

Дивак М. П.

**ЗАДАЧІ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ
СТАТИЧНИХ СИСТЕМ З ІНТЕРВАЛЬНИМИ ДАНИМИ**

Монографія

**Тернопіль
«Економічна думка ТНЕУ»
2011**

УДК 519.876.5
ББК 65В641
Д-44

*Рекомендовано Вченою радою
Тернопільського національного економічного університету
(протокол №5 від 11.05.2011 р.)*

Рецензенти:

Кветний Р. Н.: доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри автоматички та інформаційно-виміральної техніки Вінницького національного технічного університету;

Личак М. М.: доктор фіз.-мат. наук, професор, провідний науковий співробітник інституту космічних досліджень НАН та НКА України;

Стахів П. Г.: доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри теоретичної та загальної електротехніки НУ «Львівська політехніка».

Дивак М. П. Задачі математичного моделювання статичних систем з інтервальними даними. – Тернопіль: Видавництво ТНЕУ «Економічна думка», 2011. – 216 с.

ISBN 978-966-654-283-3

У даній монографії систематизовано теоретичні засади побудови моделей статичних систем за умов, коли їхні вихідні характеристики представлені у вигляді числових інтервалів. Базовим математичним апаратом у цьому випадку є аналіз інтервальних даних, який набув широкого застосування для моделювання різного типу систем за умов невизначеності. Введено поняття інтервальної моделі, яка визначена в межах певної множини – коридору моделей. Розглянуто методи розв'язування задач планування експерименту, параметричної та структурної ідентифікації інтервальних моделей та спрощення складних моделей за умови забезпечення гарантованої точності. На відміну від стохастичного підходу, розглянуті методи забезпечують гарантовану точність моделей і уможливають їх побудову на основі малих виборок статистичних даних з обмеженими за амплітудою похибками. Розглянуті методи проілюстровано прикладами побудови математичних моделей реальних систем.

ISBN 978-966-654-283-3

© Дивак М. П., 2011
© «Економічна думка ТНЕУ», 2011

ЗМІСТ

ВСТУП	6
РОЗДІЛ 1	
АНАЛІЗ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ СИСТЕМ НА ОСНОВІ ІНТЕРВАЛЬНИХ ДАНИХ	8
1.1. Особливості синтезу моделей «вхід-вихід» статичних систем на основі експериментальних даних.....	8
1.2. Основи інтервального аналізу та його застосування для моделювання об'єктів	14
1.3. Способи зображення вихідних змінних моделей статичних систем у інтервальному вигляді	19
1.4. Математичні та обчислювальні аспекти методів аналізу інтервальних даних	24
1.4.1. Властивості лінійної системи інтервальних рівнянь та інтервальних моделей, побудованих на її розв'язках	25
1.4.2. Обчислювальні аспекти методів оцінювання області параметрів інтервальної моделі статичної системи	32
1.5. Планування насичених експериментів у випадку інтервального представлення вихідних змінних моделей статичних систем	39
Висновки до розділу	42
РОЗДІЛ 2	
ВЛАСТИВОСТІ ЛІНІЙНО-ПАРАМЕТРИЧНИХ ІНТЕРВАЛЬНИХ МОДЕЛЕЙ СТАТИЧНИХ СИСТЕМ	44
2.1. Синтез структури моделі статичної системи при аналізі інтервальних даних та наближення складних моделей, простішими.....	45
2.2. Аналіз властивостей інтервальних моделей статичних систем у випадку застосування насиченого експерименту.....	55
2.3. Інтервальні моделі статичних систем, побудовані на основі інтервальних оцінок параметрів.....	59
2.4. Властивості інтервальних моделей статичних систем у випадку локалізації області параметрів еліпсоїдом.....	64
Висновки до розділу	72
РОЗДІЛ 3	
ЛОКАЛІЗАЦІЯ МНОЖИНИ ПАРАМЕТРІВ ІНТЕРВАЛЬНИХ МОДЕЛЕЙ СТАТИЧНИХ СИСТЕМ	74
3.1. Інтервальна локалізація параметрів моделі на основі модифікованого симплекс-методу розв'язування задач лінійного програмування	74
3.2. Метод локалізації розв'язків системи інтервальних рівнянь із виділенням насиченого блоку	82

3.3. Обчислювальна схема методу локалізації параметрів інтервальних моделей із виділенням насиченого блоку	87
3.4. Активна ідентифікація параметрів інтервальних моделей методом локалізації із виділенням насиченого блоку експерименту.....	91
Висновки до розділу	94

РОЗДІЛ 4

ДОПУСТИМЕ ОЦІНЮВАННЯ ОБЛАСТІ ПАРАМЕТРІВ МОДЕЛЕЙ «ВХІД – ВИХІД» СТАТИЧНИХ СИСТЕМ В КЛАСІ ЕЛІПСОЇДІВ

96

4.1 Побудова допустимих еліпсоїдних оцінок із заданими номінальними значеннями параметрів моделей.....	96
4.2. Побудова допустимих еліпсоїдних оцінок множини параметрів інтервальних моделей статичних систем.....	103
4.2.1. Допустима еліпсоїдна оцінка у випадку локалізації параметрів інтервальної моделі.....	103
4.2.2. Допустиме оцінювання параметрів лінеаризованої інтервальної моделі в умовах ідентифікації базисних функцій	107
4.3. Оцінка імовірності працездатності статичної системи на основі аналізу допустимої множини параметрів її моделі.....	111
Висновки до розділу	119

РОЗДІЛ 5

ПЛАНУВАННЯ ЕКСПЕРИМЕНТУ ПРИ ПОБУДОВІ ІНТЕРВАЛЬНИХ МОДЕЛЕЙ СТАТИЧНИХ СИСТЕМ.....

120

5.1. Планування апріорних I_G - та I_E - оптимальних експериментів.....	120
5.2. Послідовно I_G - оптимальне планування експериментів	126
5.3. Оптимальне планування експерименту у випадку локалізації параметрів інтервальної моделі із виділенням насиченого блоку.....	133
5.3.1. Критерії оптимальності «локалізаційного» експерименту з випадковими інтервальними похибками.....	133
5.3.2. Синтез $M(I_D)$ -оптимальних планів.....	136
5.3.3. Умови еквівалентності між $M(I_D)$ -, $M(I_A)$ - та $M(I_E)$ - оптимальними планами	140
5.3.4. Приклади синтезу $M(I_A)$ - оптимальних планів.....	142
5.4. Особливості побудови та застосування таблиць оптимальних планів експерименту у випадку локалізації параметрів на основі виділення насиченого блоку для поліноміальних моделей.....	145
Висновки до розділу	151

РОЗДІЛ 6

ПРИКЛАДИ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

СТАТИЧНИХ СИСТЕМ З ІНТЕРВАЛЬНИМИ ДАНИМИ..... 153

6.1. Інтервальна модель для прогнозування кількості захворювань у системі екологічного контролю..... 153

6.1.1. Особливості отримання узагальнених соціальних та екологічних чинників 154

6.1.2. Ідентифікація інтервальної моделі взаємозв'язку між соціально-екологічними чинниками та рівнем захворюваності..... 161

6.1.2.1. Синтез оптимальної структури моделі..... 162

6.1.2.2. Локалізація параметрів інтервальної моделі із виділенням насиченого блоку..... 165

6.1.2.3. Оцінка прогностичних властивостей моделі 167

6.2. Інтервальна модель для прогнозування подового генерованої електроенергії малої гідро-електростанції..... 169

6.3. Інтервальна модель для задачі візуалізації зворотного гортанного нерва у процесі хірургічної операції на щитовидній залозі ... 175

6.3.1. Спосіб та засоби для візуалізації гортанного нерва 176

6.3.2. Інтервальна модель із гарантованими інтервальними оцінками параметрів для візуалізації зворотнього гортанного нерва на хірургічній рані..... 178

Висновки до розділу 184

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ 186

ДОДАТОК А.

Таблиці $M(I_D)$ -, $M(I_A)$ - $M(I_E)$ - оптимальних планів 205

ВСТУП

У випадку дослідження статичних систем різного призначення широкого застосування набули математичні моделі «вхід-вихід», які будують за результатами експерименту. Під статичними будемо розуміти безінерційні системи, зв'язок між вхідними-вихідними змінними у яких описують алгебричними рівняннями. Моделювання статичних систем на основі експериментальних даних вимагає розв'язування трьох взаємопов'язаних задач: планування експерименту та його реалізації; ідентифікації структури моделі та її параметрів; наближення складної моделі більш простішою. Незалежно від способу отримання моделей, всі вони є лише наближеним, спрощеним описом досліджуваної системи, оскільки будуються в умовах невизначеності та неповноти інформації. Неточність побудованої моделі може бути зумовлена, наприклад, неврахуванням усіх факторів, що впливають на систему, лінеаризацією її характеристик, наявністю похибок в експериментальних даних. Найчастіше для опису невизначеності та для побудови моделей «вхід -вихід» статичних систем використовують стохастичні методи, які ґрунтуються на гіпотезах про імовірнісні властивості об'єктів. Недоліком стохастичних методів є потреба в отриманні чи апріорному заданні імовірнісних властивостей об'єкта дослідження, жорсткість гіпотез на яких побудовані методи і достатньо серйозні наслідки при їх порушенні.

Протягом останніх трьох десятиліть для моделювання статичних систем інтенсивно застосовують методи інтервального аналізу. Особливість цих методів полягає в множинному представленні оцінок параметрів моделі «вхід-вихід», побудованої за результатами експерименту, в якому вихідні змінні отримані у інтервальному вигляді. В результаті застосування методів інтервального аналізу, замість однієї моделі «вхід-вихід», отримують коридор (множину) рівнозначних інтервальних моделей статичної системи. Властивості отриманих моделей залежать від обраного методу множинного оцінювання параметрів. Переважно множини оцінок параметрів шукають у вигляді многогранника, багатовимірного еліпсоїда чи прямокутного паралелепіпеда, який задає інтервали значень параметрів. Вагомий внесок у розвиток цих методів внесли українські та зарубіжні вчені Бакан Г. М., Вошинін О. П., Грановський В. А., Кунцевич В. М., Красовський Н. Н., Куржанський А. Б., Личак М. М., Пшеничний Б. Н., Шарий С. П., Шокін Ю. І., Черноусько Ф. Л., Milanese M., Norton J. P., Pronzanto L., Schwepper F. S. Walter E., та ін.

Враховуючи, що методи моделювання статичних систем, побудовані на аналізі інтервальних даних, вимагають мінімальної кількості інформа-

ції про досліджувану систему, їх застосування суттєво розширює клас досліджуваних систем.

Разом з тим, описані в інтервальному аналізі методи не забезпечують все зростаючих потреб у математичному моделюванні складних статичних систем, а наведені у розрізних публікаціях методи вимагають систематизації.

При застосуванні існуючих методів множинного оцінювання параметрів відсутній систематизований підхід до дослідження властивостей інтервальних моделей статичних систем, що унеможливорює порівняння ефективності та обчислювальних витрат реалізації методів при побудові моделей даного класу. Існуючі методи множинного оцінювання, переважно, націлені на розв'язування задачі параметричної ідентифікації без можливості організації оптимального експерименту. Тим часом залишаються актуальними задачі оптимального допустимого оцінювання множини параметрів моделей, синтезу оптимальних структур та активної ідентифікації інтервальних моделей статичних систем та методи їх розв'язування.

Проблема організації оптимального експерименту з інтервальними даними та проблема зростання розмірності задач побудови математичних моделей «вхід-вихід» статичних систем, поряд із застосуванням відомих і достатньо описаних методів множинного оцінювання області параметрів вимагає застосування нових, описаних у багаточислених періодичних виданнях, переважно опублікованих автором монографії та його учнями. Ці методи відзначаються паралелізмом обчислень і можливістю задання конфігурації локалізаційної (зовнішньої) чи допустимої множини параметрів.

Розглянута проблематика вимагає систематизації теоретичного підходу, який би включав можливість послідовного розв'язування задач планування експерименту, ідентифікації структури моделі, локалізації чи допустимого оцінювання множини її параметрів, наближення складних моделей простішими. Теоретичні засади стали базою для розробки алгоритмічного та програмного забезпечення побудови математичних моделей «вхід-вихід» статичних систем за умов інтервального представлення вихідних змінних.

На цій основі розв'язано ряд прикладних задач, пов'язаних із моделюванням складних систем в енергетиці, економіці, екології та медицині.

РОЗДІЛ 1

АНАЛІЗ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ СИСТЕМ НА ОСНОВІ ІНТЕРВАЛЬНИХ ДАНИХ

1.1. Особливості синтезу моделей «вхід-вихід» статичних систем на основі експериментальних даних

Найбільшого поширення серед моделей систем, що будують в умовах невизначеності, набули статистичні та імовірнісні моделі типу «вхід-вихід», які задають залежність між вихідними показниками системи та її входами [29, 35, 70, 86, 87, 130, 148, 163, 164, 180]. Серед них можна виділити регресійні моделі [1, 3, 12, 37, 70, 115, 130, 142, 147], якими описують статичні (безінерційні) системи. При цьому висувають припущення, що систему можна описати функціональною залежністю у такому вигляді [3]:

$$y = \eta(\vec{x}, \vec{b}, \vec{z}),$$

де y – вихідна змінна;

$\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ – вектор вхідних змінних, які можна змінювати в деякій області χ ;

\vec{b} – вектор параметрів функції η ;

\vec{z} – вектор неврахованих або невизначених факторів, шумів, похибок (як правило) випадкової природи та ін.

Переважно кожна вихідна характеристика системи описується окремою функціональною залежністю. Тому надалі не обмежуючи загальності будемо розглядати моделі статичних систем із однією вихідною змінною, за виключенням розділу 4.

Основою для побудови математичної моделі системи часто є результати експерименту, які можна зобразити у вигляді матриці значень вхідних та вектора значень вихідної змінної в усіх спостереженнях [31]:

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} \dots x_{1n} \\ \dots \dots \dots \\ x_{N1} \dots x_{Nn} \end{pmatrix}; \quad \vec{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_N \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

Рядкам матриці X відповідають вектори \vec{x}_i ($i = 1, \dots, N$) значень вхідних змінних, що при експериментуванні викликають відповідні значення вихідної змінної y_i . Комбінацію \vec{x}_i, y_i називатимемо спостереженням. Загальна кількість комбінацій N задає кількість спостережень експерименту.

Надалі експериментальні дані будемо розглядати у більш розширеному тлумаченні – не лише як результат вимірювання значень змінних на реальній системі, але й як результати розрахунків на ЕОМ із застосуванням імітаційної моделі системи, дані експертного опитування і т.д.

Розглянемо три найпоширеніших задачі, що базуються на даних експерименту у вигляді (1.1).

Представлення даних X, \vec{Y} деякою функцією $f(\vec{x}, \vec{\beta})$ називають задачею ідентифікації статичної системи. На сьогоднішній день існує велика кількість публікацій, присвячена задачам ідентифікації статичних систем широкого класу [12, 35, 37, 147, 148]. Виділяють задачі ідентифікації об'єкта в «широкому» тлумаченні, коли потрібно знайти загальний вигляд (структуру) функції $f(\vec{x}, \vec{\beta})$ та її параметри $\vec{\beta}$ [3, 37, 151, 152, 193, 208] і найпростішу параметричну задачу ідентифікації [1, 12, 29, 113, 114]. У випадку параметричної ідентифікації структуру функції вважають відомою. Тоді задача ідентифікації є лишень задачею оцінювання невідомих параметрів. Вона розв'язується достатньо просто, якщо функція $f(\vec{x}, \vec{\beta})$ є лінійно-параметричною, тобто коли її записують у такому вигляді [3]:

$$f(\vec{x}, \vec{\beta}) = \beta_1 \varphi_1(\vec{x}) + \dots + \beta_m \varphi_m(\vec{x}), \quad (1.2)$$

де $\varphi_1(\vec{x}), \dots, \varphi_m(\vec{x})$ – відомі базисні функції;
 β_1, \dots, β_m – невідомі параметри.

Очевидно, що у виразі (1.2) функцію $f(\vec{x}, \vec{\beta})$ можна задати деяким скінченним рядом, наприклад $f(\vec{x}, \vec{\beta})$ є лінійною чи квадратичною функцією, поліномом відомого степеня, рядом Фур'є та ін. Якщо функція $f(\vec{x}, \vec{\beta})$ у якийсь спосіб знайдено, то модель об'єкта вважається побудованою і для кожного спостереження можна, обчислити значення вихідної змінної

$$\hat{y}_i = f(\vec{x}_i, \vec{\beta}), \quad (1.3)$$

тобто одержати вектор $\vec{\hat{Y}}$ і порівняти його із експериментальним вектором \vec{Y} . Модель узгоджується із даними експерименту X, \vec{Y} тим краще чим менша різниця $|\vec{\hat{Y}} - \vec{Y}|$. Внаслідок цього задачу параметричної ідентифікації формують так [12]: за даними експерименту X, \vec{Y} , знаючи загальний вигляд (1.2) функції $f(\vec{x}, \vec{\beta})$, оцінити її параметри $\vec{\beta}$ за умовою

$$\Psi(\vec{Y} - \vec{\hat{Y}}) \xrightarrow{\vec{\beta}} \min, \quad (1.4)$$

де Ψ – деякий функціонал, що характеризує узгодження розрахункових та фактичних значень виходу.

Задача ідентифікації тісно пов'язана із задачею планування експерименту [16, 17, 29, 33, 74, 113, 158, 159]. Для забезпечення найбільшої точності оцінок $\vec{\beta}$ параметрів $\vec{\beta}$ при заданій кількості спостережень N необхідно певним чином

сформувати та реалізувати в процесі експерименту матрицю X значень вхідних змінних. Процедури формування цієї матриці на основі критеріїв, що забезпечують високу точність моделі або її параметрів розглядають в теорії планування оптимального експерименту [74, 158]. Як правило, до проведення експерименту матрицю X плану, що забезпечує певну точність оцінок параметрів, вдається знайти лише у випадку лінійно-параметричної функції (1.2). Таким чином задача планування оптимального експерименту формулюється так [158]: «дано структуру лінійно-параметричної функції $f(\vec{x}, \vec{\beta})$, область χ можливої зміни значень вхідних змінних \vec{x} , кількість спостережень N , необхідно знайти матрицю плану експерименту $X(\vec{x}_i \in \chi)$ таку, щоб забезпечити найбільшу точність прогнозування на основі моделі або точність оцінок \vec{b} її параметрів $\vec{\beta}$ ».

Під прогнозуванням на основі моделі в даному випадку розуміємо розрахунок значень виходу \hat{y} згідно з формулами (1.2) та (1.3) за фіксованими векторами $\vec{x} \in \chi$ поза експериментальними точками, але в межах області експерименту.

У ряді випадків дослідник має достатньо точну, але складну для використання модель об'єкта, зображену у вигляді аналітично заданого виразу $y(\vec{x}, \vec{a})$, таблиці X, \vec{Y} чи програмно. Остання ситуація виникає у випадку імітаційного моделювання складних об'єктів на ЕОМ, коли можна достатньо точно, але в межах похибок заокруглень обчислити відгук y_i на довільну комбінацію входів \vec{x}_i , тобто одержати таблицю X, \vec{Y} . Такий спосіб моделювання об'єкта часто є єдино можливим, хоча й не завжди зручним для аналізу. За цих умов виникає задача наближення складної моделі об'єкта, заданої таблицею, більш простішою математичною моделлю у вигляді функції $f(\vec{x}, \vec{\beta})$ [3, 10, 82, 83]. Зауважимо, що дана задача є подібною до задачі ідентифікації структури моделі. При цьому якість наближення як і в задачі ідентифікації можна задати функціоналом (1.4). Спосіб задання умов наближення полягає у забезпеченні функцією $f(\vec{x}, \vec{\beta})$ певного значення точності ε_i для усіх табличних значень \vec{x}_i . У цьому випадку задачу наближення розв'язує за умов: $|y_i - f(\vec{x}_i, \vec{\beta})| \leq \varepsilon_i, \forall x_i$.

Очевидно, що така постановка задачі є реальною за умов одержання таблиці даних X, \vec{Y} у результаті імітаційного моделювання на ЕОМ з відомими межами похибок заокруглень ε_i .

Для розв'язування розглянутих задач ідентифікації, планування експерименту та наближення складних моделей простішими, часто використовують метод найменших квадратів (МНК) [1, 37, 114, 117]. У МНК за критерій узгодження експериментальних і розрахункових даних прийнята сума квадратів відхилень

$$\Psi = \sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y}_i)^2 .$$

За допомогою МНК при розв'язуванні задачі ідентифікації моделі у формі (1.2) оцінку \vec{b} вектора невідомих параметрів $\vec{\beta}$ отримуємо за формулою:

$$\vec{b} = (F^T F)^{-1} F^T \vec{Y}, \quad (1.5)$$

де

$$F = \begin{pmatrix} \varphi_1(\vec{x}_1) \dots \varphi_m(\vec{x}_1) \\ \vdots \\ \varphi_1(\vec{x}_N) \dots \varphi_m(\vec{x}_N) \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

є матрицею значень базисних функцій моделі (1.2), розрахованих в точках експерименту, тобто на основі матриці X .

Дослідження МНК- оцінок \vec{b} , або оцінок отриманих будь-яким іншим способом, описаним у працях [1, 12, 20, 37], проводять ґрунтуючись на гіпотезах про випадкову природу похибок в експериментальних даних, зокрема, методом регресійного аналізу. У регресійному аналізі розглядають певну модель невідзначеності у вигляді похибок в даних. Найбільш вивченим є випадок адитивної випадкової похибки спостережень у такому вигляді [12]:

$$y(\vec{x}) = y_o(\vec{x}) + e = f(\vec{x}, \vec{\beta}) + e, \quad (1.7)$$

де $y_o(\vec{x})$ – істинне значення «виходу» об'єкта, задане лінійно-параметричною функцією (1.2);

$y(\vec{x})$ – значення виходу, що спостерігається, «змішане» з похибкою e .

У класичному лінійному регресійному аналізі [12, 29] вважають, що похибка e в усіх спостереженнях має нормальний розподіл з нульовим середнім і незалежним значеннями у серіях спостережень, тобто

$$M(e_i) = 0, M(e_i^2) = \sigma^2, M(e_i, e_j) = 0 \quad \forall i \neq j. \quad (1.8)$$

У формулі (1.8) $M(\bullet)$ означає математичне сподівання, а σ^2 – дисперсію.

У літературі описано і менш жорсткі обмеження стосовно властивостей випадкової похибки e [37, 70].

У праці [37] показано, якщо похибка задовольняє умови (1.7) та (1.8), то МНК-оцінка \vec{b} є ефективною і незміщеною оцінкою вектора $\vec{\beta}$ і має нормальний розподіл із параметрами

$$M(\vec{b}) = \vec{\beta}, \quad \text{cov}\{\vec{b}\} = \sigma^2 (F^T F)^{-1},$$

де $\text{cov}\{\vec{b}\}$ – симетрична, розміром $(m \times m)$ коваріаційна матриця оцінок \vec{b} , діагональні елементи якої визначають їхні дисперсії.

Коваріаційна матриця залежить від матриці значень базисних функцій F і, відповідно, від матриці експерименту X . Це дає можливість вводити критерії планування оптимального експерименту за умовою мінімізації різних характе-

ристик матриці $(F^T F)^{-1}$. Найбільш вживаними є критерії, пов'язані з визначником, слідом і максимальним числом цієї матриці, відповідно, наведеними у такому вигляді [16, 17, 158]:

$$D = \det(F^T F)^{-1}, A = Sp(F^T F)^{-1}, E = \max \lambda_i(F^T F)^{-1}. \quad (1.9)$$

Розглянуті критерії забезпечують характеристики точності оцінок параметрів моделі (1.2). Інші критерії планування експерименту безпосередньо стосуються точності прогнозування на основі регресійної моделі і забезпечують мінімум середнього або максимального значення дисперсії прогнозування на області експерименту. Найбільш поширеними серед них є Q - та G -критерії оптимальності [17, 158].

На сьогоднішній день задачі планування оптимальних регресійних експериментів є розробленими у достатній мірі. Складено каталоги D -, A -, E -, Q -, G -оптимальних планів для випадку, коли функція $f(\vec{x}, \vec{\beta})$ є поліномом першого та другого степеня [17]. Значних результатів досягнуто при плануванні насичених ($N=m$) регресійних експериментів, які уможливають найбільш раціонально організувати експеримент.

Незважаючи на практичну привабливість і наявність відповідного алгоритмічного та програмного забезпечення для реалізації стохастичних методів експериментальної ідентифікації моделей «вхід-вихід» статичних систем, побудованих на гіпотезах про випадкову природу похибок, достатньо часто [29] їх застосування пов'язане з наступними проблемами. По-перше, для розрахунку достовірних оцінок статистичних характеристик об'єкта необхідні достатньо великі вибірки експериментальних даних, які не завжди можна отримати. По-друге, існує клас об'єктів, коли припущення про випадкову природу, адитивність похибок в експериментальних даних не відповідає реальним властивостям об'єкта. В останньому випадку побудова адекватної математичної моделі на основі стохастичних методів взагалі є неможливою.

Достатньо повний аналіз причин обмежень при застосуванні традиційного імовірнісного підходу наведено у працях Орлова О. І. [137 – 140, 259, 260].

Про те, що природа не підлягає правилам «традиційної імовірності», висловлювався відомий вчений в теорії систем і управління Калман Р. [86]. Подібним чином висловлювались Куржанський Ф. Б. [107, 108], Кунцевич В. М. [105, 99 – 106], Грановський В. Г. [34].

У випадку імітаційного моделювання, чи отримання даних в процесі опитування експертів, наприклад, при побудові моделей нових систем, модель з випадковою похибкою не відповідає дійсності [29, 139]. Дані імітаційного моделювання спотворені не випадковими похибками заокруглень, а дані опитування експертів задають інтервали можливих значень показників. Під час повторних опитувань експертів отримуємо однакові, але неточні результати [139]. Аналогічно, повторне імітаційне моделювання із незмінним набором вхідних даних дає той самий результат, хоча й неточний за рахунок похибок заокруглень. Подібна ситуація також виникає у випадку моделювання за результатами

вимірювань із обмеженими за амплітудою похибками, хоча повторне вимірювання за певних умов уможлиблює уточнення результату [22 – 29, 100 – 107, 118 – 123]. Спільним у розглянутих випадках є те, що одержані дані містять обмежені за амплітудою похибки (переважно невідомої природи). Їх називають інтервальними даними, оскільки вони задають інтервали можливих значень виходу, або інших характеристик об'єкта.

У випадках побудови математичних моделей «вхід-вихід» технологічних процесів (ТП) виникає задача забезпечення допустимих значень параметрів для заданих допустимих значень виходів ТП (задача синтезу допусків), а також зворотна задача аналізу допусків [95, 131, 132]. Виходи ТП переважно є випадковими, а особливістю їхнього задання для розв'язування задач синтезу допусків є встановлення певних меж допустимих значень у вигляді числових інтервалів. Отже, і в цих випадках природній вигляд вихідних даних є інтервальним.

Розглянуті випадки вимагають застосування інших, відмінних від традиційно-імовірнісних методів моделювання об'єктів, побудованих на інтервальних даних. Вказані методи, розвивають у межах інтервального аналізу або теоретико-множинного підходу [4 – 8, 15, 22 – 30, 78 – 80, 88, 89, 38 – 52, 54 – 68, 71 – 73, 75, 76, 79, 80, 88, 89, 99 – 111, 118 – 126, 129, 155, 156, 161, 162, 165, 166, 168 – 179, 181, 182, 184 – 207, 209 – 258, 261 – 292].

У математичній енциклопедії [127, 128] інтервальний аналіз розглядають, як наукову дисципліну, що застосовується для урахування похибок заокруглень при розрахунках на ЕОМ. У довідковій літературі [18] по математичних методах, поняття інтервального аналізу часто хибно трактують як «арифметику інтервалів». Однак розвиток методів інтервального аналізу призвів до певної еволюції його наукової термінології та самого трактування. Наприклад, у низці робіт [100–106, 118–123] інтервальний аналіз розглядають у більш ширшому трактуванні, – як теоретико-множинний підхід. На наш погляд, найбільш точніше визначення інтервального аналізу на сьогоднішній день наведене у праці [174]: як наукової дисципліни на стику інформатики та математики, предметом, якої є розв'язування задач з інтервальними невизначеностями в даних на вході, виході чи на проміжних етапах.

При розв'язуванні задач експериментального моделювання об'єктів на основі даних із інтервальною невизначеністю, оцінки параметрів моделей часто задають множинами (областями) різної конфігурації. Так у працях [4 – 8, 22 – 28, 165 – 166] для оцінювання параметрів моделей використовують еліпсоїдні множини, а в працях [17 – 20, 103 – 106] – многогранні області. Тим часом як у інтервальному аналізі традиційно застосовують «інтервальні методи оцінювання», коли область параметрів задають прямокутним гіперпаралелепіпедом [170 – 178, 241, 280]. З іншого боку, запозичення методів та термінів із математичної статистики, зокрема, з регресійного аналізу, зроблені авторами праць [15, 29, 137, 207, 259], що стосуються інтервального аналізу, призвело до застосування та утвердження терміну «аналіз інтервальних даних». Тому у межах інтервального аналізу зручно виділити методи аналізу інтервальних даних, під якими будемо розуміти, методи розв'язування задач моделювання з інтервальними невизначеностями в експериментальних даних, дослідження механізмів впливу не-

визначеностей на їх формування, отримання та дослідження математичних моделей об'єктів із множинними оцінками параметрів.

Методи інтервального аналізу та їхній розвиток створили передумови розвитку трьох напрямів, наукової та практичної діяльності, пов'язаної з математичним моделюванням об'єктів на основі інтервальних даних. Це [181]:

- математичний, в межах якого проводять дослідження математичних проблем інтервальних обчислень;

- комп'ютерний, в межах якого досліджують питання створення та використання інтервальних обчислень;

- прикладний, пов'язаний з використанням методів інтервального аналізу і відповідних комп'ютерних засобів для побудови та дослідження математичних моделей широкого класу об'єктів.

На сьогоднішній день опубліковано десятки тисяч праць, присвячених математичному моделюванню об'єктів на основі методів інтервального аналізу. В інституті прикладної математики Фрейбургського університету створена і постійно поповнюється «інтервальна бібліотека». У періодичному виданні *Freiburger Intervall – Berichte* в міру накопичення матеріалу публікуються бібліографічні списки. Найбільше робіт опубліковано у сфері автоматики та управління [161 – 162, 206, 209, 289 – 291, 231, 233, 241] електротехніки та електроніки [38, 47, 96, 124, 125, 134, 221, 246], екології та охорони здоров'я [52, 149, 188, 207], технологічних дисциплін [13, 14, 54, 64, 141], економіки [9, 221, 222, 273, 288].

Розглянемо основні засади інтервального аналізу, а також можливості методів моделювання систем, побудовані на інтервальному, або теоретико-множинному підході.

1.2. Основи інтервального аналізу та його застосування для моделювання систем

Розглянуті задачі, пов'язані із моделюванням об'єктів за умов інтервальних даних, можуть бути розв'язані за допомогою інтервального підходу, теоретичною основою якого є інтервальні обчислення.

Основи інтервального аналізу були розроблені на вимогу часу – як засіб урахування похибок при розрахунках на ЕОМ і описані у монографії Р. Мура (R. Moore) за назвою «Interval analysis» у 1966 р. [243]. Перша праця серед вітчизняних вчених по даному напрямку була опублікована Канторовичем Л. В. у «Сибірському математичному журналі» у 1962 р. [90]. Основна ідея інтервальних обчислень полягає у представленні дійсного числа не одним машинним числом, а двома, які задають його гарантовані межі.

Для ілюстрації правил виконання операцій класичної інтервальної арифметики [88,89,179,195,269], розглянемо такі інтервальні числа: $[a]=[a^-;a^+]$, $[b]=[b^-;b^+]$, $[c]=[c^-;c^+]$. Позначимо за a , b , c дійсні числа, які належать до вказаних інтервалів, відповідно. Тоді правило виконання операцій класичної

інтервальної арифметики таке: «якщо $[c^-; c^+] = [a^-; a^+] \circ [b^-; b^+]$, $a \in [a^-; a^+]$, $b \in [b^-; b^+]$, то $a \circ b \in [c^-; c^+]$, де символ \circ – означає арифметичну операцію із набору $\{+, -, *, /\}$ ». Результати операцій додавання, віднімання, ділення та множення над інтервалами можна записати явно за допомогою таких формул:

$$[a]+[b]=[a^-+b^-; a^++b^+], [a]-[b]=[a^- - b^+; a^+ - b^-], [a]/[b]=[a] \cdot [1/b^+; 1/b^-],$$

$$[a] \cdot [b] = [\min\{a^- \cdot b^-, a^- \cdot b^+, a^+ \cdot b^-, a^+ \cdot b^+\}; \max\{a^- \cdot b^-, a^- \cdot b^+, a^+ \cdot b^-, a^+ \cdot b^+\}].$$

У методах інтервального аналізу враховують похибки у вхідних даних та похибки заокруглень на ЕОМ. У результаті усі дані набувають вигляду скінченних числових інтервалів.

Усі задачі, які розв'язують із застосуванням інтервальних обчислень можна поділити на дві групи [2, 88]: задачі із неточними – інтервальними даними та задачі із точними даними. Перші – пов'язані із обчисленням множини розв'язків, а другі – із її поступовим уточненням. Прикладом задачі, яку відносять до першої групи, є задача розв'язування системи лінійних рівнянь з інтервальними коефіцієнтами. Для задач із точними даними інтервальний аналіз використовують в методах, які породжують послідовність меж, що збігаються до розв'язку. Прикладом таких задач є задача локалізації коренів нелінійного рівняння.

Значні проблеми виникають при реалізації інтервальних обчислень, коли традиційні чисельні методи безпосередньо переносять на інтервальні числа. У результаті такого перенесення відбувається значне розширення результуючих інтервалів. Інші проблеми, які стосуються інтервальних обчислень, пов'язані із виконанням операції ділення на інтервали, які включають нуль. Внаслідок розширення інтервалів при реалізації обчислень, такі ситуації виникають достатньо часто. Проблеми, пов'язані із застосуванням класичної інтервальної арифметики, іноді можна розв'язати із використанням розширених інтервальних арифметик [182, 194, 212, 237, 225, 234]. Ширина результуючого інтервалу в інтервальних обчисленнях залежить від порядку виконання операцій. Наприклад, в інтервальній арифметиці відомою є властивість субдистрибутивності [2]:

$$[a^-; a^+] \cdot ([b^-; b^+] + [c^-; c^+]) \subseteq [a^-; a^+] \cdot [b^-; b^+] + [a^-; a^+] \cdot [c^-; c^+]. \quad (1.10)$$

Вищезазначене дає можливість стверджувати, що при переході до обчислень із застосуванням інтервальної арифметики виникає потреба перегляду практично усіх розроблених на даний момент чисельних методів [2, 129, 174, 179].

Основою усіх чисельних методів, реалізованих в інтервальній арифметиці, є властивість, яка називається «монотонністю включення». Розглянемо суть цієї властивості [88].

Нехай маємо інтервали $[a^-; a^+]$, $[b^-; b^+]$, $[c^-; c^+]$, $[d^-; d^+]$. Тоді справджується така властивість монотонності включення:

$$[a^-; a^+] \subset [c^-; c^+], [b^-; b^+] \subseteq [d^-; d^+] \Rightarrow$$

$$[a^-; a^+] \cap [b^-; b^+] \subseteq [c^-; c^+] \cap [d^-; d^+]. \quad (1.11)$$

Саме ця властивість уможливило побудову ітераційних процедур наближення множин розв'язків для задач із інтервальними (неточними) даними. В результаті розміри множини визначаються шириною інтервалів вхідних даних та можливостями ітераційної процедури.

Достатньо простий спосіб представлення результатів у випадку застосування інтервального підходу, а також властивість (1.11), яка притаманна усім чисельним процедурам інтервального аналізу, спричинюють розвиток його методів, а також широке застосування для розв'язування багатьох задач, пов'язаних із моделюванням систем.

Питання дослідження та побудови основ інтервального аналізу, інтервальної арифметики та інтервальних обчислень розглянуто у працях [2, 88, 89, 179, 181, 182, 184, 190, 194, 237, 242 – 245, 292] та ін.

Дослідженню задач інтервального оцінювання множин значень функцій присвячені розділи праць [181, 292], третій розділ праці [2], праці [211, 214, 218, 227, 228, 263 – 265].

У працях [155, 156] розглядають деякі нові застосування інтервального аналізу, наприклад для розв'язування задач геометричного проектування.

Застосування інтервальної математики для задач побудови лінійних моделей статичних систем за умов інтервального представлення даних, призводить до необхідності розв'язування інтервальних систем лінійних алгебричних рівнянь у такому вигляді:

$$[A] \cdot \vec{b} = [\vec{c}], \quad (1.12)$$

де $[A]$ – відома матриця розмірності $m \times m$, в загальному випадку з інтервальними елементами $[a_{ij}^-; a_{ij}^+]$;

\vec{b} – невідомий вектор;

$[\vec{c}]$ – відомий інтервальний вектор правих частин інтервальної системи рівнянь із елементами $[c_i^-; c_i^+]$.

Методи розв'язування інтервальних систем алгебричних рівнянь розглянуті у працях [79, 80, 88, 111, 168, 170–179, 187, 189, 192, 210, 215–217, 219, 223, 229, 230, 232, 234, 236, 238–240, 247–258, 261, 266, 269–271, 274–278, 282–287].

Залежно від цілей моделювання та невизначеності у вхідних і вихідних змінних моделі статичної системи, в інтервальному аналізі розглядають AE – узагальнені множини розв'язків інтервальної алгебричної системи рівнянь (1.12) [111, 172, 176]. Серед них на практиці найчастіше зустрічаються задачі знаходження:

- об'єднаної множини розв'язків [2, 224, 243, 244, 249, 258]

$$\Omega_{об} = \{\vec{b} \in R^m \mid \exists A \in [A], \exists \vec{c} \in [\vec{c}], A \cdot \vec{b} = \vec{c}\}; \quad (1.13)$$

- допустимої множини розв'язків [178, 248, 252, 258, 287]

$$\Omega_{дон} = \{\vec{b} \in R^m \mid \forall A \in [A], \exists \vec{c} \in [\vec{c}], A \cdot \vec{b} = \vec{c}\}; \quad (1.14)$$

- алгебричного інтервального розв'язку [2, 88, 179]: $[A] \cdot [\vec{b}] = [\vec{c}]$, де $[\vec{b}]$ – інтервальний вектор з елементами $[b_j^-; b_j^+]$.

Об'єднану множину розв'язків переважно використовують для випадку розв'язування задач параметричної ідентифікації та наближення складних моделей статичних систем простішими. Допустиму множину Ω_{don} шукають при розв'язуванні задач синтезу та аналізу допусків.

У працях [162] та [283] вперше було розглянуто «керовану» множину розв'язків системи (1.12), яка разом із допустимим та об'єднаним розв'язками задає межові множини розв'язків системи (1.12).

У загальному випадку, для задач високої розмірності інтервальної системи алгебричних рівнянь (1.12) чисельно визначити узагальнені множини її розв'язків неможливо. Тому в інтервальному аналізі застосовують ітераційні процедури зовнішнього чи внутрішнього наближення, які називаються інтервальною локалізацією [2, 292] чи допустимим оцінюванням.

Для випадку локалізації множини розв'язків системи (1.12) за наближення обирають описаний прямокутний паралелепіпед P^+ («брус») [111, 171, 213, 250]. У результаті отримують інтервальний вектор $[\vec{b}]$, який включає, наприклад, множину Ω_{ob} .

У задачі допустимого оцінювання знаходять вписаний прямокутний паралелепіпед максимального об'єму P^- (внутрішнє оцінювання) [168, 169, 178, 281]. У результаті, отриманий інтервальний вектор $[\vec{b}]$ належить, наприклад, множині Ω_{don} . Зауважимо, що у випадку допустимого інтервального оцінювання множини Ω_{don} задачу оцінювання називають «задачею про допуски» [248, 252, 287].

З метою забезпечення оптимальності локалізаційних розв'язків $[\vec{b}]$, у випадку наближення паралелепіпедом P^+ («описаним брусом») мінімізують його об'єм, а у випадку допустимого оцінювання за допомогою P^- («вписаним брусом») знаходять максимум його об'єму.

Проведені дослідження властивостей узагальнених множин розв'язків системи (1.12) дали можливість авторам праць [2, 174, 248] побудувати достатньо ефективні алгоритми інтервальної локалізації та оцінювання.

В інтервальному аналізі значна частина ітераційних алгоритмів локалізації розв'язків системи (1.12) побудована на властивості системи (1.12), встановленій Nickel K. [254]: точні значення (оптимальні) $b_j^-; b_j^+$ досягаються на межових значеннях матриці $[A]$ та вектора $[\vec{c}]$. При розв'язуванні задач параметричної ідентифікації та наближення, система (1.12) переважно є перенасиченою, тобто матриця $[A]$ є прямокутною, розмірності $N \times m$, $N > m$. У цьому випадку вказана властивість системи (1.12) втрачається і, відповідно, для її розв'язування не можуть бути використані ітераційні методи, побудовані на властивості Нікеля.

У загальному випадку множина Ω_{ob} у просторі розв'язків є неопуклою. У праці [257] показано, що при знаходженні об'єднаного розв'язку системи (1.12), задаючи додаткові обмеження на знаки компонент вектора \vec{b} , її можна розділи-

ти на $p = 2^m$ – систем лінійних алгебричних нерівностей (кількість можливих комбінацій знаків компонент вектора \vec{b})

$$\begin{cases} A'_p \cdot \vec{b} \leq \vec{c}^+; \\ A''_p \cdot \vec{b} \geq \vec{c}^-, \end{cases}$$

де A'_p, A''_p – дійсні матриці, складені із межових значень матриці $[A]$; \vec{c}^-, \vec{c}^+ – вектори, складені із нижніх та верхніх меж інтервалів $[c_i^-, c_i^+]$, відповідно. Наприклад, якщо задати $b_j > 0 \quad \forall j = 1, \dots, m$, то матриця A'_p , буде складена із компонент a_{ij}^- , а матриця A''_p – із a_{ij}^+ . Локалізацію розв'язків таких систем можна здійснити методами лінійного програмування [11]. Тоді об'єднаний розв'язок системи (1.12) є об'єднанням розв'язків 2^m – систем лінійних алгебричних нерівностей. Очевидно, що запропонований авторами праць [102, 123, 257] підхід є ефективним тільки у випадку, коли із практичних міркувань (технічних чи технологічних) знаки компонент вектора \vec{b} є відомими.

Для інтервальної локалізації об'єднаної множини розв'язків $\Omega_{об}$ достатньо ефективні методи наведені у працях [2, 248]. Найбільш раціональними з обчислювальної точки зору є методи та побудовані на них алгоритми «поділу області параметрів» (PPS) та методи «поділу області розв'язків» (PSS), в основу яких покладено відомий метод «віток та меж», подібно як це реалізовано у праці [265] для оптимізаційної задачі.

Найбільш вагомими результатами стосовно розробки методів зовнішнього (локалізації) та внутрішнього (допустимого) інтервального оцінювання розв'язку системи інтервальних рівнянь (1.12) наведені у праці [174]. Там же наведена достатньо повна бібліографія, яка стосується цих методів.

