439639939	0.5439639356	0.5439639342	0.5439639067
$\lambda_5$	0.7730686509	0.7730686148	0.7730685748	0.7730685696
$\lambda_6$	1.0621812635	1.0621519125	1.0621467042	1.0621453600
$\lambda_7$	1.3592213985	1.3532578080	1.3508551304	1.3499544126
$\lambda_8$	1.8205042829	1.7368523372	1.6890341794	1.6617177038
$\lambda_9$	3.4077440605	2.7383007026	2.4038713549	2.2102504873
$\lambda_{10}$	3.4605471482	3.4602487364	3.4602378344	3.4602217709
$\lambda_{11}$	6.5830237581	6.5829627525	5.6331310889	4.0151929226
$\lambda_{12}$	10.1650834602	9.4872709060	6.5829832363	6.5829664398
$\lambda_{13}$	13.7923486637	10.1653458169	10.1649151387	10.1648924527
$\lambda_{14}$	17.2733124573	13.7925029579	13.7890275877	13.7889374195
$\lambda_{15}$	20.1331117229	17.6663248974	17.5058003179	17.3646567760
$\lambda_{16}$	37.0300027763	26.1424292160	22.9791877076	18.6897057628

В послідовність власних значень, записаних в таблицях 4.1 і 4.2, входять власні значення, які відповідають хвильовим процесам як на вільній поверхні, так і на поверхні розділу.

#### 4.4. Висновки до розділу

132

Аналізуючи дані таблиць 4.1 і 4.2, бачимо що перші 6 — 7 власних значень з ростом  $N$  зменшуються, прямуючи до деяких стабільних величин. Це ті власні значення, які відповідають таким коливанням маятника, що мають амплітуди внутрішніх коливань поверхні розділу рідин більші, порівняно з амплітудами поверхневих коливань вільної поверхні першої рідини. Далі чітко вирізняються ті власні значення задачі, які відповідають формам власних коливань, при яких амплітуди поверхневих хвиль значно перевищують амплітуди внутрішніх коливань поверхні розділу рідин. Для чіткого аналізу цього явища потрібно вивчати властивості побудованих власних функцій задачі. Порівнюючи відношення відповідних амплітуд, можна вказати котре власне значення відповідає більшій амплітуді на вільній поверхні.

Наведений алгоритм дає можливість визначати власні значення і власні функції задачі (4.15) з достатньо великою точністю, що вказує на його ефективність.

Зауважимо, що для випадку циліндричної порожнини, Ю.М.Кононов дослідив ряд задач даного класу, узагальнюючи метод, запропонований М.М.Мойсеєвим.

Варіаційний метод, викладений вище, може бути застосований для порожнин складної геометричної форми, зокрема для випадку порожнини сферичної форми.

## ВИСНОВКИ

В роботі представлено варіаційний метод розв'язування задач про малі коливання фізичного маятника з порожниною, частково заповненою рідиною, відносно нерухомої горизонтальної осі.

1. Спочатку реалізовано класичний підхід для розв'язування задач динаміки твердого тіла з рідиною, який базується на використанні розв'язків допоміжних задач — задачі на власні коливання рідини в нерухомій посудині, а також задачі на знаходження потенціалу Стокса–Жуковського. Відомою є реалізація цього методу для порожнини циліндричної форми, тобто, коли відомі точні розв'язки допоміжних задач. В роботі наведено застосування такого підходу для порожнини нециліндричної форми. В якості дослідження розглянуто сферичну порожнину. Числові результати методу отримано двома способами — шляхом розв'язування трансцендентного рівняння і системи алгебраїчних лінійних однорідних рівнянь.

2. Для оцінювання результатів, отриманих класичним методом для задачі про власні коливання фізичного маятника з порожниною, частково заповненою рідиною, запропоновано один з альтернативних методів — проєкційний. Порівняння результатів, отриманих класичним та проєкційними методами, вказало на потребу в більш ефективному методі.

3. Для реалізації варіаційного методу, задачу Коші та відповідну задачу про власні коливання, записано в операторному вигляді. Для задачі про власні коливання фізичного маятника з порожниною, частково заповненою рідиною, доведено теорему про можливість знаходження її розв'язку варіаційним методом.