Незважаючи на достатньо високу ефективність розроблених в межах інтервального аналізу ітераційних алгоритмів інтервальної локалізації та допустимого інтервального оцінювання, а також можливість розв'язування на їхній основі задач моделювання високої розмірності, з точки зору експериментального моделювання статичних систем вони мають загальний недолік: передбачається, що систему інтервальних рівнянь (1.12) сформовано за результатами пасивного експерименту і не аналізується природа інтервальної невизначеності в елементах $[a_{ij}^-, a_{ij}^+]$ матриці $[A]$ та вектора $[\vec{c}]$. У межах формального підходу до розв'язування системи (1.12), побудованого на властивостях інтервальної арифметики, не враховується факт накопичення інформації про об'єкт дослідження, а також можлива додаткова інформація про його статистичні властивості (закони розподілу на заданих числових інтервалах).

Вказаний недолік унеможливорює організацію активного експерименту та підвищення точності інтервальних оцінок параметрів моделі, які одержують внаслідок оцінювання розв'язків інтервальної системи алгебричних рівнянь (1.12).

Підвищення точності методів гарантованого та інтервального оцінювання вимагає аналізу джерел породження інтервальних даних, дослідження та класифікації інтервальних похибок у випадку проведення спостережень за виходом об'єкта.

1.3. Способи зображення вихідних змінних моделей статичних систем у інтервальному вигляді

У методах інтервального аналізу та методах моделювання, які побудовано на інтервальному підході, переважно не розглядають можливу додаткову інформацію про властивості обмежених похибок. Наприклад, для випадкових похибок цією інформацією можуть бути закони розподілу на інтервалах. Однак наявність додаткової інформації про природу похибок дає можливість підвищити точність моделі об'єкта, або принаймні оцінити потенційні межі її досягнення.

Розглянемо різні схеми зображення вихідних змінних моделей статичних систем при експериментуванні, які хоча і засновані на різних механізмах дії факторів невизначеності, але у підсумку можуть бути описані однією і тією ж інтервальною моделлю даних.

Як відомо [72, 193], результати імітаційного моделювання на ЕОМ неминуче включають похибки заокруглень, із яким би числом розрядів не проводились обчислення. При цьому похибки заокруглень є не випадковими, оскільки при розрахунках за однією і тією ж самою формулою (алгоритмом), для одних і тих же самих вхідних даних \vec{x} завжди буде одержано один і той же самий результат $y(\vec{x})$. Цей факт виключає можливість дублювання обчислень з метою підвищення точності. Стійкість кінцевого результату не означає його високої точності, оскільки сумарна похибка результату, що виникає при складних розрахунках через похибки заокруглень, може сягати значних величин.

Як було показано у попередньому параграфі, за наявності розрахованого значення вихідної змінної $y(\vec{x}_i)$ методи інтервальної арифметики дають можливість оцінити межі істинної величини $y_0(\vec{x}_i)$, яка була б одержана при розрахунках за відсутності похибок заокруглень:

$$y_i^- = y(\vec{x}_i) - \Delta_i, y_i^+ = y(\vec{x}_i) + \Delta_i, \quad (1.15)$$

де y_i^-, y_i^+ – відповідно нижня і верхня межі інтервалу вихідної змінної; Δ_i – гранична похибка заокруглень, залежна від вхідних даних \vec{x}_i .

Якщо гранична похибка Δ_i визначена правильно, то справджується така умова:

$$y^- \leq y_0(\vec{x}_i) \leq y_i^+, \quad (1.16)$$

яка означає, що невідоме значення виходу належить відомому інтервалу $[y_i^-, y_i^+]$.

У підсумку, при обчисленні функції $f(\bar{x}_i)$, заданої алгоритмічно, різним значенням аргументу \bar{x}_i відповідатимуть різні інтервали $[y_i^-, y_i^+]$ ($i = 1, \dots, N$).

Розглянемо інтервальну модель зображення даних у випадку опитування експертів [139]. При проектуванні нових систем, коли відсутній як математичний опис, так і можливість провести експеримент на деякому модельному стенді, дані опитування експертів часто є єдиною інформацією для прийняття рішень [193]. На цьому етапі, який можна назвати перед проектним, завданням експерта є передбачення можливих значень вихідних характеристик системи залежно від значення її входів \bar{x} . Природньо, що точне передбачення у даній ситуації неможливе, і найбільш ймовірною буде відповідь експерта у вигляді вказівки можливих меж вихідної змінної y . Отже, як і у випадку похибок заокруглень, приходять до способу зображення даних виразом (1.16).

Але, якщо при розрахунках на ЕОМ заздалегідь відомо, що для одного і того ж аргумента \bar{x} завжди буде одержано одне й те ж (хоча і неточне) значення y , то відносно експертних даних таке припущення справджується не завжди. Це пов'язано із складністю опису реакції експерта на багаторазово поставлене запитання анкети: «Яким буде вихідний показник системи для заданих входів x_1, \dots, x_n ?». Очевидно, що результати залежатимуть від того, із яким часовим інтервалом ставлять запитання, чи показують експертів його попередню відповідь і т. д. Природньо вважати, що очікуване (реальне) значення вихідного показника $y_0(\bar{x}_i)$ знаходиться в інтервалі, вказаному експертом, і не приписувати похибці випадкової природи.

Розглянемо способи інтервального задання вихідних змінних моделей статичних систем із застосуванням вимірювальних засобів.

Даний спосіб є найбільш природнім, коли похибка результату в основному пов'язана із неточністю вимірювальних пристроїв. У цьому випадку метрологи переважно вживають поняття граничної абсолютної (Δ) або відносної (δ) похибок вимірювання, вважаючи, що виконуються такі умови:

$$|y(\bar{x}_i) - y_0(\bar{x}_i)| \leq \Delta, \text{ або } |y(\bar{x}_i) - y_0(\bar{x}_i)| \leq \delta \cdot |y(\bar{x}_i)|,$$

де $y(\bar{x}_i)$, $y_0(\bar{x}_i)$ визначають, відповідно, виміряне та істинне за даних умов (для заданих значень вхідних змінних \bar{x}) значення вихідної змінної.

Враховуючи, що відносну похибку можна звести до моделі абсолютної похибки простим перетворенням, надалі розглядатимемо тільки модель абсолютної похибки, вважаючи, що абсолютна похибка Δ у загальному випадку може залежати від значень вхідних змінних \bar{x} .

Порівнюючи спосіб інтервального зображення вихідної змінної у випадку похибок заокруглень і спосіб у випадку похибок вимірювань, помітною є значна подібність між ними: обидва способи відповідають моделі адитивної обмеженої похибки, тобто

$$y(\bar{x}_i) = y_0(\bar{x}_i) + e_i, \tag{1.17}$$

де e_i – невідоме значення обмеженої за амплітудою похибки заокруглень чи вимірювань, що не перевищує відомої граничної величини: $|e_i| \leq \Delta_i$.

В обох випадках виконується умова (1.16), яка гарантує, що невідомий істинний результат належить до відомого інтервалу.

Разом із тим, між способами існує принципова відмінність, яка особливо наочно проявляється у випадках багаторазового обчислення чи вимірювання виходу $y(\vec{x}_i)$ при одних і тих же значеннях вхідних змінних \vec{x} .

У випадку похибки заокруглень однозначно: $y(\vec{x}_i)$ і інтервал (1.16) залишатиметься без змін.

У випадку похибок вимірювань можливі дві ситуації:

а) вимірне значення не змінюється.

б) вимірне значення $y(\vec{x}_i)$ та інтервал (1.16) змінюються випадковим чином.

Очевидно, що перший випадок повністю аналогічний до попереднього, коли повторення (дублювання) дослідів не несе ніякої додаткової інформації і не звужує результуючий інтервал, який включає істинне значення.

Спосіб інтервального зображення вихідної змінної у випадку б) принципово відрізняється від способу у випадку а). У майбутньому, модель (1.17) для ситуації б) будемо називати моделлю випадкової інтервальної похибки [72]. Переважно таку модель розглядають у методах еліпсоїдного оцінювання [22 – 28]. Вона також описана у працях [101 – 108, 118 – 123].

Властивості випадкової інтервальної похибки розглянуто у працях [60, 72]. Зупинимось детальніше на них.

Нехай, похибка вимірювань e в моделі (1.17) для фіксованого аргументу \vec{x} має відомий симетричний розподіл, заданий щільністю розподілу імовірностей $W(e)$ на інтервалі $[-\Delta; \Delta]$, тобто

$$W(e) = \begin{cases} \neq 0, & \text{якщо } e \in [-\Delta, \Delta] \\ = 0, & \text{якщо } e \notin [-\Delta, \Delta] \end{cases}, \quad W(-e) = W(e).$$

Очевидно, що математичне сподівання похибки у цьому випадку дорівнює нулю.

Нехай проведено N повторних вимірювань вихідної змінної y для фіксованих значень вхідних змінних \vec{x} . У результаті одержимо вибірку із N значень, що не збігаються у загальному випадку: $y_1, \dots, y_j, \dots, y_N$, яка породжує вибірку випадкових інтервалів

$$d_j = [y_j - \Delta; y_j + \Delta], \quad j = 1, \dots, N. \quad (1.18)$$

Отже, у даному випадку ми маємо справу зі статистикою інтервалів, або статистикою об'єктів нечислової природи [193, 259].

Виходячи із адитивності та обмеженості похибки, що породжує вибірку випадкових інтервалів, кожен із інтервалів включає істинне значення вихідної характеристики.

Позначимо через S_N інтервал

$$S_N = \bigcap_{j=1}^N d_j = \left[S_N^- = \max_j (y_j - \Delta); S_N^+ = \min_j (y_j + \Delta) \right], \quad (1.19)$$

який одержано внаслідок перетину інтервалів (1.18).

У праці [72] показано, що значення величини y_0 належить перетину інтервалів (1.18), а отже, – і результуючому інтервалу $[S_N^-, S_N^+]$, який задано виразом (1.19). На прикладі рівномірного закону розподілу у праці [72] встановлено, що при зростанні потужності N вибірки, результуючий інтервал S_N стискається у точку, що збігається з істинним значенням y_0 .

Слід зазначити, що у схемі перетину інтервалів можливі неінформативні спостереження, коли одержаний на $(N+1)$ -му кроці випадковий інтервал d_{N+1} в цілому включає інтервал S_N , який одержано як перетин попередніх інтервалів. Тоді $(N+1)$ -ше спостереження не несе ніякої інформації, що зменшує інтервал локалізації шуканого значення y_0 .

У практичних застосуваннях можливі ситуації, коли при описі системи вихідні дані (показники, характеристики), задано інтервалами можливих значень, які обумовлені дією факторів із різною природою невизначеності. Так, частина факторів може змінюватися випадковим чином, а решту можна описати лише інтервалом можливих значень.

За цих умов слід використовувати мішану модель адитивної інтервальної похибки, яка включає обидві складові [72]:

$$y_i = y_{0i} + e_{1i} + e_{2i}, \quad (1.20)$$

де, e_{1i} – невідповідна обмежена похибка із відомим діапазоном можливих значень $-\Delta_{1i} \leq e_{1i} \leq \Delta_{1i}$;

e_{2i} – випадкова похибка, що має симетричний (у загальному випадку невідомий) розподіл на відомому інтервалі $[-\Delta_{2i}; \Delta_{2i}]$.

Як і раніше, для істинного значення y_{0i} виконується умова включення його в інтервал (1.16), але на відміну від попередніх випадків, межове значення похибки обчислюють так:

$$\Delta_i = \Delta_{1i} + \Delta_{2i}.$$

Наявність у мішаній моделі невизначеної неусувної похибки e_{1i} призводить до того, що дублювання дослідів у мішаній моделі зменшує лише випадкову складову похибки e_{2i} . У дублюванні дослідів, як і раніше, істинне значення y_{0i} належить перетину випадкових вибірових інтервалів (1.19).

Позначимо ширину інтервалу S_{N_i} у i -тій точці спостережень за $\Delta_{N_i} = S_{N_i}^+ - S_{N_i}^-$. Як показано у праці [72], істинним є вираз:

$$\lim_{N_i \rightarrow \infty} M(\Delta_{N_i}) = 2 \cdot \Delta_{1i}, \quad (1.21)$$

де $M(\Delta_{N_i})$ – математичне сподівання ширини інтервалу в i -тій точці.

Отже, перетином інтервалів у мішаній моделі при довільному об'ємі вибірки N завжди є скінчений інтервал з шириною, більшою від $2 \cdot \Delta_{1i}$, який хоча і включає істинне значення y_{i0} , але не вироджується у точку.

Мішана модель (1.20) породжує відповідні часткові моделі, розглянуті нижче [72].

1. Модель не випадкової неусувної інтервальної похибки ($\Delta_{1i} \neq 0, \Delta_{2i} = 0$). Усі повторні досліди неінформативні, оскільки не змінюють ширину інтервалу локалізації істинного значення y_{0i} . Ширина результуючого інтервалу S_{N_i} для y_{0i} дорівнює $2 \cdot \Delta_{1i}$.

2. Модель випадкової інтервальної похибки ($\Delta_{1i} = 0, \Delta_{2i} \neq 0$). Дублювання звужує результуючий інтервал S_{N_i} ($\lim_{N_i \rightarrow \infty} S_{N_i} = y_{0i}$), хоча можливі неінформативні спостереження.

3. Мішана модель інтервальної похибки ($\Delta_{1i} \neq 0, \Delta_{2i} \neq 0$). Дублювання частково звужує інтервал невизначеності S_{N_i} .

Модель мішаної похибки розглянуто також у працях [137 – 139], присвячених реалістичній статистиці, тобто традиційно-стохастичній схемі опрацювання даних. Для цього випадку показано, що із збільшенням потужності вибірки сподіване значення випадкової величини через метрологічні похибки наближається до деякого інтервалу локалізації істинного невідомого значення вихідної змінної y_0 , ширина якого називається «нотною».

У монографії [98] розглянуто інтервально-статистичні способи зображення середніх значень ознак, імовірностей, розподілів. Інтервальний спосіб зображення середніх передбачає задання нижньої та верхньої меж середніх статистичних. Для цього способу розглянуто випадки перетину та об'єднання. У першому випадку показано властивість звуження інтервалів моделей середніх, подібно як у випадку перетину інтервалів. У випадку об'єднання інтервалів середніх автором праці [98] проілюстровано зростання невизначеності. Очевидно, що об'єднання інтервальних моделей невизначеності [98] має аналогічні властивості як у інтервальних моделях випадкових похибок, одержаних при аналізі інтервальних даних. Це, зокрема, зменшення невизначеності (ширини результуючого інтервалу) при дублюванні, коли істинне значення належить кожному із інтервалів перетину.

Однак способи інтервального зображення змінних, які досліджено у працях [98, 137 – 139] виходять за межі гарантованих підходів, чим принципово відрізняються від розглянутої моделі випадкової інтервальної похибки [72]. Тому їхнє застосування, наприклад, в задачах параметричної ідентифікації статичних систем не дає можливості отримати гарантовані оцінки параметрів моделей.

Незважаючи на те, що розглянуті моделі інтервальних похибок мають різні походження, їх об'єднує спільна властивість, – вони є обмеженими за амплітудою. Застосування розглянутих додаткових властивостей цих похибок, уможливить: розширення класу задач, які розв'язують на основі інтервального підходу;

обґрунтування кількості спостережень у експерименті; побудову нетрадиційних методів аналізу інтервальних даних і застосування їх для більш ефективного розв'язування задач параметричної та структурної ідентифікації моделей «вхід-вихід» статичних систем.

1.4. Математичні та обчислювальні аспекти методів аналізу інтервальних даних

Розглянемо основні припущення, на яких ґрунтуються методи аналізу інтервальних даних у випадку побудови моделей «вхід-вихід» статичних систем.

У вітчизняній літературі (скоріше всього) ці гіпотези вперше було сформульовано у рамках теоретико-множинного підходу до розв'язування задач параметричної ідентифікації у праці [102], та дещо у більш розширеному вигляді (без умови адитивності обмеженої похибки) у праці [15]:

Н1. Статичну систему (об'єкт) описують лінійно-параметричним рівнянням

$$y_o = \beta_1 \cdot \varphi_1(\vec{x}) + \dots + \beta_m \cdot \varphi_m(\vec{x}), \quad (1.22)$$

де y_o – істинне невідоме значення виходу системи;

$\vec{x} \in R^n$ – вектор вхідних змінних;

$\vec{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_m)^T$ – вектор невідомих параметрів;

$\vec{\varphi}^T(\vec{x}) = (\varphi_1(\vec{x}), \dots, \varphi_m(\vec{x}))^T$ – вектор відомих базисних функцій.

Н2. Результати експерименту представлено матрицею X значень вхідних змінних і відповідним вектором інтервальних значень вихідної змінної y :

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{i1} & \dots & x_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{N1} & \dots & x_{Nn} \end{pmatrix}; \quad [\vec{Y}] = \begin{pmatrix} [y_1^-; y_1^+] \\ \vdots \\ [y_i^-; y_i^+] \\ \vdots \\ [y_N^-; y_N^+] \end{pmatrix}. \quad (1.23)$$

Припускають, що у довільному i -му спостереженні істинне значення виходу $y_{oi} = \vec{\varphi}^T(\vec{x}_i) \cdot \vec{\beta}$ належить інтервалу $[y_i^-, y_i^+]$, тобто $y_i^- \leq y_{oi} \leq y_i^+$.

Інтервальні значення виходу $[y_i^-, y_i^+]$ можуть бути одержані спираючись на моделі інтервальних похибок, розглянуті у попередньому підрозділі.

Завданням аналізу інтервальних даних є оцінювання невідомого вектора $\vec{\beta}$ так, щоб значення функції $y = \vec{\varphi}^T(\vec{x}) \cdot \vec{\beta}$ у точках експерименту належали до відповідних інтервалів виходу. Якщо оцінка \vec{b} вектора $\vec{\beta}$ існує, то одержану функцію $\hat{y}(\vec{x}) = \vec{\varphi}^T(\vec{x}) \cdot \vec{b}$ називатимемо моделлю статичної системи.

Згідно з сформульованими гіпотезами, шуканий вектор \vec{b} повинен задовольняти таку систему N нерівностей із m невідомими [15, 29]:

$$\begin{cases} y_1^- \leq b_1 \varphi_1(\vec{x}_1) + \dots + b_m \varphi_m(\vec{x}_1) \leq y_1^+; \\ \vdots \\ y_i^- \leq b_1 \varphi_1(\vec{x}_i) + \dots + b_m \varphi_m(\vec{x}_i) \leq y_i^+; \\ \vdots \\ y_N^- \leq b_1 \varphi_1(\vec{x}_N) + \dots + b_m \varphi_m(\vec{x}_N) \leq y_N^+; \end{cases} \quad (1.24)$$

Оскільки кожна i -та нерівність у системі (1.24) забезпечує належність значення функції $\hat{y}(\vec{x})$ в i -тій точці експерименту до відповідного i -того інтервалу виходу, то одночасне виконання умов, заданих нерівностями системи, означає існування розв'язку задачі, тобто «проходження» функції $\hat{y}(\vec{x})$ через усі інтервали.

1.4.1. Властивості лінійної системи інтервальних рівнянь та інтервальних моделей, побудованих на її розв'язках

Розглянемо деякі важливі властивості системи (1.24) та її розв'язків, які наведено у працях [15, 29, 40, 61, 193].

Система (1.24) є системою N лінійних нерівностей відносно m невідомих b_1, \dots, b_m .

Нелінійність функцій $\varphi_j(\vec{x}_i)$ у системі (1.24) не суперечить попередньому твердженню, тому, що при відомих аргументах \vec{x}_i вони стають відомими коефіцієнтами.

Якщо згадані коефіцієнти позначити через $\phi_{ij} = \varphi_j(\vec{x}_i)$, то систему (1.24) можна переписати у такому вигляді:

$$\begin{cases} y_1^- \leq \phi_{11} b_1 + \dots + \phi_{1m} b_m \leq y_1^+ \\ \vdots \\ y_N^- \leq \phi_{N1} b_1 + \dots + \phi_{Nm} b_m \leq y_N^+, \end{cases}$$

звідки очевидно є її «лінійність». У майбутньому зручно розглядати систему (1.24) в матричному вигляді

$$\vec{Y}^- \leq F \cdot \vec{b} \leq \vec{Y}^+, \quad (1.25)$$

де $\vec{Y}^- = \{y_i^-, i = 1, \dots, N\}$, $\vec{Y}^+ = \{y_i^+, i = 1, \dots, N\}$ – вектори, складені із верхніх та нижніх меж інтервалів $[y_i^-, y_i^+]$, відповідно;

$F = \{\phi_{ij}, i = \overline{1, N}, j = \overline{1, m}\}$ – відома матриця значень базисних функцій.

Система (1.25) може не мати жодного розв'язку, тобто бути несумісною або мати багато розв'язків [29, 183].

Стосовно задач аналізу інтервальних даних, несумісність системи (1.25) означає, що не виконуються припущення, на яких ґрунтується метод, тобто або невірною задано вигляд функції (1.22), або невірною визначено інтервали $[y_i^-, y_i^+]$. Обидва порушення гіпотез не забезпечують належність значень функції $\hat{y}(\bar{x})$ у точках експерименту до відповідних інтервалів виходу.

Нехай система (1.25) є сумісною. Позначимо через Ω множину (область) її розв'язків, тобто

$$\Omega = \{\vec{b} \in R^m \mid \vec{Y}^- \leq F \cdot \vec{b} \leq \vec{Y}^+\}. \quad (1.26)$$

Властивості цієї області розглянуто у ряді праць, зокрема у працях [60, 192]. Наведемо основні із них, важливі для моделювання статичних систем.

1. У просторі параметрів β_1, \dots, β_m область Ω є областю у вигляді опуклого многогранника. Це означає, що довільна точка множини Ω є розв'язком системи (1.25).

2. Довільний розв'язок $\vec{b} \in \Omega$ системи породжує модель $\hat{y}(\bar{x}) = \vec{\varphi}^T(\bar{x}) \cdot \vec{b}$, що «проходить» через усі інтервали $[y_i^-, y_i^+]$, яку надалі називатимемо інтервальною моделлю статичної системи [29].

3. Множина розв'язків Ω породжує множину рівнозначних (з точки зору наявної інтервальної невизначеності) інтервальних моделей, кожна із яких задовольняє умовам задачі. Усі інтервальні моделі знаходяться у коридорі:

$$[\hat{y}(x)] = [\hat{y}^-(x); \hat{y}^+(x)], \quad (1.27)$$

де $\hat{y}^-(\bar{x}) = \min_{\vec{b} \in \Omega} (\vec{\varphi}^T(\bar{x}) \cdot \vec{b})$ та $\hat{y}^+(\bar{x}) = \max_{\vec{b} \in \Omega} (\vec{\varphi}^T(\bar{x}) \cdot \vec{b})$ – нижня та верхня межі функціонального коридору.

4. Істинний невідомий вектор $\vec{\beta}$ є одним із розв'язків системи (1.25), тобто: $\vec{\beta} \in \Omega$. Тому можна стверджувати, що довільна точка множини Ω може бути істинним вектором параметрів. Ця властивість області розв'язків Ω дає можливість трактувати її як множину можливих значень невідомих параметрів β_1, \dots, β_m .

Звідси випливає, що чим «ширша» область Ω , тим більша невизначеність відносно істинних параметрів статичної системи.

Розмір області Ω характеризується діаметром d , який визначається як відстань між двома найбільш віддаленими її точками множини:

$$d = \max_{\vec{b}_p, \vec{b}_s} \|\vec{b}_p - \vec{b}_s\|, \quad (1.28)$$

де \vec{b}_p, \vec{b}_s – відповідні вершини області Ω .

Діаметр області Ω тісно пов'язаний з матрицею F системи (1.25). Зокрема, якщо кількість різних точок \vec{x}_i спостережень у матриці F буде меншою від

кількості невідомих параметрів m , то область Ω буде «розірвана». Тобто, якщо $\text{rang}(F) < m$, то $d \rightarrow \infty$. З іншого боку, якщо $\text{rang}(F) = m$, то діаметр d є обмежений.

Наведені математичні властивості області Ω уможливають перехід до більш детального розгляду методу, який варто розпочати із найпростішого випадку, що придатний для графічної ілюстрації [61, 193].

Нехай кількість невідомих коефіцієнтів у рівнянні (1.22) дорівнює 2. У цьому випадку система (1.24) спрощується і набуває такого вигляду:

$$y_i^- \leq \phi_{i1}b_1 + \dots + \phi_{i2}b_2 \leq y_i^+, \quad i = 1, \dots, N. \quad (1.29)$$

Кожна нерівність системи на площині b_1, b_2 задає «смугу», обмежену двома прямими, які відповідають межах інтервалів (рис. 1.1).

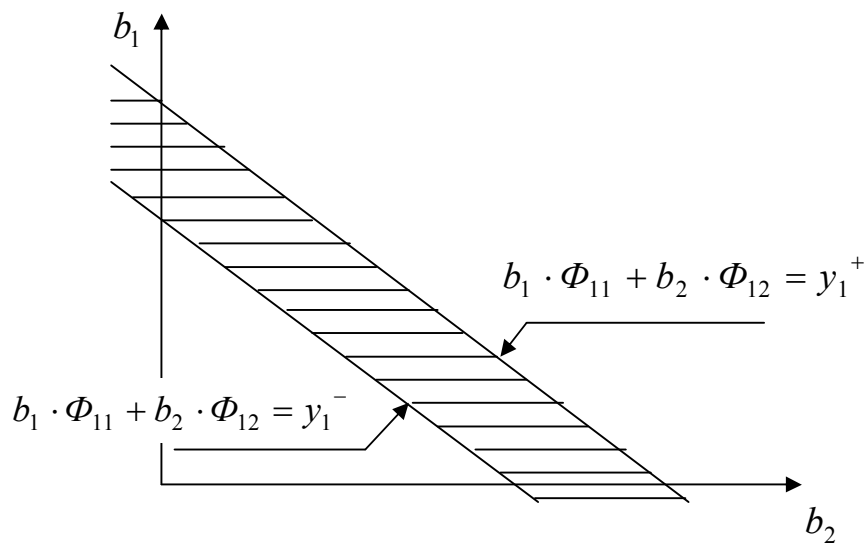


Рис. 1.1. Зображення розв'язків рівняння інтервальної системи у просторі параметрів

Сукупність N нерівностей, тобто перетин усіх «смуг», породжує шукану область Ω розв'язків системи (1.29), зображену на рис.1.2 для $N = 3$. Координати вершин Ω можуть бути визначені графічно або аналітично, шляхом розв'язування системи лінійних рівнянь. Наприклад, координати вершини \vec{b}_4 можна знайти як розв'язок системи двох лінійних рівнянь

$$\begin{cases} \phi_{11}b_1 + \phi_{12}b_2 = y_1^+; \\ \phi_{21}b_1 + \phi_{22}b_2 = y_2^- \end{cases}$$

Порівняно простий випадок $m=2$ добре ілюструє загальні властивості області Ω можливих значень істинних параметрів β_1, β_2 .

На рис. 1.1 зображена область Ω , діаметр якої дорівнює нескінченності, а рис. 1.2 ілюструє опуклість області Ω , структуру і характер впливу на діаметр області додаткових спостережень.

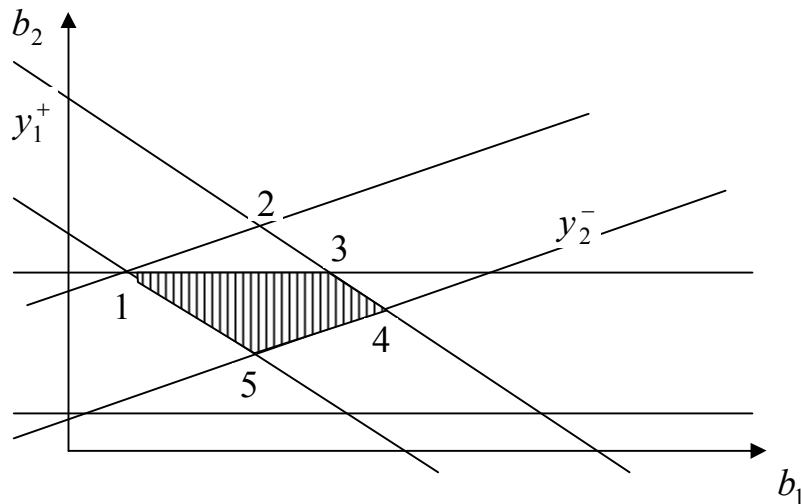


Рис. 1.2. Область розв'язків системи (1.25) для $N=3$

Внутрішню точку \vec{b} області Ω можна знайти як центр діагоналі, що з'єднує відповідні вершини, тобто: $\vec{b} = 0,5 \cdot (\vec{b}_p + \vec{b}_s)$.

У працях [31, 61, 101] розглянуто випадок, коли $N=m$, оскільки він, з одного боку, досить простий для аналізу, а з іншого, – дозволяє зрозуміти ряд важливих властивостей області Ω у багатовимірному випадку і використати їх для розв'язування задач активної ідентифікації. Зупинимося на аналізі цього випадку експерименту, який називається насиченим [31].

У насиченому експерименті, тобто у випадку співпадіння кількості спостережень N в експерименті з кількістю невідомих параметрів m , матриця F системи (1.25) буде квадратною ($m \times N$).

Якщо визначник матриці не дорівнює нулю, то можна отримати матрицю F^{-1} [32], обернену до F і, відповідно, розв'язок такої системи лінійних алгебричних рівнянь [31, 61, 193]:

$$F \cdot \vec{b}_s = \vec{Y}_s, \quad (1.30)$$

де \vec{Y}_s – вектор, який складено із межових значень інтервалів $[y_i^-, y_i^+]$, наприклад, він може мати такий вигляд $\vec{Y}_s = (y_1^+, y_2^-, y_3^+, \dots, y_N^-)$

Запишемо розв'язок цієї системи у такому вигляді:

$$\vec{b}_s = F^{-1} \cdot \vec{Y}_s. \quad (1.31)$$

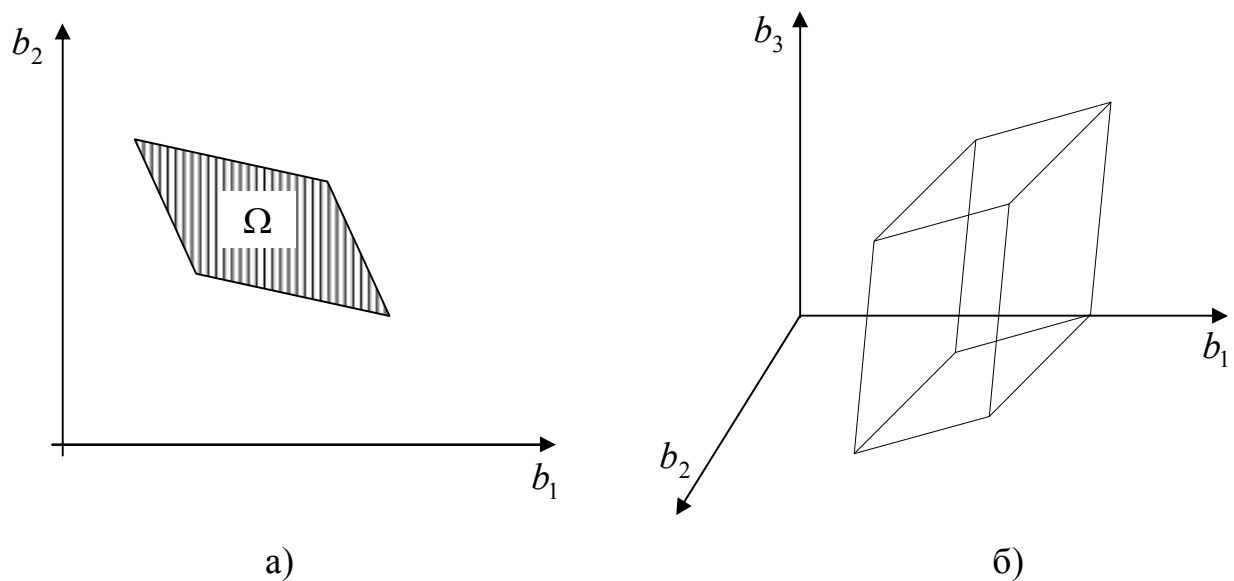
Вектор \vec{b}_s є однією із вершин многогранника Ω , яку утворено перетином відповідних площин, заданих нерівностями (інтервальними рівняннями) системи (1.25).

Аналіз можливих комбінацій межових значень інтервалів виходу об'єкта, уможливив побудову таблиці 1.1, з якої видно, що загальна кількість розв'язків \vec{b}_s складає $R = 2^m$ [61, 193].

Комбінації межових значень інтервалів

\bar{Y}_1	\bar{Y}_2	...	\bar{Y}_{m+1}	\bar{Y}_{m+2}	...	\bar{Y}_{2m+1}	...	\bar{Y}_s	...	\bar{Y}_R
y_1^+	y_1^-	...	y_1^+	y_1^-	...	y_1^+	...	y_1^+	...	y_1^-
y_2^+	y_2^+	...	y_2^+	y_2^-	...	y_2^+	...	y_2^-	...	y_2^-
y_3^+	y_3^+	...	y_3^+	y_3^+	...	y_3^+	...	y_3^-	...	y_3^-
...
y_{m-1}^+	y_{m-1}^+	...	y_{m-1}^+	y_{m-1}^+	...	y_{m-1}^-	...	y_{m-1}^-	...	y_{m-1}^-
y_m^+	y_m^+	...	y_m^-	y_m^-	...	y_m^-	...	y_m^-	...	y_m^-

Для даного випадку важливим є твердження, сформульоване у праці [193]: «Для $m = N$ область Ω є симетричним опуклим многогранником із 2^m вершин, які визначають за формулою (1.31)». Такий многогранник називають паралелотопом. На рис. 1.3 а) зображено многогранник Ω для $N = m = 2$, а на рис. 1.3 б) – для $N = m = 3$.

Рис. 1.3. Многогранник Ω : а) $N=m=2$; б) $N=m=3$

Відомо, що довільний відрізок, який з'єднує вершини \vec{b}_p і \vec{b}_s многогранника, називається його діагоналлю.

При $m = N$ перетин головних діагоналей многогранника Ω збігається із його центром ваги \vec{b} , який визначають за формулою [60]

$$\bar{\vec{b}} = \frac{1}{2^m} \sum_{s=1}^{2^m} \vec{b}_s = F^{-1} \cdot \bar{\vec{Y}}, \quad (1.32)$$

де $\bar{\vec{Y}}$ – вектор є середнім арифметичним усіх векторів, складених із межових значень, а його компоненти – середні інтервальні значення $\bar{y}_i = (y_i^+ + y_i^-)/2$, $i = 1, \dots, m$, тобто:

$$\bar{\vec{Y}} = \frac{1}{2^m} \cdot \left(\sum_{s=1}^{2^m} \vec{Y}_s \right) = (\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_m)^T.$$

Центр ваги області Ω є одночасно МНК-оцінкою, обчисленою за середньоінтервальними значеннями \bar{y}_i . Це безпосередньо впливає із формули (1.5), із урахуванням, що при $m = N$ істинне співвідношення $(F^T F)^{-1} F^T = F^{-1}$, та із заміною вектора \vec{Y} на $\bar{\vec{Y}}$.

Кожна вершина многогранника $\vec{b}_s \in \Omega$ породжує інтервальну модель $\hat{y} = \vec{\varphi}^T(\vec{x}) \cdot \vec{b}_s$, яка «проходить» через межові точки інтервалів, як це зображено на рис. 1.4 для лінійної моделі при $m = N = 2$.

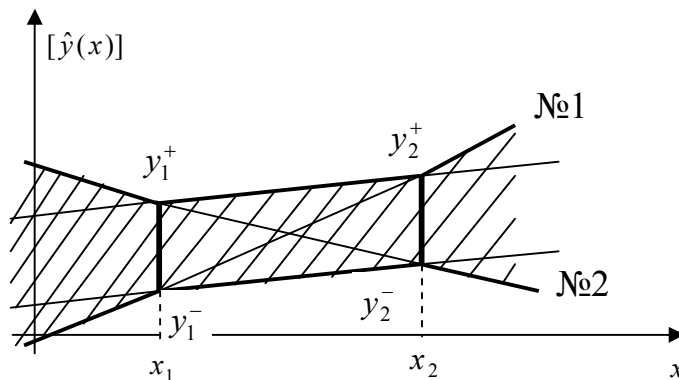


Рис. 1.4. Відображення вершин многогранника параметрів у просторі спостережень

Зображені прямі відповідають ситуаціям, коли, пряма №1 проходить через точки (x_1, y_1^-) , (x_2, y_2^+) , а пряма №2 – через точки (x_1, y_1^+) , (x_2, y_2^-) і т.д. Заштрихований коридор описує усю множину прямих, які можуть бути проведені у межах двох інтервалів.

Зазначимо, що вершини \vec{b}_s многогранника Ω , та його центр ваги $\bar{\vec{b}}$ знаходять шляхом розв'язування квадратної системи лінійних рівнянь із однією і тією ж невиродженою матрицею F і різними векторами вільних членів. Для цього можуть бути використані відомі методи та алгоритми лінійної алгебри [11].

Властивості області Ω розв'язків лінійної системи інтервальних рівнянь безпосередньо визначають властивості інтервальних моделей статичних систем та меж функціонального коридору, побудованих на основі цих розв'язків [40].

Точність інтервальної моделі є її основною характеристикою. Оцінювання точності вимагає певних обчислювальних витрат. Розглянемо точність моделі у точці, тобто при фіксованому наборі входів \vec{x} [40].

Під прогнозуванням із застосуванням інтервальної моделі будемо розуміти розрахунок «виходу» системи $\hat{y}(\vec{x})$ для заданого набору входів \vec{x} поза експериментальними точками, на основі яких будувалась модель, але у межах області експерименту χ . Основною характеристикою точності інтервальної моделі є похибка прогнозування, яку задають різницею меж коридору (1.27) [40]:

$$\Delta_{y(\vec{x})} = \max_{\vec{b} \in \Omega} (\vec{\varphi}^T(\vec{x}) \cdot \vec{b}) - \min_{\vec{b} \in \Omega} (\vec{\varphi}^T(\vec{x}) \cdot \vec{b})$$

Як впливає із наведеної формули, для визначення похибки прогнозування $\Delta_{y(\vec{x})}$ у фіксованій точці \vec{x} необхідно розв'язати дві задачі лінійного програмування

$$\vec{\varphi}^T(\vec{x}) \cdot \vec{b} \xrightarrow{\vec{b} \in \Omega} \min, \vec{\varphi}^T(\vec{x}) \cdot \vec{b} \xrightarrow{\vec{b} \in \Omega} \max,$$

розв'язки яких знаходяться у вершинах многогранника Ω . Із урахуванням викладеного, вираз для знаходження похибки прогнозування $\Delta_{y(\vec{x})}$ у фіксованій точці \vec{x} набуває такого вигляду:

$$\Delta_{y(\vec{x})} = \max_{\vec{b}_p, \vec{b}_s \in \Omega} (\vec{\varphi}^T(\vec{x}) \cdot (\vec{b}_p - \vec{b}_s)), \vec{x} \in \chi, \quad (1.33)$$

де \vec{b}_p, \vec{b}_s – вершини опуклого многогранника (області) Ω .

Із виразу (1.33) бачимо, що значення похибки прогнозування залежить від розмірів області Ω . Зокрема, значення $\Delta_{y(\vec{x})}$ у заданій точці \vec{x} тим менше, чим менша відстань між вершинами області Ω . Якщо $\vec{b}_p = \vec{b}_s$ для усіх $p \neq s$, тобто область Ω стискується до точки, то значення похибки $\Delta_{y(\vec{x})}$ в усіх точках \vec{x} дорівнює нулю.

Зменшення розмірів області Ω , а відповідно, і зменшення похибки прогнозування на основі моделі можливо досягнути шляхом оптимального вибору точок експерименту та зменшенням інтервальних похибок спостережень у вибраних точках.

У праці [40], для загального випадку показано, що функція (1.33) є кусково-неперервною. Це зумовлено тим, що для різних фіксованих значень \vec{x} похибка прогнозування за формулою (1.33) може визначатись різними векторами $\vec{b}_p - \vec{b}_s$, тобто різними парами вершин многогранника Ω .

Важливі властивості лінійної за входними змінними інтервальної моделі $y_0(\vec{x}) = \vec{x}^T \cdot \vec{\beta}$, узагальнені у праці [40]. Формула (1.33) у цьому випадку набуває такого вигляду:

$$\Delta_{y(\bar{x})} = \min_{\bar{b}_p, \bar{b}_s \in \Omega} (\bar{x}^T \cdot (\bar{b}_p - \bar{b}_s)), \bar{x} \in \chi. \quad (1.34)$$

Показано, що у випадку нормування незалежних змінних у такий спосіб, щоб центр експерименту χ співпадав із нульовою точкою $\bar{x}_0 = (0, \dots, 0)^T$, функція $\Delta_{y(\bar{x})}$ буде симетричною відносно центру \bar{x}_0 , а її максимальне значення досягається на межі області χ . Якщо область експерименту χ задати як n -вимірну кулю, радіусом ρ і з центром у точці $\bar{x}_0 = (0, \dots, 0)^T$

$$\bar{x}^T \cdot \bar{x} \leq \rho^2, \quad (1.35)$$

то максимальну на області χ похибку прогнозування на основі лінійної інтервальної моделі обчислюватимемо за формулою [40]:

$$\max_{\bar{x} \in \chi} (\Delta_{y(\bar{x})}) = \rho \cdot \|\bar{b}_p^o - \bar{b}_s^o\|, \quad (1.36)$$

де $\|\bar{b}_p^o - \bar{b}_s^o\| = \|\bar{b}_p - \bar{b}_s\| \xrightarrow{\bar{b}_p, \bar{b}_s \in \Omega} \max$ – визначає у просторі параметрів довжину максимальної діагоналі многогранника Ω .

З формули (1.36) випливає, що для області планування експерименту, заданої у вигляді кулі із радіусом ρ , максимальне значення похибки прогнозування на основі лінійної моделі пропорційне довжині максимальної діагоналі (діаметру Ω), збільшеній у ρ раз.

Проведений аналіз дає можливість зробити висновок, що функція похибки прогнозування із застосуванням інтервальних моделей, побудованих на основі області розв'язків системи інтервальних рівнянь (1.24), у загальному випадку є кусковою, що суттєво підвищує обчислювальні витрати на визначення коридору прогнозування. Своєю чергою це спонукає до розробки та застосування методів локалізації розв'язків системи (1.24), які забезпечують задання функціональних меж коридору інтервальних моделей в аналітичному вигляді.

1.4.2. Обчислювальні аспекти методів оцінювання області параметрів інтервальної моделі статичної системи

Припустимо, що кількість спостережень N є більшою від кількості невідомих параметрів і матриця F системи (1.25) має повний ранг, тобто $\text{rang} F = m$. Знайти розв'язки системи інтервальних рівнянь означає обчислити координати усіх вершин області Ω .

На перший погляд задача знаходження розв'язків системи (1.25) є простою. Однак практика показала, що існуючі методи її розв'язування вимагають значних обчислювальних ресурсів, особливо при великій розмірності вектора \bar{b} , коли $m > 10$ та $N > 100$.

У праці [183] було запропоновано метод побудови рекурентних алгоритмів розв'язування системи (1.25). Однак ці алгоритми уможливають знаходження тільки одного із області розв'язків.