4. Варіаційним методом отримано результати для задачі про власні

коливання фізичного маятника з порожниною, частково заповненою рідиною, у випадку циліндричної та сферичної порожнини. У випадку циліндричної порожнини результати, отримані варіаційним методом, співпадають з результатами, отриманими класичним методом. А у випадку сферичної порожнини варіаційним методом отримано уточнені значення власних значень задачі.

5. Застосування варіаційного методу для побудови розв'язків задачі про власні коливання маятника з рідиною, дає змогу ефективно побудувати розв'язки задачі Коші.

6. Варіаційний метод узагальнений для задачі про малі коливання маятника з порожниною, частково заповненою стратифікованою рідиною. Проведено його числову реалізацію у випадках циліндричної та сферичної порожнини.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Справочник по специальным функциям [под редакцией М.Абрамовиц, И.Стиган]. – М.: Наука. – 1979. – 832 с.
2. Барняк М.Я. Применение метода ортогональных проекций к исследованию малых колебаний жидкости в сосуде /М.Я. Барняк// Математическая физика и нелинейная механика 10 (44) С. 37 – 43.
3. Барняк М.Я. Проекційний метод побудови розв'язків задачі про власні коливання в'язкої рідини в посудині /М.Я. Барняк// Обчислювальна математика і математичні проблеми механіки: Праці Українського математичного конгресу. – 2001. – Київ: Ін-т математики НАН України. – 2002. – С. 5 – 24.
4. Барняк М.Я. Побудова розв'язків крайових задач для рівняння Лапласа в областях обертання з ребристою межею /М.Я. Барняк// Математичний український журнал т.61. – №5. – 2009. – С. 579 – 595.
5. Барняк М.Я., Цебрій О.Р. Варіаційний метод побудови розв'язків задачі про власні коливання фізичного маятника з порожниною, частково заповненою ідеальною рідиною /М.Я.Барняк, О.Р.Цебрій// Збірник праць Інституту математики НАН України. – 2005. – Т.2 №1. – С. 100 – 110.
6. Власні коливання фізичного маятника з осесиметричною порожниною, заповненою рідиною /М.Я.Барняк, О.Р.Цебрій// Збірник праць Інституту математики НАН України. – 2006. – Т.2. – №4. – С. 1 – 11.
7. Барняк М.Я. Малі коливання маятника з порожниною, частково заповненою рідиною /М.Я.Барняк, О.Р.Цебрій// Збірник праць Інституту математики НАН України. – 2009. – Т.6. – №1. – С. 1 – 11.

8. Богоряд И.Б. К решению задачи о колебаниях жидкости, частично заполняющей полость, вариационным методом// Прикл. матем. и механика. – 1962. – Т.26. – №6. – С. 1122 – 1127.
9. Болотін В.В. О движении жидкости в колеблющемся сосуде. – Прикл. математика и механика. – 1956. – №2. – С. 293 – 294.
10. Budiansky V. Sloshing of liquids in circular canals and spherical tanks /V. Budiansky // Journal of the Aero/Space Sciences. –27. – №3. – P. 161 – 172.
11. Али Вадиаа. Применение методов спектрального анализа оператор-функций в задаче о колебаниях маятника с полостью, заполненной жидкостью : Дис. канд.физ.- мат.наук: 01.01.01 /Симферопольский ун-т. - Симферополь. – 1994.
12. Жуковский Н.Е. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью. – М.: ГНТИ, 1949. – 2. – 762 с.
13. Нго Зуй Кан. О вращательном движении твердого тела с полостью, наполненной вязкой жидкостью. — Журн.вычис.мат.и мат.физ. – 1971. – 11. – №6. – С. 1488 – 1497.
14. Комаренко А.Н. Асимптотическое разложение собственных функций задачи с параметром в краевых условиях в окрестности угловых граничных точек. – Укр. мат. журн. – 1980. – 32. — С. 653 – 659.
15. Кононов Ю.Н. Задача о физическом маятнике, содержащим статифицированную жидкость.Механика твердого тела. – 1999. – вып.28. – С. 145 – 153.
16. Кононов Ю.Н., Татаренко Е.А Свободные колебания двуслойной жидкости, разделенной пластинкой в прямоугольном канале// Теор. и прикл. механика. – 2002. – Вып.36. – С. 170 – 176.