Найпростіший метод знаходження усіх вершин множини параметрів моделі, описано у праці [200], а його більш раціональна (з обчислювальної точки зору) модифікація, наведена у праці [196].

Спочатку систему (1.25) перетворюють до еквівалентної системи квадратних блоків, у кожному із яких m рівнянь

$$\bar{Y}_u^- \leq F_u \cdot \bar{b} \leq \bar{Y}_u^+, u = 1, \dots, U,$$

де $F_u = \{\bar{\varphi}^T(\bar{x}_{ui}), i = 1, \dots, m\}$ – матриця значень базисних функцій для u -того блоку;

u – номер сформованого блоку.

Кожен блок будують комбінуванням m рівнянь із загальної кількості N рівнянь системи. Отже, загальну кількість сформованих блоків можна визначити за відомою комбінаторною формулою [18]

$$U = C_N^m = \frac{N!}{m!(N-m)!}.$$

Потім знаходять розв'язки \bar{b}_u^j для кожного u - того блоку рівнянь за формулою (1.31). Тобто із урахуванням введених позначень

$$\bar{b}_u^j = F_u^{-1} \cdot \bar{Y}_u^j, j = 1, \dots, 2^m, u = 1, \dots, U.$$

Тоді, із отриманих розв'язків вибирають ті, що задовольняють систему (1.25). Саме вони і є вершинами області Ω .

Отже, для знаходження усіх вершин многогранника Ω необхідно розв'язати $2^m \cdot C_N^m$ m -мірних систем лінійних алгебричних рівнянь.

Із обчислювальної точки зору реалізація даного методу є достатньо складною, а при зростанні кількості параметрів m та кількості рівнянь N стає практично не можливою. Наприклад, якщо $m = 10$ та $N = 20$, то для знаходження області розв'язків системи інтервальних рівнянь необхідно розв'язати 189190144 систем, кожна із яких включає 10 лінійних алгебричних рівнянь.

Авторами праць [103 – 106] розроблено більш раціональні методи розв'язування системи (1.25). Їхньою особливістю є послідовне уточнення області параметрів. На кожному k -тому кроці послідовності, апостеріорну оцінку області параметрів $\Omega(k)$ знаходять так:

$$\Omega(k) = \Omega(k-1) \cap \check{\Omega}(k), \quad (1.37)$$

де $\check{\Omega}(k)$ – «гіперсмуга», яка визначається k -тим рівнянням системи (1.25), використаним для уточнення апостеріорної оцінки, отриманої на $k-1$ кроці.

Оцінку області на $k = 1$ кроці можна отримати із розв'язку m рівнянь системи. Така область у просторі параметрів є паралелотопом із 2^m вершинами, які розраховують за формулою (1.31).

Реалізація цього методу вимагає значних об'ємів оперативної пам'яті обчислювального пристрою, оскільки на кожному кроці «відсічення» апостеріорної оцінки згідно з формулою (1.37) призводить до збільшення кількості вершин області розв'язків. Як видно з графіка, наведеного у праці [103], це особливо відчутно при збільшенні кількості рівнянь N , а початкова кількість вершин складає щонайменше 2^m (кількість вершин гіперпаралелепіеда). До того ж обчислювальні похибки заокруглень, вплив яких збільшується із зростанням m , призводять до загрублення оцінок і навіть до втрати їхньої властивості «гарантованості». Ці факти змусили авторів модифікувати розроблені алгоритми шляхом відсіювання неінформативних та не суттєво інформативних рівнянь, тобто таких, які не впливають, чи не суттєво впливають на розміри області Ω [118]. Своєю чергою проведена модифікація алгоритмів призвела до методичного загрублення оцінок параметрів, хоча тепер цей процес контролюється користувачем.

У цілому, у даному випадку очевидною є відмова від спроби знайти точний з методичної точки зору розв'язок, але загрублений через похибки заокруглень.

Користуючись термінологією, прийнятою в інтервальної математиці [2, 292], як і раніше (див. підрозділ 1.2), методи знаходження деякого загрубленого розв'язку – апроксимації області параметрів, будемо називати локалізаційними.

В інтервальному аналізі локалізацію області розв'язків системи (1.25) отримують у вигляді прямокутного паралелепіеда, грані якого паралельні осям координат. У цьому випадку одержані оцінки записують так: $[b_j^-, b_j^+]$, $j = 1, \dots, m$, де b_j^-, b_j^+ – нижня та верхня гарантовані межі можливих значень параметрів. Аналіз обчислювальних витрат методів інтервальної локалізації рівнянь інтервальної системи алгебричних рівнянь (1.12) проведено у працях [170 – 177]. Особливістю цих методів є значна економія обчислювальних ресурсів, так як для області локалізації достатньо зберігати $2 \cdot m$ межових значень інтервалів. Для розв'язування задачі локалізації області розв'язків інтервальної системи лінійних алгебричних рівнянь (1.25) використовують відомі методи лінійного програмування [11]. Тоді задачу локалізації формулюють у такий спосіб [29]:

$$b_j^- = \min_{\bar{b} \in \Omega} b_j, b_j^+ = \max_{\bar{b} \in \Omega} b_j, \quad j = 1, \dots, m. \quad (1.38)$$

Як видно, задача (1.38) складається із $2 \cdot m$ задач лінійного програмування. Розв'язок задачі має просте геометричне тлумачення, наведене на рис. 1.5. Для двовимірного випадку показано многогранник Ω , який одночасно є множиною допустимих розв'язків, а також відображені лінії рівного рівня для критерію $b_1 \rightarrow \min (\max)$. При $j = 1$ розв'язком задачі (1.38) є дві вершини многогранника Ω , компонента $j = 1$ яких приймає, відповідно, мінімальне $\min b_1$ та максимальне значення $\max b_1$.

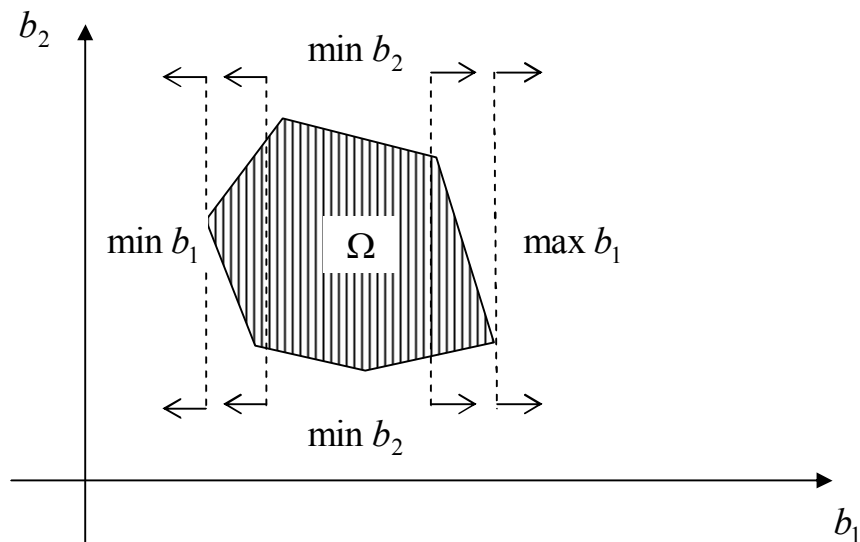


Рис. 1.5. Ілюстрація до алгоритму інтервальної локалізації

Якщо у критерій мінімізації (максимізації) підставити компоненту b_2 , аналогічно можна отримати $\min b_2, \max b_2$. Якщо $2 \cdot m$ разів розв'язати задачу (1.38) для усіх компонент (b_1, \dots, b_m) , то буде знайдено $2 \cdot m$ вершин многогранника Ω . Можна також знайти внутрішню точку $\vec{\bar{b}}$ як центр ваги обчислених вершин

$$\vec{\bar{b}} = \frac{1}{2 \cdot m} \sum_{s=1}^{2m} \vec{b}_s.$$

Алгоритм та додаток у вигляді дискети із програмною реалізацією даного методу наведені у монографії О. П. Вошиніна та Г. Р. Сотірова [29]. Слід відмітити важливу особливість цього методу інтервальної локалізації – можливість розв'язування на його основі задач моделювання високої розмірності, що створює певні перспективи для розвитку розглянутого методу.

Найбільш ефективні з обчислювальної точки зору методи інтервальної локалізації інтервальної системи лінійних алгебричних рівнянь у випадку задання інтервальної матриці вхідних змінних у експерименті, наведено у праці [174]. Це методи *PPS* («поділу області параметрів») та методи *PSS* («поділу області розв'язків»), а також їхні модифікації.

Незважаючи на обчислювальні переваги методів інтервальної локалізації, і їх широке застосування при експериментальному моделюванні статичних систем у минулому, на сьогоднішній день інтерес серед практиків до цих методів зменшився, внаслідок таких причин. По-перше, отримані інтервальні оцінки є надзвичайно грубими, особливо у випадку витягнутої області Ω у напрямку, що не співпадає із напрямком ні однієї із осей координат простору параметрів. По-друге, така форма задання області параметрів не є придатною для розв'язування задач активної ідентифікації, тобто коли необхідно визначити точки проведення експерименту з метою апріорного забезпечення мінімальних розмірів області локалізації. По-третє, отримані інтервальні оцінки не завжди є

придатними для побудови коридору інтервальних моделей із заданими властивостями його функціональних меж.

Для розв'язування задач допустимого оцінювання параметрів моделей систем, переважно застосовують інтервальні методи, зокрема, для задач аналізу та синтезу допусків у електротехніці та радіоелектроніці [95, 96, 131, 132]. Однак при застосуванні гарантованого підходу для оцінки параметрів радіоелектронних кіл отримують достатньо жорсткі допуски, оскільки не враховують випадкової природи технологічних процесів їхнього виготовлення. До того ж задача знаходження допустимої області розв'язків системи (1.25) у вигляді прямокутного гіперпаралелепіпеда за критерієм максимального об'єму є достатньо складною задачею нелінійного програмування. Стосовно задачі оцінки імовірності працездатності статичної системи, яку розв'язують за допомогою аналізу та співставлення допустимої області параметрів (аналізу допусків) із технологічною областю їх розсіювання, то при інтервальному допустимому оцінюванні вона взагалі втрачає сенс.

Найбільш поширеними методами локалізації розв'язків системи (1.25) є методи еліпсоїдів [4 – 8, 22 – 28, 107 – 110, 165, 166, 233, 241, 291]. Основна ідея цих методів полягає у побудові послідовності багатовимірних еліпсоїдів, які гарантовано включають область Ω .

У праці [165] розглядають задачі допустимого еліпсоїдного оцінювання, коли в область Ω вписують багатовимірний еліпсоїд із максимальним об'ємом. Перевагою цих методів є можливість забезпечення більших розмірів допустимої області ніж при інтервальному підході. Внаслідок цього, можна забезпечити менш жорсткі допуски на параметри системи.

У випадку реалізації процедури локалізації (гарантованого оцінювання), на кожному k -тому кроці розв'язують задачу отримання апостеріорної еліпсоїдної оцінки $Q(k)$ -результату перетину апостеріорної оцінки $(k-1)$ -го кроку та «гіперсмуги» $\check{\Omega}(k)$ за умови виконання включення

$$Q(k) \supseteq Q(k-1) \cap \check{\Omega}(k), \quad (1.39)$$

та за умови

$$V(Q(k)) \leq V(Q(k-1)), \quad (1.40)$$

де $V(\cdot)$ – задає розміри еліпсоїда (об'єм, суму квадратів довжин осей і т.д.).

Умова (1.40) забезпечує збіжність алгоритму. У працях [22, 23, 24] умова збіжності замінена більш складнішою, яка забезпечує знаходження локалізаційної еліпсоїдної оцінки із мінімальним розміром (об'ємом). Основні розрахункові формули, наведені у цих працях, дають можливість оцінити обчислювальну складність алгоритмів реалізації методу. Розглянемо їх детальніше.

Отже, область локалізації на k -тому кроці шукають у формі еліпсоїда:

$$Q(k) = \{\vec{b} \in R^m \mid (\vec{b} - \vec{\bar{b}}_k)^T \cdot H_k \cdot (\vec{b} - \vec{\bar{b}}_k) \leq 1\}, \quad (1.41)$$

де $\vec{\bar{b}}_k$ – центр еліпсоїда

$$\bar{b}_k = \bar{b}_{k-1} + \frac{\eta_{k-1}}{1 + \eta_{k-1} \cdot \bar{x}_k^T \cdot H_{k-1} \bar{x}_k} \cdot (y - \bar{x}_k^T \cdot \bar{b}_{k-1}) \cdot H_{k-1} \cdot \bar{x}_k;$$

H_k – симетрична, додатньоозначена матриця, яка задає його конфігурацію. Її обчислюють за такою формулою:

$$H_k = \chi(\eta_k) \cdot [H_{k-1} + \frac{\eta_{k-1}}{1 + \eta_{k-1} \cdot \bar{x}_k^T \cdot H_{k-1} \bar{x}_k} \cdot H_{k-1} \cdot \bar{x}_k \cdot \bar{x}_k^T \cdot H_{k-1}]; \quad (1.42)$$

$$\chi(\eta_k) = 1 + \eta_k \cdot (\Delta^2 - \frac{y_k - \bar{x}_k^T \cdot \bar{b}_{k-1}}{1 + \eta_{k-1} \cdot \bar{x}_k^T \cdot H_{k-1} \bar{x}_k} \cdot H_{k-1} \cdot \bar{x}_k \cdot \bar{x}_k^T \cdot H_{k-1});$$

$\Delta = 0.5 \cdot (y_i^+ - y_i^-)$ – інтервальна похибка, однакова для усіх спостережень;

η_k – параметр алгоритму.

Для забезпечення мінімального об'єму локалізаційного еліпсоїда, параметр η_k вибирають як додатній корінь такого квадратного рівняння [23]:

$$(m-1) \cdot \Delta^2 \cdot \eta_{k-1}^2 \cdot \bar{x}_k^T \cdot H_{k-1} \cdot \bar{x}_k + [(2 \cdot m - 1) \cdot \Delta^2 \cdot \bar{x}_k^T \cdot H_{k-1} \cdot \bar{x}_k - (\bar{x}_k^T \cdot H_{k-1} \cdot \bar{x}_k - (y_k - \bar{x}_k^T \cdot \bar{b}_{k-1})) \cdot \bar{x}_k^T \cdot H_{k-1} \cdot \bar{x}_k] \cdot \eta_k + m \cdot (\Delta^2 - y_k + \bar{x}_k^T \cdot \bar{b}_{k-1}) - \bar{x}_k^T \cdot H_{k-1} \cdot \bar{x}_k = 0.$$

Суттєвою перевагою даних методів є економічне використання оперативної пам'яті, оскільки для поточного еліпсоїда необхідно зберігати його центр (вектор із m компонент) і симетричну матрицю H_k , розміром $m \times m$, що також не є проблемою.

У працях [4 – 8, 109, 110] розглядають також методи нечіткого еліпсоїдного оцінювання. Алгоритми побудови нечітких еліпсоїдних множин, подібні до алгоритмів побудови гарантованих еліпсоїдних множин, однак їх застосування у процесі ідентифікації систем уможливорює подолати протиріччя поточної і накопиченої у процесі ідентифікації інформації, що надає їм властивості робастності.

Як бачимо із наведених розрахункових формул, найбільш трудомісткими з обчислювальної точки зору є операції багаторазового (при реалізації ітерацій) множення матриць та векторів, які не створюють особливих проблем. Однак при моделюванні систем із багатовимірним виходом на кожній ітерації методу виникає необхідність знаходження оберненої матриці, розмірністю $m \times m$, що є достатньо трудомісткою операцією. Разом із тим, методи еліпсоїдного оцінювання мають і інші недоліки.

Застосування рекурентних формул, особливо у випадку багатовимірного виходу об'єкта, часто призводить до втрати властивості «гарантованості». До того ж контроль та забезпечення цієї властивості вимагає додаткових обчислювальних витрат. Наприклад, у праці [22], гарантованість включення вектора істинних параметрів у еліпсоїд на кожній ітерації забезпечують шляхом збіль-

шення його радіуса на деяку фіксовану величину. Очевидно, у цьому випадку зростає кількість ітерацій і відповідно обчислювальні витрати.

Третім суттєвим недоліком, який витікає із аналізу наведених формул еліпсоїдної локалізації, є надзвичайна складність побудови оптимальної процедури послідовного планування експерименту і практична неможливість організації апріорного оптимального експерименту при $N > m$, навіть у випадку відомих додаткових властивостей обмежених похибок.

Зауважимо, що кінцевою метою будь-якого із розглянутих методів локалізації є побудова інтервальної моделі. Тому при обґрунтуванні вибору того чи іншого методу локалізації слід звертати увагу на властивості інтервальних моделей, яких вони набудуть у результаті його застосування. Які властивості інтервальних моделей можуть бути покладені в основу критеріїв вибору методу локалізації? Очевидно, що у першу чергу це обчислювальні витрати при оперуванні моделлю, гладкість та аналітичність представлення коридору моделей, обчислювальна складність алгоритмів визначення точності прогнозування чи напрямків зростання та спадання похибки прогнозування.

Проведений аналіз математичних та обчислювальних аспектів методів аналізу інтервальних даних уможливив виділити наступні проблеми застосування цих методів для побудови інтервальних моделей статичних систем.

1. Достатньо «жорстке» припущення про відому структуру моделі статичної системи (гіпотеза 1) вимагає «пом'якшення» у спосіб розробки процедури підбору структури, хоча б у визначеному класі базисних функцій, наприклад, поліноміальних.

2. Відсутній систематизований підхід до аналізу властивостей інтервальних моделей систем залежно від застосування того чи іншого методу локалізації.

3. Методи інтервальної локалізації множини розв'язків системи інтервальних рівнянь (1.25), побудовані на розв'язуванні $2 \cdot m$ задач лінійного програмування (1.38), серед усіх існуючих методів локалізації найменш чутливі до зростання розмірності системи, і тому мають інтерес для подальшого дослідження та розвитку.

4. Незважаючи на розроблену класифікацію вивчені у достатній мірі властивості моделей інтервальних похибок, не достатньо пропрацьовано підходи до їх застосування при моделюванні статичних систем на основі інтервальних даних.

5. Виникає необхідність побудови нових методів локалізації множини розв'язків системи (1.25) на таких принципах:

- контроль точності, властивостей гарантованості оцінок та відсіювання неінформативних спостережень;

- можливість застосування у задачах активної ідентифікації та планування експерименту;

- можливість представлення області локалізації у вигляді многогранників з фіксованою кількістю вершин у випадках незначних розмірностей вектора параметрів та перехід до еліпсоїдного вигляду області параметрів моделі у випадках зростання розмірності задачі без суттєвої зміни обчислювальної схеми методу;

- забезпечення задання в аналітичному вигляді функціональних меж коридору інтервальних моделей і зменшення обчислювальних витрат на його побудову.

1.5. Планування насичених експериментів у випадку інтервального представлення вихідних змінних моделей статичних систем

Основні положення методів аналізу інтервальних даних ґрунтуються на припущенні, що у розпорядженні дослідника є такі експериментальні дані, які забезпечують повний ранг ($\text{rang}F = m$) матриці F , розмірності $N \times m$, зокрема, кількість спостережень N у експерименті не менше від кількості невідомих параметрів m . Але питання про те, яким чином одержані ці дані, не досліджувалося. Застосування методів оптимального планування експерименту у задачах ідентифікації уможливорює підвищення точності математичної моделі. Зауважимо, що у цьому випадку задачі називають задачею активної ідентифікації.

Переважно розрізняють планування апріорного і послідовного (динамічного) експериментів [158]. У першому випадку план усього експерименту складають до його проведення, а у другому – програму реалізації експерименту послідовно уточнюють у міру одержання і залежно від результатів опрацювання результатів попередніх спостережень.

Розглянемо можливості планування оптимального апріорного експерименту з метою побудови моделі статичної системи за умови інтервальних похибок. Припустимо:

- модель статичної системи задано лінійно-параметричним рівнянням у вигляді (1.22) і є можливість змінювати вхідні змінні x_1, \dots, x_n у деякій обмеженій області χ , тобто $\vec{x} \in \chi$;

- шуканий план експерименту включає $N = m$ дослідів, тобто є насиченим

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ x_{m1} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix};$$

- для довільного $\vec{x} \in \chi$ задано абсолютну інтервальну похибку $\Delta(\vec{x}) = 0,5 \cdot (y^+(\vec{x}) - y^-(\vec{x}))$.

Розглядатимемо випадки, коли задано функцію $\Delta(\vec{x})$ на χ , або відомо, що інтервальна похибка є постійною, тобто $\Delta(\vec{x}) = \Delta, \forall \vec{x}$. Задача полягає у знаходженні апріорного, насиченого плану X , який забезпечує мінімально можливі розміри многогранника Ω області можливих значень параметрів β_1, \dots, β_m [31].

Враховуючи, що кожній матриці плану експерименту X відповідає квадратна не вироджена матриця базисних функцій F із системи (1.25), задачу планування зручно трактувати як задачу знаходження матриці F .

Очевидно, що апріорний план експерименту неможливо побудувати, доки не визначено, який зміст вкладається у поняття оптимальності. Тому, розглянемо питання вибору критеріїв оптимальності планів експерименту.

Із постановки задачі випливає, що оптимальний експеримент на відміну від неоптимального, повинен забезпечити вищу точність оцінок параметрів b_1, \dots, b_m , тобто менший розмір многогранника Ω .

У підрозділі 1.4 було показано, що для довільного експерименту із кількістю спостережень $N = m$ область Ω є симетричний многогранник – паралелотоп із вершинами \vec{b}_s , які обчислюють за формулою (1.31). Очевидно, що до проведення експерименту не можна обчислити вершини \vec{b}_s , оскільки вектори \vec{Y}^-, \vec{Y}^+ інтервальних спостережень виходу є невідомими, і отже, не можливо визначити вектор \vec{Y}_s . Проте ця обставина не заважає апріорі визначити розміри многогранника Ω , зокрема довжину його діагоналі, при деякому фіксованому плані. У праці [31] показано, що квадрат довжини l_{ps}^2 довільної діагоналі, проведеної між парами вершин \vec{b}_p, \vec{b}_s многогранника Ω обчислюють за такою формулою:

$$l_{ps}^2 = \|\vec{b}_p - \vec{b}_s\|^2 = (\vec{b}_p - \vec{b}_s)^T \cdot (\vec{b}_p - \vec{b}_s) = (\vec{Y}_p - \vec{Y}_s)^T \cdot (F^{-1})^T \cdot F^{-1} \cdot (\vec{Y}_p - \vec{Y}_s).$$

Приймаючи до уваги, що вектори \vec{Y}_p, \vec{Y}_s утворюють як можливі комбінації меж інтервальних даних $y_i^-, y_i^+, i = 1, \dots, m$ (див. табл. 1.3), то компоненти різниці $\vec{Y}_p - \vec{Y}_s$ можуть набувати одного із двох значень $2\Delta_i$ чи $-2\Delta_i$ – якщо вершини \vec{b}_p, \vec{b}_s утворюють головну діагональ (що не належить ні одній із граней) многогранника Ω . Кількість головних діагоналей дорівнює 2^{m-1} . Використовуючи вираз для довжини довільної діагоналі, можна отримати простий вираз для квадрату довжини p -ї головної діагоналі:

$$l_p^2 = 4 \cdot \vec{\Delta}_p^T \cdot (F \cdot F^T)^{-1} \cdot \vec{\Delta}_p, \quad p = 1, \dots, 2^{m-1},$$

де $F \cdot F^T$ – матриця, яку надалі називатимемо інформаційною;

$\vec{\Delta}_p^T = (\pm\Delta_1^p, \dots, \pm\Delta_i^p, \dots, \pm\Delta_m^p)$ – вектор, компонентами якого є відповідні інтервальні похибки Δ_i , із додатними або від’ємними знаками.

Користуючись аналогією між плануванням регресійних та інтервальних експериментів, у праці [31] введено кількісні критерії, що характеризують розміри многогранника Ω , такі як: квадрат об’єму V ; суму квадратів довжин його діагоналей; квадрат довжини максимальної діагоналі і які визначають за формулами, відповідно:

$$I_D = V^2(\Omega); \quad I_A = \sum_{p=1}^{2^{m-1}} l_p^2; \quad I_E = \max_p l_p^2.$$

У праці [31] наведено вирази, що пов’язують вказані критерії із інформаційною матрицею:

$$I_D = 4^m \cdot \det(E \cdot (F \cdot F^T)^{-1} \cdot E) = 4^m \cdot \left(\prod_{i=1}^m \Delta_i^2 \right) \cdot \det(F \cdot F^T)^{-1}, \quad (1.43)$$

$$I_A = 2^{m+1} \cdot Sp(E \cdot (F \cdot F^T)^{-1} \cdot E), \quad (1.44)$$

$$I_E = \max_p 4 \cdot \vec{\Delta}_p^T \cdot (F \cdot F^T)^{-1} \cdot \vec{\Delta}_p, \quad (1.45)$$

де $E = diag(\Delta_1, \dots, \Delta_i, \dots, \Delta_m)$ – діагональна матриця інтервальних похибок;
 $Sp(\cdot)$ – означає слід матриці, який дорівнює сумі її діагональних елементів.

Задачі, із розв'язку яких отримують I_D –, I_A –, I_E – оптимальні плани інтервального експерименту, записують так [31]:

$$\det(E \cdot (F \cdot F^T)^{-1} \cdot E^T) \xrightarrow{F} \min; Sp(E \cdot (F \cdot F^T)^{-1} \cdot E^T) \xrightarrow{F} \min, \vec{x}_i \in \chi; \quad (1.46)$$

$$\max_p \vec{\Delta}_p^T \cdot (F \cdot F^T)^{-1} \cdot \vec{\Delta}_p \xrightarrow{F} \min. \quad (1.47)$$

Зазначимо, що у розглянутих випадках виключено постійні множники, які не впливають на шуканий оптимальний план. Отримані для критеріїв формули (1.46) та (1.47) уможливили, з одного боку, визначити поняття оптимального плану при аналізі інтервальних даних, а з другого, – встановити співвідношення між інтервальними і регресійними оптимальними планами [31, 193].

Розглянемо ці співвідношення детальніше.

Коли інтервальна похибка експерименту є постійною, тобто $\Delta(\vec{x}) = \Delta \forall \vec{x} \in \chi$, тоді матриця E у формулах (1.46) стає скалярною ($E = \Delta \cdot I$) і перестає впливати на результати мінімізації. Порівнюючи формули (1.46) для цього випадку із формулами (1.9), відповідно, для D – і A – критеріїв регресійного експерименту, виявляється їх збіг. Це означає, що I_D – і I_A – оптимальні плани насиченого інтервального експерименту еквівалентні D – і A – оптимальним регресійним планам, побудованим для відповідної моделі (1.22).

Показана еквівалентність планів [31] уможливорює застосування результатів, отриманих для D – і A – оптимальних регресійних планів, для побудови I_D – і I_A – оптимальних планів інтервального експерименту. Зокрема, можна використовувати відомі каталоги насичених D – і A – оптимальних планів для поліноміальних моделей першого та другого порядку [17].

Між I_E – оптимальністю та E – оптимальністю регресійних експериментів такої еквівалентності не встановлено, хоча вони є близькими за змістом, а саме: E – оптимальний план мінімізує максимальну вісь довірчого еліпсоїда оцінок параметрів регресійної моделі, а I_E – оптимальний план мінімізує максимальну діагональ многогранника Ω .

Не менш важливими є плани, які націлені на зменшення ширини коридору інтервальних моделей, заданого формулою (1.27). Ширину функціонального коридору $\Delta_{y(\vec{x})}$, якою визначають точність інтервальної моделі обчислюємо як різницю його меж:

$$\Delta_{y(\vec{x})} = \hat{y}^+(\vec{x}) - \hat{y}^-(\vec{x}). \quad (1.48)$$

Свою чергою це дало можливість ввести критерії I_Q - та I_G - оптимальності планів [31]:

$$I_Q = \int_{\chi} \Delta_{y(\bar{x})} d(\bar{x}), \quad I_G = \max_{\bar{x} \in \chi} \Delta_{y(\bar{x})}. \quad (1.49)$$

Як бачимо із формул (1.49), I_Q - критерій для фіксованого плану визначає середню, а I_G - критерій максимальну ширину коридору (1.27) і є аналогами, відповідно, Q - та G - критеріїв оптимальності регресійного експерименту [74].

Задача знаходження I_Q - та I_G - оптимальних планів є надзвичайно складною, через те, що границі функціонального коридору є кусковими і, відповідно, кусковонеперервною є функція $\Delta_{y(\bar{x})}$. Наближені плани до I_Q - та I_G - оптимальних планів можна знайти, використовуючи лему, сформульовану у праці [31]: «Навколо області Ω можна описати еліпсоїд:

$$Q_m = \{\bar{b} \in R^m \mid (\bar{b} - \bar{\bar{b}})^T \cdot F^T \cdot E^{-2} \cdot F \cdot (\bar{b} - \bar{\bar{b}}) = m\}, \quad (1.50)$$

оболонці якого належать усі її вершини».

Із леми витікає, що верхню оцінку $\Delta_{y(\bar{x})} \Big|_{\bar{b} \in Q_m}$ функції $\Delta_{y(\bar{x})}$ похибки прогнозування можна обчислити за такою формулою [31]:

$$\Delta_{y(\bar{x})} \Big|_{\bar{b} \in Q_m} = 2 \cdot \sqrt{\bar{\varphi}^T(\bar{x}) \cdot (F^T \cdot E^{-2} \cdot F)^{-1} \cdot \bar{\varphi}(\bar{x}) \cdot m}. \quad (1.51)$$

Отже, задачі знаходження наближених до I_Q - та I_G - оптимальних планів записують, відповідно, так [31]:

$$\int_{\chi} \Delta_{y(\bar{x})} \Big|_{\bar{b} \in Q_m} d(\bar{x}) \xrightarrow{F} \min; \quad \max_{\bar{x} \in \chi} \Delta_{y(\bar{x})} \Big|_{\bar{b} \in Q_m} \xrightarrow{F} \min.$$

Дані задачі розв'язують методами математичного програмування. Ці задачі частково спрощуються, коли область експерименту χ є кубом чи сферою.

Розглянуті критерії використовують виключно для планування оптимальних насичених експериментів ($N = m$). На практиці кількість спостережень може перевищувати кількість невідомих параметрів. У цих умовах побудова апріорних оптимальних планів без урахування додаткових властивостей інтервальних похибок є неможливою. Тим часом залишається можливість побудови процедур послідовного планування. У послідовному плануванні експерименту на k - тому кроці процедури шукають не всю матрицю F , а тільки її одну стрічку (інші $N \geq m$ стрічок матриці є відомими), тобто набір значень входів \bar{x}_k , який є оптимальним за визначеним критерієм [158].

Задачі активної ідентифікації із використанням процедури послідовно-оптимального планування за критерієм мінімізації довжини максимальної

діагоналі області Ω , розглянуто у праці [106]. Однак ці процедури розраховані на задачі невисокої розмірності $m < 10$, оскільки вимагають знаходження усіх вершин області Ω .

У праці [101] розглянуто задачі послідовного планування експерименту у випадку локалізації області розв'язків Ω багатовимірним еліпсоїдом. За критерії оптимальності використано геометричні розміри області локалізації. Як відомо, розміри еліпсоїда визначають за його матрицею конфігурації H_k (див. формулу (1.41)). Зокрема, його об'єм є пропорційним $\det[H_k]$. Із огляду на складність залежності (1.42) між матрицею H_k та вектором входів \vec{x}_k , який обчислюють на k -тому кроці послідовної процедури оптимального планування, можна зробити висновок про надмірно високу обчислювальну складність побудови та реалізації такої процедури.

Задачу планування експерименту у випадку проблемно-орієнтованої ідентифікації на основі інтервальних даних, розглядали також у праці [101]. Авторами праці отримано апріорний оптимальний план, однак тільки для випадку насиченого експерименту.

У задачах планування регресійних експериментів значні результати досягнуто при синтезі неперервних планів, які переважно задають спектром і частотами, що характеризують частку загального числа спостережень у відповідних точках спектра [158]. Цей підхід при інтервальному аналізі може бути використано, коли дані експерименту є випадковими та інтервальними.

Висновки до розділу

Отже, аналіз задач ідентифікації параметрів моделі, планування експерименту, ідентифікації структури моделі та наближення складної моделі простішою, націлених на побудову математичних моделей «вхід-вихід» статичних систем, показав неможливість розв'язування цих задач у межах стохастичного підходу, коли припущення про випадкову природу, адитивність похибок в експериментальних даних не відповідають реальним властивостям системи, чи статистичні характеристики системи є невідомими. Для побудови моделей таких систем необхідно застосовувати інтервальний аналіз.

У результаті огляду методів інтервального аналізу встановлено, що задачі побудови моделей «вхід-вихід» статичних систем з інтервальними даними формалізують у вигляді задач розв'язування інтервальних систем лінійних алгебричних рівнянь. Методи оцінювання області розв'язків цих систем поділяють на два типи: допустимого та гарантованого оцінювання (локалізації). Допустиме оцінювання області розв'язків інтервальної системи лінійних алгебричних рівнянь застосовують для задач синтезу чи аналізу допусків, а методи локалізації переважно необхідні для отримання оцінки області параметрів інтервальних моделей, які у подальшому використовують для прогнозування із гарантованою точністю та у задачах управління. В обох випадках застосовують формальний підхід, побудований на інтервальній арифметиці, який унеможливорює врахування додаткової інформації про імовірнісні властивості статичної системи.

РОЗДІЛ 2

ВЛАСТИВОСТІ ЛІНІЙНО-ПАРАМЕТРИЧНИХ ІНТЕРВАЛЬНИХ МОДЕЛЕЙ СТАТИЧНИХ СИСТЕМ

На перший погляд постановка задачі дослідження властивостей інтервальних моделей статичних систем є некоректною, оскільки з теорії систем відомо, що математична модель є спрощеним представленням системи, і повинна відображати її властивості у тій мірі, наскільки це необхідно для розв'язування поставленої задачі. Тобто, не зовсім коректно розглядати властивості математичного об'єкта, який є замінником реальної системи, безвідносно до задачі, для розв'язування якої створювали цей математичний об'єкт. Проте в теорії математичного моделювання відомим є беззаперечний факт, що певні математичні об'єкти можуть відображати властивості тільки систем певного типу. Наприклад, алгебричними рівняннями відображають взаємозв'язки між вхідними та вихідними змінними статичних систем, у яких не важливим є урахування інерційності, або перехідні процеси у часовому аспекті є коротшими у порівнянні із часом вибірки даних (часом дискретизації). Важливим є також сам вигляд алгебричного рівняння, який у теорії ідентифікації називають структурою математичної моделі. З іншого боку, у випадку експериментальних досліджень модель може відображати ті властивості системи, носіями яких є дані експерименту. Для використання моделі за межами області експериментальних досліджень слід формулювати і перевіряти певні припущення щодо реальної системи чи процесу, наприклад, про часову незмінність умов функціонування, випадковість даних чи періодичну корельованість процесу. Додаткова інформація про умови функціонування системи та отримання даних накладає певні обмеження на властивості математичної моделі. Також важливим є вибір методу опрацювання даних та критеріїв узгодження даних експерименту із результатами моделювання. Для широкого кола прикладних задач критерії визначено і відповідно для усіх задач в залежності від обраного критерію певні властивості моделей будуть спільними.

Враховуючи вищезазначене, констатуємо, що для математичних моделей певного класу незалежно від задач, для яких їх будують, доцільно розглядати властивості моделей в залежності від: загального виду математичного об'єкта (його структури); умов отримання експериментальних даних та форми їх представлення; критерія узгодження експериментальних даних із результатами моделювання та методу опрацювання даних.

Відносно інтервальних моделей «вхід-вихід» статичних систем, представлених лінійно-параметричними алгебричними рівняннями, їхні загальні властивості слід розглядати із урахуванням інтервального представлення даних експерименту та обраного критерію узгодження експериментальних даних із результатами моделювання, формалізованого у вигляді умови сумісності інтервальної системи лінійних алгебричних рівнянь. Виходячи із цього, властивості вказаних математичних моделей залежатимуть від обраної структури інтервальної моделі та методу локалізації (допустимого оцінювання) області розв'язків інтервальної системи лінійних алгебричних рівнянь.

Враховуючи результати аналізу методів локалізації та допустимого оцінювання області розв'язків системи (1.25), проведеного у підрозділі 1.4, відмінними властивостями інтервальних моделей у вигляді лінійних за параметрами алгебричних рівнянь вважатимемо: точність та прогностичні властивості моделі (безвідносно до задачі моделювання), формально представлені шириною коридору (похибкою) прогнозування, або його середньою чи максимальною шириною на області експерименту; можливість представлення функцій, що задають межі коридору в аналітичному вигляді; обчислювальні витрати, необхідні для отримання на основі побудованої моделі гарантованого інтервалу прогнозування та його ширини для вихідної змінної, коли задано набір значень вхідних змінних. Стосовно першої властивості, то її суть у достатній мірі розкрито у першому розділі. Рішення стосовно включення у перелік важливих властивостей інтервальних моделей другої та третьої із перерахованих властивостей вимагає додаткового пояснення.

Одною із основних властивостей математичної моделі є простота оперування нею у процесі моделювання. У нашому випадку складність оперування пов'язана із обчислювальними витратами. Якщо говорити про інтервальну модель, то простота оперування нею залежить не тільки від складності її структури, тобто від кількості та складності базисних функцій, параметрів тощо, але й від складності функцій, якими описують межі коридору інтервальних моделей. У першому розділі показано, що у процесі побудови інтервальної моделі необхідно для заданої структури та отриманих інтервальних даних скласти та розв'язати інтервальну систему лінійних алгебричних рівнянь (1.25). У випадку знаходження «точного» розв'язку цієї системи у вигляді многогранника (області параметрів інтервальних моделей), функції, що задають межі коридору цих моделей, будуть кусковими. Звідси і складність оперування такими моделями. Вихід із даної ситуації полягає у відмові від пошуку та використання «точного» розв'язку інтервальної системи (1.25), взамін використання його, наприклад, еліпсоїдної оцінки. Тому поряд із дослідженням проблеми структурної ідентифікації інтервальних моделей статичних систем у вигляді лінійно-параметричних алгебричних рівнянь, предметом розгляду у даному розділі є переваги та недоліки застосування різних методів оцінювання області розв'язків інтервальної системи (1.25) при побудові інтервальних моделей, з точки зору забезпечення їх певних прогностичних властивостей та обчислювальної складності оперування цими моделями.

2.1. Синтез структури моделі статичної системи при аналізі інтервальних даних та наближення складних моделей простішими

У прикладних дослідженнях часто доводиться наближати таблично задану функцію деякою функцією в аналітичному вигляді. Така задача еквівалентна із задачею наближення складних моделей статичних систем простішими у вигляді функції $y(\vec{x})$. У цих умовах з одного боку, необхідно, щоб шукана функція мала певні математичні властивості (аналітичне задання, диференційованість,

опуклість і т. д.), була якнайпростішою, а з іншого боку – щоб її відхилення від заданих табличних даних не перевищувало заданого значення [154].

Сформулюємо цю задачу математично.

Нехай існує деяка функція векторного аргументу \vec{x} , яку задамо у табличному вигляді:

$$X = \begin{pmatrix} \vec{x}_1^T \\ \vdots \\ \vec{x}_N^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ x_{N1} & \dots & x_{Nn} \end{pmatrix}, \quad \vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix}.$$

Як бачимо, матриця X включає скінчене число вузлів $\vec{x}_i, i = 1, \dots, N$, у кожному із яких визначено точне значення функції $f_i, i = 1, \dots, N$. Необхідно підібрати функцію $y(\vec{x})$ так, щоб відхилення її значення від значення функції $f(\vec{x})$ у вузлах \vec{x}_i не перевищувало заданої величини, тобто [193]:

$$|y(\vec{x}_i) - f_i| \leq \varepsilon_i, \quad \forall x_i, \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.1)$$

У загальному випадку, якщо не висувати ніяких припущень стосовно класу функцій, до якого вона належить (поліноми, тригонометричні функції та ін.), підібрати функцію $y(\vec{x})$ досить складно. Переважно клас функцій визначають фізичними властивостями системи. Наприклад, для опису сигналів переважно використовують періодичні функції. Універсальним підходом є вибір функцій у класі поліноміальних.

Щоб зберегти єдиний підхід, надалі вважатимемо, що функція $y(\vec{x})$ є заданого класу і має такий вигляд:

$$y(\vec{x}) = b_1 \cdot \varphi_1(\vec{x}) + \dots + b_m \cdot \varphi_m(\vec{x}). \quad (2.2)$$

Використовуючи рівняння (2.2), перепишемо нерівності (2.1) в еквівалентному вигляді:

$$y_i^- \leq b_1 \cdot \varphi_1(\vec{x}_i) + \dots + b_m \cdot \varphi_m(\vec{x}_i) \leq y_i^+, \quad i = 1, \dots, N, \quad (2.3)$$

де $y_i^- = f_i - \varepsilon_i$, $y_i^+ = f_i + \varepsilon_i$.

Порівнюючи систему нерівностей (2.3) із системою інтервальних рівнянь (1.24), приходимо до їхньої ідентичності. Своєю чергою це означає еквівалентність задачі наближення і задачі побудови інтервальної моделі статичної системи, розглянутої у підрозділі 1.4, але у даному випадку при невідомій структурі лінійно-параметричної функції (1.22). Тобто можна стверджувати, що задача наближення складної моделі системи, заданої таблично, і задача синтезу структури інтервальної моделі та оцінювання її параметрів є еквівалентними.

Синтезу задовільної структури моделей статичних систем у регресійному аналізі присвячені багаточисельні публікації [3, 208]. Розроблено методи сто-

совно класу поліноміальних моделей, серед яких слід виділити метод повного перебору усіх можливих структур поліноміальних моделей відомого степеня, методи послідовного виключення параметрів з поліноміальної моделі, послідовного «нарощування» структури поліноміальної моделі (метод включення) і т.д. [29].

У межах прийнятої у регресійному аналізі моделі випадкової похибки, розподіленої за нормальним законом, ці методи ґрунтуються на статистичних критеріях Стюдента, Пірсона чи Фішера [112]. Порушення гіпотези про «нормальність» автоматично руйнує теоретичні обґрунтування використання вказаних критеріїв. Більш ефективними у цьому плані є алгоритми методу групового урахування аргументів [81–84, 151–154]. Однак для оцінки «якості» побудованої моделі у цих методах використовують критерій мінімізації середньоквадратичного відхилення між експериментальними даними та результатами моделювання, а також статистичні критерії [154].

Крім того, в регресійному аналізі важлива властивість незміщеності оцінок параметрів регресійної моделі може бути досліджена, як правило, тільки у межах відомої структури моделі. Це протиріччя зберігається і при перевірці гіпотез відносно «істинності» значень параметрів регресійної моделі [29].

Більш гнучкі і реалістичні моделі інтервальних похибок не викликають подібних протиріч, оскільки породжують прості процедури перевірки гіпотез стосовно властивостей статичної системи.

При синтезі структури інтервальної моделі статичної системи, визначеної в класі поліномів, важливим питанням є вибір критеріїв оптимальності структури. Розглянемо це питання детальніше.

З цією метою повернемося до системи нерівностей (2.3) і вважатимемо, що функція $y(\vec{x})$, яка наближає табличні дані із потрібною точністю ε_i , шукається у класі поліномів. Відомо, що на скінченному наборі вузлів $\vec{x}_i (i = 1, \dots, N)$, нарощуючи степінь полінома, завжди можна знайти таку поліноміальну модель, яка задовольняє заданим інтервальним даним [29].

Нехай знайдена модель $y(\vec{x}, \vec{b})$ залежить від n змінних x_1, \dots, x_n із степенню p і включає m параметрів b_1, \dots, b_m . Однак вона може виявитися надто складною для аналізу і прогнозування. Внаслідок цього виникає необхідність знаходження моделі з максимально простою структурою. У випадку наявності групи моделей зі структурою однакової складності, перевагу надаватимемо тій моделі, яка забезпечує найменшу похибку прогнозування $\Delta_{y(\vec{x})}$, задану, наприклад, у критеріях I_Q - та I_G -оптимальності планів інтервального експерименту (див. формули (1.49)). Залежно від особливостей використання моделі, в поняття «простоти» (складності) структури моделі вкладають різний зміст. Найбільш типовими ситуаціями у даному випадку є виконання однієї із таких вимог: мінімізація степені полінома $p \rightarrow \min$; мінімізація кількості вхідних змінних моделі $n \rightarrow \min$; мінімізація кількості параметрів моделі у вигляді поліноміальної функції $m \rightarrow \min$, за умови забезпечення сумісності інтервальної системи лінійних алгебричних рівнянь (2.3).

Отже, для задач синтезу оптимальної структури, залежно від призначення та особливостей застосування інтервальної моделі статичної системи, заданої поліномом, необхідно використовувати одну чи декілька пар критеріїв: мінімізації степені полінома і похибки прогнозування; мінімізації кількості вхідних змінних моделі і похибки прогнозування; мінімізації кількості параметрів поліноміальної моделі і похибки прогнозування. В усіх розглянутих випадках додатково необхідно забезпечити сумісність системи (2.3).

У випадку поетапного зважування структур інтервальних моделей за критеріями обраної пари, очевидно, пріоритетними будуть критерії, що мінімізують складність структури, оскільки критерій мінімуму похибки прогнозування при застосуванні інтервальної моделі вимагає значних обчислювальних витрат і на першому етапі, пов'язаному з оцінюванням великої кількості претендентів, його застосування є недоцільним.

Як і у регресійному аналізі, для знаходження оптимальної структури моделі використовують методи повного перебору можливих структур, послідовного включення і виключення параметрів моделі. Однак у даному випадку вони ґрунтуються на аналізі властивостей інтервальної системи лінійних алгебричних рівнянь (2.3).

Суть методу повного перебору в нашому випадку полягає у тому, що складають усі можливі поліноми з обмеженою кількістю n вхідних змінних і степеню p [193]. Наприклад, при $n = 1, p = 2$ таких поліномів буде сім:

$$y_1 = b_1 + b_2x + b_3x^2, \quad y_2 = b_1 + b_2x, \quad y_3 = b_2x + b_3x^2, \quad y_4 = b_2x + b_3x^2, \\ y_5 = b_1, \quad y_6 = b_2x, \quad y_7 = b_3x^2.$$

Кожен із можливих поліномів підставляємо у систему (2.3). Виділяємо ті, які задовольняють усім нерівностям системи і, отже, заданим умовам точності. Серед них формуємо групу поліномів із найпростішою, у розумінні обраного критерію, складністю структури. На другому етапі, серед поліноміальних моделей з найпростішою структурою обираємо модель із найменшою похибкою прогнозування.

Очевидно, що зі зростанням p і n , на етапі вибору поліномів з найпростішою структурою, кількість можливих комбінацій суттєво зростає. Наприклад, при $p = 2, n = 2$ необхідно проаналізувати більше 50 поліномів. Внаслідок цього, реалізацію методу повного перебору на практиці можна застосовувати тільки в окремих простих випадках, наприклад, коли вхідні змінні мають фізичний зміст і їхня кількість є достатньо малою.

Зауважимо, якщо вдалося знайти поліном, що наближує таблично задану функцію з необхідною точністю, то додавання до нього довільних членів втрачає сенс, оскільки в інтервальному аналізі найкращою є модель, що на множині усіх адекватних моделей є найпростішою [29]. Внаслідок цього, економнішими виявляються методи, побудовані на послідовному включенні або виключенні параметрів поліноміальних моделей. Зауважимо, що під адекватністю моделі у даному випадку розуміємо вибір її такої структури, яка забезпечує сумісність

інтервальної системи лінійних алгебричних рівнянь (2.3). Очевидно, що з точки зору практичного застосування моделі для розв'язування певних задач таке трактування «адекватності» може бути дискусійним, оскільки це поняття в моделюванні скоріше є якісним, аніж кількісним. На наш погляд, правомірність трактування адекватності моделі у сенсі забезпечення сумісності інтервальної системи (2.3) є обґрунтованим для широкого класу прикладних задач, оскільки у цьому випадку обрана модель повністю узгоджена з експериментальними даними, які відображають властивості об'єкта.

У методі послідовного виключення задаємо структуру моделі $y(\vec{x}, \vec{b})$, яка забезпечує сумісність інтервальної системи (2.3). Структуру цієї моделі можна встановити на основі попереднього аналізу даних чи виходячи із фізичних міркувань. Потім досліджуємо можливість спрощення цієї моделі, тобто виключення з неї окремих параметрів, спираючись на обраний критерій складності структури. Для виключення «сліпого» перебору необхідна цілеспрямована перевірка гіпотез відносно значущості окремих параметрів або цілої їх групи. При спрощенні початкової структури моделі $y(\vec{x}, \vec{b})$ досліджуємо можливість обнулення її окремих параметрів. Це пов'язано з перевіркою гіпотез інтервального аналізу у такому вигляді [193]:

$$H_0 : b_j = 0; H_0 : \vec{b}_i = 0, \quad (2.4)$$

де \vec{b}_i – заданий підвектор вектора \vec{b} .

В інтервальному підході перевірка гіпотез (2.4) спрощується, а саме: гіпотеза H_0 приймається, якщо при обнуленні відповідних параметрів моделі, інтервальна система рівнянь (2.3) залишається сумісною. Наприклад, якщо маємо початкову модель

$$y(\vec{x}_i, \vec{b}) = b_1 \cdot \varphi_1(\vec{x}_i) + b_2 \cdot \varphi_2(\vec{x}_i) + b_3 \cdot \varphi_3(\vec{x}_i) + b_4 \cdot \varphi_4(\vec{x}_i),$$

яка включає чотири параметри і інтервальна система лінійних алгебричних рівнянь

$$y_i^- \leq b_1 \cdot \varphi_1(\vec{x}_i) + 0 \cdot \varphi_2(\vec{x}_i) + 0 \cdot \varphi_3(\vec{x}_i) + b_4 \cdot \varphi_4(\vec{x}_i) \leq y_i^+, \quad i=1, \dots, N$$

є сумісною для усіх точок спостережень \vec{x}_i , то параметри b_2 і b_3 у заданій моделі можна обнулити, тобто одержати простішу структуру

$$y(\vec{x}, \vec{b}) = b_1 \varphi_1(\vec{x}) + b_4 \varphi_4(\vec{x}).$$

Пояснимо головну ідею відбору претендентів на обнулення на прикладі моделі, яка містить два параметри b_1, b_2 : $y(\vec{x}, \vec{b}) = b_1 \varphi_1(\vec{x}) + b_2 \varphi_2(\vec{x})$

На рис. 2.1 наведено можливі варіанти розміщення області розв'язків Ω системи (2.3) при її сумісності у площині $(b_1; b_2)$.

Аналізуючи рисунки, не важко виявити, що у випадку *a*) знаки параметрів є додатними $b_1 > 0$, $b_2 > 0$, а у випадку *б*) вони від'ємні, тобто $b_1 < 0$, $b_2 < 0$. Це означає, що гіпотеза рівності нулю, принаймні одного параметра, виключається.

В інших випадках можливе прийняття «нульових» гіпотез: $b_2 = 0$ – випадок *в*); $b_1 = 0$ – випадок *з*); $b_1 = 0$ або $b_2 = 0$ – випадок *д*); $b_1 = 0$ і $b_2 = 0$ – випадок *е*).

Розглянутий приклад дає можливість сформулювати два правила, які є істинними для спільного m -вимірному випадку [193]:

- якщо область Ω не перетинає межі октантів простору b_1, \dots, b_m , то жоден параметр b_j не може бути обнулений;

- якщо область Ω включає нульову точку (випадок *е*), то приймається гіпотеза $H_0 : \vec{b} = 0$, тобто усі параметри в моделі можуть бути замінені на нулі.

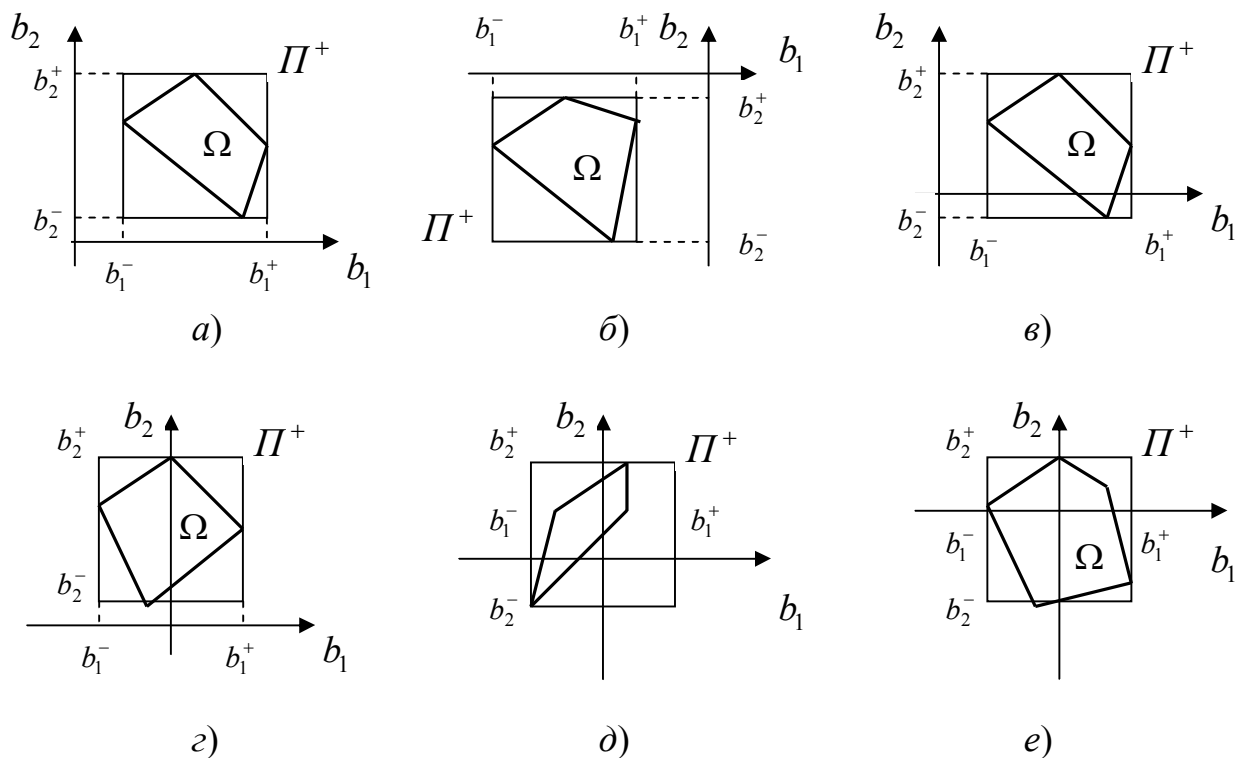


Рис. 2.1. Варіанти розміщення області розв'язків Ω

У багатовимірному випадку таке наочне зображення області Ω , як на рис. 2.1, є неможливим, що вимагає заміни її локалізаційною областю. Найбільш придатною у даному випадку є інтервальна локалізація області розв'язків Ω , тобто описування її m -вимірним прямокутним паралелепіпедом Π^+ . У багатовимірному випадку прямокутний паралелепіпед Π^+ можна задати через межі окремих параметрів b_j , тобто інтервальним вектором $[\vec{b}]$ із елементами $[b_j^-, b_j^+]$. Значення b_j^-, b_j^+ знаходять із розв'язку задач лінійного програмування (1.38).

Знання меж параметрів b_j дає можливість зобразити модель $y(\vec{x}, \vec{b})$ у такому вигляді:

$$y(\vec{x}, \vec{b}) = \varphi_1(\vec{x}) \cdot [b_1^-; b_2^+] + \dots + \varphi_m(\vec{x}) \cdot [b_m^-; b_m^+].$$

Із вище сформульованих правил витікає, що інтервальну модель статичної системи $y(\vec{x}, \vec{b})$ не можна спростити, якщо межі значень усіх параметрів мають однакові знаки, а параметр b_j можна обнулити, якщо його межі b_j^-, b_j^+ мають різні знаки [193].

На основі цього правила можливе застосування методу послідовного виключення, коли відповідно до обраного критерію спрощення структури (мінімізації степені, кількості вхідних змінних чи кількості параметрів поліноміальної моделі) з початкової моделі виключають параметри, межі яких мають різні знаки. У цьому випадку, якщо відразу декілька параметрів є претендентами на обнулення, недоцільно прирівнювати їх до нуля одночасно, оскільки можлива ситуація несумісності інтервальної системи рівнянь, а після обнулення параметра необхідно заново провести аналіз інтервальних даних і встановити межі значень решти параметрів.

У методі послідовного включення нарощуємо складність моделі, послідовно переходячи від найпростіших до складніших структур. При додаванні нових параметрів моделі, як і у методі послідовного виключення, користуємося обраним критерієм спрощення структури. Процес зупиняємо як тільки побудована модель забезпечує сумісність інтервальної системи рівнянь (2.3) і одночасно усі її параметри є значущими.

Для зменшення кількості ітерацій процесу, найпростішу структуру слід обирати виходячи із аналізу особливостей статичної системи, для якої будують інтервальну модель.

Зауважимо важливу особливість запропонованих методів послідовного включення та виключення параметрів у процесі синтезу найпростішої структури інтервальної моделі, а саме: результат синтезу структури моделі не залежить від методу локалізації її параметрів, тобто найпростішу структуру можна встановити за допомогою методу інтервальної локалізації параметрів, який, як відомо, є найпростішим з обчислювальної точки зору.

Використання вказаного методу локалізації є доцільним і на другому етапі вибору оптимальної структури інтервальних моделей. Оскільки похибка прогнозування залежить від розміру області локалізації параметрів інтервальної моделі, то серед сформованої на першому етапі групи моделей із найпростішою структурою обираємо такі моделі, у яких область параметрів локалізована областю у вигляді m -вимірного прямокутного паралелепіпеда Π^+ із мінімальним об'ємом $V(\Pi^+)$ [49]. Такий підхід дає можливість уникнути складних процедур розрахунку максимальної чи середньої на області експерименту похибки прогнозування із застосуванням інтервальних моделей-претендентів.

Проілюструємо розглянутий метод послідовного виключення параметрів для наближення заданих функціями характеристик електротехнічного обладнання із заданою точністю [193].

При розробці електричних пристроїв, в управлінні технологічним і електротехнічним обладнанням в умовах виробництва практикується підхід, який ґрунтується на використанні діаграм і кривих експлуатаційних характеристик [136, 167].

Як правило, діаграми представляють графіки ліній рівнів функції $f(\vec{x})$, яка пов'язує необхідні вхідні змінні з основними характеристиками обладнання [136].

Кожна точка графіка є результатом складних розрахунків за системою рівнянь, що описують функціонування пристрою. Зауважимо, що для обладнання старого зразка діаграми є єдиним описом, який є доступним користувачеві. Перевагою такого представлення характеристик є можливість в умовах виробництва достатньо швидко і просто знайти необхідну величину вихідної характеристики для заданих аргументів \vec{x} . Однак ці характеристики неможливо використати для комп'ютерних розрахунків через їхнє графічне представлення. Отже, виникає задача переходу від графіка $f(\vec{x})$ до функції $y(\vec{x})$, заданої в аналітичному вигляді, яка є математичною моделлю пристрою.

Щоб розв'язати вказану задачу, спочатку задамо графік таблицею, а потім апроксимуємо дані з потрібною точністю функцією $y(\vec{x})$ з найпростішою структурою.

Розглянемо дану задачу на прикладі опису характеристик кола високовольтних комутаторів, які використовують у системах захисту і управління енергоблоків. У літературі [167], яка стосується розробки та опису вимог до експлуатації такого обладнання, наведено універсальні криві робочих характеристик, придатних для турбогенераторів малої потужності та гідрогенераторів потужністю 500 МВт. Графіки для гармонічної компоненти струму перехідного процесу в момент розімкнення контактів наведені на рис. 2.2.

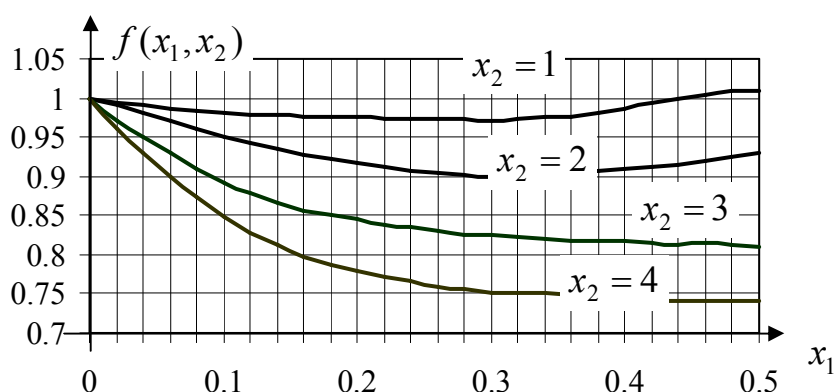


Рис. 2.2. Графік функцій струму перехідного процесу

На рисунку використано такі позначення: f – середньоквадратична величина періодичної компоненти струму перехідного процесу віднесена до величини струму в момент $t = 0$ (початкова величина струму відома для усіх типів генераторів); x_1 – проміжок часу після розмикання контактів; x_2 – відносна величина, яка характеризує віддаленість генератора від точки короткого замикання.

На основі кривих, наведених на рисунку, була підготовлена таблиця 2.1. Для верхньої кривої в силу її особливостей абсолютна похибка апроксимації Δ була обрана $\pm 0,015$ ($\approx 1,5\%$), а для решти кривих $\pm 0,03$.

У таблиці збережено прийняті нами раніше позначення: $y_i^- = f_i - \Delta_i$, $y_i^+ = f_i + \Delta_i$.

Табличні значення функцій струму перехідного процесу

i	x_{1i} (с)	x_{2i}	f_i	Δ_i	y_i^-	y_i^+
1	0,1	1	0,985	0,015	0,970	1,000
2	0,2	1	0,975	0,015	0,960	0,990
3	0,4	1	0,985	0,015	0,970	1,000
4	0,5	1	1,010	0,015	0,995	1,025
5	0,1	2	0,950	0,030	0,920	0,980
6	0,2	2	0,920	0,030	0,890	0,950
7	0,3	2	0,900	0,030	0,870	0,930
8	0,4	2	0,910	0,030	0,880	0,940
9	0,5	2	0,920	0,030	0,890	0,950
10	0,1	3	0,890	0,030	0,860	0,920
11	0,3	3	0,830	0,030	0,800	0,860
12	0,5	3	0,810	0,030	0,780	0,840
13	0,1	4	0,850	0,030	0,820	0,880
14	0,3	4	0,760	0,030	0,730	0,790
15	0,5	4	0,740	0,030	0,710	0,770

Враховуючи плавний характер кривих, можемо наблизити таблично задану характеристику моделлю у вигляді полінома третього степеня з найменшою кількістю параметрів-коефіцієнтів. Для початку обираємо такий поліном:

$$y(\vec{x}) = b_1 + b_2 x_1 + b_3 x_1 x_2 + b_4 x_1^2 + b_5 x_1^2 x_2 + b_6 x_1 x_2^2 + b_7 x_1^3.$$

З діаграми випливає, що при $x_1 = 0$ вихідний показник (відносне значення струму у колі) для будь-якого значення x_2 дорівнює $y(0, x_2) = 1$. Це є підставою для визначення параметра $b_1 = 1$ і запису інтервальної системи:

$$y_i^- \leq 1 + \sum_{j=2}^7 b_j \varphi_j(\vec{x}_i) \leq y_i^+,$$

розв'язок якої є областю можливих значень параметрів моделі у вигляді полінома.

Розрахунок прямокутного багатовимірного паралелепіпеда Π^+ , описаного навколо області розв'язків Ω , уможливив визначення меж параметрів:

$$\begin{aligned} b_2^- &= -0,1572 ; & b_2^+ &= 0,9223 ; \\ b_3^- &= -0,7075 ; & b_3^+ &= -0,1525 ; \\ b_4^- &= -1,1111 ; & b_4^+ &= 0,66471 ; \\ b_5^- &= 0,2250 ; & b_5^+ &= 2,7621 ; \\ b_6^- &= -0,0350 ; & b_6^+ &= 0,0490 ; \\ b_7^- &= -0,0896 ; & b_7^+ &= 0,04672 . \end{aligned}$$

Як бачимо, межі інтервалів можливих значень параметрів b_2, b_4, b_6, b_7 поліноміальної моделі мають різні знаки і, відповідно, можна прийняти припущення:

$$H_0 : b_j = 0 \quad j = 2, 4, 6, 7.$$

Враховуючи, що на другому кроці значна кількість параметрів претендує на обнулення, з метою зменшення обчислювальних витрат виключаємо відразу два параметри b_6, b_7 . Після перерахунку отримали такі інтервальні значення параметрів:

$$\begin{aligned} b_2^- &= -0,1122; & b_2^+ &= 0,5236; \\ b_3^- &= -0,4952; & b_3^+ &= -0,3225; \\ b_4^- &= -0,6972; & b_4^+ &= 0,6444; \\ b_5^- &= 0,2250; & b_5^+ &= 0,6805. \end{aligned}$$

Як видно із отриманих результатів, після другого кроку можемо прийняти такі гіпотези:

$$H_0 : b_j = 0 \quad j = 2, 4.$$

Виключаємо параметр b_4 . В результаті перерахунку отримали:

$$\begin{aligned} b_2^- &= 0,1450; & b_2^+ &= 0,2466; \\ b_3^- &= -0,4318; & b_3^+ &= -0,3816; \\ b_5^- &= 0,3875; & b_5^+ &= 0,5312. \end{aligned}$$

Надалі спрощувати модель неможливо, оскільки межі усіх параметрів мають однакові знаки.

Отже, після трьох кроків отримали модель у вигляді полінома з найпростішою структурою:

$$y(\bar{x}) = 1 + 0,173 \cdot x_1 - 0,396 \cdot x_1 \cdot x_2 + 0,453 \cdot x_1^2 \cdot x_2,$$

яка описує характеристики, наведені на рис.2.2 із заданою точністю. Параметри моделі розраховано як центри ваги десяти вершин області Ω , координати яких є розв'язками задач лінійного програмування (1.38).

Отже, задачі синтезу оптимальної структури моделі у випадку аналізу інтервальних даних та наближення складних моделей простішими із заданою точністю можемо розв'язати на основі єдиного інтервального локалізаційного підходу, який ґрунтується на задачах лінійного програмування у вигляді (1.38).

Слід зауважити, що застосування методу інтервальної локалізації області параметрів, переважно, не забезпечує задовільних прогностичних властивостей інтервальної моделі, однак є необхідним на етапі синтезу її оптимальної струк-

тури. Після отримання оптимальної структури моделі, з метою підвищення точності прогнозування, доцільно повторно оцінити параметри цієї моделі із застосуванням більш точних методів локалізації, наприклад, – еліпсоїдних.

2.2. Аналіз властивостей інтервальних моделей статичних систем у випадку застосування насиченого експерименту

Властивості інтервальних моделей, параметри яких належать області розв'язків інтервальної системи лінійних алгебричних рівнянь (1.25), у певній мірі розглянуто у пункті 1.4.1. Однак випадок застосування насиченого експерименту доцільно виокремити. Основні результати аналізу властивостей інтервальних моделей для даного випадку представлено у праці [39].

Нехай проведено насичений експеримент, що включає $N = m$ спостережень з відомою інтервальною похибкою $\Delta(\vec{x}) = 0,5 \cdot (y^+(\vec{x}) - y^-(\vec{x}))$ за вихідною змінною і побудована область параметрів Ω інтервальних моделей, структуру яких задано лінійно-параметричною функцією (1.22). Тоді для обчислення значення похибки прогнозування у будь-якій точці області експерименту можемо скористатися виразом (1.33):

$$\Delta_{y(\vec{x})} = \max_{\vec{b}_p, \vec{b}_s \in \Omega} (\vec{\varphi}^T(\vec{x}) \cdot (\vec{b}_p - \vec{b}_s)), \vec{x} \in \chi.$$

Підставимо у вираз (1.33) замість векторів \vec{b}_p, \vec{b}_s , що задають вершини області Ω , їхні значення, які попередньо обчислимо для випадку ($N = m$) за формулою (1.31), тоді отримаємо:

$$\Delta_{y(\vec{x})} = \max_{\vec{Y}_p, \vec{Y}_s \in \Omega} (\vec{\varphi}^T(\vec{x}) \cdot F^{-1} \cdot (\vec{Y}_p - \vec{Y}_s)), \vec{x} \in \chi. \quad (2.5)$$

Введемо позначення у формулі (2.5):

$$\vec{\alpha}^T = \vec{\varphi}^T(\vec{x}) \cdot F^{-1} \quad (2.6)$$

і перепишемо її в еквівалентному вигляді із урахуванням того, що компоненти векторів \vec{Y}_p, \vec{Y}_s є можливими комбінаціями меж $y_i^-, y_i^+, i = 1, \dots, m$ інтервальних даних (див. табл. 1.1):

$$\Delta_{y(\vec{x})} = 2 \cdot \sum_{i=1}^m |\alpha_i(\vec{x}) \cdot \Delta_i|, \vec{x} \in \chi, \quad (2.7)$$

де $\alpha_i(\vec{x})$ – i -та компонента вектора $\vec{\alpha}$, яка у загальному випадку залежить від вибору точки на області експерименту.

$\Delta_i = 0,5 \cdot (y_i^+ - y_i^-)$ – інтервальні похибки у точках \vec{x}_i спостережень.

Як видно, функція похибки прогнозування для інтервальної моделі, яка побудована за результатами насиченого експерименту, є кусково-неперервною. Проте у порівнянні із загальним випадком, коли $N > m$, обчислення її значення за формулою (2.7) у будь-якій точці на області χ експерименту спрощується. Очевидно, що у цьому випадку обчислювальна складність оперування інтервальною моделлю буде також нижчою.

Враховуючи симетричність області Ω паралелотопа відносно центру \vec{b} у випадку насиченого експерименту, вираз для обчислення коридору прогнозування набуває такого вигляду [39]:

$$[\hat{y}^-(\vec{x}); \hat{y}^+(\vec{x})] = \left[\vec{\varphi}^T(\vec{x}) \cdot \vec{b} - \sum_{i=1}^m |\alpha_i(\vec{x}) \cdot \Delta_i|; \vec{\varphi}^T(\vec{x}) \cdot \vec{b} + \sum_{i=1}^m |\alpha_i(\vec{x}) \cdot \Delta_i| \right]. \quad (2.8)$$

Аналіз виразу (2.8) показує, що складність обчислення меж коридору прогнозування у фіксованій точці області експерименту визначається операцією знаходження оберненої матриці значень базисних функцій F . За сучасних можливостей обчислювальних засобів реалізація цієї операції не викликає ускладнень.

У процесі експериментального моделювання важливою задачею є встановлення залежності похибки прогнозування від вхідних змінних на області експерименту, а також виявлення умов, за яких забезпечується мінімум та максимум цієї похибки.

Надалі будемо вважати, що інтервальну модель побудовано за результатами насиченого експерименту з інтервальними похибками $\Delta_i, i = 1, \dots, m$ спостережень, а рівняння, яке описує дану модель, включає базисну функцію $\varphi_1(\vec{x}) = 1$.

Спочатку проаналізуємо вираз для оцінки мінімальної на області експерименту похибки прогнозування. З цією метою сформулюємо допоміжне твердження.

Л е м а 2.1. Нехай задано множини чисел

$$\left\{ t_i, i = 1, \dots, m \mid \sum_{i=1}^m t_i = 1 \right\}, \text{ та } \left\{ u_i, i = 1, \dots, m \mid u_i \geq 0 \right\}.$$

У такому випадку справджується нерівність:

$$\sum_{i=1}^m |t_i \cdot u_i| \geq \min_{i=1, \dots, m} u_i.$$

Доведення цієї леми виходить за межі розгляду у монографії, його наведено у праці [39].

Тепер повернемося до аналізу виразу (2.7). Для фіксованих $\Delta_i, i = 1, \dots, m$ значення похибки прогнозування $\Delta_{y(\vec{x})}$ на області експерименту залежить тіль-

ки від значень $\alpha_i(\bar{x})$ -компонент вектора $\vec{\alpha}$. Проаналізуємо його властивості.

Згідно із прийнятою вище умовою ($\varphi_1(\bar{x}) = 1$), перший стовпець матриці F у системі рівнянь (2.6) є одиничним. Відповідно для першої стрічки цієї системи отримаємо

$$\vec{\alpha}^T \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \varphi_1(\bar{x}) = 1, \quad \forall \bar{x} \in \chi,$$

звідки випливає:

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i(\bar{x}) = 1, \quad \forall \bar{x} \in \chi.$$

Співставляючи отриманий результат із результатом леми 2.1 (із заміною t_i на $\alpha_i(\bar{x})$ та u_i на Δ_i), отримаємо таку нерівність:

$$\sum_{i=1}^m |\alpha_i(\bar{x}) \cdot \Delta_i| \geq \min_{i=1, \dots, m} \Delta_i, \quad \forall \bar{x} \in \chi.$$

Помножимо ліву і праву частину нерівності на 2 та співставивши результат із виразом (2.7) отримаємо:

$$\Delta_{y(\bar{x})} = 2 \cdot \sum_{i=1}^m |\alpha_i(\bar{x}) \cdot \Delta_i| \geq \min_{i=1, \dots, m} 2 \cdot \Delta_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad \forall \bar{x} \in \chi. \quad (2.9)$$

Для встановлення властивостей інтервальних моделей важливо дослідити умови, за яких нерівність (2.9) набуває вигляду рівняння.

Покладемо у системі рівнянь (2.6):

$$\bar{x} \in \{\bar{x}_i, i = 1, \dots, m\}.$$

Тоді для фіксованого \bar{x}_i отримаємо:

$$\alpha_i(\bar{x}_i) = 1.$$

За цих умов вираз (2.9) набуде такого вигляду:

$$\Delta_{y(\bar{x})} = 2 \cdot \Delta_i \geq \min_{i=1, \dots, m} 2 \cdot \Delta_i, \quad \bar{x} \in \{\bar{x}_i, i = 1, \dots, m\},$$

із якого очевидним є вираз для мінімальної на області експерименту похибки прогнозування

$$\min_{\bar{x} \in \chi} \Delta_{y(\bar{x})} = \min_{i=1, \dots, m} 2 \cdot \Delta_i. \quad (2.10)$$

Вираз (2.10) окреслює важливу властивість інтервальної моделі, яка побудована за результатами насиченого експерименту.

В л а с т и в і с т ь 2.1. Мінімальна похибка прогнозування за результатами застосування інтервальної моделі, побудованої на основі насиченого експерименту, досягається в одній із точок плану з найменшою похибкою спостережень.

Перейдемо до аналізу максимальної похибки прогнозування на області χ вважаючи і надалі, що інтервальна модель побудована за результатами насиченого експерименту. У загальному випадку ця задача ускладнена наявністю нелінійних по відношенню до вхідних змінних компонент у векторі базисних функцій $\vec{\varphi}(\vec{x})$.

Важливу властивість для максимальної похибки прогнозування встановлюємо із виразу (2.7). Покладемо у цьому виразі:

$$\vec{x} \in \{\vec{x}_i, i = 1, \dots, m\}.$$

Тоді отримаємо:

$$\Delta_{y(\vec{x})} = 2 \cdot \Delta_i, \quad \forall \vec{x} \in \{\vec{x}_i, i = 1, \dots, m\}.$$

Звідси очевидно є нерівність:

$$\max_{\vec{x} \in \chi} \Delta_{y(\vec{x})} \geq 2 \cdot \max_{i=1, \dots, m} \Delta_i. \quad (2.11)$$

Вираз (2.11) для загального випадку визначає нижню оцінку максимального значення похибки прогнозування на області експерименту.

Важливим з точки зору встановлення властивостей інтервальних моделей є отримання відповіді на питання: «За яких умов нерівність (2.11) набуває вигляду рівняння?»

Відповідь на це питання для інтервальної моделі, яку задано лінійним за вхідними змінними рівнянням

$$\hat{y}(\vec{x}) = \vec{x}^T \cdot \vec{b},$$

отримано у праці [39].

Припустимо, що область експерименту задано опуклою множиною на лінійній комбінації точок спостережень \vec{x}_i насиченого експерименту у такому вигляді:

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot \vec{x}_i, \quad \lambda_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, m, \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1, \quad (2.12)$$

Підставимо у вираз для обчислення похибки прогнозування (2.7) замість компонент $\alpha_j(\vec{x})$, $j = 1, \dots, m$, вирази для їхнього обчислення (2.6), отримаємо:

$$\Delta_{y(\bar{x})} = 2 \cdot \sum_{j=1}^m \left| \varphi^T(\bar{x}) \cdot \vec{f}_j \cdot \Delta_j \right|, \bar{x} \in \chi,$$

де \vec{f}_j – вектор-стовпець матриці F^{-1} .

Урахуємо в отриманому виразі вищезазначені умови: структуру моделі задано лінійним за вхідними змінними рівнянням, а область експерименту виразом (2.12), отримаємо:

$$\Delta_{y(\bar{x})} = 2 \cdot \sum_{j=1}^m \left| \sum_{i=1}^m (\lambda_i \cdot \vec{x}_i^T) \cdot \vec{f}_j \cdot \Delta_j \right|, \bar{x} = \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot \vec{x}_i, \lambda_i \geq 0 \forall i = 1, \dots, m, \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1,$$

де \vec{f}_j – вектор-стовпець матриці F^{-1} , яка у даному випадку має такий вигляд: $F = \{\vec{x}_j^T, j = 1, \dots, m\}$.

Враховуючи, що вектори \vec{x}_i^T та \vec{f}_j – ортогональні між собою, коли $i \neq j$, та $\vec{x}_i^T \cdot \vec{f}_j = 1$, коли $i = j$, отримаємо:

$$\Delta_{y(\bar{x})} = 2 \cdot \sum_{i=1}^m \left| \lambda_i \cdot \Delta_i \right|, \bar{x} = \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot \vec{x}_i, \lambda_i \geq 0 \forall i = 1, \dots, m, \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1.$$

Оскільки $\lambda_i \geq 0$ та $\Delta_i \geq 0$ для всіх $i = 1, \dots, m$, то у даному випадку вираз для обчислення похибки прогнозування набуває такого вигляду:

$$\Delta_{y(\bar{x})} = 2 \cdot \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot \Delta_i, \bar{x} = \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot \vec{x}_i, \lambda_i \geq 0 \forall i = 1, \dots, m, \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1.$$

Звідси

$$\max_{\bar{x} \in \chi} \Delta_{y(\bar{x})} = 2 \cdot \max_{i=1, \dots, m} \Delta_i, \chi = \left\{ \bar{x} \in R^m \mid \bar{x} = \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot \vec{x}_i, \lambda_i \geq 0 \forall i = 1, \dots, m, \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1 \right\}. \quad (2.13)$$

Отже, для лінійної за вхідними змінними інтервальної моделі максимальне значення похибки прогнозування на області експерименту (2.12) досягається у точці плану з максимальною похибкою спостережень.

Із проведеного аналізу також витікає, що у випадку побудови інтервальної моделі за результатами насиченого експерименту $N = m$ обчислювальна складність оперування моделлю суттєво спрощується у порівнянні із загальним випадком, коли – $N > m$.

2.3. Інтервальні моделі статичних систем, побудовані на основі інтервальних оцінок параметрів

В інтервальній математиці, замість «точного» розв'язку інтервальної системи лінійних алгебричних рівнянь (1.24) у вигляді многогранника Ω , розгля-

дають інтервальні оцінки параметрів $[\vec{b}] = ([b_1^-, b_1^+], \dots, [b_m^-, b_m^+])^T$. Якщо у формулі (1.27) замість $\vec{b} \in \Omega$ покладемо $\vec{b} \in [\vec{b}]$, то отримаємо вираз, який задає коридор прогнозування. В інтервальному аналізі його називають об'єднаним інтервальним розширенням функції.

Надалі такий коридор прогнозування (об'єднане інтервальне розширення) будемо позначати так: $[\hat{y}(\vec{x})]_{\vec{b} \in [\vec{b}]}$.

З іншого боку, замінивши у виразі для множини інтервальних моделей

$$\hat{y}(\vec{x}) = \vec{\varphi}^T(\vec{x}) \cdot \vec{b}, \quad \vec{b} \in \Omega,$$

вектор оцінок \vec{b} на інтервальний вектор $[\vec{b}]$ і виконавши операції інтервальної арифметики, отримаємо інтервальну оцінку $[\hat{y}(\vec{x}, [\vec{b}])]$ для вихідної змінної.

У праці [2] для загального випадку доведено таке включення:

$$[\hat{y}(\vec{x})]_{\vec{b} \in [\vec{b}]} \subseteq [\hat{y}(\vec{x}, [\vec{b}])], \quad \forall \vec{x} \in \mathcal{X}. \quad (2.15)$$

Алгоритм знаходження інтервальних оцінок $[\hat{y}(\vec{x}, [\vec{b}])]$ на базі інтервальної арифметики є складним, а знайдені із його застосуванням оцінки неточні. До того ж при побудові інтервальних моделей статичних систем, не залежно від методу локалізації області параметрів, важливим є не тільки можливість знаходження інтервальної оцінки вихідної змінної з мінімальними обчислювальними витратами, але і представлення функціональних меж коридору в аналітичному вигляді на усій області експерименту. Як відомо, такі вимоги пов'язані із забезпеченням низької складності оперування моделлю. Остання вимога зумовлює необхідність розгляду властивостей меж функціонального коридору $[\hat{y}(\vec{x})]_{\vec{b} \in [\vec{b}]}$ для моделей у вигляді лінійно-параметричних функцій (1.22) [42].

Відмітимо, що для моделей, заданих лінійно-параметричними функціями (1.22) в силу властивості субдистрибутивності інтервальної арифметики (1.11), включення (2.15) набуває вигляду рівняння, тобто оцінки $[\hat{y}(\vec{x})]_{\vec{b} \in [\vec{b}]}$ та $[\hat{y}(\vec{x}, [\vec{b}])]$ співпадають для усіх значень \vec{x} .

Вираз для обчислення коридору прогнозування (1.27) у випадку локалізації області Ω оцінок параметрів інтервальним вектором $[\vec{b}]$, який у просторі параметрів є прямокутним паралелепіпедом

$$\Pi^+ = \{\vec{b} \mid b_j^- \leq b_j \leq b_j^+, j = 1, \dots, m\},$$

набуває такого вигляду [42]:

$$[\hat{y}(\vec{x})]_{\vec{b} \in [\vec{b}]} = \left[\min_{\vec{b} \in \Pi^+} \sum_{j=1}^m \varphi_j(\vec{x}) \cdot b_j; \max_{\vec{b} \in \Pi^+} \sum_{j=1}^m \varphi_j(\vec{x}) \cdot b_j \right]. \quad (2.16)$$

Зауважимо, що залежність між прогнозованим значенням виходу \hat{y} та оцінками вектора параметрів \vec{b} є лінійною. Тому для фіксованого вектора входів \vec{x} розв'язки задач

$$\min_{\vec{b} \in \Pi^+} \sum_{j=1}^m \varphi_j(\vec{x}) \cdot b_j, \quad \max_{\vec{b} \in \Pi^+} \sum_{j=1}^m \varphi_j(\vec{x}) \cdot b_j$$

співпадають із вершинами паралелепіпеда Π^+ . Отже, межі коридору прогнозування, як і у випадку застосування області параметрів Ω , визначаємо підстановкою у вираз (2.16) компонент b_j векторів-вершин області локалізації Π^+ .

Введемо такі позначення:

$$b_j^{\min} = \begin{cases} b_j^-, & \text{якщо } \varphi_j(\vec{x}_i) \geq 0; \\ b_j^+, & \text{якщо } \varphi_j(\vec{x}_i) < 0. \end{cases} \quad b_j^{\max} = \begin{cases} b_j^+, & \text{якщо } \varphi_j(\vec{x}_i) \geq 0; \\ b_j^-, & \text{якщо } \varphi_j(\vec{x}_i) < 0. \end{cases} \quad (2.17)$$

Перепишемо вираз (2.16) із використанням уведених позначень:

$$[\hat{y}(\vec{x})]_{\vec{b} \in [\vec{b}]} = \left[\sum_{j=1}^m \varphi_j(\vec{x}) \cdot b_j^{\min}; \sum_{j=1}^m \varphi_j(\vec{x}) \cdot b_j^{\max} \right]. \quad (2.18)$$

Перейдемо до аналізу виразу (2.18).

Як видно, для обчислення інтервальної оцінки $[\hat{y}(\vec{x})]_{\vec{b} \in [\vec{b}]}$ у фіксованій точці \vec{x}_i необхідно визначити знаки значень усіх базисних функцій $\varphi_j(\vec{x}_i)$, ($j = 1, \dots, m$). Оскільки значення базисних функцій у загальному випадку залежать від значень компонент вектора входів \vec{x} , то очевидно є сформульована нижче властивість інтервальних моделей [42].

В л а с т и в і с т ь 2.2. У загальному випадку межі коридору (2.18) інтервальних моделей є кусковими функціями.

Дану властивість проілюструємо прикладом для такої інтервальної моделі:

$$\hat{y}(x) = b_0 + b_1 \cdot x, \quad \text{де } b_0 \in [2,4], b_1 \in [1,3], x \in [-2,2], \varphi_1(x) = 1, \varphi_2(x) = x.$$

Коридор прогнозування (2.18) для даного випадку буде таким:

$$[\hat{y}(\vec{x})]_{\vec{b} \in [\vec{b}]} = [2,4] + [1,3] \cdot x.$$

Графічна ілюстрація коридору наведена на рис. 2.3.

Як видно, на інтервалі $[-2,0]$ значення базисної функції від'ємні, тобто $\varphi_2(x) < 0$, а на інтервалі $[0,2]$ $\varphi_2(x) > 0$, що є причиною «кусковості» меж функціонального коридору.

В л а с т и в і с т ь 2.3. Нехай на області експерименту χ усі базисні функції $\varphi_j(\vec{x}), (j=1, \dots, m)$ у лінійно-параметричному рівнянні (1.22) є неперервними та не кусковими і жодна із них не змінює свій знак на протилежний, тоді межі коридору прогнозування (2.18) на області експерименту χ є неперервними та не кусковими функціями.