17. Кононов Ю.Н., Татаренко Е.А. Свободные колебания двуслойной жидкости с упругими мембранами на свободной и внутренней поверхностях // Прикладна гідромеханіка. – 2003. – Т5(77). – №3. – С. 48 – 54.
18. Комаренко А.Н. К задаче о собственных значениях с параметром в краевых условиях /А.Н. Комаренко , И.А. Луковский , С.Ф. Фещенко // Укр.мат.журн. – 1965. – 17. – №6. – С. 22 – 30.
19. Копачевский Н.Д. Операторные методы в линейной гидродинамике /Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуй Кан. – М.: Наука. – 1989. – 416 с.
20. Краснощеков П.С. О колебаниях фізического маятника, имеющего полости, заполненные вязкой жидкостью // ПММ. – 1963. – Т. – 27. – №2. – С. 193 – 202.
21. Крейн С.Г., Мойсеев Н.Н. О колебаниях твердого тела, содержащего жидкость со свободной поверхностью - Прикл. математика, механика. – 1957. – т.21. – 2.2. – С. 169 – 174.
22. Кузнецов Н.Г. О вариационном методе определения собственных частот колебаний жидкости в канале / Н.Г. Кузнецов // Прикладная математика и механика. – Т.54. – вып.4. – 1990. – С. 553 – 561.
23. Лещук О.П. Визначення динамічних характеристик обмеженого об'єму в'язкої рідини проєкційними методами.-К: Інститут гідромеханіки НАН України. – 2010. – 157 с.
24. Лимарченко О.С. Вариационная формулировка задачи о движении резервуара с жидкостью /О.С. Лимарченко// Докл. АН УССР. Сер.А. – 1978. – №10. – С. 904 – 908.

25. Луковский І.О. Малі хвильові рухи однорідної нестисливої рідини в посудинах, які мають форму тіл обертання // Доп. АН УРСР. – 1961. – №8. – С. 1013 – 1017.
26. Луковский И.А. Нелинейные колебания жидкости в сосудах сложной геометрической формы /И.А. Луковский. – Киев: Наук.думка. – 1975. – 136 с.
27. Луковский И.А., Барняк М.Я., Комаренко А.Н. Приближенные методы решения задач динамики ограниченного объема жидкости. –Киев. Наукова думка. – 1984. – 232 с.
28. Луковский И.А. Введение в нелинейную динамику тела с полостями, частично заполненными жидкостью /И.А. Луковский. – Киев: Наук.думка. – 1990. – 296 с.
29. Луковский И.А. Математические модели нелинейной динамики твердых тел с жидкостью. – К: Нукова думка. – 2010. – 408 с.
30. Микишев Г.Н. Экспериментальное исследование свободных колебаний жидкости в сосудах /Г.Н. Микишев, Н.Я. Дорожкин // Изв. Акад. Наук СССР, Механика и машиностроение. – 1961. – №4. – С. 48 – 53.
31. Микишев Г.Н. Динамика твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью / Г.Н. Микишев, Б.И. Рабинович. – М.: Машиностроение. – 1968. – 532 с.
32. Микишев Г.Н. Экспериментальные методы в динамике космических аппаратов /Г.Н. Микишев. – М.: Машиностроение. – 1978. – 247 с.
33. Михлин С.Г. Численная реализация вариационных методов /С.Г. Михлин. – М.: Физматгиз. – 1966.-— 432 с.
34. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. – М.: Наука. – 1970. – 512 с.

35. Мишкиц А.Д., Бабский В.Г, Жуков М.Ю, Копачевский Н.Д, Слобожанин Н.А, Тбпцов А.Д.: АН Украины. Физ. – техн. ин-т низ. температур. – Киев: Наук. думка, 1992. – 592 с.
36. Моисеев Н.Н. Задача о движении твердого тела, содержащего жидкие массы, имеющие свободную поверхность /Н.Н. Моисеев// Мат. сб. – 1953. – 32(74). – №1. – С. 61 – 96.
37. Моисеев Н.Н. К теории нелинейных колебаний ограниченного объема жидкости / Н.Н. Моисеев // Прикл. математика и механика. – 1958. – 22. – №5. – С. 612 – 621.
38. Моисеев Н.Н. О краевых задачах для линеаризованных уравнений Нвье-Стокса в случае, когда вязкость мала.// Ж. мат. и физики. – 1961. –Т.1. – №3. – С. 548 – 550.
39. Моисеев Н.Н., Румянцев В.В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. – М.: Изд-во Наука. – 1965. – 440 с.
40. Моисеев Н.Н. Численные методы расчета собственных частот колебаний ограниченного объема жидкости /Н.Н. Моисеев, А.А. Петров// М.: ВЦ АН СССР. – 1966. – 269 с.
41. Нариманов С.Г. О движении твердого тела, полость которого частично заполнена жидкостью /С.Г. Нариманов// Прикл. математика и механика. – 1956. – 20. №1. – С. 21 – 38.
42. Нариманов Г.С. Нелинейная динамика летательного аппарата с жидкостью /Г.С. Нариманов, Л.В. Докучаев, И.А. Луковский. – М.: Машиностроение. – 1977. – 208 с.
43. Охоцимский Д.Е. К теории движения тела с полостями, частично заполненными жидкостью /Д.Е. Охоцимский // Прикл. математика и механика. – 1956. – 20. вып. 1. – С. 3 – 20.

44. Пашкова Ю.С. Колебания жидкости в сосуде, закрытом упругой мембраной, и общие вопросы эволюции гидродинамических систем : Дис... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02 /Ю.С. Пашкова // Симферопольский гос. ун-т им.М. В. Фрунзе. – Симферополь. – 1996. – 111 с.
45. Петров А.А Вариационная формулировка задачи о движении жидкости в сосуде конечных размеров /А.А. Петров// Прикл. математика и механика. – 1964. – 28. №4. – С. 754 – 758.
46. Рабинович Б.И. Об уравнениях возмущенного движения твердого тела с цилиндрической полостью, частично заполненной жидкостью /Б.И. Рабинович // Прикл. математика и механика. – 1956. – 20, вып.1. – С. 39 – 49.
47. Соболев С.Л. Об одной новой задаче математической физики. — Изв. АН СССР, сер.матем. – 1954. – 18, №1. – С. 3 – 50.
48. Соболев С.Л. О движении симметричного волчка с полостью, наполненной жидкостью. – Журн.прикл.мех.и техн.физ. – 1960. – №3. – С. 20 – 55.
49. Солдатов М.А. Математические аспекты теории колебаний жидкости в бассейне, частично покрытом льдом : Дис. канд. физ.-мат. наук: 01.01.03 /М.А. Солдатов// Таврический национальный ун-т им. В.И.Вернадского. Факультет математики и информатики. Кафедра математического анализа. – Симф. – 2003. – 207 с. - Библиогр.: С. 151 – 156.
50. Фещенко С.Ф., Луковский И.А., Рабинович Б.И., Докучаев Л.В. Методы определения присоединенных масс жидкости в подвижных полостях. – Киев: Наукова думка. – 1969. – 250 с.

51. Дослідження малих коливань фізичного маятника з порожниною, частково заповненою ідеальною рідиною /О.Р.Цебрій// Вісник Тернопільського державного технічного університету. –2008. – №3. – С. 61 – 73.
52. Власні коливання фізичного маятника з порожниною, частково заповненою двошаровою ідеальною рідиною /М.Я.Барняк, О.Р.Цебрій// Збірник праць Інституту математики НАН України. – 2008. – Т.2. – №4. – С. 1 – 15.
53. Варіаційний метод побудови розв'язків задачі про власні коливання фізичного маятника з порожниною, частково заповненою ідеальною рідиною /О.Р.Цебрій// Міжнародна наукова конференція студентів та молодих вчених– 2007. – Київ: Національний авіаційний університет. – 2007. – С. 96 – 104.
54. Цебрій О.Р. Побудова розв'язків задачі про коливання фізичного маятника з рідиною в нерухомій системі координат /О.Р.Цебрій// Наукова конференція професорсько-викладацького складу, 18 квітня 2007. – Тернопіль: тези доповідей конф. – Тернопіль: Національний економічний університет. – 2007. – С. 52.
55. Цебрій О.Р. Дослідження власних коливань з порожниною, частково заповненою ідеальною рідиною, виходячи з принципу збереження енергії /О.Р.Цебрій// Наукова конференція професорсько-викладацького складу, 16 квітня 2008. – Тернопіль: тези доповідей конф. – Тернопіль: Національний економічний університет. – 2008. – С. 56.
56. Цебрій О.Р. Дослідження власних коливань з порожниною, частково заповненою двошаровою рідиною /О.Р.Цебрій// Наукова конференція професорсько-викладацького складу, 15 квітня 2009. – Тернопіль: тези