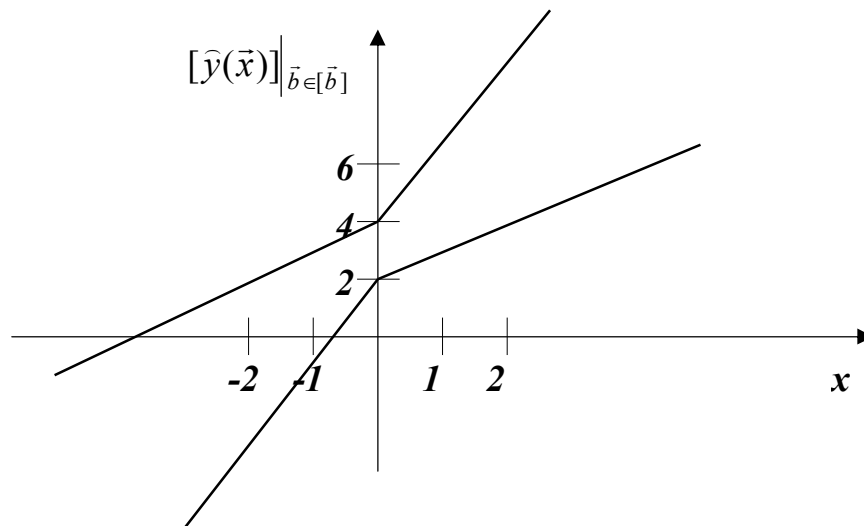


Рис. 2.3. Ілюстрація меж функціонального коридору

Властивість 2.3 у певній мірі є очевидною, оскільки за умов постійності знаків значень базисних функцій $\varphi_j(\vec{x}), (j=1, \dots, m)$ на області експерименту χ , вибір значень b_j^{\min}, b_j^{\max} з виразу (2.17) не залежить від зміни значень компонент вектора входів $\vec{x} \in \chi$, відповідно у виразі (2.18) для обчислення коридору прогнозування значення b_j^{\min} та b_j^{\max} є постійними.

Для поліноміальних моделей зміна знаків значень базисних функцій пов'язана із їх «проходженням» через нульову точку $\vec{x}_0 = (0, \dots, 0)^T$. Шляхом нормування змінних \vec{x} центр \vec{x}_0 області експерименту χ можна обрати так, щоб на області експерименту задовольнити умову властивості 2.3. У цьому випадку функції меж коридору прогнозування (2.18) набудуть вигляду неперервних та некусових функцій.

Однак таке нормування не завжди є зручним для задач активної ідентифікації інтервальних моделей. Переважно для цих задач нормування проводять у такий спосіб, щоб центр \vec{x}_0 області експерименту саме співпадав із нульовою точкою $\vec{x}_0 = (0, \dots, 0)^T$ [48].

Тепер перейдемо до аналізу виразу для обчислення похибки прогнозування. Похибку прогнозування обчислюють як різницю меж коридору (2.18):

$$\Delta_{\hat{y}(\vec{x})} \Big|_{\vec{b} \in [\vec{b}]} = \sum_{j=1}^m \varphi_j(\vec{x}) \cdot b_j^{\max} - \sum_{j=1}^m \varphi_j(\vec{x}) \cdot b_j^{\min}. \quad (2.19)$$

Із урахуванням позначень (2.17), вираз (2.19) для обчислення похибки прогнозування перепишемо так:

$$\Delta_{\hat{y}(\vec{x})} \Big|_{\vec{b} \in [\vec{b}]} = \left| \vec{\varphi}^T(\vec{x}) \right| \cdot (\vec{b}^+ - \vec{b}^-), \quad (2.20)$$

де $\left| \vec{\varphi}^T(\vec{x}) \right|$ – означає вектор абсолютних значень базисних функцій у фіксованій точці \vec{x} ;

\vec{b}^+ , \vec{b}^- – вектори, компонентами яких є b_j^+ та b_j^- , відповідно.

Як видно, у випадку збільшення розмірів області локалізації Π^+ збільшується різниця між компонентами b_j^+ та b_j^- , відповідно – зростає значення похибки прогнозування.

Для спрощення виразу (2.18) врахуємо, що область Π^+ є симетричною відносно центру

$$\vec{b} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{b}^+ + \vec{b}^-).$$

Тоді вираз (2.18) для визначення коридору інтервальних моделей набуде такого вигляду:

$$[\hat{y}(\vec{x})] \Big|_{\vec{b} \in [\vec{b}]} = \left[\vec{\varphi}^T(\vec{x}) \cdot \vec{b} - \frac{1}{2} \cdot \Delta_{\hat{y}(\vec{x})} \Big|_{\vec{b} \in [\vec{b}]} ; \vec{\varphi}^T(\vec{x}) \cdot \vec{b} + \frac{1}{2} \cdot \Delta_{\hat{y}(\vec{x})} \Big|_{\vec{b} \in [\vec{b}]} \right].$$

Розглянемо тепер співвідношення між похибкою прогнозування, заданою виразом (2.20) та похибкою $\Delta_{\hat{y}(\vec{x})}$ для інтервальної моделі при $\vec{b} \in \Omega$, тобто коли її обчислюють як різницю меж коридору (1.27) [40].

У силу виконання включення (2.15), яке для лінійно-параметричних функцій $\hat{y}(\vec{x})$ набуває вигляду рівняння, а також існування монотонності включення інтервальних обчислень, справджується така нерівність:

$$\Delta_{\hat{y}(\vec{x})} \leq \Delta_{\hat{y}(\vec{x})} \Big|_{\vec{b} \in [\vec{b}]} \quad \forall \vec{x} \in \mathcal{X}. \quad (2.21)$$

Дійсно, оскільки $\vec{b} \in \Omega$, а $\Omega \subseteq \Pi^+$, то оцінка $[\hat{y}(\vec{x}, [\vec{b}])]$ (у силу монотонності включення інтервальних обчислень) включає коридор $[\hat{y}(\vec{x})]$. Рівняння (2.15) у цьому випадку забезпечує істинність включення:

$$[\hat{y}(\vec{x})] \subseteq [\hat{y}(\vec{x})] \Big|_{\vec{b} \in [\vec{b}]}.$$

Звідси витікає істинність нерівності (2.21).

Отже, нерівність (2.21) показує, що значення похибки прогнозування інтервальної моделі з параметрами, що належать області розв'язків системи (1.24)

($\vec{b} \in \Omega$), у будь-якій точці області χ експерименту є меншим або дорівнює значенню похибки прогнозування інтервальної моделі при інтервальній локалізації вектора її параметрів \vec{b} .

У пункті 1.4.1 показано, що для лінійної інтервальної моделі ($\vec{\varphi}^T(\vec{x}) = (x_1, x_2, \dots, x_m)^T$) значення похибки $\Delta_{\hat{y}(\vec{x})}$ пропорційне відстані від центру області експерименту χ , а її максимальне значення досягається на межі області χ . Із формули (2.20) витікає, що дана властивість справджується для інтервальних моделей із інтервальними параметрами $\vec{b} \in [\vec{b}]$, у яких усі базисні функції $\varphi_j(\vec{x})$ ($j = 1, \dots, m$) є монотонно зростаючими по модулю, коли відстань від центру \vec{x}_0 експерименту збільшувати у будь-якому напрямку. Якщо про нормувати незалежні змінні x_1, \dots, x_n так, щоб центр експерименту збігався з нульовою точкою $\vec{x}_0 = (0, \dots, 0)^T$, то розглянута властивість стає справедливою для поліноміальних моделей.

Для інтервальних моделей із інтервальними оцінками параметрів і з базисними функціями, які не відповідають розглянутій властивості, картина зміни похибки прогнозування на області експерименту як і у випадку інтервальних моделей при $\vec{b} \in \Omega$, може бути достатньо складною. Для підтвердження цього факту розглянемо графік залежності похибки прогнозування від вхідних змінних для інтервальних моделей з коридору:

$$[\hat{y}(x_1, x_2)] = [4;3] \cdot x_1 + [1;3,5] \cdot \sin(x_2) + [1;2] \cdot x_2^2 + [-2;3] \cdot \cos(x_2).$$

На рис. 2.4 наведена функція похибки прогнозування, яку отримано для інтервальних моделей розглянутого коридору. Як видно, функція похибки прогнозування є кусково-неперервною, а наявність у моделі періодичних базисних функцій суттєво ускладнює картину зміни похибки прогнозування.

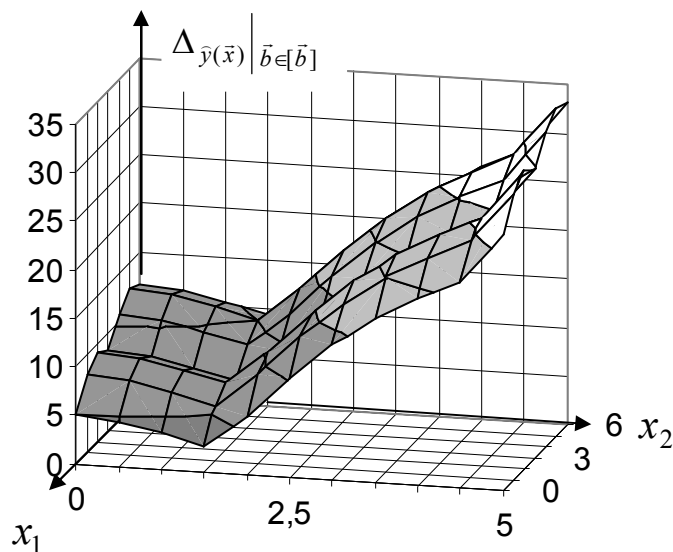


Рис. 2.4. Ілюстрація залежності похибки прогнозування інтервальної моделі з періодичними базисними функціями

Отже, проведений порівняльний аналіз дає можливість зробити висновок, що за умови локалізації параметрів \vec{b} у вигляді інтервального вектора $[\vec{b}]$, у загальному випадку значення похибки прогнозування отриманих інтервальних моделей зростає, а межі функціонального коридору прогнозування (2.18) залишаються кусковими функціями. Виграш при цьому у порівнянні із інтервальними моделями (2.14), полягає у суттєвому зниженні обчислювальної складності оперування моделлю, а для інтервальних моделей, які задовольняють умовам властивості 2.3 – у гладкості функцій меж коридору прогнозування.

2.4. Властивості інтервальних моделей статичних систем у випадку локалізації області параметрів еліпсоїдом

Розглянемо випадок, коли навколо області параметрів Ω інтервальних моделей, заданої системою (1.24), отримана його оптимальна еліпсоїдна оцінка Q_m [51]. Під оптимальною у даному випадку будемо розуміти оцінку

$$Q_m = \{ \vec{b} \in R^m \mid (\vec{b} - \vec{\bar{b}})^T \cdot H \cdot (\vec{b} - \vec{\bar{b}}) = \gamma \}, \quad (2.22)$$

яка у просторі параметрів \vec{b} моделі є m -вимірним еліпсоїдом із мінімальним об'ємом і справджується таке включення:

$$\Omega \subseteq Q_m. \quad (2.23)$$

Як і у випадку інтервальної локалізації параметрів, для побудови моделей статичних систем із застосуванням методів локалізації множини параметрів еліпсоїдними множинами, важливим є вивчення властивостей отриманого коридору прогнозування для цього випадку [51].

Коридор прогнозування $[\hat{y}(\vec{x})]_{\vec{b} \in Q_m}$ у випадку локалізації множини Ω параметрів інтервальної моделі багатовимірним еліпсоїдом (2.22) називатимемо наближеним представленням коридору прогнозування (1.27). Властивості цього наближення розглянуто у праці [51].

Враховуючи симетричність еліпсоїда (2.22), коридор прогнозування матиме такий вигляд:

$$[\hat{y}(\vec{x})]_{\vec{b} \in Q_m} = [\vec{\varphi}^T(\vec{x}) \cdot \vec{\bar{b}} - \frac{1}{2} \cdot \Delta_{\hat{y}(\vec{x})} \Big|_{\vec{b} \in Q_m}; \vec{\varphi}^T(\vec{x}) \cdot \vec{\bar{b}} + \frac{1}{2} \cdot \Delta_{\hat{y}(\vec{x})} \Big|_{\vec{b} \in Q_m}], \quad (2.24)$$

де $\Delta_{\hat{y}(\vec{x})} \Big|_{\vec{b} \in Q_m}$ – похибка прогнозування.

Користуючись формулою (1.51), із урахуванням заміни $F^T \cdot E^{-2} \cdot F = H$ та $m = \gamma$, отримаємо такий вираз для похибки прогнозування:

$$\Delta_{y(\bar{x})} \Big|_{\bar{b} \in Q_m} = 2 \cdot \sqrt{\bar{\varphi}^T(\bar{x}) \cdot H^{-1} \cdot \bar{\varphi}(\bar{x}) \cdot \gamma}. \quad (2.25)$$

Як бачимо з виразів (2.24) та (2.25), функція похибки прогнозування та функції меж коридору прогнозування для даного випадку є неперервними та не кусковими, що забезпечує низьку обчислювальну складність оперування моделлю, тобто розрахунок інтервалу прогнозування у заданій точці області експерименту. Ця властивість є достатньо вагомою на користь застосування еліпсоїдних методів локалізації.

Як і у випадку інтервальної локалізації множини параметрів, похибка прогнозування при локалізації еліпсоїдом $\Delta_{\hat{y}(\bar{x})} \Big|_{\bar{b} \in Q_m}$ не менша (переважно більша) від похибки прогнозування $\Delta_{\hat{y}(\bar{x})}$ на усій області експерименту, тобто

$$\Delta_{\hat{y}(\bar{x})} \Big|_{\bar{b} \in Q_m} \geq \Delta_{\hat{y}(\bar{x})}, \quad \forall \bar{x} \in \chi.$$

Цей факт витікає із включення (2.23) та лінійності за параметрами інтервальної моделі (2.14).

Для вибору кращого, з точки зору точності, методу (інтервальної чи еліпсоїдної) локалізації множини Ω , важливим є встановлення співвідношень між похибками прогнозування інтервальних моделей, які забезпечують відповідні методи локалізації. У випадку лінійно-параметричної інтервальної моделі ці співвідношення будуть визначатися співвідношеннями між розмірами багатовимірного локалізаційного еліпсоїда Q_m та локалізаційного прямокутного паралелепіпеда Π^+ . Зокрема, для включення $\Pi^+ \subseteq Q_m$ справджується така нерівність:

$$\Delta_{\hat{y}(\bar{x})} \Big|_{\bar{b} \in Q_m} \leq \Delta_{\hat{y}(\bar{x})} \Big|_{\bar{b} \in [\bar{b}]}, \quad \forall \bar{x} \in \chi.$$

Навпаки, із включення $\Pi^+ \supseteq Q_m$ витікає нерівність

$$\Delta_{\hat{y}(\bar{x})} \Big|_{\bar{b} \in Q_m} \geq \Delta_{\hat{y}(\bar{x})} \Big|_{\bar{b} \in [\bar{b}]}, \quad \forall \bar{x} \in \chi.$$

Однак на практиці апріорі не відомо, яке включення буде отримано у результаті локалізації. Одночасне застосування інтервальної та еліпсоїдної локалізацій області Ω з метою визначення кращого способу, є не раціональним з обчислювальної точки зору. Розглянемо підходи, які з мінімальними обчислювальними витратами дають можливість обрати кращі із існуючих методів локалізації за критерієм мінімізації похибки прогнозування [51].

Як відомо, інтервальну локалізацію на відміну від еліпсоїдної не раціонально застосовувати, коли область Ω виявляється «втягнутою», у напрямку, що не співпадає з напрямком жодної із осей координат, тобто, коли довжина її однієї діагоналі значно перевищує довжини інших. Оскільки для насиченого експерименту ($N=m$) при постійній чи відомій інтервальній похибці спостере-

жень $\Delta(\vec{x})$ довжини усіх діагоналей паралелотопа Ω_m однозначно визначає матриця плану експерименту F_m , то у цьому випадку проблема вибору кращого методу локалізації розв'язується шляхом оцінки відношення довжин максимальної (див. формулу (1.45) для I_E -критерію) та мінімальної діагоналі.

Подібний підхід можна також застосувати при постійній інтервальній похибці $\Delta(\vec{x}) = \text{const}$ для загального випадку, коли $N > m$. Спочатку із системи рівнянь (1.25) необхідно вибрати насичений блок із m рівнянь, який задаємо матрицею F_m ($m \times m$). Зауважимо, що матрицю F_m слід формувати із умови мінімізації довжини максимальної діагоналі паралелотопа Ω_m , побудованого на основі відповідного насиченого блоку. З цією метою слід розв'язати задачу (1.47) на множині N інтервальних даних. Якщо довжина найдовшої діагоналі паралелотопа Ω_m у декілька разів перевищує довжину найкоротшої діагоналі, то скоріше всього множина Ω виявиться сильно витягнутою. У цьому випадку слід застосовувати метод еліпсоїдної локалізації параметрів інтервальної моделі, який уможливить зменшення похибки прогнозування для цієї моделі. Коли ж виявиться, що відношення довжин діагоналей близьке до 1, то переваги методу локалізації встановити не можливо, оскільки при «відсіченні» області Ω_m смугами, заданими інтервальними рівняннями, які залишились у системі після вибору насиченого блоку, результуюча область Ω може бути витягнутою.

Для практичної ілюстрації співвідношень між похибками прогнозування $\Delta_{\hat{y}(\vec{x})} \Big|_{\vec{b} \in [\vec{b}]}$ та $\Delta_{\hat{y}(\vec{x})} \Big|_{\vec{b} \in Q_m}$, отриманими у випадках інтервальної та еліпсоїдної локалізації, відповідно, скористаємося даними таблиці 2.1 і розглянемо локалізацію області параметрів b_1, b_2, b_3 такої залежності [51]:

$$y(\vec{x}) = 1 + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_1 \cdot x_2 + b_3 \cdot x_1^2 x_2.$$

Локалізаційний прямокутний паралелепіпед Π^+ розраховували за допомогою програми INTERDAT [29], а оптимальний локалізаційний еліпсоїд засобами ППП MATLAB [144, 145], згідно з алгоритмом, наведеним у праці [23].

У результаті для даних таблиці 2.1 отримали, відповідно:

$$\Pi^+ = \{ \vec{b} \in R^3 \mid 0,145 \leq b_1 \leq 0,247; -0,431 \leq b_2 \leq -0,382; 0,387 \leq b_3 \leq 0,531 \},$$

$$Q_{m=3} = \{ \vec{b} \in R^3 \mid (\vec{b} - \vec{\bar{b}})^T \cdot H \cdot (\vec{b} - \vec{\bar{b}}) = 1 \},$$

де $\vec{\bar{b}} = (0,194; -0,406; 0,451)^T$;

$$H = \begin{pmatrix} 1183,13 & 2232,51 & 1042,18 \\ 2232,51 & 6430,04 & 2918,72 \\ 1042,18 & 2918,72 & 1370,47 \end{pmatrix}.$$

Отримані локалізаційний прямокутний паралелепіпед Π^+ та еліпсоїд Q_m наведені на рис. 2.5.

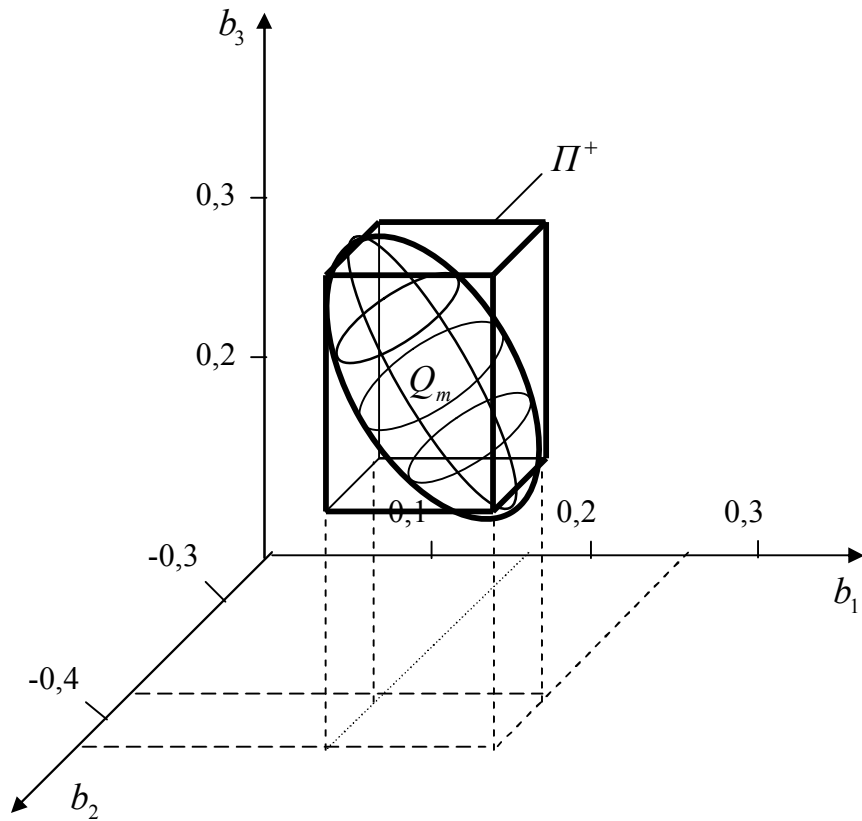


Рис. 2.5. Локалізаційний прямокутний паралелепіпед Π^+ та еліпсоїд $Q_{m=3}$

Як бачимо, розміри еліпсоїда є суттєво меншими від розмірів прямокутного паралелепіпеда. Їхні об'єми, відповідно, дорівнюють: $0,39 \cdot 10^{-3}$ та $0,72 \cdot 10^{-3}$.

Коридор прогнозування для заданої залежності у випадку інтервальної локалізації її параметрів матиме такий вигляд:

$$[\hat{y}(\bar{x})]_{\bar{b} \in [\bar{b}]} = 1 + [0,145; 0,247] \cdot x_1 + [-0,431; -0,382] \cdot x_1 \cdot x_2 + [0,387; 0,531] \cdot x_1^2 \cdot x_2.$$

Для випадку еліпсоїдної локалізації – відповідно:

$$[\hat{y}(\bar{x})]_{\bar{b} \in Q_{m=3}} = [1 + 0,194 \cdot x_1 - 0,406 \cdot x_1 \cdot x_2 + 0,451 \cdot x_1^2 \cdot x_2 \pm 0,5 \cdot \Delta_{\hat{y}(\bar{x})} \Big|_{\bar{b} \in Q_{m=3}}],$$

$$\text{де } \Delta_{\hat{y}(\bar{x})} \Big|_{\bar{b} \in Q_{m=3}} = 2 \cdot \sqrt{(x_1, x_1 \cdot x_2, x_1^2 \cdot x_2)^T \cdot H^{-1} \cdot (x_1, x_1 \cdot x_2, x_1^2 \cdot x_2)}.$$

На рис. 2.6 а), б) наведені відповідні графіки функцій похибок прогнозування $\Delta_{\hat{y}(\bar{x})} \Big|_{\bar{b} \in [\bar{b}]}$ та $\Delta_{\hat{y}(\bar{x})} \Big|_{\bar{b} \in Q_m}$. Порівнюючи ці рисунки, бачимо, що майже на усій області експерименту (таблиці 2.1) справджується є нерівність:

$$\Delta_{\hat{y}(\bar{x})} \Big|_{\bar{b} \in Q_{m=3}} < \Delta_{\hat{y}(\bar{x})} \Big|_{\bar{b} \in [\bar{b}]},$$

що засвідчує перевагу застосування для даного прикладу методу еліпсоїдної локалізації. Зауважимо, що цю перевагу можна встановити за співвідношенням

довжин найдовшої та найкоротшої діагоналей області $\Omega_{m=3}$, побудованої на основі інтервальних даних трьох точок ($m=3$), вибраних із таблиці 2.1 у такий спосіб, щоб мінімізувати довжину її найдовшої діагоналі (рис. 2.7).

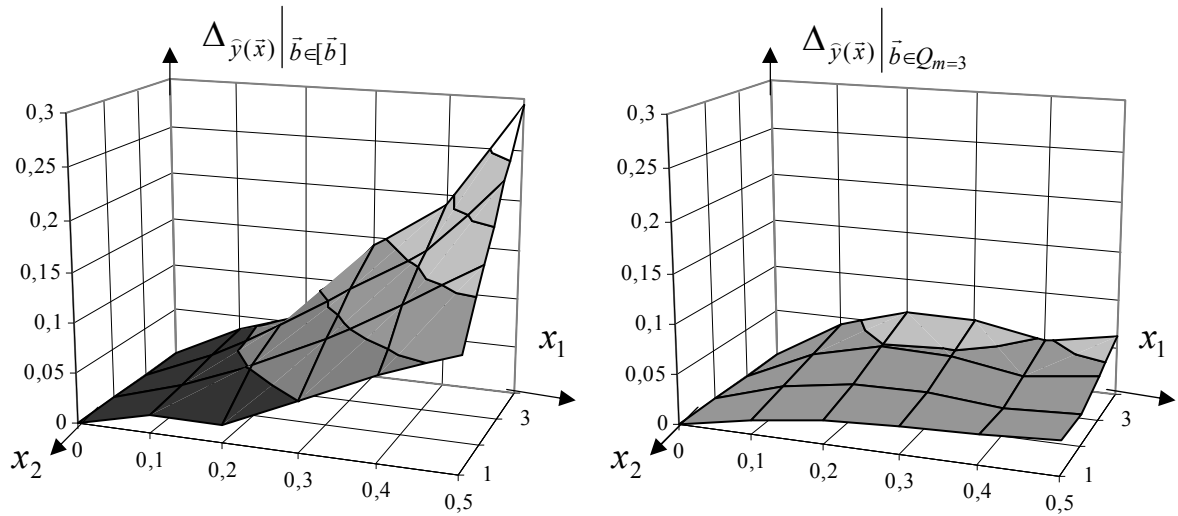


Рис. 2.6. Графіки функцій похибок прогнозування:

а) $\Delta_{\hat{y}(\bar{x})} |_{\bar{b} \in [\bar{b}]}$; б) $\Delta_{\hat{y}(\bar{x})} |_{\bar{b} \in Q_m}$.

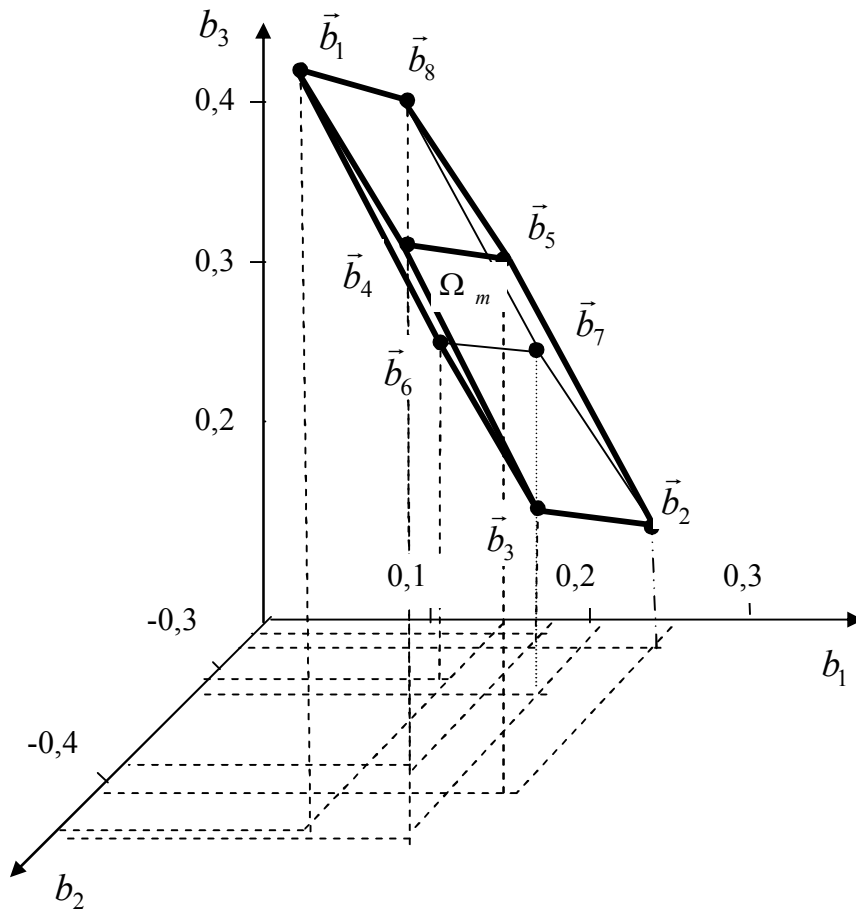


Рис. 2.7. Область параметрів (паралелотоп) $\Omega_{m=3}$

Побудована область (паралелотоп) $\Omega_{m=3}$ зображена на рис. 2.7.

Для її побудови були використані інтервальні дані таблиці 2.1 у точках №4, №14 та №15.

Найбільшу довжину $l=0,4405$ мають діагоналі області $\Omega_{m=3}$ між вершинами \vec{b}_1, \vec{b}_2 та \vec{b}_3, \vec{b}_8 (див. рис.2.7). Найкоротша діагональ між вершинами \vec{b}_4 та \vec{b}_7 . Її довжина дорівнює 0,1284. Довжина діагоналі між вершинами \vec{b}_5, \vec{b}_6 дорівнює 0,1911. Відношення довжини найдовшої до довжини найкоротшої діагоналі дорівнює 3,43. Отже, область $\Omega_{m=3}$ є сильно витягнутою. Слід також зауважити, що об'єм побудованого паралелотопа $\Omega_{m=3}$ дорівнює $0,6 \cdot 10^{-3}$, що у 1,2 разів менше від об'єму прямокутного локалізаційного паралелепіпеда Π^+ , побудованого на основі усіх даних таблиці 2.1.

Наведені результати засвідчують перевагу еліпсоїдної локалізації за критерієм точності, а запропонована (на основі певним чином сформованого насиченого блоку системи інтервальних рівнянь) ознака переваги при виборі методу локалізації у даному випадку є ефективною.

Оскільки розглядається оптимальна локалізація еліпсоїдом, то на його поверхні завжди знайдуться точки, які співпадають із вершинами многогранника Ω .

За цих умов на області χ експерименту є точки \vec{x}^o , для яких справджуються рівняння:

$$\hat{y}^+(\vec{x}^o) \Big|_{\vec{b} \in Q_m} = \hat{y}^+(\vec{x}^o), \text{ або } \hat{y}^-(\vec{x}^o) \Big|_{\vec{b} \in Q_m} = \hat{y}^-(\vec{x}^o), \quad (2.26)$$

де $\hat{y}^+(\vec{x}^o) \Big|_{\vec{b} \in Q_m}, \hat{y}^-(\vec{x}^o) \Big|_{\vec{b} \in Q_m}$ – відповідно, верхня та нижня межі коридору прогнозування в точках \vec{x}^o у випадку наближення оптимальним еліпсоїдом;

$\hat{y}^+(\vec{x}^o), \hat{y}^-(\vec{x}^o)$ – відповідно, верхня та нижня межі коридору (1.27) у точках \vec{x}^o .

Спочатку визначимо умови для знаходження точок \vec{x}^o у разі насиченого експерименту [51].

Перепишемо умови (2.26) в еквівалентному вигляді із урахуванням співпадання центрів симетрії паралелотопа Ω_m та еліпсоїда Q_m , заданого для випадку насиченого експерименту формулою (1.50). Тоді істинність цих умов є еквівалентною істинності такого рівняння:

$$\Delta_{y(\vec{x}^o)} \Big|_{\vec{b} \in Q_m} = \Delta_{y(\vec{x}^o)} \quad (2.27)$$

Т в е р д ж е н н я 2.1. Рівняння (2.27) має розв'язки \vec{x}^o якщо існує хоча б один такий вектор значень базисних функцій:

$$\vec{\varphi}_s(\vec{x}^o) = 2 \cdot c \cdot F^T \cdot \vec{\delta}_s, s = 1, \dots, 2^m, \quad (2.28)$$

де $\vec{\delta}_s^T$ – вектори, компонентами яких є обернені значення відповідних інтервальних похибок Δ_i спостережень із додатними або від’ємними знаками; c – константа.

Нехай область експерименту χ містить точки \vec{x}^o у яких завжди можна побудувати хоча б один із векторів $\vec{\varphi}_s(\vec{x}^o), s=1, \dots, 2^m$, обчислений за виразом (2.28). Покажемо, що ці точки задовольняють рівняння (2.27).

Із урахуванням симетричності області Ω_m для насиченого експерименту, праву частину рівняння (2.27) перепишемо так:

$$\Delta_{y(\vec{x})} = 2 \cdot \max_{\vec{b}_s \in \Omega} (\vec{\varphi}^T(\vec{x}) \cdot (\vec{b}_s - \vec{\bar{b}})).$$

Ліва частина рівняння (2.27) отримана із виразу (1.51):

$$\Delta_{y(\vec{x})} \Big|_{\vec{b} \in Q_m} = 2 \cdot \max_{\vec{b} \in Q_m} (\vec{\varphi}^T(\vec{x}) \cdot (\vec{b} - \vec{\bar{b}})).$$

Тоді рівняння (2.27) перепишемо у такому еквівалентному вигляді:

$$2 \cdot \max_{\vec{b}_s \in \Omega} (\vec{\varphi}^T(\vec{x}) \cdot (\vec{b}_s - \vec{\bar{b}})) = 2 \cdot \max_{\vec{b} \in Q_m} (\vec{\varphi}^T(\vec{x}) \cdot (\vec{b} - \vec{\bar{b}})). \quad (2.29)$$

Підставимо у вираз (2.29) замість \vec{b} вершини \vec{b}_s області Ω_m , які згідно з лемою 1 праці [31] одночасно належать поверхні еліпсоїда Q_m . Тоді максимальне значення скалярного добутку $\vec{\varphi}^T(\vec{x}) \cdot (\vec{b}_s - \vec{\bar{b}})$ у лівій та правій частині рівняння (2.29), забезпечується вектором $\vec{\varphi}(\vec{x})$, який є нормаллю дотичної площини до еліпсоїда у точці \vec{b}_s . Позначимо за $\vec{\varphi}_s(\vec{x}^o)$, цей вектор, побудований для заданої вершини \vec{b}_s , у точках \vec{x}^o на області експерименту. Отже, точки \vec{x}^o є розв’язками рівняння (2.29) для фіксованих \vec{b}_s , якщо:

$$\vec{\varphi}_s(\vec{x}^o) = c \cdot \vec{n}_s, s=1, \dots, 2^m, \quad (2.30)$$

де $\vec{n}_s, s=1, \dots, 2^m$ – вектори-нормалі площин дотичних до еліпсоїда у відповідних вершинах \vec{b}_s .

Тепер покажемо еквівалентність виразів (2.28) та (2.30). З цією метою знайдемо нормалі $\vec{n}_s, s=1, \dots, 2^m$. Користуючись рівнянням еліпсоїда (1.50), отримаємо:

$$\vec{n}_s = \frac{\partial((\vec{b} - \vec{\bar{b}})^T \cdot (F^T \cdot E^{-2} \cdot F) \cdot (\vec{b} - \vec{\bar{b}}))}{\partial \vec{b}} \Big|_{\vec{b}=\vec{b}_s} = 2 \cdot F^T \cdot E^{-2} \cdot F \cdot (\vec{b}_s - \vec{\bar{b}}), s=1, \dots, 2^m. \quad (2.31)$$

Замінімо у формулі (2.31) \vec{b}_s , \vec{b} відповідними виразами для їх обчислення (1.31), (1.32) та із урахуванням, що матриця E є діагональною матрицею інтервальних похибок $\Delta_i, i = 1, \dots, m$ спостережень, отримаємо:

$$\vec{n}_s = 2 \cdot F^T \cdot \vec{\delta}_s, s = 1, \dots, 2^m.$$

Підставляючи отриманий вираз у формулу (2.30), бачимо еквівалентність виразу (2.30) та (2.28).

Отже, якщо у вибраному базисі $\vec{\varphi}(\vec{x})$, на заданій області насиченого експерименту χ знайдуться точки \vec{x}^o , у яких можна побудувати хоча б один вектор $\vec{\varphi}_s(\vec{x}^o), s = 1, \dots, 2^m$ (2.28), то у цих точках похибки прогнозування $\Delta_{y(\vec{x})} \Big|_{\vec{b} \in Q_m}$ і $\Delta_{y(\vec{x})}$ співпадають.

Очевидно, що твердження 2.1 завжди справджується для лінійних за входами інтервальних моделей ($\vec{\varphi}(\vec{x}) = \vec{x} = (1, x_1, x_2, \dots, x_{m-1})^T$), коли $\vec{x} \in R^m$.

По аналогії до вище розглянутого, із урахуванням формули (2.22) для оптимального еліпсоїда, сформуємо умови для визначення точок \vec{x}^o , що задовольняють рівняння (2.26) у випадку $N > m$.

Т в е р д ж е н н я 2.2. Рівняння (2.26) мають розв'язки \vec{x}^o , якщо існують, відповідно, такі вектори значень базисних функцій $\vec{\varphi}_s(\vec{x}^o), s = 1, \dots, S$, що:

$$\vec{\varphi}_s(\vec{x}^o) = 2 \cdot c \cdot H \cdot (\vec{b}_s - \vec{b}),$$

де S – загальна кількість вершин многогранника Ω , які одночасно належать поверхні еліпсоїда (2.22);

\vec{b} – задає центр симетрії еліпсоїда, який у загальному випадку не співпадає із центром ваги многогранника Ω .

Із розглянутих тверджень витікає: якщо на області експерименту існують такі точки \vec{x}^o , які задовольняють умовам твердження 2.1 – для випадку насиченого експерименту чи умовам твердження 2.2 – для загального випадку $N > m$, то у цих точках досягається найточніше наближення (2.24) меж коридору прогнозування (1.27).

Висновки до розділу

Підсумуємо основні результати, наведені у цьому розділі.

Отже, показана еквівалентність задачі наближення таблично заданих функцій та задачі побудови інтервальних моделей статичних систем у випадку невідомої структури лінійно-параметричної функції. Це дало можливість на основі єдиного інтервального підходу запропонувати метод синтезу оптимальної структури моделі при аналізі інтервальних даних та наближення складних моделей простішими із заданою точністю.

Для оцінки переваги того чи іншого методу локалізації параметрів інтервальних моделей статичних систем розглянуто систематизований підхід до аналізу властивостей цих моделей, побудований на таких критеріях: максимізація точності та забезпечення заданих прогностичних властивостей моделі (безвідносно до задачі моделювання), які формально представлені шириною коридору (похибкою) прогнозування, або його середньою чи максимальною шириною на області експерименту; можливість представлення функцій, що задають межі коридору в аналітичному вигляді; мінімізація обчислювальних витрат на отримання гарантованого інтервалу прогнозування та його ширини для вихідної змінної, коли задано набір значень вхідних змінних. Застосування зазначеного підходу та критеріїв дало можливість отримати емпіричну ознаку «переваги» при порівнянні інтервального і еліпсоїдного методів локалізації і встановити такі властивості інтервальних моделей статичних систем:

- за умови локалізації параметрів \vec{b} інтервальної моделі у вигляді інтервального вектора $[\vec{b}]$, у загальному випадку значення похибки прогнозування збільшується, а межі функціонального коридору прогнозування у просторі експерименту залишаються кусковими функціями;

- виграш для інтервальної локалізації полягає у зменшенні обчислювальних витрат при розрахунках інтервальних значень виходу \hat{y} у фіксованих точках, а для інтервальних моделей, які задовольняють умовам істинності властивості 2.3 – у гладкості меж функціонального коридору прогнозування;

- у випадку локалізації багатовимірним еліпсоїдом параметрів інтервальної моделі, межі її коридору прогнозування є неперервними та некусковими функціями, що забезпечує розрахунок інтервалу прогнозування у заданій точці області експерименту із меншими обчислювальними витратами, аніж для загального випадку, а істинність тверджень 2.1 та 2.2 уможливує знаходження точок найточнішого наближення цих меж;

- вираз (2.11) дає можливість зменшити обчислювальні витрати для розрахунку похибки прогнозування у випадку насиченого експерименту, на основі властивості 2.1 є можливість знайти її мінімальне значення, а для лінійної інтервальної моделі на многогранній області експерименту – максимальне, що свідчить про необхідність побудови локалізаційного методу на базі насиченого експерименту.

РОЗДІЛ 3

ЛОКАЛІЗАЦІЯ МНОЖИНИ ПАРАМЕТРІВ ІНТЕРВАЛЬНИХ МОДЕЛЕЙ СТАТИЧНИХ СИСТЕМ

Проблеми побудови інтервальних моделей пов'язані із розв'язуванням системи інтервальних рівнянь (1.24). При значній кількості параметрів моделі точний розв'язок цієї системи у вигляді многогранної області отримати достатньо складно. Тому взамін знаходження точного розв'язку шукають його деяку оцінку, яка, відповідно, визначає властивості інтервальних моделей. У підрозділах 1.2 та 1.4 проведено аналіз існуючих методів гарантованого оцінювання розв'язків системи (1.24) і показана актуальність їхнього розвитку та створення нових методів. Користуючись термінологією інтервальної математики, методи гарантованого оцінювання будемо називати методами локалізації.

3.1. Інтервальна локалізація параметрів моделі на основі модифікованого симплекс-методу розв'язування задач лінійного програмування

Розглянутий у працях [29, 61] підхід до розв'язування системи (1.24) уможливорює знаходження інтервальної оцінки $[\vec{b}]$ на основі відомих обчислювальних процедур лінійного програмування. У цьому випадку для знаходження меж $[b_j^-, b_j^+]$ компонент вектора $[\vec{b}]$ необхідно розв'язувати $2 \cdot m$ задач лінійного програмування (ЛП) (1.38).

Одним із поширених методів розв'язування задач ЛП є симплекс-метод, який, зокрема, використано у відомому пакеті прикладних програм для інтервального моделювання INTERDAT [29].

Згідно з симплекс-методом [11], здійснюється послідовний перехід по вершинах опуклого многогранника Ω , утвореного системою обмежень, до тих пір поки не буде знайдено деякої «оптимальної» вершини, що забезпечує мінімум чи максимум цільової функції. У випадку розв'язування задач (1.38) процедури пошуку «оптимальних» вершин многогранника Ω , тобто таких, що забезпечують $b_j^- = \min b_j$ чи $b_j^+ = \max b_j, (j = 1, \dots, m)$, повторюють $2 \cdot m$ раз. Проте розраховані координати вершин області Ω , під час пошуку, наприклад b_{j-1}^- не враховують для знаходження b_{j-1}^+ та $b_j^-, b_j^+, j = 1, \dots, m$. Отже, стає очевидною обчислювальна надлишковість методу.

Розглянемо модифікований симплекс-метод для розв'язування задач (1.38) із урахуванням вище зроблених зауважень.

Обстеження вершин можна почати лише після визначення якоїсь із них, тобто знайшовши початковий опорний план задачі. Нагадаємо, що опорним планом задачі ЛП називають план, який визначається координатами однієї із вершин многогранника, заданого системою (1.24).

Опорний план, що перетворює у максимум чи мінімум цільову функцію, називають оптимальним. Весь алгоритм симплекс-методу поділяють на два

етапи: перший – знаходження початкового опорного плану задачі і другий – знаходження оптимального плану.

Для розв'язування задач (1.38) за допомогою симплекс-методу, їх необхідно представити у канонічній формі із урахуванням можливих варіантів різних знаків компонент вектора $\vec{b} = (b_1, \dots, b_m)^T$ [11]. З цією метою перетворимо систему із N нерівностей (1.24) та з m невідомими до системи із $2 \cdot N$ рівнянь. Це перетворення здійснюємо шляхом уведення додаткових невід'ємних змінних b_i^* , - якщо обмеження-нерівності (1.24) мають вигляд « \leq », та шляхом віднімання від лівих частин додаткової змінної, якщо обмеження-нерівності мають вигляд « \geq », а також заміною вектора \vec{b} на $\vec{b}' - \vec{b}''$, де $b' = (b'_1, \dots, b'_m)^T$, $b'' = (b''_1, \dots, b''_m)^T$.

Із урахуванням проведених перетворень система (1.24) набуває такого вигляду:

$$\begin{cases} \varphi^T(x_i) \cdot (\vec{b}' - \vec{b}'') - b_i^* = y_i^-, & i = 1, \dots, N; \\ \varphi^T(x_i) \cdot (\vec{b}' - \vec{b}'') + b_{N+i}^* = y_i^+, & i = 1, \dots, N; \\ b'_j > 0, b''_j > 0, & j = 1, \dots, m; \\ b_i^* > 0, b_{N+i}^* > 0, & i = 1, \dots, N. \end{cases} \quad (3.1)$$

Знаходження початкового опорного плану кожної із задач (1.38). За обмежень у канонічному вигляді (3.1), здійснюємо за допомогою методу штучного базису (штучного опорного плану).

З цією метою для однієї із задач (1.38) за обмежень (3.1) складемо розширену задачу у такий спосіб:

- формально до лівої частини кожного рівняння (якщо немає своєї базисної невідомої) додаємо по одній невідомій U_i ($i = 1, \dots, N$), які називають штучними базисними, і одержуємо розширену систему рівнянь;

- до розширеної системи записуємо ще штучну форму f , яка дорівнює сумі штучних базисних невідомих.

Проведені перетворення дають можливість представити задачу знаходження початкового опорного плану для розв'язування усіх задач (1.38) у такій формі [68]:

$$\begin{cases} \varphi^T(x_i) \cdot (\vec{b}' - \vec{b}'') - b_i^* + U_i = y_i^-, & i = 1, \dots, N; \\ \varphi^T(x_i) \cdot (\vec{b}' - \vec{b}'') + b_{N+i}^* = y_i^+, & i = 1, \dots, N; \\ b'_j > 0, b''_j > 0, & j = 1, \dots, m; \\ b_i^* > 0, b_{N+i}^* > 0, & i = 1, \dots, N; \\ f = U_1 + \dots + U_N \rightarrow \min; \\ U_i > 0, & i = 1, \dots, N. \end{cases} \quad (3.2)$$

Отримавши початковий опорний план із системи (3.2), тепер можемо використати його для розв'язування будь-якої із задач (1.38). Крім того, при розв'язуванні кожної із (1.38) наступної задачі ЛП за початковий опорний план можемо обрати «найкращу» (з точки зору наближення до розв'язку даної задачі) вершину многогранника Ω серед знайдених при розв'язуванні попередніх задач.

З урахуванням вищевикладеного, модифікований алгоритм симплекс-методу для побудови інтервальних моделей складається з такої послідовності кроків [68].

Крок 1. Приведення системи інтервальних рівнянь (1.24) до канонічного вигляду симплекс-методу (3.1).

Крок 2. Знаходження початкового опорного плану $\vec{b}^0 = (b_1, \dots, b_j, \dots, b_m)^T$, та відповідної до нього симплекс-таблиці однієї із задач (1.38) із розв'язку розширеної задачі (3.2).

Крок 3. Покладемо $j = 1$ – номер невідомого параметра.

Крок 4. Формування масиву $B = \{\vec{b}^k\}$ знайдених вершин (опорних планів) множини Ω та масиву відповідних матриць $A^k (m \times m)$ симплекс-таблиць $S = \{A^k\}$, шляхом додавання нових компонент.

Зауважимо, що при $j = 1$ масиви включають по одній компоненті, якими є початковий опорний план \vec{b}^0 та його таблиця.

Крок 5. Розв'язування задачі $b_j^- = \min b_j$ із обмеженнями (3.1) та з початковим опорним планом, вибраним із множини B за умовою: $\vec{b}^0 = \min_{\vec{b}^k \in B} b_j$.

Крок 6. Доповнення множин опорних планів \vec{b}^k та симплекс-таблиць A^k новими компонентами.

Крок 7. Розв'язування задачі $b_j^+ = \max b_j$ із обмеженнями (3.1). Початковий опорний план для даної задачі вибираємо із множини B за такою умовою: $\vec{b}^0 = \max_{\vec{b}^k \in B} b_j$.

Крок 8. Перевірка умови $j < m$. Якщо умова виконується, то покладемо $j = j + 1$ і перехід на крок 4. У протилежному випадку – формування інтервального вектора $[\vec{b}]$ і завершення процедури.

Для аналізу ефективності алгоритму розглянемо приклад його реалізації. Нехай необхідно побудувати інтервальну модель у такому вигляді:

$$y(\vec{x}) = b_1 \cdot \varphi_1(\vec{x}) + b_2 \cdot \varphi_2(\vec{x}).$$

І нехай вихідна система інтервальних рівнянь має такий вигляд:

$$\begin{cases} 12 \leq 2 \cdot b_1 + 4 \cdot b_2 \leq 20; \\ 12 \leq 12 \cdot b_1 + 2 \cdot b_2 \leq 48; \\ 5 \leq 2 \cdot b_1 + b_2 \leq 10. \end{cases}$$

Наведемо ці обмеження у канонічному вигляді (3.1) симплекс-методу (крок 1):

$$\begin{cases} 2 \cdot (b'_1 - b''_1) + 4 \cdot (b'_2 - b''_2) - b_1^* = 12; \\ 2 \cdot (b'_1 - b''_1) + 4 \cdot (b'_2 - b''_2) + b_4^* = 20; \\ 12 \cdot (b'_1 - b''_1) + 2 \cdot (b'_2 - b''_2) - b_2^* = 12; \\ 12 \cdot (b'_1 - b''_1) + 2 \cdot (b'_2 - b''_2) + b_5^* = 48; \\ 2 \cdot (b'_1 - b''_1) + b'_2 - b''_2 - b_3^* = 5; \\ 2 \cdot (b'_1 - b''_1) + b'_2 - b''_2 + b_6^* = 10; \\ b'_1 > 0, b''_2 > 0, b'_2 > 0, b''_1 > 0; \\ b_i^* > 0, b_{N+i}^* > 0, i = 1, \dots, 3. \end{cases}$$

Складемо розширену задачу (3.2) увівши штучні змінні і штучну форму (крок 2):

$$\begin{cases} 2 \cdot (b'_1 - b''_1) + 4 \cdot (b'_2 - b''_2) - b_1^* + U_1 = 12; \\ 2 \cdot (b'_1 - b''_1) + 4 \cdot (b'_2 - b''_2) + b_4^* = 20; \\ 12 \cdot (b'_1 - b''_1) + 2 \cdot (b'_2 - b''_2) - b_2^* + U_2 = 12; \\ 12 \cdot (b'_1 - b''_1) + 2 \cdot (b'_2 - b''_2) + b_5^* = 48; \\ 2 \cdot (b'_1 - b''_1) + b'_2 - b''_2 - b_3^* + U_3 = 5; \\ 2 \cdot (b'_1 - b''_1) + b'_2 - b''_2 + b_6^* = 10; \\ b'_1 > 0, b''_2 > 0, b'_2 > 0, b''_1 > 0, \\ b_i^* > 0, b_{N+i}^* > 0, i = 1, \dots, 3; \\ U_i > 0, i = 1, \dots, 3; \\ f = 29 - (16 \cdot (b'_1 - b''_1) + 7 \cdot (b'_2 - b''_2) - b_1^* - b_2^* - b_3^*) \rightarrow \min. \end{cases}$$

Розв'яжемо симплекс-методом задачу лінійного програмування $b_1^- = \min b_1$ із наведеними вище обмеженнями. Отримані симплекс-таблиці розміщені у таблиці 3.1.

Як бачимо із таблиці 3.1, процедура розв'язування даної задачі потребує п'ять симплекс-ітерацій, а отриманий розв'язок: $b_1^- = b'_1 = 2/11$.

Таблиця 3.1

Симплекс-таблиці задачі знаходження b_1^-

№	Базис	План	b_1'	b_1''	b_2'	b_2''	b_1^*	b_2^*	b_3^*	b_4^*	b_5^*	b_6^*
1	f	29	16	-16	7	-7	-1	-1	-1	0	0	0
	U_1	12	2	-2	4	-4	-1	0	0	0	0	0
	b_4^*	20	2	-2	4	-4	0	0	0	1	0	0
	U_2	12	12	-12	2	-2	0	-1	0	0	0	0
	b_5^*	48	12	-12	2	-2	0	0	0	0	1	0
	U_3	5	2	-2	1	-1	0	0	-1	0	0	0
	b_6^*	10	2	-2	1	-1	0	0	0	0	0	1
	b_1	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	f	13	0	0	13/3	-13/3	-1	1/3	-1	0	0	0
	U_1	10	0	0	11/3	-11/3	-1	1/6	0	0	0	0
	b_4^*	18	0	0	11/3	-11/3	0	1/6	0	1	0	0
	b_1'	1	1	-1	1/6	-1/6	0	-1/12	0	0	0	0
	b_5^*	36	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0
	U_3	3	0	0	2/3	-2/3	0	1/6	-1	0	0	0
	b_6^*	8	0	0	2/3	-2/3	0	1/6	0	0	0	1
	b_1	1	0	0	1/6	-1/6	0	-1/12	0	0	0	0
3	f	13/11	0	0	0	0	2/11	3/22	-1	0	0	0
	b_2'	30/11	0	0	1	-1	-3/11	1/22	0	0	0	0
	b_4^*	8	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0
	b_1'	6/11	1	-1	0	0	1/22	-1/11	0	0	0	0
	b_5^*	36	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0
	U_3	13/11	0	0	0	0	2/11	3/22	-1	0	0	0
	b_6^*	68/11	0	0	0	0	2/11	3/22	0	0	0	1
	b_1	6/11	0	0	0	0	1/22	-1/11	0	0	0	0

№	Базис	План	b'_1	b''_1	b'_2	b''_2	b_1^*	b_2^*	b_3^*	b_4^*	b_5^*	b_6^*
4	f	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	b'_2	9/2	0	0	1	-1	0	1/4	-3/2	0	0	0
	b_4^*	3/2	0	0	0	0	0	-3/4	11/2	1	0	0
	b'_1	1/4	1	-1	0	0	0	-1/8	1/4	0	0	0
	b_5^*	36	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0
	b_1^*	13/2	0	0	0	0	1	3/4	-11/2	0	0	0
	b_6^*	5	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
	b_1	1/4	0	0	0	0	0	-1/8	1/4	0	0	0
5	b_1	2/11	0	0	0	0	0	-1/11	0	-1/22	0	0
	b'_2	54/11	0	0	1	-1	0	1/22	0	3/11	0	0
	b_3^*	3/11	0	0	0	0	0	-3/22	1	2/11	0	0
	b'_1	2/11	1	-1	0	0	0	-1/11	0	-1/22	0	0
	b_5^*	36	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0
	b_1^*	8	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0
	b_6^*	52/11	0	0	0	0	0	3/22	0	-2/11	0	1

Користуючись даною таблицею, сформуємо множину опорних планів – векторів \vec{b}^k із компонентами $b'_1, b''_1, b'_2, b''_2, b_1^*, b_2^*, b_3^*, b_4^*, b_5^*, b_6^*$ (крок 6): $B = \{\vec{b}^1 = (1/4, 0, 9/2, 0, 13/2, 0, 0, 3/2, 36, 5); \vec{b}^2 = (2/11, 0, 54/11, 0, 8, 0, 3/11, 0, 36, 52/11)\}$.

Тепер знайдемо оптимальний план для задачі $b_1^+ = \max b_1$, яку розв'язуватимемо для тих самих обмежень, що і попередня задача ЛП.

Однак для цієї задачі початковий опорний план знайдемо, аналізуючи компоненти множини опорних планів B (крок 7). У результаті отримаємо: $\vec{b}^0 = \max_{\vec{b}^k \in B} b_1 = (1/4, 0, 9/2, 0, 13/2, 0, 0, 3/2, 36, 5)$.

Розв'яжемо дану задачу симплекс-методом із урахуванням знайденого опорного плану. Симплекс-таблиці процедури розв'язування наведені нижче.

Симплекс-таблиці задачі знаходження b_1^+

№	Базис	План	b'_1	b''_1	b'_2	b''_2	b_1^*	b_2^*	b_3^*	b_4^*	b_5^*	b_6^*
1	b_1	1/4	0	0	0	0	0	-1/8	1/4	0	0	0
	b'_2	9/2	0	0	1	-1	0	1/4	-3/2	0	0	0
	b_4^*	3/2	0	0	0	0	0	-3/4	11/2	1	0	0
	b'_1	1/4	1	-1	0	0	0	-1/8	1/4	0	0	0
	b_5^*	36	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0
	b_1^*	13/2	0	0	0	0	1	3/4	-11/2	0	0	0
	b_6^*	5	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
2	b_1	4/3	0	0	0	0	1/6	0	-2/3	0	0	0
	b'_2	7/3	0	0	1	-1	-1/3	0	1/3	0	0	0
	b_4^*	8	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0
	b'_1	4/3	1	-1	0	0	1/6	0	-2/3	0	0	0
	b_5^*	82/3	0	0	0	0	-4/3	0	22/3	0	1	0
	b_2^*	26/3	0	0	0	0	4/3	1	-22/3	0	0	0
	b_6^*	5	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
3	b_1	42/11	0	0	0	0	1/22	0	0	0	1/11	0
	b'_2	12/11	0	0	1	-1	-3/11	0	0	0	-1/22	0
	b_4^*	8	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0
	b'_1	42/11	1	-1	0	0	1/22	0	0	0	1/11	0
	b_3^*	41/11	0	0	0	0	-2/11	0	1	0	3/22	0
	b_2^*	159	0	0	0	0	6	1	0	0	1	0
	b_6^*	14/11	0	0	0	0	2/11	0	0	0	3/22	1

Як видно із таблиці 3.2, за умови відомого опорного плану кількість симплекс-ітерацій зменшується, а розв'язок задачі є таким: $b_1^+ = b'_1 = 42/11$.

Перевіримо умову $j < m$ (крок 8). Для цього випадку вона виконується, оскільки $j = 1$, а $m = 2$. Тоді покладемо $j = j + 1$ і переходимо на крок 4.

Доповнюємо множину B опорними планами $\vec{b}^3 = (4/3, 0, 7/3, 0, 0, 26/3, 0, 8, 82/3, 5)$ та $\vec{b}^4 = (42/11, 0, 12/11, 0, 0, 159, 41/11, 8, 0, 14/11)$ (крок 4).

Розв'язуємо задачу $b_2^- = \min b_2$ (крок 5). Для цього спочатку із множини B за умовою $\vec{b}^0 = \min_{\vec{b}^k \in B} b_2$ оберемо найкращий початковий опорний план. Опорним

виявився такий план: $\vec{b}^0 = (42/11, 0, 12/11, 0, 0, 159, 41/11, 8, 0, 14/11)$. Аналізуючи цей план приходимо, що для даної задачі він є оптимальним. Отже, отриманий розв'язок задачі ЛП : $b_2^- = 12/11$.

Оскільки при знаходженні значення b_2^- додаткових опорних планів не виявлено, то переходимо на крок 8.

Використовуючи множину опорних планів, знайдемо початковий опорний план для задачі $b_2^+ = \max b_2$. Найкращим опорним виявився такий план: $\vec{b}^0 = \max_{\vec{b}^k \in B} b_2 = (2/11, 0, 54/11, 0, 8, 0, 3/11, 0, 36, 52/11)$. Аналіз цього плану показує, що він є оптимальним, тобто: $b_2^+ = b_2' = 54/11$.

Отже, у результаті використання алгоритму отримано таку інтервальну оцінку $[\vec{b}]$ вектора \vec{b} : $[\vec{b}] = ([2/11; 42/11], [12/11; 54/11])$.

Коридор інтервальних моделей при підстановці інтервального вектора $[\vec{b}]$ має вигляд:

$$[\hat{y}(\vec{x})] = [2/11; 42/11] \cdot \varphi_1(\vec{x}) + [12/11; 54/11] \cdot \varphi_2(\vec{x}).$$

Наведений приклад ілюструє ефективність розробленого алгоритму. Як видно, зі зростанням поточного значення індексу j кількість симплекс-ітерацій суттєво зменшується.

Для порівняння ефективності, розробленого алгоритму з існуючими, були проведені його тестові випробування [68]. Аналогічні тестові випробування проводили для алгоритму, реалізованого в ППП INTERDAT. За результатами цих випробувань сформувавали порівняльну таблицю 3.3.

Таблиця 3.3.

Порівняльна таблиця ефективності алгоритмів

№ випробування	Кількість рівнянь N	Кількість невідомих коефіцієнтів m	Кількість симплекс-кроків на основі алгоритму в [29]	Кількість симплекс-кроків розробленого алгоритму
1	2	2	12	6
2	3	2	18	8
3	3	3	36	9
4	4	3	49	11
5	5	3	58	12

Як бачимо із таблиці 3.3, розроблений алгоритм вимагає менше симплекс-ітерацій, аніж реалізований в пакеті INTERDAT [29]. Крім того, ефективність алгоритму зростає при збільшенні кількості m невідомих b_j .

Зауважимо, що при зростанні розмірності задачі локалізації кількість опорних планів у множині B та матриць у множині S збільшується, що вимагає

збільшення обсягів пам'яті обчислювального пристрою. Для розв'язання цієї проблеми, загальну кількість опорних планів у множині B та матриць у множині S слід регулювати. Наприклад, слід вилучати ті опорні плани, які виявились оптимальними при розв'язуванні однієї із задач ЛП (1.38).

Модифікований на базі алгоритму відомий пакет прикладних програм LINA дозволяє будувати інтервальні моделі при кількості невідомих параметрів $m = 100$ та кількості інтервальних спостережень $N = 400$.

3.2. Метод локалізації розв'язків системи інтервальних рівнянь із виділенням насиченого блоку

Із аналізу, проведеного у розділі 1, відомо, що для локалізації області розв'язків ІСНАР (1.25) використовують області у вигляді прямокутного паралелепіпеда чи багатовимірного еліпсоїда. Тобто многогранник Ω наближено описують прямокутним паралелепіпедом або m -вимірним еліпсоїдом. Основна ідея запропонованого у цьому підрозділі методу локалізації полягає у наближенні многогранної області паралелотопом Ω_m . Особливістю паралелотопа Ω_m – як геометричної фігури, є фіксована кількість вершин 2^m , а його грані – попарно паралельні (див. рис. 1.3 та рис. 2.7). Причому у нашому випадку паралелотоп Ω_m однозначно буде описувати область розв'язків системи m інтервальних рівнянь, тобто – область розв'язків насиченого блоку, виділеного із системи (1.25). Термін «насичений блок» запозичено із теорії планування оптимальних насичених експериментів, які, як відомо, реалізують за квадратною матрицею плану.

Основні ідеї побудови такого методу локалізації обґрунтовано у працях [42, 65], теоретичні основи – у працях [44, 46, 58], обчислювальні модифікації – у працях [57, 62].

Нехай маємо сумісну систему (1.25), яка складається із $N \geq m$ рівнянь, побудованих на основі інтервальних даних експерименту із $N \geq m$ спостереженнями. Виберемо із цієї системи m інтервальних рівнянь, щоб отримати також сумісну систему. Її розв'язком є область параметрів Ω_m – паралелотоп із вершинами \vec{b}_s , які обчислюють за такою формулою:

$$\vec{b}_s = F_m^{-1} \cdot \vec{Y}_s, \quad s = 1, \dots, 2^m, \quad (3.3)$$

де F_m^{-1} – квадратна матриця $(m \times m)$ значень базисних функцій для вибраних із системи (1.25) m рівнянь.

Припустимо також, що систему із m інтервальних рівнянь сформувавши у такий спосіб, щоб її область розв'язків у вигляді паралелотопа Ω_m за конфігурацією якомога найбільше співпадала із конфігурацією многогранника Ω – областю розв'язків усієї системи (1.25).

Тепер мінімізуємо об'єм V_{Ω_m} отриманого паралелотопа

$$V_{\Omega_m} \xrightarrow{\vec{Y}_s, s=1, \dots, 2^m} \min, \quad (3.4)$$

змінюючи значення компонент векторів $\vec{Y}_s, s = 1, \dots, 2^m$ та за умови

$$\Omega \subseteq \Omega_m. \quad (3.5)$$

Окреслена процедура схематично означає зменшення відстаней між попарно-паралельними гранями паралелотопа, враховуючи розміщення гіперсмуг, заданих кожним із решти $N-m$ інтервальних рівнянь системи (1.25). Очевидно, що у такому випадку можемо отримати точніші по відношенню до інтервальних гарантовані оцінки параметрів моделей. Цей факт підтверджує приклад, наведений у підрозділі 2.7 (див. рис. 2.7). Розглянутий спосіб локалізації області параметрів інтервальних моделей має ще одну перевагу. А саме, спираючись на лему 1 із праці [31], оцінку області параметрів у вигляді паралелотопа Ω_m зручно замінити «оптимальною» оцінкою у вигляді багатовимірного локалізаційного еліпсоїда (1.50). Як відомо, у цьому випадку знижується обчислювальна складність оперування інтервальною моделлю.

Повернемося до припущення щодо вибору матриці F_m , тобто m – базових інтервальних рівнянь із системи (1.25). Один із підходів, описаний у працях [43, 45], ґрунтується на розв'язуванні такої формальної задачі:

$$4^m \cdot \left(\prod_{i=1}^m \Delta_i^2 \right) \cdot \det(F_m \cdot F_m^T)^{-1} \xrightarrow{F_m} \min, \quad (3.6)$$

де F_m – блок-матриця $(m \times m)$ матриці $F(N \times m)$.

Зауважимо, що критерієм у даному випадку є квадрат об'єму V_{Ω_m} паралелотопа Ω_m , заданий формулою (1.43).

Розглянутий спосіб вибору конфігурації локалізаційної області параметрів у вигляді паралелотопа Ω_m є неєдиним, зокрема, для цієї цілі можна використати методи планування оптимальних насичених експериментів.

Тепер повернемося до задачі умовної оптимізації, представленій виразом (3.4), (3.5). Спочатку проведемо певні перетворення у виразі (3.4). Підставимо корінь квадратний із виразу (1.43) для квадрату об'єму

$$V_{\Omega_m}^2 = 4^m \cdot \left(\prod_{i=1}^m \Delta_i^2 \right) \cdot \det(F_m \cdot F_m^T)^{-1}$$

паралелотопа Ω_m у вираз (3.4), а також із урахуванням фіксованої матриці F_m , отримаємо:

$$2^m \cdot \alpha \cdot \prod_{i=1}^m \Delta_i \xrightarrow{\vec{Y}_s, s=1, \dots, 2^m} \min, \quad \Omega \subseteq \Omega_m,$$

де $\alpha = \sqrt{\det(F_m \cdot F_m^T)^{-1}}$ – константа.

Замінюючи в отриманому виразі Δ_i на $0,5 \cdot (y_i^+ - y_i^-)$ і опускаючи постійний множник α , задачу умовної оптимізації (3.4), (3.5) перепишемо у такому вигляді:

$$y_i^+ \longrightarrow \min, y_i^- \longrightarrow \max, \forall i = 1, \dots, m, \Omega \subseteq \Omega_m. \quad (3.7)$$

Для розв'язування задачі локалізації (3.7), використаємо ітераційний метод послідовного додавання обмежень до базової системи із m рівняннями. На $(k+1)$ -ій ітерації нижню $y_i^-(k+1)$ та верхню $y_i^+(k+1)$ межі інтервалів кожного із базових m інтервальних рівнянь обчислюємо за такими формулами:

$$y_i^-(k+1) = y_i^-(k) + \delta_i^-(k+1), y_i^+(k+1) = y_i^+(k) - \delta_i^+(k+1), i = 1, \dots, m. \quad (3.8)$$

Причому у формулах (3.8) значення $\delta_i^-(k+1) \geq 0$ та $\delta_i^+(k+1) \geq 0$ максимізуємо враховуючи виконання таких умов включень:

$$\Omega \subseteq \{ \Omega_m(k) \cap \tilde{\Omega}(k+1) \} \subseteq \Omega_m(k+1), \quad (3.9)$$

де $\Omega_m(k+1)$ – паралелограм, отриманий на $(k+1)$ -ій ітерації;

$\tilde{\Omega}(k+1)$ – «гіперсмуга», яка визначається $(k+1)$ -им інтервальним рівнянням ($k=1, \dots, N-m$) із тих, що залишились у системі (1.25) після вибору m базових рівнянь.

Нехай значення $y_i^-(k)$ та $y_i^+(k)$ на k -ій ітерації є відомими. Користуючись включеннями (3.9) отримаємо аналітичні вирази для обчислення значень $\delta_i^-(k+1)$ та $\delta_i^+(k+1)$ для наступної ітерації.

Позначимо за $\vec{b}_s(k)$ ($s=1, \dots, 2^m$) вершину паралелограма $\Omega_m(k)$ і перетворимо формулу (3.3) до вигляду, придатного для обчислення координат вершин на k -тій ітерації

$$\vec{b}_s(k) = F_m^{-1} \cdot \vec{Y}_s(k), \quad (3.10)$$

де $\vec{Y}_s(k)$ – вектор, складений із комбінацій нижніх $y_i^-(k)$ та верхніх $y_i^+(k)$ меж кожного з базових m рівнянь, які обчислюють за рекурентними формулами (3.8).

Важливою властивістю паралелограма $\Omega_m(k)$ є те, що вершини $\vec{b}_s(k)$ належать одній грані, якщо у формулі (3.10) відповідні вектори $\vec{Y}_s(k)$ мають хоча б по одній спільній компоненті. Таким чином, ітераційне «переміщення» меж $y_i^-(k)$ та $y_i^+(k)$, за допомогою формул (3.8), у просторі параметрів еквівалентне переміщенню відповідних граней паралелограма $\Omega_m(k)$ в сторону зменшення його розмірів.

Введемо для кожної вершини $\vec{b}_s(k)$ скалярні функції, які характеризують відстань між вершиною і відповідною межею «гіперсмуги» $\check{\Omega}(k+1)$

$$L_s(k) = y_{k+1}^- - \vec{\varphi}^T(\vec{x}_{k+1}) \cdot \vec{b}_s(k),$$

$$L'_s(k) = \vec{\varphi}^T(\vec{x}_{k+1}) \cdot \vec{b}'_s(k) - y_{k+1}^+ = -L_s(k) - \Delta_{k+1}, \quad (3.11)$$

де \vec{x}_{k+1} – вектор входів у $k+1$ спостереженні, який визначає $(k+1)$ -ше рівняння у системі (1.25);

y_{k+1}^-, y_{k+1}^+ – нижня та верхня межі інтервалів виходу у $(k+1)$ -му спостереженні;

$$\Delta_{k+1} = y_{k+1}^+ - y_{k+1}^-.$$

Аналіз значень функцій $L_s(k)$, $L'_s(k)$ дозволяє виявити розміщення вершин паралелограма відносно «гіперсмуги», утвореної $(k+1)$ -им рівнянням.

Як показано на рис. 3.1 а) для випадку $m = 2$, вершини \vec{b}_1, \vec{b}_2 грані з номером $i=1$ розміщені з одного боку «смуги» і відповідно $L_s(k) > 0 \quad \forall s = 1, 2$; одна вершина \vec{b}_3 грані з номером $i'=1$ належить «смузі», а інша \vec{b}_4 знаходиться на її межі, тому $L'_3(k) < 0$, а $L'_4(k) = 0$. На рис. 3.1 б) показано, що вершини \vec{b}_2, \vec{b}_3 грані з номером $i'=2$ розміщені по обидва боки «смуги» і, відповідно, $L_2(k) < 0$, $L_3(k) > 0$; обидві вершини \vec{b}_3, \vec{b}_4 грані з номером $i'=1$ знаходяться вище «смуги» (з одного боку «смуги»), тому $L'_s(k) > 0 \quad \forall s = 3, 4$.

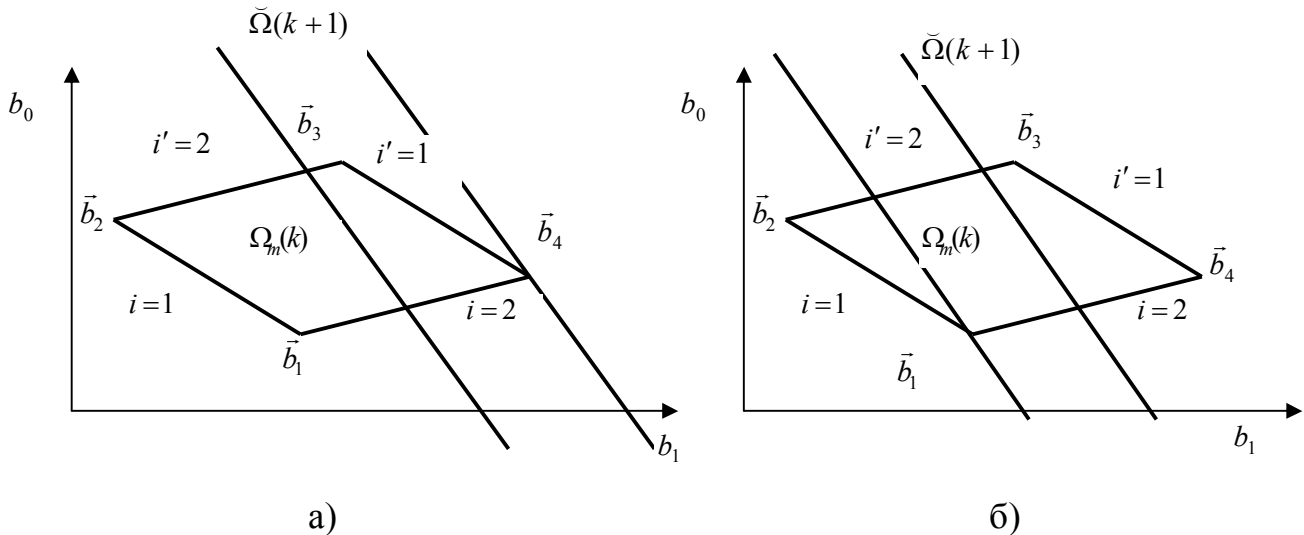


Рис 3.1. Розміщення вершин області локалізації $\Omega_m(k)$ стосовно «смуги» $\check{\Omega}(k+1)$

Проведений аналіз, дає можливість сформулювати критерій «інформативності» $(k+1)$ -го спостереження (рівняння): якщо для усіх вершин грані одночасно виконується умова

$$L_s(k) > 0 \quad \forall s = 1, \dots, 2^{m-1}, \quad (3.12)$$

то $(k+1)$ -ше спостереження є інформативним і дану грань переміщуємо (в сторону зменшення розмірів паралелотопа) до моменту дотику її найближчої вершини до межі «гіперсмуги». Звідси на k -тій ітерації справджується таке рівняння:

$$\min_{s=1, \dots, 2^{m-1}} \{L_s(k+1)\} = 0. \quad (3.13)$$

Зауважимо, що переміщення i -тої грані паралелотопа у випадку виконання умови (3.12) означає переміщення вгору нижньої межі $y_i^-(k+1)$ інтервалу $[y_i^-(k+1), y_i^+(k+1)]$ при фіксованій матриці F_m . Користуючись зробленим зауваженням, знайдемо рекурентну формулу для $L_s(k+1)$. Для цього підставимо у формулу (3.10) замість i -ї компоненти $y_i^-(k+1)$ вектора $\vec{Y}_s(k+1)$ її значення $y_i^-(k) + \delta_i^-(k+1)$ із виразу (3.8). Після нескладних перетворень отримаємо таку рекурентну формулу:

$$\vec{b}_s(k+1) = \vec{b}_s(k) + \vec{f}_i \cdot \delta_i^-(k+1), \quad (3.14)$$

де \vec{f}_i – i -тий стовпець матриці F_m^{-1} .

Із підстановкою формули (3.14) у формулу (3.11) рекурентний вираз для обчислення значень $L_s(k+1)$ на $(k+1)$ -ій ітерації набуде такого вигляду:

$$L_s(k+1) = L_s(k) - \vec{\varphi}^T(\vec{x}_{k+1}) \cdot \vec{f}_i \cdot \delta_i^-(k+1). \quad (3.15)$$

Із виразу (3.15) витікає, що при додатному значенні $\delta_i^-(k+1)$, одночасне виконання умов (3.12) та (3.13) можливе тільки у випадку $\vec{\varphi}^T(\vec{x}_{k+1}) \cdot \vec{f}_i > 0$. З врахуванням цього підставимо формулу (3.15) у вираз (3.13) і після нескладних перетворень отримаємо співвідношення для розрахунку значення $\delta_i^-(k+1)$

$$\delta_i^-(k+1) = \begin{cases} \min_{s=1, \dots, 2^{m-1}} \{L_s(k) / |\vec{\varphi}^T(\vec{x}_{k+1}) \cdot \vec{f}_i|\}, & \text{якщо } L_s(k) > 0, \vec{\varphi}^T(\vec{x}_{k+1}) \cdot \vec{f}_i \neq 0, \\ 0, & \text{якщо } L_s(k) \leq 0. \end{cases} \quad (3.16)$$

Притримуючись вищевикладених міркувань із заміною умови (3.12) на умову $L'_s(k) > 0, \forall s = 1, \dots, 2^{m-1}$, отримаємо вираз для розрахунку $\delta_i^+(k+1)$

$$\delta_i^+(k+1) = \begin{cases} \min_{s=1, \dots, 2^{m-1}} \{L'_s(k) / |\vec{\varphi}^T(\vec{x}_{k+1}) \cdot \vec{f}_i|\}, & \text{якщо } L'_s(k) > 0, \vec{\varphi}^T(\vec{x}_{k+1}) \cdot \vec{f}_i \neq 0, \\ 0, & \text{якщо } L'_s(k) \leq 0. \end{cases} \quad (3.17)$$

Отже, для реалізації однієї ітерації запропонованого локалізаційного методу необхідно виконати таку послідовність обчислень [45, 62]:

1. Обчислити значення скалярних функцій $L_s(k)$ та $L'_s(k)$ для усіх вершин паралелотопа.

2. Обчислити $\delta_i^-(k+1)$ та $\delta_i^+(k+1)$, відповідно, за формулами (3.16) та (3.17).

3. Обчислити межі інтервалу $[y_i^-(k+1); y_i^+(k+1)]$ за формулою (3.8).

Незважаючи на достатню простоту розглянутого алгоритму, обчислювальна схема методу вимагає окремого розгляду.

3.3. Обчислювальна схема методу локалізації параметрів інтервальних моделей із виділенням насиченого блоку

Розглянемо один із можливих варіантів побудови обчислювальної схеми запропонованого методу [62].

Припускаємо, що із системи (1.25) виділено насичений блок, тобто сформовано базову систему інтервальних рівнянь (що в просторі параметрів задає паралелотоп із 2^m вершинами) і обчислено обернену матрицю F_m^{-1} .

Користуючись властивостями паралелотопа – як області розв'язків насиченого блоку інтервальної системи алгебричних рівнянь, сформуємо таке твердження.

Т в е р д ж е н н я 3.1. Нехай вектор координат деякої вершини $\vec{b}_s(k)$ паралелотопа $\Omega_m(k)$ є відомим. Тоді координати вершин $\vec{b}_s(k)$, $s = 1, \dots, m$, які лежать на ребрах, що виходять із цієї вершини, обчислюємо за такою формулою:

$$\vec{b}_s(k) = \vec{b}_s^*(k) \pm \Delta_i(k) \cdot \vec{f}_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad (3.18)$$

де $\Delta_i(k) = y_i^+(k) - y_i^-(k)$, а знак $\Delta_i(k)$ – «+», якщо у формулі (3.10) для обчислення $\vec{b}_s^*(k)$ вектора i -та компонента вектора $\vec{Y}_s^*(k) \in y_i^-(k)$, і – знак «-», якщо ця компонента $\in y_i^+(k)$.

Справедливість твердження легко перевірити, користуючись таблицею 1.3 і обчислюючи різницю координат вершин, що належать одному ребру паралелотопа $\Omega_m(k)$.

Підставляючи рекурентні формули (3.18) у вираз (3.11), отримаємо

$$L_s(k) = L_s^*(k) - \Delta_i(k) \cdot \xi_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad (3.19)$$

де $L_s^*(k)$ – скалярні функції, розраховані для фіксованого вектора-вершини $\vec{b}_s^*(k)$;

$$\xi_i = \vec{\varphi}^T(\vec{x}_{k+1}) \cdot \vec{f}_i.$$

Зауважимо, що значення усіх ξ_i , $i = 1, \dots, m$, можна обчислити до початку k -тої ітерації. Визначимо оптимальний, тобто без повторень, порядок проведення рекурентних обчислень значень $L_s(k)$ та $L'_s(k)$. Для цього умовно розділимо усі вершини паралелографа $\Omega_m(k)$ на дві групи по 2^{m-1} вершин.

Для вершин першої групи спочатку будемо обчислювати значення $L_s(k)$ за допомогою рекурентної формули (3.19), а потім $L'_s(k)$ за формулою

$$L'_s(k) = -L_s(k) - \Delta_{k+1}.$$

Для другої групи навпаки – спочатку скористуємося рекурентною формулою (3.19) для розрахунку $L'_s(k)$, а потім за формулою

$$L_s(k) = -L'_s(k) - \Delta_{k+1}$$

обчислимо значення $L_s(k)$. Значення функції $L_{s=1}(k)$ для вершини із номером $s=1$ першої групи визначаємо за формулою (3.11) із заміною вектора $\vec{b}_s(k)$ на його значення із виразу (3.10), тобто:

$$L_{s=1}(k) = y_{k+1}^- - \vec{\varphi}^T(\vec{x}_{k+1}) \cdot F_m^{-1} \cdot \vec{Y}_{s=1}(k), \quad (3.20)$$

де $\vec{Y}_{s=1}(k)$ – вектор із компонентами $y_i^-(k)$ ($i = 1, \dots, m$).

Відповідно, – значення $L'_{s=1}(k)$ для вершини з номером $s=1$ другої групи обчислюємо за такою формулою:

$$L'_{s=1}(k) = \vec{\varphi}^T(\vec{x}_{k+1}) \cdot F_m^{-1} \cdot \vec{Y}'_{s=1}(k) - y_{k+1}^+, \quad (3.21)$$

де $\vec{Y}'_{s=1}(k)$ – вектор з компонентами $y_i^+(k)$ ($i = 1, \dots, m$).

Грунтуючись на виразах (3.19), (3.20) та (3.21), структурну схему взаємозв'язків між уведеними рекурентними співвідношеннями (3.19) зобразимо за допомогою двох паралельних обчислювальних графів.

На рис. 3.2. наведені паралельні обчислювальні графи для випадку $m = 5$.

Вершині першого графа (див. рис. 3.2 а), позначеній «0», відповідає обчислення за формулою (3.20), а формула (3.21) відповідає вершині «0'» другого графа (див. рис. 3.2 б). Іншим вершинам обох графів, позначеним символами ξ_i ($i = 2, \dots, m$), відповідають обчислення за рекурентними формулами (3.19).

Зафіксуємо будь-яку вершину на першому графові (рис. 3.2 а), якій відповідає обчислення значення функції $L_s(k)$. «Перемістимося» вниз по ребрах графа до суміжних вершин, позначених ξ_i . Для обчислення значень $L_s(k)$ у цих вершинах обираємо формулу (3.19), у якій значення ξ_i обираємо на основі позначень отриманих вершин графа. На другому графові для розрахунку $L'_s(k)$, застосовуємо аналогічні процедури, побудовані на формулі (3.19).

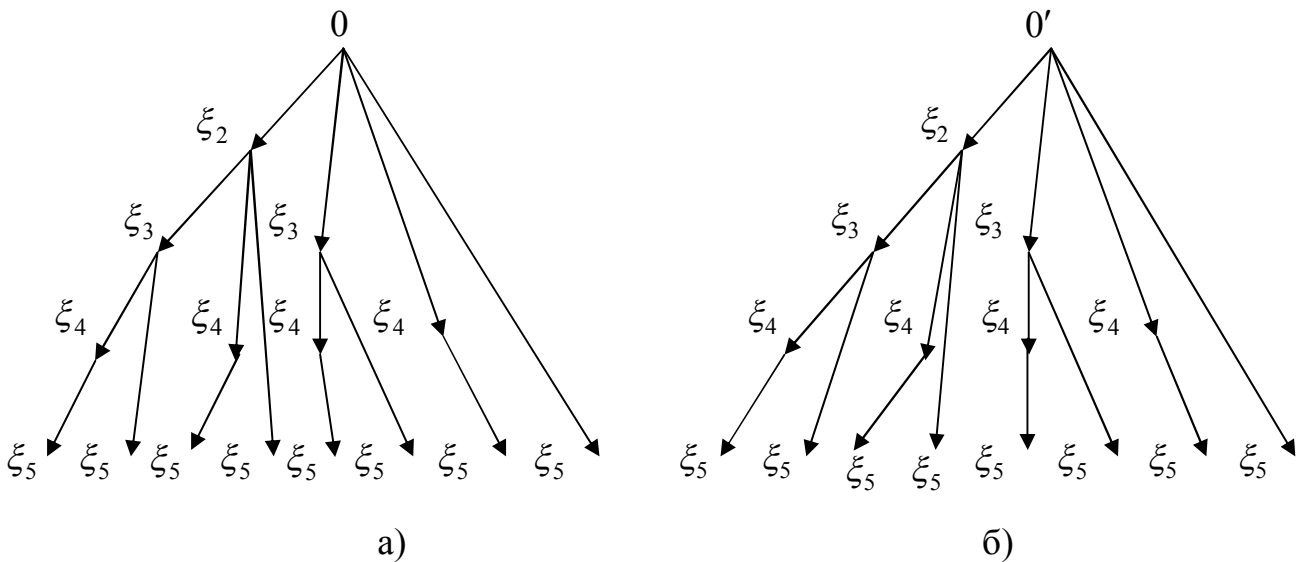


Рис. 3.2. Обчислювальні графи k -тої ітерації локалізаційного методу

Аналіз наведених графів показав, що при послідовності обчислень, реалізованих за принципом «зверху – вниз» та «справа – наліво» загальна кількість проміжних значень $L_s(k)$ ($L'_s(k)$), які необхідно запам'ятовувати для розрахунку значень функцій наступних вершин за рекурентною формулою (3.19), є не більшою від $m - 1$.

Введемо масив елементів $L_j^*(k)$, $j = 1, \dots, m - 1$, призначений для зберігання проміжних значень обчислень. Тепер користуючись графом рис. 3.2 а) визначимо порядок обчислення значень функцій $L_s(k)$, $L'_s(k)$ ($s = 1, \dots, 2^{m-1}$) для поточної вершини паралелотопа та значень елементів $L_j^*(k)$, $j = 1, \dots, m - 1$.

Якщо $s = 1$, то проводимо такі обчислення:

1. Обчислення значення функції $L_{s=1}(k)$ (для вершини «0») за формулою (3.20), а значення $L'_{s=1}(k)$ – за формулою:

$$L'_s(k) = -L_s(k) - \Delta_{k+1}.$$

2. Покладемо $L_j^*(k) = L_{s=1}(k)$, $\forall j = 1, \dots, m - 1$.