- доповідей конф. – Тернопіль: Національний економічний університет, 2009. – С. 55.
57. Цебрий Р.И. Исследование свободных колебаниях физического маятника с цилиндрической полостью, заполненной вязкой несжимаемой жидкостью// Численно-аналитические методы исследования динамики и устойчивости сложных систем. - Киев: Ин-т математики АН УССР. – 1984. – С. 48 – 60.
58. Цебрий Р.И., Барняк М.Я. Приближенный метод решения задачи о свободных колебаниях маятника с полостью, заполненной вязкой несжимаемой жидкостью// Прямые методы в задачах динамики и устойчивости многомерных систем. – Киев: Ин-т математики АН УССР. – 1986. – С. 43 – 52.
59. Черноусько Ф.Л. Движение твердого тела с полостями, содержащими жидкость / Ф.Л. Черноусько. — М.: ВЦ АН СССР. – 1968. – 230 с.
60. Abramson H.N. The dynamic behavior of the liquids in moving containers / Abramson H.N. – Washington D.C.: NASA SP 106. – 1966. – 467 p.
61. Bateman H. Partial differential equations of mathematical physics /H. Bateman. – N.Y.: Dover publications. – 1944. – 522 p.
62. Cooper R.M. Dynamic of liquid in moving containers /R.M. Cooper // ARS Journ. – 1960. – 30. – №8. – P. 725 – 729.
63. McIver P. Sloshing frequencies for cylindrical and spherical containers filled to an arbitrary depth /P. McIver// J. Fluid Mech. – 1989. – 201. – P. 243 – 257.
64. Penny W.G., Price A.T. Finite periodic stationary waves in a perfect liquid / W.G. Penny, A.T. Price// Phyl. Trans. Roy. Soc. London A. – 1952. – 244. – P. 254 – 284.

65. McNamara.R.J. Tuned Mass Dampers for Buildings,"Journal of Structural Division, ASCE. – 1977. – 103, 9. – P. 1785 – 1789.
66. Kareem.A., Sun.W.J. Stochastic Response of Structures with Fluid-containing Appendages, J. of Sound and Vibration. – 1987. – 119(3). – P. 389 – 408.
67. Kareem.A. Liquid Tuned Mass Dampers: Past, Present and Future, - Proceedings of the Seventh U.S. National Conference on Wind Engineering, Vol. I, Los Angeles. – 1993.
68. Kareem.A., Kline.S. Performance of Multiple Mass Dampers under Random loading,- Journal of Structural Engineering. – 1995. – ASCE. – Vol.121, No.2. – 1995. – P. 348 – 361.
69. Bharadwaj Nanda Aapplication of Tuned Liquid Damper for Controlling Structural Vibration Partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Technology in Structural Engineering By Under the guidance of prof k.c. Biswal, - Department of civil engineering, - National institute of technology Rourkela. – May 2010.
70. A. A. El Damatty, Ph.D., P. Eng. Studies on the Application of Tuned Liquid Dampers (TLD) to Up-Grade the Seismic Resistance of Structures. – Department of Civil and Environmental Engineering.- The University of Western Ontario. – April 2002. – ICLR Research. – Paper Series.-- No.17.
71. A.Y.J. Won, J.A. Pires, M.A. Haroun Performance assessment of tuned liquid column dampers under random seismic loading. International Journal of Non-Linear Mechanics. – Elsevier Science Publishing Company, Inc.