Якщо число $s - 1$ непарне, то проводимо обчислення:

$$L_s(k) = L_{m-1}^*(k) - \Delta_m(k) \cdot \xi_m, \quad L'_s(k) = -L_s(k) - \Delta_{k+1},$$

а значення $L_j^*(k)$ залишаємо незмінними для усіх $j = 1, \dots, m - 1$.

Якщо $s - 1$ парне, то:

1. Визначення числа p за умовою ділення без остачі

$$(s - 1) / \max_{p=1, \dots, m-2} 2^p.$$

Число p задає кількість дуг на графові рис. 3.2 а), що виходять із даної вершини. Відповідно, обчислене значення $L_s(k)$ у даній вершині буде використане для розрахунку p значень скалярних функцій інших вершин.

2. Розрахунок значень $L_s(k)$ та $L'_s(k)$ за формулами, відповідно:

$$L_s(k) = L_{m-p}^*(k) - \Delta_{m-p}(k) \cdot \xi_{m-p}, \quad L'_s(k) = -L_s(k) - \Delta_{k+1}.$$

3. Покладемо $L_{m-1}^*(k) = \dots = L_{m-p-1}^*(k) = L_s(k)$.

Подібний порядок розрахунків застосовуємо для графа рис. 3.2 б) із заміною знака «+» на знак «-» в усіх рекурентних формулах, а формули $L'_s(k) = -L_s(k) - \Delta_{k+1}$ на формулу: $L_s(k) = -L'_s(k) - \Delta_{k+1}$.

Наведені на рис. 3.2 графи, уможливають реалізацію рекурентних процедур обчислення значень скалярних функцій $L_s(k)$ та $L'_s(k)$ для усіх вершин паралелотопа. Однак повна реалізація обчислювальних графів на поточній ітерації є небажаною через значні обчислювальні та часові витрати. Наприклад, тестові випробування, проведені на комп'ютері з процесором типу CELERON, з тактовою частотою 2 ГГц та об'ємом оперативної пам'яті 1 Гб, показали, що при повній реалізації обох графів для розмірності задачі $m=30$ (2^{30} вершин паралелотопа) на одній ітерації необхідно $\approx 1,5$ хвилини машинного часу. Для зменшення цих витрат при побудові алгоритму слід урахувати, що будь-яка вершина паралелотопа одночасно належить m граням.

Отже, якщо для вершини $\vec{b}_s(k)$ не виконується умова $L_s(k) > 0$, то покладемо $\delta_i^-(k+1) = 0$ для усіх граней із номером i , для яких спільною є s -та вершина, і вилучимо із списку граней – «претендентів на переміщення» ці грані. Якщо ж $L_s(k) > 0$, і одночасно поточне значення $\delta_i^-(k+1) > L_s(k) / |\xi_i|$, то згідно з виразом (3.16) покладемо: $\delta_i^-(k+1) = L_s(k) / |\xi_i|$ для відповідних граней, що дає можливість після завершення k -ої ітерації отримати $\delta_i^-(k+1)$ для кожної з цих граней. Причому індекси i позначають номер компоненти $y_i^-(k)$ вектора $\vec{Y}_s(k)$ у формулі (3.10) для вершини $\vec{b}_s(k)$. Ці індекси обчислюємо за номером вершини s у спосіб як описано нижче.

Спочатку число $s-1$ перетворюємо до двійкового коду, розряди якого нумеруємо. Причому наймолодшому розряду двійкового числа присвоюємо номер 1. Тоді i дорівнює номеру розряду отриманого двійкового числа, якщо значення цього розряду «0» – при обчисленні $L_s(k)$ на першому графові (рис. 3.2 а) або «1» – для графу на рис. 3.2 б).

Аналогічно, якщо $L'_s(k) \leq 0$, то $\delta_i^+(k+1) = 0$ для усіх i даної вершини. Якщо ж $L'_s(k) > 0$ і одночасно $\delta_i^+(k+1) > L'_s(k) / |\xi_i|$, то покладемо $\delta_i^+(k+1) = L'_s(k) / |\xi_i|$. У даному випадку відповідні індекси i визначають номер

компоненти $y_i^+(k)$ вектора $\vec{Y}_s(k)$ у формулі (3.18) для вершини $\vec{b}_s(k)$ і їх розраховуємо вищеописаним способом із урахуванням такої відмінності: значення i дорівнює номеру розряду отриманого двійкового числа, якщо значення цього розряду «1» – при обчисленні $L'_s(k)$ на першому графові (рис. 3.2 а) або «0» – для графу на рис. 3.2 б).

Отже, обнулення усіх значень $\delta_i^-(k+1)$ та $\delta_i^+(k+1)$ при аналізі поточних $L_s(k)$ та $L'_s(k)$ означає дострокове закінчення k -ої ітерації локалізаційного методу.

Наведені вище міркування уможливили побудову раціональної реалізації обчислень на кожній ітерації методу локалізації у вигляді програмного модуля LOCNAS.

Обчислювальна схема, побудована на графах (рис. 3.2), уможливорює розпаралелення обчислювального процесу [133, 135]. Тому для її реалізації доцільно застосовувати багатопроцесорні чи багатокомп'ютерні системи.

3.4. Активна ідентифікація параметрів інтервальних моделей методом локалізації із виділенням насиченого блоку експерименту

Розглянутий метод локалізації з виділенням насиченого блоку експерименту дозволяє побудувати достатньо прості процедури активної множинної ідентифікації [50, 59, 198].

У випадку активної ідентифікації на основі інтервальних даних, гарантовані оцінки параметрів моделей «вхід - вихід» статичних систем шукаємо шляхом локалізації розв'язку системи інтервальних рівнянь (1.25), яка формується послідовно із застосуванням наведеної нижче процедури.

Спочатку із розв'язку задачі (3.6) сформуємо насичений блок із m інтервальних рівнянь. Потім на кожному кроці процедури ідентифікації проводимо одне спостереження і його результатами у вигляді інтервального рівняння доповнюємо систему із m інтервальних рівнянь. Розв'язок отриманої системи локалізуємо на основі формули (3.8) за умовою включень (3.9).

У послідовній процедурі $(k+1)$ -ше спостереження вибираємо в одній із точок \vec{x}_i ($i = 1, \dots, m$) з найбільшою результуючою інтервальною похибкою $\Delta_i(k) = y_i^+(k) - y_i^-(k)$ [50]. Такий вибір забезпечує зосередження спектру плану експерименту у m точках, попередньо визначених із розв'язку задачі (3.6). У цьому випадку межі «гіперсмуги», заданої $(k+1)$ -им рівнянням, – паралельні відповідній i -тій парі граней паралелотопа $\Omega_m(k)$. Тому включення (3.9) перетворюємо у рівняння:

$$\Omega = \Omega_m(k+1) = \{ \Omega_m(k) \cap \check{\Omega}(k+1) \},$$

а замість формул (3.8) для розрахунку нижніх та верхніх меж інтервалів i -тої нерівності, що відповідає точці з найбільшою інтервальною похибкою, використовуємо таку формулу:

$$[y_i^-(k+1); y_i^+(k+1)] = [y_i^-(k); y_i^+(k)] \cap [y_{k+1}^-; y_{k+1}^+]. \quad (3.22)$$

Для решти базових рівнянь нижні та верхні межі інтервалів на даній ітерації не змінюємо.

Запропонований спосіб вибору точок \bar{x}_i спостережень у задачах активної ідентифікації, що призводить до формули (3.22), дає можливість у повній мірі розв'язати проблему розмірності, яка є актуальною для задач знаходження розв'язків системи інтервальних рівнянь (1.25) у вигляді многогранної області. Як відомо, ця проблема пов'язана із суттєвим зростанням кількості вершин многогранника при збільшенні розмірності вектора параметрів моделі та кількості спостережень. Відповідно виникає необхідність збільшення обсягів пам'яті обчислювального засобу для зберігання вершин многогранної області [103]. У даному ж випадку, на кожній ітерації паралелотоп $\Omega_m(k+1)$ може бути однозначно описаний «оптимальним еліпсоїдом» (1.50).

Із урахуванням співвідношення (3.22), вираз для m -вимірного еліпсоїда на $(k+1)$ -ій ітерації локалізаційного методу матиме такий вигляд:

$$Q_m(k+1) = \{\bar{b} \in R^m \mid (\bar{b} - \bar{\bar{b}}(k+1))^T \cdot F_m^T \cdot E^{-2}(k+1) \cdot F_m \cdot (\bar{b} - \bar{\bar{b}}(k+1)) = m\}, \quad (3.23)$$

У виразі (3.23) $\bar{\bar{b}}(k+1)$ означає вектор, яким задаємо центр еліпсоїда і визначаємо за формулою:

$$\begin{aligned} \bar{\bar{b}}(k+1) = F_m^{-1} \cdot 0,5 \cdot ((y_1^+(k+1) + y_1^-(k+1)), \dots, (y_i^+(k+1) + y_i^-(k+1)), \dots, \\ (y_m^+(k+1) + y_m^-(k+1)))^T; \end{aligned}$$

$E(k+1)$ – діагональна матриця результуючих похибок, отриманих на k -тій ітерації у m точках спостережень:

$$\begin{aligned} E(k+1) = \text{diag}\{0,5 \cdot ((y_1^+(k+1) - y_1^-(k+1)), \dots, (y_i^+(k+1) - y_i^-(k+1)), \dots, \\ (y_m^+(k+1) - y_m^-(k+1)))\}. \end{aligned}$$

Отже, на кожній ітерації достатньо зберігати $m^2 + 4 \cdot m$ компонент, тобто центр еліпсоїда – m компонент, матрицю його конфігурації із $m^2 + m$ компонент (матриця F_m , та діагональна матриця $E(k+1)$, розмірностями $m \times m$), а та-

кож інтервальні значення виходу $[y_i^-(k); y_i^+(k)]$ насиченого блоку на k -ій ітерації у m точках \bar{x}_i спостережень.

Застосування методу локалізації із виділенням насиченого блоку для задач активної ідентифікації, коли спектр плану експерименту зосереджений у m точках, характеризується малими обчислювальними витратами. Як видно, вони визначаються обчисленнями за виразом (3.22) для m інтервалів $[y_i^-(k+1); y_i^+(k+1)]$ та формулами для обчислення центру еліпсоїда $\bar{b}(k+1)$ і діагональної матриці $E(k+1)$. Причому матриця F_m є постійною.

Приклад. Порівняння ефективності запропонованого способу вибору точок спостережень при розв'язуванні задачі активної ідентифікації із двома іншими способами: на базі рівномірної сітки та заданням точок спостережень за допомогою генератора випадкових чисел, проводилося за допомогою чисельного моделювання. Задачу ідентифікації параметрів моделі розв'язували методом локалізації з виділенням насиченого блоку експерименту. При цьому, для запропонованого способу активної ідентифікації використовували вирази (3.22) та (3.23), а для двох інших алгоритм, побудований на базі обчислювальної схеми попереднього підрозділу із наближенням отриманого на кожній ітерації паралелотопа еліпсоїдом (3.23).

Чисельне моделювання проводилося на прикладі ідентифікації параметрів квадратичної моделі $y_0(x) = b_1 + b_2x + b_3x^2$ об'єкта із одним входом та виходом. Інтервальні значення виходу отримали із виразу $y_i(x) = 6 + 8x_i - 3x_i^2 + e_i$, де $e_i \in [-2; 2]$ – обмежена похибка, яку «моделювали» із застосуванням генератора випадкових чисел. Загальна кількість спостережень $N = 14$. Область експерименту (спостережень) задавали інтервалом $[-1; 1]$. За критерій ефективності ідентифікації було обрано об'єм еліпсоїда (3.23), тобто

$$V_{Q_{m=3}(k)} = 4/3 \cdot \pi \cdot \sqrt{m^m / \det(F_m^T \cdot E^{-2}(k) \cdot F_m)},$$

де матрицю

$$F_m = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

обрали із розв'язку задачі (3.6) для заданих умов.

Для усіх способів «оптимальний» насичений блок мав однаковий вигляд (див. спостереження №1, №2, №3 таблиці 3.4).

Результати чисельного моделювання та отримані оцінки ефективності ідентифікації параметрів моделі наведені у таблиці 3.4.

**Результати чисельного моделювання із застосуванням
активної ідентифікації параметрів**

№ спос- тере- ження		Запропонований спосіб			Рівномірна сітка			Генератор випадкових чисел		
i	k	$x_i,$ x_k	$[y_i^-, y_i^+],$ $[y_k^-, y_k^+]$	V_Q	$x_i,$ x_k	$[y_i^-, y_i^+],$ $[y_k^-, y_k^+]$	V_Q	$x_i,$ x_k	$[y_i^-, y_i^+],$ $[y_k^-, y_k^+]$	V_Q
1	-	-1	[-8,9;-4,9]	-	-1	[-8,9;-4,9]	-	-1	[-8,9;-4,9]	-
2	-	0	[5,8;9,8]	-	0	[5,8;9,8]	-	0	[5,8;9,8]	-
3	0	1	[7,9;11,9]	87,1	1	[7,9;11,9]	87,1	1	[7,9;11,9]	87,1
-	1	-1	[-6,8;-2,8]	40,0	-1	[-7,2;-4,2]	49,3	0,66	[8,1;12,1]	87,1
-	2	0	[3,9;7,9]	20,6	-0,8	[-4,7;-0,7]	49,3	0,33	[6,7;10,7]	79,5
-	3	1	[8,8;12,8]	15,9	-0,6	[-2,3;1,7]	49,3	-0,25	[0,4;4,4]	34,1
-	4	1	[7,2;11,2]	12,0	-0,4	[2,1;6,1]	49,3	-0,65	[-2,7;1,3]	34,1
-	5	1	[10,5;14,5]	3,61	-0,2	[2,4;6,4]	34,1	0,95	[8,7;12,7]	29,9
-	6	0	[2,8;6,8]	1,72	0	[4,3;8,3]	30,9	-0,93	[-5,1;-1,1]	11,9
-	7	-1	[-6,1;-2,1]	1,05	0,2	[7,4;11,4]	30,9	0,23	[6,3;10,3]	11,9
-	8	-1	[-7,4;-3,4]	1,05	0,4	[9,2;13,2]	28,9	-0,38	[1,3;5,3]	11,9
-	9	-1	[-5,9;-1,9]	0,86	0,6	[6,8;10,8]	28,9	-0,1	[1,6;5,6]	5,7
-	10	0	[2,5;6,5]	0,62	0,8	[7,7;11,7]	28,9	-0,98	[-5,6;1,6]	3,8
-	11	-1	[-8,2;-4,2]	0,62	1	[9,5;13,5]	17,3	0,91	[9,1;13,1]	3,3

Результати оцінки ефективності застосування різних способів вибору точок спостережень при активній ідентифікації параметрів зображені на рис. 3.3.

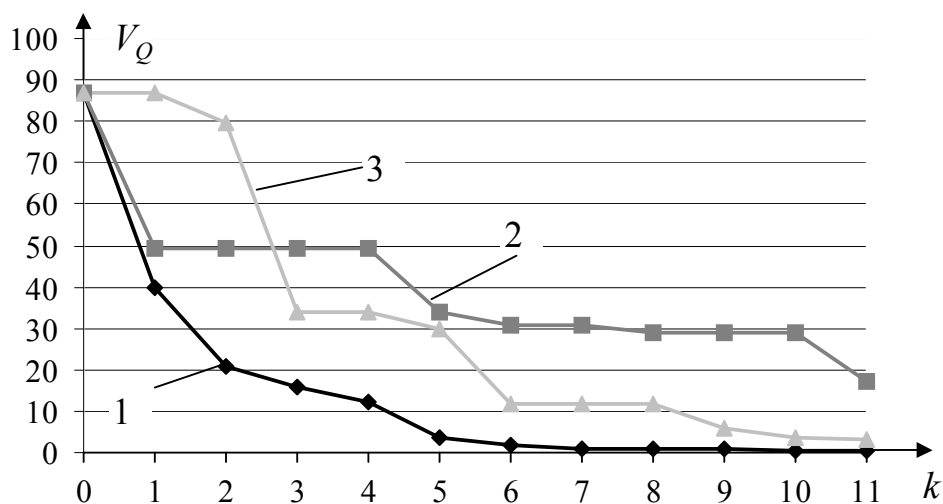


Рис. 3.3. Графіки ефективності активної ідентифікації:

1- запропонованим способом;

2- на рівномірній сітці;

3- випадковим вибором точок спостережень

Як бачимо з рис. 3.3, при активній ідентифікації на базі локалізаційного методу з виділенням насиченого блоку експерименту, найбільш ефективним серед розглянутих є запропонований спосіб вибору точок спостережень. Метод випадкового вибору точок спостережень на області експерименту в кінцевому випадку виявився більш ефективним ніж при рівномірній сітці. Це пояснюється тим, що частина вибраних випадковим чином точок зосереджена навколо оптимально обраних m точок насиченого блоку.

Отже, результати чисельного моделювання підтверджують високу ефективність запропонованого підходу активної ідентифікації в умовах інтервальних даних, а також працездатність запропонованої обчислювальної схеми методу локалізації параметрів інтервальних моделей.

Висновки до розділу

На заключення виділимо основні властивості розглянутих методів локалізації.

Модифікований метод інтервальної локалізації параметрів моделі на основі симплекс-методу розв'язування задач лінійного програмування, вимагає як мінімум у два рази менше симплекс-ітерацій, ніж реалізований в пакеті INTERDAT, і порівняльна його ефективність зростає при збільшенні кількості m невідомих параметрів моделі b_j .

Ітераційний метод локалізації області параметрів інтервальних моделей із виділенням насиченого блоку із загальної ІСНАР забезпечує меншу обчислювальну складність оперування інтервальною моделлю по відношенню до методів локалізації області параметрів многогранником чи прямокутним m -вимірним паралелепіпедом, а також уможлиблює відсіювання із експериментальних даних неінформативних спостережень. Для цього методу побудована на паралельних обчислювальних графах рекурентна схема уможлиблює суттєве зниження обчислювальних витрат у порівнянні із еліпсоїдними методами локалізації.

Розглянутий підхід активної ідентифікації параметрів інтервальних моделей методом локалізації з виділенням насиченого блоку експерименту із вибором точок спостережень у точках оптимального насиченого плану виявляється ефективнішим, а ніж вибір точок спостережень на рівномірній сітці чи випадковим чином.

РОЗДІЛ 4

ДОПУСТИМЕ ОЦІНЮВАННЯ ОБЛАСТІ ПАРАМЕТРІВ МОДЕЛЕЙ ВХІД- ВИХІД СТАТИЧНИХ СИСТЕМ В КЛАСІ ЕЛІПСОЇДІВ

У задачах аналізу та синтезу допусків математичні моделі статичних об'єктів зображають системою інтервальних рівнянь (1.24). У цих випадках інтервали $[y_i^-, y_i^+]$ задають допустимі значення виходів (вихідних характеристик) систем при фіксованих значеннях вхідних змінних [95, 96, 131, 132]. Тому для оцінювання розв'язків системи (1.24) необхідно застосовувати методи допустимого оцінювання.

Враховуючи недоліки існуючих інтервальних методів оцінювання, показані у підрозділах 1.2 та 1.4, актуальним є розвиток еліпсоїдних методів. Останні є більш придатними у задачах аналізу та синтезу допусків, особливо у випадку сильної «витагнутості» області розв'язків інтервальної системи, оскільки забезпечують значно більше покриття допустимої області, ніж традиційні методи, побудовані на «вписуванні» у допустиму область прямокутних паралелепіпедів («брусів») із гранями, паралельними осям координат [96].

При розробці методів допустимого оцінювання у цьому розділі розглянуто два випадки, коли система інтервальних рівнянь (1.24) побудована із застосуванням залежностей між вихідними характеристиками y_i та параметрами \vec{b} , які задано номінальними значеннями \vec{b}_0 [38, 63, 64] та коли ці залежності отримані у результаті експериментальної ідентифікації на основі інтервальних даних [38].

Окремо розглянуто випадок, коли параметри моделі статичної системи мають фізичний зміст і їхні значення є випадковими величинами із нормальним або обмеженим нормальним законом розподілу [47, 67]. Застосування допустимого еліпсоїдного оцінювання для цього випадку дає можливість отримати спрощене співвідношення для оцінки імовірності працездатності системи [38].

4.1. Побудова допустимих еліпсоїдних оцінок із заданими номінальними значеннями параметрів моделей

Для дослідження статичних систем часто застосовують моделі у вигляді нелінійних залежностей їхніх характеристик (виходів) від параметрів [95]. У цьому випадку кожна i -та характеристика y_i , $i = 1, \dots, N$ є функцією $g_i(\vec{b})$ векторного аргументу параметрів $\vec{b} = (b_1, \dots, b_m)^T$. При застосуванні моделей, для заданих номінальних значень виходів $y_{0i} = g_i(\vec{b}_0)$ розраховують номінальні значення параметрів $\vec{b}_0 = (b_{01}, \dots, b_{0m})^T$. Із практичної точки зору, точне забезпечення усіх номінальних значень y_{0i} є нереальним. У цих умовах задають допустимі, з точки зору функціональної придатності об'єкта, інтервали виходів

$y_{0i} \in [y_i^-, y_i^+]$ і визначають множину допустимих значень вектора параметрів із розв'язку такої системи [95]:

$$y_i^- \leq g_i(\vec{b}) \leq y_i^+, i = 1, \dots, N.$$

Із застосуванням розкладу функцій $g_i(\vec{b})$ в ряд Тейлора в околі вектора номінальних значень параметрів \vec{b}_0 та із вибором першого члена розкладу, приходимо до такої системи:

$$y_i^- \leq y_{i0} + \sum_{j=1}^m \frac{\partial g_i(\vec{b})}{\partial b_j} \Big|_{\vec{b}=\vec{b}_0} \cdot (b_j - b_{0j}) \leq y_i^+, i = 1, \dots, N.$$

Уведемо позначення:

$$\delta y_i^- = y_i^- - y_{i0}, \delta y_i^+ = y_i^+ - y_{i0}, \delta b_j = b_j - b_{0j}, \phi_{ij} = \frac{\partial g_i(\vec{b})}{\partial b_j} \Big|_{\vec{b}=\vec{b}_0}, i = 1, \dots, N$$

і перепишемо лінеаризовану систему нерівностей у матричному вигляді

$$\delta \vec{Y}^- \leq \tilde{F} \cdot \delta \vec{b} \leq \delta \vec{Y}^+, \quad (4.1)$$

де $\delta \vec{Y}^- = \{\delta y_i^-, i = 1, \dots, N\}$, $\delta \vec{Y}^+ = \{\delta y_i^+, i = 1, \dots, N\}$ – вектори, які складено із верхніх та нижніх меж інтервалів $[\delta y_i^-, \delta y_i^+]$ відхилень вихідної характеристики від номінального значення, відповідно;

$\tilde{F} = \{\phi_{ij}, i = \overline{1, N}, j = \overline{1, m}\}$ – відома матриця значень похідних функцій $g_i(\vec{b})$ у точці \vec{b}_0 ;

$\delta \vec{b} = (\delta b_1, \dots, \delta b_m)^T$ – вектор відхилень значень параметрів від номінальних.

Зауважимо, що коефіцієнти ϕ_{ij} задають чутливості i -тої вихідної характеристики до зміни j -того параметра b_j .

Як бачимо, отримана система (4.1) є еквівалентною системі інтервальних рівнянь (1.25). Її розв'язком є область допустимих відхилень параметрів від номінальних значень. Позначимо цю область за $\tilde{\Omega}$. Очевидно, що її властивості – аналогічні властивостям області Ω , отриманої із розв'язку системи інтервальних рівнянь (1.24). Зокрема, у просторі параметрів вона є опуклим многогранником. Будь-які значення параметрів \vec{b} , вибрані із області $\tilde{\Omega}$, забезпечують допустимі значення усіх виходів y_i .

Розглянуті у попередньому розділі методи локалізації є непридатними для допустимого оцінювання розв'язку системи (4.1), оскільки вони забезпечують гарантовані, тобто «зовнішні» оцінки параметрів. Однак ідея застосування властивостей насиченого блоку ІСНАР (1.24) може бути використана для знаходження допустимої області [63].

Розглянемо випадок, коли система (4.1) складається із $N = m$ рівнянь. Таке припущення є цілком реальним, оскільки кількість контрольованих виходів y_i системи переважно, є меншою від кількості параметрів і увівши додаткові обмеження на область зміни значень деяких параметрів b_j завжди можемо прийти до випадку $N = m$.

Як і раніше, при розгляді інтервальної системи рівнянь (4.1) для випадку $N = m$ вважатимемо, що матриця \tilde{F} є не виродженою, тобто $\det(\tilde{F}) \neq 0$, $\text{rang}(\tilde{F}) = m$. Тоді розв'язком системи (4.1) є область $\tilde{\Omega}_m$, яка в просторі параметрів визначає паралелотоп із вершинами $\delta\vec{b}_s$.

Проведемо заміни у формулі (1.31): \vec{b}_s на $\delta\vec{b}_s$, вектор \vec{Y}_s на вектор $\delta\vec{Y}_s$, складений із комбінацій нижніх та верхніх меж інтервалів $[\delta y_i^-, \delta y_i^+]$ відхилень вихідної характеристики від номінального значення. У результаті отримаємо вираз для обчислення координат вершин $\delta\vec{b}_s$

$$\delta\vec{b}_s = \tilde{F}^{-1} \cdot \delta\vec{Y}_s, \quad s = 1, \dots, 2^m. \quad (4.2)$$

Будемо шукати допустиму оцінку, отриманої області $\tilde{\Omega}_m$, у класі еліпсоїдів Q_m^- із максимальним об'ємом із розв'язку такої задачі:

$$V(Q_m^-) \xrightarrow{Q_m^-} \max, \quad Q_m^- \subset \tilde{\Omega}_m, \quad (4.3)$$

де $V(Q_m^-)$ – об'єм допустимого m -вимірного еліпсоїда.

Очевидно, що завдяки симетрії паралелотопа $\tilde{\Omega}_m$, допустимий (вписаний) еліпсоїд Q_m^- з максимальним об'ємом повинен дотикатися до усіх його граней.

Задача (4.3) є достатньо складною задачею математичного програмування. Однак, користуючись властивостями області $\tilde{\Omega}_m$, її загальний розв'язок можна отримати в аналітичному вигляді. Для цього спочатку сформулюємо і доведемо допоміжне твердження [64].

Л е м а 4.1. Для $N = m$ у паралелотоп $\tilde{\Omega}_m$ можна вписати m -вимірний еліпсоїд

$$Q_m^- = \left\{ \delta\vec{b} \in R^m \mid (\delta\vec{b} - \delta\vec{b}^{\bar{\bar{}}})^T \cdot \tilde{F}^T \cdot \tilde{E}^{-2} \cdot \tilde{F} \cdot (\delta\vec{b} - \delta\vec{b}^{\bar{\bar{}}}) \leq 1 \right\}, \quad (4.4)$$

що дотикається до центрів усіх граней і з центром ваги

$$\delta\vec{b}^{\bar{\bar{}}} = \tilde{F}^{-1} \cdot \delta\vec{Y}^{\bar{\bar{}}}.$$

У виразі (4.4) \tilde{E} – діагональна матриця допусків $\tilde{\Delta}_i = 0,5 \cdot (\delta y_i^+ - \delta y_i^-)$ ($i = 1, \dots, m$) відхилень вихідних характеристик об'єкта. Вектор $\delta\vec{Y}^{\bar{\bar{}}}$ має такий вигляд: $\delta\vec{Y}^{\bar{\bar{}}} = (\delta\bar{y}_1, \dots, \delta\bar{y}_i, \dots, \delta\bar{y}_m)^T$, $\delta\bar{y}_i = 0,5 \cdot (\delta y_i^+ + \delta y_i^-)$.

Доведення [64]. Як витікає із властивостей паралелотопа $\tilde{\Omega}_m$, досліджених у працях [31, 61], у просторі параметрів він утворений N парами паралельних граней. Його вершини $\delta\vec{b}_s$ належать одній грані, якщо у формулі (4.2) відповідні вектори $\delta\vec{Y}_s$ мають хоча б по одній спільній i -ій компоненті. Нехай вершини, $\delta\vec{b}_s^i, s = 1, \dots, 2^{m-1}$ належать одній грані. Позначимо за $\delta\vec{Y}_s^i$ відповідні до них вектори у формулі (4.2). Кожна грань паралелотопа $\tilde{\Omega}_m$ є також симетричним $(m-1)$ -вимірним паралелотопом (паралелограмом). Центр ваги i -ої грані обчислюємо за формулою [64]:

$$\delta\vec{b}^i = \frac{1}{2^{m-1}} \sum_{k=1}^{2^{m-1}} \delta\vec{b}_s^i = \frac{1}{2^{m-1}} \cdot \tilde{F}^{-1} \sum_{k=1}^{2^{m-1}} \delta\vec{Y}_s^i. \quad (4.5)$$

Підставимо у вираз (4.4) (із заміною знака « \leq » на знак « $=$ »), замість $\delta\vec{b}$ значення $\delta\vec{b}^i$, обчислене згідно із виразом (4.5), отримаємо:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2^{m-1}} \cdot \tilde{F}^{-1} \cdot \sum_{s=1}^{2^{m-1}} \delta\vec{Y}_s^i - \tilde{F}^{-1} \cdot \delta\vec{Y} \right)^T \cdot \tilde{F}^T \cdot \tilde{E}^{-2} \cdot \tilde{F} \cdot \left(\frac{1}{2^{m-1}} \cdot \tilde{F}^{-1} \cdot \sum_{s=1}^{2^{m-1}} \delta\vec{Y}_s^i - \tilde{F}^{-1} \cdot \delta\vec{Y} \right) = \\ & = \left(\frac{1}{2^{m-1}} \cdot \sum_{s=1}^{2^{m-1}} \delta\vec{Y}_s^i - \delta\vec{Y} \right)^T (\tilde{F}^T)^{-1} \cdot \tilde{F}^T \cdot \tilde{E}^{-2} \cdot \tilde{F} \cdot \tilde{F}^{-1} \cdot \left(\frac{1}{2^{m-1}} \cdot \sum_{s=1}^{2^{m-1}} \delta\vec{Y}_s^i - \delta\vec{Y} \right) = \\ & = (\delta\vec{y}_1 - \delta\vec{y}_1, \dots, \delta y_i^+ - \delta\vec{y}_i, \dots, \delta\vec{y}_m - \delta\vec{y}_m) \cdot \tilde{E}^{-2} \cdot (\vec{y}_1 - \delta\vec{y}_1, \dots, \delta y_i^+ - \delta\vec{y}_i, \dots, \delta\vec{y}_m - \delta\vec{y}_m)^T = \\ & = (0, \dots, \pm\tilde{\Delta}_i, \dots, 0) \cdot \text{diag}(\tilde{\Delta}_1^{-2}, \dots, \tilde{\Delta}_i^{-2}, \dots, \tilde{\Delta}_m^{-2}) \cdot (0, \dots, \pm\tilde{\Delta}_i, \dots, 0)^T = 1. \end{aligned}$$

Отримане рівняння підтверджує істинність леми. Очевидно, що аналогічні рівняння можна отримати, коли підставити у вираз (4.4) центри будь-якої i -ої пари граней.

Зауважимо, що у випадку симетричності усіх інтервалів $[y_i^-, y_i^+]$ допустимих значень вихідних характеристик відносно їхніх номінальних значень y_{0i} , еліпсоїд (4.4) матиме такий вигляд:

$$Q_m^- = \left\{ \delta\vec{b} \in R^m \mid (\delta\vec{b})^T \cdot \tilde{F}^T \cdot \tilde{E}^{-2} \cdot \tilde{F} \cdot (\delta\vec{b}) \leq 1 \right\},$$

тобто його центр співпадатиме із нульовою точкою.

Доведена лема 4.1 дає можливість показати істинність наступного твердження [38].

Т е о р е м а 4.1. Розв'язком задачі (4.3) є еліпсоїд (4.4).

Доведення. Позначимо об'єм еліпсоїда (4.4) за V_0 . Припустимо, що існує деякий еліпсоїд

$$Q_m' = \left\{ \delta \vec{b} \mid (\delta \vec{b} - \delta \vec{b})^T \cdot H \cdot (\delta \vec{b} - \delta \vec{b}) \leq 1 \right\}, Q_m' \subset \tilde{\Omega}_m, \quad (4.6)$$

із центром симетрії у точці $\delta \vec{b}$, конфігурація і об'єм V' якого визначається додатноозначеною матрицею H , і при цьому справджується нерівність:

$$V' > V_0. \quad (4.7)$$

Очевидно, що співпадіння центрів симетрії еліпсоїда Q_m' і многогранника $\tilde{\Omega}_m$ є необхідним, оскільки в іншому випадку еліпсоїд не дотикатиметься до усіх граней $\tilde{\Omega}_m$. Для підтвердження нерівності (4.7) необхідно відшукати відповідну матрицю H .

В силу симетричності еліпсоїда Q_m' компоненти матриці конфігурації H можна визначити із умов дотику еліпсоїда до m граней многогранника у деяких точках $\delta \vec{b}^i$, $i = 1, \dots, m$. Не обмежуючи загальності припустимо, що ці точки розміщені на гранях паралелотопа $\tilde{\Omega}_m$, які своєю чергою перетинаються у вершині

$$\delta \vec{b}_s = \tilde{F}^{-1} \cdot (\delta y_1^+, \dots, \delta y_i^+, \dots, \delta y_m^+)^T.$$

Спочатку знайдемо вектори-нормалі для дотичних до еліпсоїда (4.6) у точках $\delta \vec{b}^i$, $i = 1, \dots, m$, які однозначно належать відповідним граням паралелотопа $\tilde{\Omega}_m$:

$$\vec{n}_i = \frac{\partial((\delta \vec{b} - \delta \vec{b})^T \cdot H \cdot (\delta \vec{b} - \delta \vec{b}))}{\partial \delta \vec{b}} \Bigg|_{\delta \vec{b} = \delta \vec{b}^i} = 2 \cdot H \cdot (\delta \vec{b}^i - \delta \vec{b}), \quad i = 1, \dots, m.$$

З іншого боку, підставляючи в отримане рівняння замість матриці H матрицю $F^T \cdot \tilde{E}^{-2} \cdot \tilde{F}$, після нескладних перетворень отримаємо формулу для вектора-нормалі до i -тої грані паралелотопа у точці $\delta \vec{b}^i$:

$$\vec{n}_i = 2 \cdot \vec{\varphi}(\vec{x}_i) / \tilde{\Delta}_i, \quad i = 1, \dots, m.$$

Прирівнюючи праві частини отриманих рівнянь, запишемо умову дотику поверхні еліпсоїда (4.6) до кожної із m граней паралелотопа:

$$2 \cdot H \cdot (\delta \vec{b}^i - \delta \vec{b}) = 2 \cdot \vec{\varphi}(\vec{x}_i) / \tilde{\Delta}_i, \quad i = 1, \dots, m. \quad (4.8)$$

Зауважимо, що величина $\tilde{\Delta}_i$ також задає відстань від центру $\delta \vec{b}$ до площини, якій належить i -та грань паралелотопа $\tilde{\Omega}_m$.

Тепер задамо $\delta\vec{b}^i$ точку грані паралелотопа $\tilde{\Omega}_m$ у вигляді лінійної комбінації вершин грані, тобто

$$\delta\vec{b}^i = \sum_{s=1}^{2^{m-1}} \lambda_s^i \cdot \delta\vec{b}_s^i, \quad \sum_{s=1}^{2^{m-1}} \lambda_s^i = 1, \quad i = 1, \dots, m$$

і підставимо вираз для цієї точки у рівняння (4.8), отримаємо:

$$H \cdot \left(\sum_{s=1}^{2^{m-1}} \lambda_s^i \cdot \delta\vec{b}_s^i - \vec{\delta b} \right) = \vec{\varphi}(\vec{x}_i) / \tilde{\Delta}_i, \quad i = 1, \dots, m.$$

Зауважимо, що значення λ_s^i для різних граней пов'язані між собою, оскільки еліпсоїд є симетричною фігурою. Тепер підставимо у отриману систему, замість $\delta\vec{b}_s^i$ їхні значення з виразу (4.2) і одночасно перейдемо до матричного вигляду:

$$H \cdot \tilde{F}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{\Delta}_1 & \cdots & \Lambda_{1i} \cdot \tilde{\Delta}_1 & \cdots & \Lambda_{1m} \cdot \tilde{\Delta}_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Lambda_{i1} \cdot \tilde{\Delta}_i & \cdots & \tilde{\Delta}_i & \cdots & \Lambda_{im} \cdot \tilde{\Delta}_i \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Lambda_{m1} \cdot \tilde{\Delta}_m & \cdots & \Lambda_{mi} \cdot \tilde{\Delta}_m & \cdots & \tilde{\Delta}_m \end{pmatrix} = \tilde{F}^T \cdot \tilde{E}^{-1},$$

$$\text{де } \Lambda_{ji} = \sum_{s=1}^{2^{m-1}} \lambda_s^i \cdot \frac{\Delta_j^s}{\tilde{\Delta}_j}, \quad \Delta_j^s \in \{-\tilde{\Delta}_j, \tilde{\Delta}_j\}, \quad j = 1, \dots, m.$$

Позначимо

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \Lambda_{1i} & \cdots & \Lambda_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Lambda_{i1} & \cdots & 1 & \cdots & \Lambda_{im} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Lambda_{m1} & \cdots & \Lambda_{mi} & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Із урахуванням вищевиконаних перетворень та уведеного позначення система (4.8) остаточно матиме такий вигляд:

$$H \cdot \tilde{F}^{-1} \cdot \tilde{E} \cdot \Lambda = \tilde{F}^T \cdot \tilde{E}^{-1}. \quad (4.9)$$

Розв'язуючи систему (4.9) відносно матриці конфігурації H при фіксованій матриці Λ , отримаємо:

$$H = \tilde{F}^T \cdot \tilde{E}^{-1} \cdot \Lambda^{-1} \cdot \tilde{E}^{-1} \cdot \tilde{F}. \quad (4.10)$$

Оскільки матриця H – додатноозначена [32], а $\text{rang}(\tilde{F}) = m$, то із формули (4.10) випливає, що матриця Λ також є додатноозначеною.

Тепер порівняємо об'єми еліпсоїда, заданого виразом (4.4) та еліпсоїда Q'_m (4.6) із урахуванням того, що ці об'єми обернено пропорційні визначникам їхніх матриць конфігурацій:

$$\frac{V_0}{V'} = \frac{\sqrt{1/\det(\tilde{F}^T \cdot \tilde{E}^{-2} \cdot \tilde{F})}}{\sqrt{1/\det(\tilde{F}^T \cdot \tilde{E}^{-1} \cdot \Lambda^{-1} \cdot \tilde{E}^{-1} \cdot \tilde{F})}} = \sqrt{\frac{1}{\det(\Lambda)}}. \quad (4.11)$$

Користуючись нерівністю Адамара для додатноозначених матриць [158, теорема 1.1.11]

$$\det(\Lambda) \leq \prod_{i=1}^m \Lambda_{ii},$$

приходимо до такої нерівності: $\det(\Lambda) \leq 1$. Підставимо отриману нерівність у вираз (4.11), отримаємо $V' \leq V_0$, що суперечить зробленому припущенню (4.7) ($V' > V_0$) і підтверджує істинність теореми 4.1.

Отримана при доведенні теореми 4.1 формула (4.10) фактично задає матриці конфігурації множини можливих m -вимірних еліпсоїдів (4.6), вписаних у допустиму область $\tilde{\Omega}_m$. Для визначення конкретного еліпсоїда із множини необхідно задати матрицю Λ . Розглянемо деякі важливі властивості елементів множини еліпсоїдів, які пов'язані із властивостями додатноозначеної матриці Λ [38].

1. Якщо усі діагональні елементи матриці Λ дорівнюють 1, тобто $\Lambda_{ii} = 1$, $\forall i = 1, \dots, m$, то еліпсоїд (4.6) дотикається до усіх граней допустимої області $\tilde{\Omega}_m$.

Справедливість властивості впливає безпосередньо із умов (4.8), на основі яких була отримана матриця Λ .

2. Якщо $\Lambda_{ii} < 1$, то еліпсоїд (4.6) не дотикається до відповідної i -тої пари граней.

Оскільки центри симетрії еліпсоїда (4.6) і допустимої області співпадають, то достатньо показати істинність цієї властивості у випадку i -тої грані. Покладемо у матриці Λ : $\Lambda_{ii} = \lambda < 1$, де λ – деяке додатне число (в силу додатної означеності матриці Λ). Тоді у системі (4.8) i -те рівняння матиме такий вигляд:

$$H \cdot (\delta \vec{b}^i - \vec{\delta b}) = \vec{\varphi}(\vec{x}_i) / \lambda \cdot \tilde{\Delta}_i,$$

тобто задаватиме умову дотику еліпсоїда (4.6) до площини, віддаленої від його центру \vec{b} на відстань $\lambda \cdot \tilde{\Delta}_i$ і паралельної i -тій грані паралелографа $\tilde{\Omega}_m$. Оскільки площина, якій належить i -та грань області $\tilde{\Omega}_m$, віддалена від центру \vec{b} еліпсоїда на відстань $\tilde{\Delta}_i$, яка при $\lambda < 1$ є більшою від $\lambda \cdot \tilde{\Delta}_i$, то дана площина і, відповідно, i -та грань не мають спільних точок із еліпсоїдом (4.6).

Властивість 3. Якщо $\exists i$, що $\Lambda_{ii} > 1$, то еліпсоїд (4.6) виходить за межі допустимої області.

Доведення даної властивості можна побудувати по аналогії із доведенням властивості 2, враховуючи, що еліпсоїд виходить за межі допустимої області тільки тоді, коли він перетинає хоча б одну i -ту грань області $\tilde{\Omega}_m$.

Розглянуті властивості мають велике практичне значення, оскільки за допомогою матриці Λ уможливають підібрати еліпсоїдну оцінку допустимої області у такий спосіб, щоб максимально наблизити її до вигляду області розсіювання параметрів і таким чином максимізувати допуски.

З іншого боку, для забезпечення максимальних допусків параметрів, необхідно забезпечити результати технологічного процесу такими, щоб технологічна область розсіювання значень параметрів об'єкта співпадала із отриманою оптимальною оцінкою допустимої області у вигляді еліпсоїда (4.4).

Зауважимо, що при лінеаризації характеристик статичної системи часто застосовують логарифмічні значення параметрів. У цьому випадку система інтервальних рівнянь матиме такий вигляд:

$$y_i^- \leq y_{i0} + \sum_{j=1}^m \left. \frac{\partial g_i(\vec{b})}{\partial \ln b_j} \right|_{\vec{b}=\vec{b}_0} \cdot \delta b_j \leq y_i^+, \quad i=1, \dots, N, \quad (4.12)$$

де $\delta b_j = \ln(b_j) - \ln(b_{oj})$.

Особливістю розкладу за логарифмічними змінними є те, що при малому значенні δb_j воно наближається до значення відносного відхилення параметра b_j від номінального b_{oj} , тобто:

$$\delta b_j \approx |b_j - b_{oj}| / b_{oj}.$$

На закінчення зауважимо, що розглянутий метод допустимого оцінювання m -вимірним еліпсоїдом ґрунтується на відомій залежності між вихідною змінною і параметрами моделі. Проте у більшості практичних випадків цю залежність необхідно встановити у процесі ідентифікації на основі даних експерименту. Саме цей випадок розглянуто у наступному підрозділі.

4.2. Побудова допустимих еліпсоїдних оцінок множини параметрів інтервальних моделей статичних систем

4.2.1. Допустима еліпсоїдна оцінка у випадку локалізації параметрів моделі

Нехай у результаті експериментальної ідентифікації отримано інтервальні моделі статичної системи у вигляді лінійно-параметричних функцій $\hat{y}_i(\vec{x}) = \vec{\varphi}_i^T(\vec{x}) \cdot \vec{b}$, $\vec{b} \in \Omega$, $i=1, \dots, N$. Позначимо вектор значень базисних функцій

$\vec{\phi}_i^T(\vec{x})$ рівняння i -тої вихідної характеристики y_i системи для фіксованого вектора входів \vec{x}_i за $\vec{\phi}_i^T = (\phi_{i1}, \dots, \phi_{ij}, \dots, \phi_{im})$. У загальному випадку значення векторів \vec{x}_i для різних виходів можуть відрізнятися між собою. Відповідно до припущень, на які спирається метод аналізу інтервальних даних (див. підрозділ 1.4), значення кожної i -тої вихідної характеристики для фіксованого вектора входів \vec{x}_i гарантовано належить до відповідних інтервалів прогнозування, межі яких визначаємо за такими формулами:

$$\hat{y}_i^- = \min_b \sum_{j=1}^m \phi_{ij} \cdot b_j, \vec{b} \in \Omega, \hat{y}_i^+ = \max_b \sum_{j=1}^m \phi_{ij} \cdot b_j, \vec{b} \in \Omega, \quad i = 1, \dots, N. \quad (4.13)$$

Розглянемо задачу знаходження допустимої області параметрів для отриманих інтервальних моделей з межами коридору прогнозування у вигляді виразу (4.13). Очевидно, що у даному випадку задача допустимого оцінювання суттєво відрізняється від розглянутої у підрозділі 4.1. Задаючи інтервали допустимих значень виходів $[y_i^-, y_i^+]$ для фіксованого вектора входів \vec{x}_i та із врахуванням уведених позначень приходимо до системи (4.1). Проте у даному випадку вектори $\delta\vec{Y}^-, \delta\vec{Y}^+$ складені із верхніх та нижніх меж інтервалів $[\delta y_i^-, \delta y_i^+]$ відхилень вихідної характеристики не від номінального значення, а від граничних значень інтервалу прогнозування $[\hat{y}_i] = [\hat{y}_i^-; \hat{y}_i^+]$, тобто вирази для їхнього обчислення набувають такого вигляду:

$$\delta y_i^- = y_i^- - \hat{y}_i^-, \delta y_i^+ = y_i^+ - \hat{y}_i^+, \quad i = 1, \dots, N. \quad (4.14)$$

Відповідно, компоненти вектора $\delta\vec{b} = (\delta b_1, \dots, \delta b_m)^T$, отриманого із розв'язку системи (4.1), задаватимуть відхилення значень параметрів від граничних точок області Ω .

Особливістю отриманої системи (4.1) для даного випадку є те, що існування її розв'язків залежить від ширини інтервалів прогнозування $[\hat{y}_i] = [\hat{y}_i^-; \hat{y}_i^+]$. Зокрема, по цій причині система (4.1) може не мати розв'язків. Тоді це означає, що області допусків $\tilde{\Omega}$ не існує. Сформулюємо необхідні умови існування області $\tilde{\Omega}$ у вигляді твердження.

Т е о р е м а 4.2. Для існування області допусків необхідно виконання включень

$$[\hat{y}_i^-; \hat{y}_i^+] \subseteq [y_i^-, y_i^+], \quad \forall i = 1, \dots, N. \quad (4.15)$$

Доведення. Нехай включення (4.15) не справджується хоча б для одного i . Тоді з формули (4.14) випливає: $\delta y_i^- > \delta y_i^+$, що суперечить прийнятому означенню інтервала і відповідно підтверджує правильність теореми.

Як витікає із теореми 4.2, для існування області допусків $\tilde{\Omega}$ необхідно за-

безпечити певну точність прогнозування у точках \bar{x}_i . Звідси стає очевидним, що для отримання області допусків, наприклад, із заданим об'ємом, раціонально сумістити процедури ідентифікації параметрів моделі (локалізації) і допустимого оцінювання.

Застосуємо для цих цілей метод локалізації параметрів моделей із виділенням насиченого блоку експерименту, але дещо модифікований по відношенню до розглянутого у розділі 3.

Як і у попередньому підрозділі будемо розглядати випадок, коли система (4.1) складається із $N = m$ рівнянь, а допустиму оцінку розв'язку цієї системи шукатимемо у класі еліпсоїдів Q_m^- із максимальним об'ємом із розв'язку задачі (4.3).

Спочатку задамо локалізаційну область на $k = 0$ ітерації. Для цього покладемо у формулі (4.14) $\hat{y}_i^- = 0$, $\hat{y}_i^+ = 0$, $\forall i = 1, \dots, N$ і підставимо отримані значення $\delta y_i^-, \delta y_i^+$, відповідно, у вектори $\delta \bar{Y}^-, \delta \bar{Y}^+$ системи рівнянь (4.1). Розв'язком цієї системи є деяка допустима область $\tilde{\Omega}_m$, яка буде використана у локалізаційному методі взамін області Ω_m , отримуваної із розв'язку задачі (3.6). Проведемо ще одну заміну, а саме, замість рекурентних формул (3.8) використаємо такі:

$$\hat{y}_i^-(k+1) = \hat{y}_i^-(k) + \delta_i^-(k+1), \quad \hat{y}_i^+(k+1) = \hat{y}_i^+(k) - \delta_i^+(k+1), \quad i = 1, \dots, m. \quad (4.16)$$

Далі схема локалізаційного методу залишається незмінною, тобто шляхом проведення k -того спостереження у точках \bar{x}_i на кожній ітерації поступово уточнюємо інтервальні моделі, тобто зменшуємо ширину інтервалів прогнозування $[\hat{y}_i^-; \hat{y}_i^+]$.

Проведені модифікації локалізаційного методу дали можливість сумістити процедури ідентифікації параметрів моделі (локалізації) і допустимого оцінювання. Причому на кожній ітерації формули (4.14) набувають рекурентного вигляду:

$$\delta y_i^-(k) = y_i^- - \hat{y}_i^-(k), \quad \delta y_i^+(k) = y_i^+ - \hat{y}_i^+(k), \quad i = 1, \dots, N. \quad (4.17)$$

Підставляючи значення $\delta y_i^-(k)$, $\delta y_i^+(k)$ із формули (4.17) у вектори $\delta \bar{Y}^-, \delta \bar{Y}^+$, а останні у формулу (4.1) та із урахуванням теореми 4.1 отримаємо рекурентну формулу для допустимої області у вигляді еліпсоїда:

$$Q_m^-(k+1) = \left\{ \delta \bar{b} \in R^m \mid (\delta \bar{b} - \bar{\delta b}(k+1))^T \cdot \tilde{F}^T \cdot \tilde{E}^{-2}(k+1) \cdot \tilde{F} \cdot (\delta \bar{b} - \bar{\delta b}(k+1)) \leq 1 \right\}, \quad (4.18)$$

де $\bar{\delta b}(k+1)$ – вектор, який задає центр ваги допустимого еліпсоїда на k -тій ітерації і визначається за формулою

$$\bar{\delta b}(k+1) = \tilde{F}^{-1} \cdot 0,5 \cdot ((\delta y_1^+(k+1) + \delta y_1^-(k+1)), \dots, (\delta y_i^+(k+1) + \delta y_i^-(k+1)), \dots, (\delta y_m^+(k+1) + \delta y_m^-(k+1)))^T;$$

$\tilde{E}(k+1)$ – діагональна матриця допусків, відхилень вихідних характеристик, отриманих на k -тій ітерації

$$\tilde{E}(k+1) = \text{diag}\{0,5 \cdot (\delta y_1^+(k+1) - \delta y_1^-(k+1)), \dots, (\delta y_i^+(k+1) - \delta y_i^-(k+1)), \dots, (\delta y_m^+(k+1) - \delta y_m^-(k+1))\}^T.$$

Зауважимо, що кожне спостереження, якщо воно є інформативним, проведене у точці \tilde{x}_i , може одночасно звузити частину, або усі інтервали $[\hat{y}_i^-, \hat{y}_i^+]$, $i = 1, \dots, m$. У просторі параметрів це означає переміщення декількох не паралельних граней області локалізації в сторону зменшення її розмірів. Такий випадок зображено у просторі параметрів на рис. 4.1 для $m = 2$.

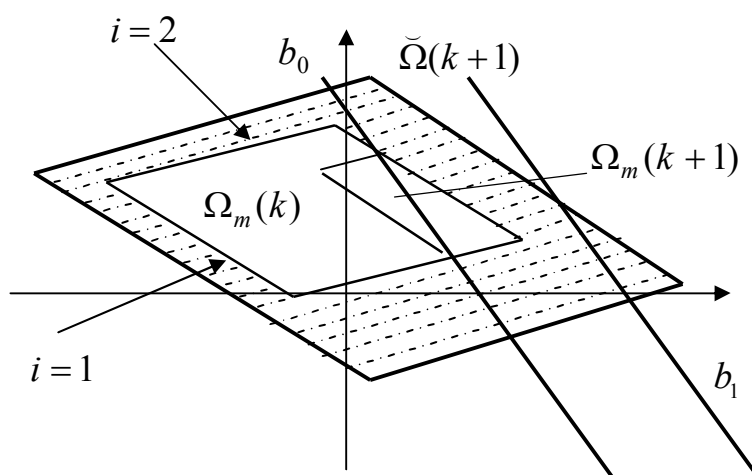


Рис. 4.1. Ілюстрація суміщення процедур локалізації та допустимого оцінювання

Штрих-пунктирними лініями виділена область, із якої побудована допустима область $\tilde{\Omega}_m$, що отримана на k -тій ітерації локалізаційного методу. На рис. 4.2 зображена область $\tilde{\Omega}_m$ та її допустима еліпсоїдна оцінка, побудована згідно з теоремою 4.1.

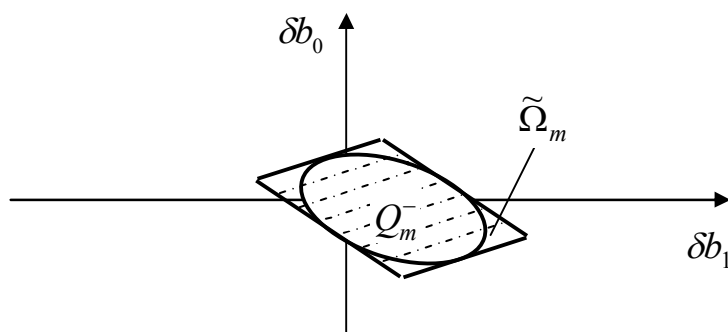


Рис. 4.2. Допустима область параметрів на k -тій ітерації локалізаційного методу

Як бачимо з рис. 4.1 та рис. 4.2, розміри допустимої області тим більші, чим менші розміри області локалізації, тобто чим точніші інтервальні моделі. Очевидно, що найбільших допусків можна отримати, коли відомі номінальні («точні») значення $\vec{b}_0 = (b_{01}, \dots, b_{0m})^T$ параметрів моделі. Результати чисельних експериментів, проведених із застосуванням локалізаційного методу показали, що при збільшенні кількості спостережень розміри локалізаційної області зменшуються, але одночасно зростає частка неінформативних спостережень (див. рис. 3.3). Оскільки запропонований підхід допустимого оцінювання базується на локалізаційному методі, то для його практичної реалізації необхідно задати умову зупинки обчислювальної процедури при досягненні певної допустимої області. Наприклад, ця умова може бути задана так: $V_{\tilde{\Omega}_m}^0 \geq V_{\tilde{\Omega}_m}(k+1)$, де $V_{\tilde{\Omega}_m}^0$ – заданий об'єм допустимої області; $V_{\tilde{\Omega}_m}(k+1)$ – розрахований об'єм на $(k+1)$ -ій ітерації за формулою:

$$V_{\tilde{\Omega}_m}(k+1) = \sqrt{\prod_{i=1}^m (\delta y_i^+(k+1) - \delta y_i^-(k+1))^2 \cdot \det(\tilde{F} \cdot \tilde{F}^T)^{-1}}.$$

4.2.2. Допустиме оцінювання параметрів лінеаризованої інтервальної моделі в умовах ідентифікації базисних функцій

Розглянемо випадок, коли залежність виходів y_i об'єкта від його входів \vec{x} та параметрів \vec{b} є нелінійною:

$$y_i(\vec{x}, \vec{b}) = g_i \left(\sum_{j=1}^m \varphi_{ij}(\vec{x}, \vec{a}_j) \cdot \vec{b} \right), \quad i = 1, \dots, N, \quad (4.19)$$

де $\varphi_{ij}(\vec{x}, \vec{a}_j)$ ($j = 1, \dots, m$) – базисні функції відомого вигляду з невідомими векторами \vec{a}_j параметрів, які надалі називатимемо коефіцієнтами.

Ідентифікацію невідомих векторів \vec{a}_j здійснюватимемо за результатами незалежних серій спостережень у точках \vec{x}_k ($k = 1, \dots, K$). Причому результати спостережень задано в інтервальному вигляді:

$$\vec{x}_k, [\varphi_{ij}^-(\vec{x}_k, \vec{a}_j); \varphi_{ij}^+(\vec{x}_k, \vec{a}_j)], \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, m, \quad k = 1, \dots, K,$$

де $[\varphi_{ij}^-(\vec{x}_k, \vec{a}_j); \varphi_{ij}^+(\vec{x}_k, \vec{a}_j)]$ – інтервали можливих значень функцій $\varphi_{ij}(\vec{x}, \vec{a}_j)$ ($j = 1, \dots, m$) у точках \vec{x}_k .

У результаті застосування методу аналізу інтервальних даних отримаємо області можливих значень векторів \vec{a}_j і відповідні функціональні коридори:

$$[\hat{\varphi}_{ij}(\vec{x})] = [\hat{\varphi}_{ij}^-(\vec{x}); \hat{\varphi}_{ij}^+(\vec{x})], \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, m.$$

Із урахуванням цих функціональних коридорів, оцінки виходів відповідно до виразу (4.19) матимуть також інтервальний вигляд:

$$[\hat{y}_i(\bar{x}, \bar{b})] = g_i \left(\sum_{j=1}^m [\hat{\phi}_{ij}(\bar{x})] \cdot b_j \right), \quad i = 1, \dots, N. \quad (4.20)$$

Зафіксуємо у виразі (4.20) деякий номінальний вектор параметрів $\bar{b}_0 = (b_{01}, \dots, b_{0m})^T$, який при фіксованому наборі входів \bar{x}_k забезпечує номінальні інтервали виходів $[\hat{y}_{0i}] = [\hat{y}_i(\bar{x}_k, \bar{b}_0)]$. Лінеаризуємо залежності (4.20) із застосуванням розкладу в ряд Тейлора в околі вектора номінальних значень параметрів \bar{b}_0 :

$$[\hat{y}_i(\bar{x}_k, \bar{b} - \bar{b}_0)] = [\hat{y}_{0i}] + \sum_{j=1}^m [\hat{\phi}_{ij}^k] \cdot \delta b_j, \quad i = 1, \dots, N, \quad (4.21)$$

$$\text{де } [\hat{\phi}_{ij}^k] = \left. \frac{\partial g_i \left(\sum_{j=1}^m [\hat{\phi}_{ij}(\bar{x}_k)] \cdot b_j \right)}{\partial b_j} \right|_{\bar{b} = \bar{b}_0}, \quad i = 1, \dots, N.$$

Тепер задамо допустимі, з точки зору функціональної придатності об'єкта, інтервали виходів $[y_i^-, y_i^+]$. Спираючись на теорему 4.2, отримаємо умови забезпечення функціональної придатності об'єкта:

$$[\hat{y}_i(\bar{x}_k, \bar{b})] \subseteq [y_i^-, y_i^+], \quad \forall i = 1, \dots, N.$$

Перепишемо ці умови із урахуванням заміни інтервалів $[\hat{y}_i(\bar{x}_k, \bar{b})]$ ($i = 1, \dots, N$), на інтервали, обчислені з виразів (4.21) і користуючись властивостями інтервальних включень [4]:

$$\min_{\hat{\phi}_{ij}^k \in [\hat{\phi}_{ij}^k]} \sum_{j=1}^m \hat{\phi}_{ij}^k \cdot \delta b_j \geq \delta y_i^-; \quad \max_{\hat{\phi}_{ij}^k \in [\hat{\phi}_{ij}^k]} \sum_{j=1}^m \hat{\phi}_{ij}^k \cdot \delta b_j \leq \delta y_i^+, \quad i = 1, \dots, N, \quad (4.22)$$

де $\delta y_i^- = y_i^- - \hat{y}_{0i}^-$; $\delta y_i^+ = y_i^+ - \hat{y}_{0i}^+$.

Покладемо в нерівностях (4.22): $N = m$. Тоді розв'язком системи нерівностей (4.22) при $N = m$ є об'єднана множина $\tilde{\Omega}_{0m}$ допустимих відхилень параметрів δb_j від номінальних значень. У просторі параметрів отриманий розв'язок є неопуклим многогранником, що суттєво ускладнює знаходження його допустимої еліпсоїдної оцінки. Як бачимо із системи (4.22), при звуженні інтервалів $[\hat{\phi}_{ij}^k]$ ($i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, m$) до точкових значень вона стає еквівалентною із системою (4.1), для розв'язку якої у попередньому підрозділі отримано оптимальну допустиму еліпсоїдну оцінку. Отже, чим менша ширина інтервалів $[\hat{\phi}_{ij}^k]$, тим точнішу еліпсоїдну оцінку допустимої області розв'язків системи (4.22) можна отрима-

ти. Наявність інтервалів $[\hat{\phi}_{ij}^k]$ у системі (4.22) призводить до існування множини можливих m -вимірних еліпсоїдів, вписаних у допустиму область $\tilde{\Omega}_{0m}$. Для опису цієї множини складемо таку систему нерівностей:

$$\sum_{j=1}^m \hat{\phi}_{ij}^k \cdot \delta b_j \geq \delta \hat{y}_i^-; \sum_{j=1}^m \hat{\phi}_{ij}^k \cdot \delta b_j \leq \delta \hat{y}_i^+, \quad i=1, \dots, m,$$

де $\hat{\phi}_{ij}^k$ – будь-які значення, вибрані із відповідних інтервалів $[\hat{\phi}_{ij}^k]$.

Позначимо: за $\tilde{F}_k = \{\hat{\phi}_{ij}^k, \quad i=1, \dots, m, j=1, \dots, m\}$ – матрицю розмірності $(m \times m)$; за $[\tilde{F}_k] = \{[\hat{\phi}_{ij}^k], \quad i=1, \dots, m, j=1, \dots, m\}$ – матрицю розмірності $(m \times m)$ із інтервальними компонентами; за $\delta \hat{Y}^- = \{\delta \hat{y}_i^-, i=1, \dots, m\}$, $\delta \hat{Y}^+ = \{\delta \hat{y}_i^+, i=1, \dots, m\}$ – вектори, складені із верхніх та нижніх меж інтервалів $[\delta \hat{y}_i^-, \delta \hat{y}_i^+]$. Із урахуванням уведених позначень, отриману систему перепишемо у матричному вигляді:

$$\delta \hat{Y}^- \leq \tilde{F}_k \cdot \delta \vec{b} \leq \delta \hat{Y}^+. \quad (4.23)$$

Нехай $\tilde{\Omega}_m(\tilde{F}_k)$ – розв'язок системи (4.23) при фіксованому наборі $\hat{\phi}_{ij}^k$ ($i=1, \dots, m, j=1, \dots, m$). Оскільки системи (4.22), (4.23) є лінійними, то справеджується включення:

$$\tilde{\Omega}_m(\tilde{F}_k) \subseteq \tilde{\Omega}_{0m}, \quad \forall \tilde{F}_k \in [\tilde{F}_k],$$

із якого витікає, що розв'язок системи (4.23) є допустимою оцінкою розв'язку системи (4.22). Зауважимо, що включення $\tilde{F}_k \in [\tilde{F}_k]$ означає, що кожна компонента матриці \tilde{F}_k належить відповідному інтервалу-компоненті інтервальної матриці $[\tilde{F}_k]$. Користуючись виразом для оптимальної еліпсоїдної оцінки (4.4), множину допустимих еліпсоїдних оцінок запишемо у такому вигляді:

$$Q_m^-(\tilde{F}_k) = \left\{ \delta \vec{b} \in R^m \mid (\delta \vec{b} - \delta \vec{b}^-)^T \cdot \tilde{F}_k^T \cdot \tilde{E}^{-2} \cdot \tilde{F}_k \cdot (\delta \vec{b} - \delta \vec{b}^-) \leq 1 \right\}, \quad \tilde{F}_k \in [\tilde{F}_k], \quad (4.24)$$

де $\delta \vec{b}^- = \tilde{F}_k^{-1} \cdot \delta \hat{Y}^-$;

\tilde{E} – діагональна матриця допусків $0,5 \cdot (\delta \hat{y}_i^+ - \delta \hat{y}_i^-)$, $i=1, \dots, m$ відхилень вихідних характеристик об'єкта;

$\delta \hat{Y}^- = (\delta \hat{y}_1^-, \dots, \delta \hat{y}_m^-)^T$ – вектор із компонентами $\delta \hat{y}_i^- = 0,5 \cdot (\delta \hat{y}_i^+ + \delta \hat{y}_i^-)$;

На рис 4.3 для випадку $m=2$ схематично зображені: область $\tilde{\Omega}_{0m}$; її допустима оцінка $\tilde{\Omega}_m(\tilde{F}_k)$, обчислена для матриці \tilde{F}_k , компонентами якої є середини інтервалів $[\hat{\phi}_{ij}^k]$ ($i=1, \dots, 2, j=1, \dots, 2$); допустима еліпсоїдна оцінка $Q_m^-(\tilde{F}_k)$.

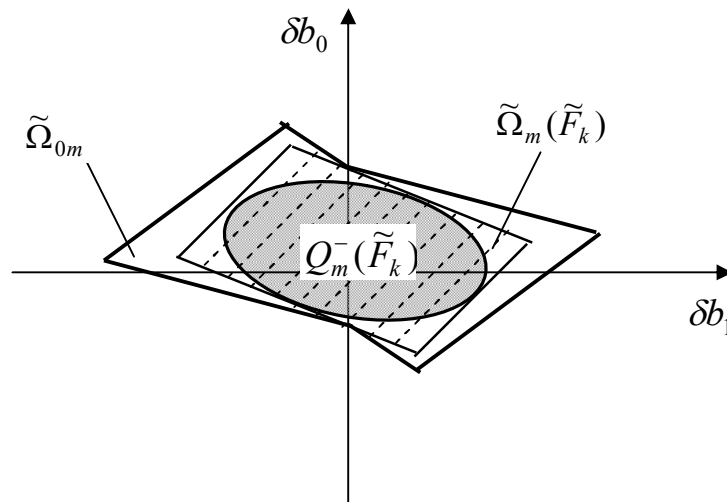


Рис. 4.3. Ілюстрація взаємного розміщення області $\tilde{\Omega}_{0m}$, її допустимої оцінки $\tilde{\Omega}_m(\tilde{F}_k)$ та допустимої еліпсоїдної оцінки для випадку $m=2$

Як бачимо з рис. 4.3, отримані допустима і відповідно еліпсоїдна оцінки є неоптимальними, оскільки не забезпечують максимального «покриття» області $\tilde{\Omega}_{0m}$. Очевидним також є те, що оптимальна допустима оцінка цієї області існує і залежить від вибору матриці $\tilde{F}_k \in [\tilde{F}_k]$, а її пошук може бути формалізований у вигляді такої задачі математичного програмування з нелінійною цільовою функцією:

$$V(Q_m^-(\tilde{F}_k)) \xrightarrow{\tilde{F}_k} \max, \tilde{F}_k \in [\tilde{F}_k], \quad (4.25)$$

де $V(Q_m^-(\tilde{F}_k))$ – об'єм допустимого еліпсоїда.

У загальному випадку процедури знаходження розв'язку задачі (4.25) є достатньо складними. Через нелінійність цільової функції при побудові алгоритму розв'язування (4.25) проблемним також є застосування принципів побудови відомих в інтервальному аналізі алгоритмів «поділу області параметрів» *PPS* та «поділу області розв'язків» *PSS* [174]. Тому, в цих умовах найбільш обґрунтованим буде підхід, коли конфігурацію допустимого еліпсоїда, визначатимемо не із розв'язку задачі (4.25), а обиратимемо виходячи із умови його максимальної подібності до еліпсоїда розсіювання випадкових значень параметрів, заданого, наприклад, із технологічних міркувань. Очевидно, що саме у цьому випадку буде забезпечуватися максимальна імовірність працездатності об'єкта. Якщо ж область розсіювання параметрів є невідомою, то у випадку малої розмірності задачі (4.25) за допустиму еліпсоїдну оцінку можна вибрати найкращу (найбільшого об'єму) серед отриманих для матриць \tilde{F}_k , компонентами яких є комбінації меж інтервалів $[\hat{\phi}_{ij}^k]$ ($i=1, \dots, m, j=1, \dots, m$). Коли ж значення m є достатньо велике і застосування методів повного перебору стає неможливим, то допустиму оцінку можна отримати на основі матриці \tilde{F}_k , компонентами якої є середини інтервалів $[\hat{\phi}_{ij}^k]$ ($i=1, \dots, 2, j=1, \dots, 2$), як це показано на рис. 4.3.

4.3. Оцінка імовірності працездатності статичної системи на основі аналізу допустимої множини параметрів її моделі

У попередніх підрозділах для оцінювання допустимої області $\tilde{\Omega}_m$ параметрів моделей застосовано багатовимірний еліпсоїд. Тим часом як традиційні підходи передбачають застосування для цих цілей інтервальних методів оцінювання.

Очевидно, що еліпсоїдні методи забезпечують менш жорсткі допуски на параметри у порівнянні з інтервальними методами допустимого оцінювання і це особливо відчутно, коли область параметрів моделі є сильно витягнутою. Однак це – неєдина перевага еліпсоїдних методів.

У даному підрозділі проведено аналіз точності систем, при моделюванні яких параметри мають фізичний зміст, а їхні значення чи логарифми їхніх значень розподілені згідно з нормальним законом. Тоді задача аналізу точності статичної системи є задачею оцінювання імовірності її працездатності P_d [47].

У випадку групового процесу формування значень параметрів, що призводить до їхньої корельованості, значення параметрів (у випадку нормального закону розподілу) належать довірчій області у вигляді m -вимірного еліпсоїда. Порівняння довірчої області розсіювання значень параметрів та допустимої області (обидві є еліпсоїдами однакової розмірності) спрощує процедуру оцінювання імовірності працездатності P_d .

Не порушуючи загальності, розглянемо задачу оцінювання імовірності працездатності P_d статичної системи на прикладі забезпечення допустимих статичних режимів роботи радіоелектронних кіл (РЕК).

Як відомо [95], точність радіоелектронної апаратури залежить від точності параметрів компонент, із яких вона складається. Характеристиками (РЕК) можуть бути коефіцієнти підсилення та згасання, струми та напруги на ділянках кола, тощо. Кожна i -та статична характеристика y_i РЕК є функцією параметрів радіоелементів, що задає модель РЕК. Параметри радіоелементів $\vec{b} = (b_1, \dots, b_j, \dots, b_m)^T$ є фізичними величинами. У процесі проектування РЕК знаходять вектор номінальних значень параметрів радіоелементів \vec{b}_0 , який забезпечує номінальні значення вихідних характеристик $g_i(\vec{b}_0)$. У процесі виробництва та експлуатації апаратури реальні значення цих характеристик відрізняються від номінальних. Причому, чим більші відхилення реальних значень від номінальних, тим менша точність радіоелектронної апаратури. Вимоги до точності характеристик об'єкта запишемо у вигляді системи (4.12), попередньо застосувавши до нелінійних у загальному випадку характеристик РЕК $g_i(\vec{b}_0)$ лінеаризацію за логарифмічними значеннями параметрів в околі точки $(\ln(b_{o1}), \dots, \ln(b_{om}))$. Перейдемо у системі (4.12) до допусків для i -тої характеристики РЕК: $\delta y_i^- = y_i^- - y_{i0}$, $\delta y_i^+ = y_i^+ - y_{i0}$. Тоді отримана система матиме такий вигляд [47]:

$$\delta y_i^- \leq \sum_{j=1}^m S_{ij} \cdot \delta b_j \leq \delta y_i^+, \quad i = 1, \dots, N, \quad (4.26)$$

де $S_{ij} = b_j \cdot \left. \frac{\partial y_i(\vec{b})}{\partial (b_j)} \right|_{\vec{b}=\vec{b}_0}$ – чутливість i -тої характеристики РЕК до зміни значення

j -того параметра радіоелементів;

$$\delta b_j = \ln(b_j) - \ln(b_{oj}).$$

Перевагою розкладу за логарифмічними змінними є те, що при малих значеннях δb_j , воно наближається до значення відносного відхилення параметра b_j від номінального і розподілене згідно з нормальним законом.

Отримана система є системою інтервальних рівнянь, із властивостями аналогічними властивостям системи (1.24). Розв'язком системи (4.26) у просторі параметрів $\vec{b} \in R^m$ радіоелементів є область працездатності РЕК, яка одночасно є допустимою областю $\tilde{\Omega}$. Тому надалі область працездатності будемо позначати за $\tilde{\Omega}$.

Розглянемо властивості області працездатності РЕК, користуючись властивостями розв'язків системи (1.24) [47].

1. У m -вимірному просторі параметрів b_1, \dots, b_m область $\tilde{\Omega}$ є опуклим многогранником. Це означає, що будь-яка точка області працездатності є розв'язком системи (4.26).

2. Область працездатності є областю допустимих відхилень δb_j параметрів радіоелементів від номінальних значень. Будь-який вектор відхилень $\vec{\delta b}$, що належить області $\tilde{\Omega}$ забезпечує повну працездатність РЕК із імовірністю $P_d = 1$.

3. Чим більші розміри області $\tilde{\Omega}$, тим ширші інтервали $[\delta b_j^-, \delta b_j^+]$ допусків параметрів.

4. Розмір області $\tilde{\Omega}$ зручно характеризувати діаметром d , який визначають як відстань між двома найбільш віддаленими точками області. Діаметр області визначають за шириною інтервалів $[\delta y_i^-, \delta y_i^+]$ допустимих значень характеристик РЕК та за матрицею чутливості $S = \{S_{ij}, i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, m\}$. Зокрема, якщо матриця S погано обумовлена, то $d \rightarrow \infty$.

За даних умов метою аналізу точності є оцінка імовірності працездатності P_d – як імовірності «попадання» випадкового вектора $\vec{\delta b} = (\delta b_1, \dots, \delta b_m)^T$ в область працездатності $\tilde{\Omega}$. При виробництві, імовірність працездатності характеризує відсоток виходу придатних РЕК. Для її розрахунку використовують таку формулу [94]:

$$P_d = \int \dots \int_{\tilde{\Omega}} W_{\delta}(y_1, \dots, y_N) dy_1 \dots dy_N,$$

де $W_{\delta}(y_1, \dots, y_N)$ – густина імовірності випадкових відхилень $\delta y_i(\vec{b})$ характеристик РЕК.

Як бачимо, дана задача є достатньо складною, оскільки значення $\delta y_i(\vec{b})$ є корельованими. Переважно для її розв'язування використовують наближені методи, зокрема, метод Монте-Карло [95]. Причому кількість випробовувань, залежно від заданої точності розрахунку, може сягати декількох тисяч, що є основним недоліком такого підходу. До того ж, у методі Монте-Карло задані закони розподілу випадкових значень параметрів радіоелементів змінюються за рахунок похибок заокруглень на ЕОМ, що призводить до втрати точності.

Розглянемо випадок, коли кількість характеристик РЕК та параметрів радіоелементів співпадає, тобто $N = m$. Тоді матриця чутливостей S у системі (4.26) є квадратною ($m \times m$), а область працездатності у просторі параметрів є паралелотопом $\tilde{\Omega}_m$. Припустимо, що $\text{rang}(S) = m$. У цьому випадку область працездатності можна оцінити допустимим еліпсоїдом (4.4). Із урахуванням заміни матриці $\tilde{F} = \{\phi_{ij}, i = \overline{1, N}, j = \overline{1, m}\}$ на матрицю чутливості S , рівняння еліпсоїда матиме такий вигляд:

$$Q_m^- = \left\{ \vec{\delta b} \in R^m \mid (\vec{\delta b} - \vec{\delta \bar{b}})^T \cdot S^T \cdot \tilde{E}^{-2} \cdot S \cdot (\vec{\delta b} - \vec{\delta \bar{b}}) \leq 1 \right\}. \quad (4.27)$$

У випадку $N < m$, виходячи із фізичних міркувань, можемо визначити систему (4.26) нерівностями $\delta b_j^- \leq \delta b_j \leq \delta b_j^+$, що задають допуски на відхилення параметрів. Утворена система $N = m$ нерівностей (4.26) залишатиметься лінійною.

Коли $N > m$, то система (4.26) переозначена. Для приведення її до випадку $N = m$ нерівностей, необхідно відкинути неінформативні нерівності, які не впливають або не суттєво впливають на розміри області працездатності. Цю процедуру можна виконати, наприклад, із застосуванням методу локалізації з виділенням насиченого блоку.

За дискретної технології виробництва РЕК випадкова величина δb_j розподілена за нормальним або обмеженим нормальним законом [95, 131]. У цьому випадку допустимі значення для відхилень δb_j значень параметрів радіоелементів задають довірчими інтервалами

$$-\vec{\sigma} \cdot u(\alpha) \leq \vec{\delta b} \leq \vec{\sigma} \cdot u(\alpha), \quad (4.28)$$

де $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_m)^T$ – вектор відомих стандартних відхилень значень параметрів радіоелементів;

$u(\alpha)$ – табличне значення (квантиль) нормованого нормального закону розподілу;

α – довірча імовірність.

Знайдемо нижню оцінку $P_d^- < P_d$ імовірності працездатності РЕК на межі області (4.27) за умов (4.28). Для цього підставимо у формулу (4.27) замість $\vec{\delta b}$ вектор довірчих інтервалів $[-\vec{\sigma} \cdot u(\alpha); \vec{\sigma} \cdot u(\alpha)]$, отримаємо:

$$u^2(\alpha) \cdot [\bar{\sigma}^T] \cdot S^T \cdot \tilde{E}^{-2} \cdot S \cdot [\bar{\sigma}] - 2 \cdot u(\alpha) \cdot \bar{\delta z}^T \cdot S^T \cdot \tilde{E}^{-2} \cdot S \cdot [\bar{\sigma}] - \bar{\delta z}^T \cdot S^T \cdot \tilde{E}^{-2} \cdot S \cdot \bar{\delta z} = 1. \quad (4.29)$$

Рівняння (4.29) відносно змінної $u(\alpha)$ є інтервальним квадратним рівнянням. У загальному випадку розв'язками цього рівняння є два інтервали $[u_1^-(\alpha); u_1^+(\alpha)]$ та $[u_2^-(\alpha); u_2^+(\alpha)]$, яким відповідають знайдені у таблиці розподілу [18] інтервали довірчих імовірностей $[\alpha_1^-; \alpha_1^+]$ та $[\alpha_2^-; \alpha_2^+]$. Звідси, оцінку імовірності P_d^- працездатності РЕК визначаємо за формулою:

$$P_d^- = 1 - \max\{\alpha_1^-; \alpha_1^+; \alpha_2^-; \alpha_2^+\}. \quad (4.30)$$

Слід зауважити, якщо центр $\bar{\delta b}$ еліпсоїда (4.27) співпадає з нульовим вектором $\bar{\delta b} = (0, \dots, 0)^T$, то рівняння (4.29) спрощується і набуває такого вигляду:

$$u^2(\alpha) \cdot \bar{\sigma}^T \cdot S^T \cdot \tilde{E}^{-2} \cdot S \cdot \bar{\sigma} = 1. \quad (4.31)$$

Із урахуванням симетричності нормального закону розподілу, з формули (4.31) отримаємо:

$$u(\alpha) = 1 / \bar{\sigma}^T \cdot S^T \cdot \tilde{E}^{-2} \cdot S \cdot \bar{\sigma}.$$

Відповідно:

$$P_d^- = 1 - \alpha. \quad (4.32)$$

У випадку мікроелектронної технології виробництва (груповий процес) кількість N контрольованих характеристик РЕК зменшується, випадкові величини δb_j відхилень параметрів радіоелементів корельовані між собою, а вектор $\bar{\delta b}$ розподілений згідно з багатовимірним нормальним законом [95]. Довірчий еліпсоїд розсіювання для вектора $\bar{\delta b}$ має такий вигляд:

$$Q(\alpha, m) = \{\bar{\delta b} \in R^m \mid \bar{\delta b}^T \cdot D(\bar{\delta b}) \cdot \bar{\delta b} \leq \chi^2(\alpha, m)\}, \quad (4.33)$$

де $D^{-1}(\bar{\delta b})$ – задана коваріаційна матриця відхилень параметрів радіоелементів від номінальних;

$\chi^2(\alpha, m)$ – квантиль χ^2 розподілу.

У цьому випадку для оцінки імовірності працездатності використовуємо формулу (4.32), де довірчу імовірність α знаходимо із розв'язку такої задачі:

$$\chi^2(\alpha, m) \longrightarrow \max, \quad Q(\alpha, m) \subseteq \tilde{\Omega}_m. \quad (4.34)$$

Як видно, дана задача є задачею математичного програмування. Із геометричної точки зору, задача (4.34) означає вписування m -вимірної еліпсоїда розсіювання $Q(\alpha, m)$ з максимальним об'ємом у допустимій області $\tilde{\Omega}_m$. У випадку симетричності усіх інтервалів $[y_i^-, y_i^+]$ допустимих значень вихідних характеристик відносно їхніх номінальних значень y_{0i} (що є бажаним на практиці), центр ваги допустимої області співпадає з точкою $\delta\vec{b} = (0, \dots, 0)^T$. Тоді для розв'язування задачі (4.34) використаємо вирази, які отримано при доведенні теореми 4.1. Зокрема – формулу (4.10), яка задає матриці конфігурації множини можливих еліпсоїдів, вписаних у допустимі області $\tilde{\Omega}_m$. Замінімо у цій формулі матрицю \tilde{F} на матрицю S , а матрицю H – на матрицю $D(\delta\vec{b})/\chi^2(\alpha, m)$ конфігурації еліпсоїда (4.33) приведенного до одиничного радіусу, отримаємо:

$$D(\delta\vec{b})/\chi^2(\alpha, m) = S^T \cdot \tilde{E}^{-1} \cdot \Lambda^{-1} \cdot \tilde{E}^{-1} \cdot S.$$

Розв'яжемо отриману систему відносно матриці $\Lambda' = \Lambda/\chi^2(\alpha, m)$:

$$\Lambda' = \tilde{E}^{-1} \cdot S \cdot D^{-1}(\delta\vec{b}) \cdot S^T \cdot \tilde{E}^{-1}. \quad (4.35)$$

Відповідно до розглянутих у підрозділі 4.1 властивостей 1 та 2 множини еліпсоїдів для діагональних елементів Λ_{ii} матриці Λ виконується така умова: $\Lambda_{ii} \leq 1$, $\forall i = 1, \dots, m$. Причому $\Lambda_{ii} = 1$, $\forall i = 1, \dots, m$, якщо еліпсоїд дотикається до відповідної i -тої пари граней. Тоді для діагональних елементів розв'язку системи (4.35) справджуються умови: $\Lambda'_{ii} \leq 1/\chi^2(\alpha, m)$, $\forall i = 1, \dots, m$. Причому еліпсоїд розсіювання параметрів дотикається до i -тої пари граней, коли $\Lambda'_{ii} = 1/\chi^2(\alpha, m)$.

Із вищевикладеного для даного випадку витікає наступний алгоритм оцінки імовірності працездатності РЕК [38].

Крок 1. Обчислення діагональних елементів Λ'_{ii} матриці Λ' за формулою (4.35).

Крок 2. Розрахунок квантиля χ^2 -розподілу за формулою:

$$\chi^2(\alpha, m) = 1/\max\{\Lambda'_{ii}\}, \quad i = 1, \dots, m. \quad (4.36)$$

Крок 3. Знаходження у таблицях χ^2 -розподілу довірчої імовірності α для значення $\chi^2(\alpha, m)$.

Крок 4. Розрахунок оцінки імовірності працездатності за формулою (4.32).

Очевидно, що отримана вищезазначеним способом нижня межа P_d^- імовірності працездатності – тим ближче до значення P_d , чим більше допустима область співпадає з довірчим еліпсоїдом (4.33) відхилень параметрів від номінального значення.

Приклад [38]. Оцінімо імовірність працездатності P_d подільника напруги, зображеного на рис.4.4, для заданих:

- номінальних значень параметрів $R_{01}=1$ кОм, $R_{02}=2$ кОм;

- вхідної напруги $U_{вх}=9$ В;

- допусків на вихідну напругу $[\delta U_{вих1}^-; \delta U_{вих1}^+] = [-0,1; 0,1]$, $[\delta U_{вих2}^-; \delta U_{вих2}^+] = [-0,3; 0,3]$ та струм $[\delta I_{вих}^-; \delta I_{вих}^+] = [-0,2; 0,2]$;

- технологічного розкиду відносних відхилень $\delta R_1 = |R_1 - R_{01}| / R_{01}$, $\delta R_2 = |R_2 - R_{02}| / R_{02}$ параметрів радіоелементів, який задано еліпсом розсіювання

$$Q(\alpha, m) = \{\delta R_1, \delta R_2 \mid (\delta R_1, \delta R_2) \cdot \begin{pmatrix} 7300 & -3310 \\ -3310 & 3200 \end{pmatrix} \cdot (\delta R_1, \delta R_2)^T \leq \chi^2(\alpha, m)\}.$$

Відповідно до закону Ома, рівняння, що задають зв'язок між вихідними характеристиками подільника (рис. 4.4) та параметрами радіоелементів, мають такий вигляд:

$$U_{вих1} = U_{вх} \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2}, \quad U_{вих2} = U_{вх} \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}, \quad I_{вих} = \frac{U_{вх}}{R_1 + R_2}.$$

Складемо систему інтервальних рівнянь (4.26)

$$\begin{cases} \delta U_{вих1}^- \leq S_{11} \cdot \delta R_1 + S_{12} \cdot \delta R_2 \leq \delta U_{вих1}^+; \\ \delta U_{вих2}^- \leq S_{21} \cdot \delta R_1 + S_{22} \cdot \delta R_2 \leq \delta U_{вих2}^+; \\ \delta I_{вих}^- \leq S_{31} \cdot \delta R_1 + S_{32} \cdot \delta R_2 \leq \delta I_{вих}^+, \end{cases}$$

$$\text{де } S_{11} = S_{22} = U_{вх} \cdot \frac{R_{01} \cdot R_{02}}{(R_{01} + R_{02})^2}; \quad S_{12} = S_{21} = -U_{вх} \cdot \frac{R_{01} \cdot R_{02}}{(R_{01} + R_{02})^2};$$

$$S_{31} = -\frac{R_{01} \cdot U_{вх}}{(R_{01} + R_{02})^2}; \quad S_{32} = -\frac{R_{02} \cdot U_{вх}}{(R_{01} + R_{02})^2}.$$

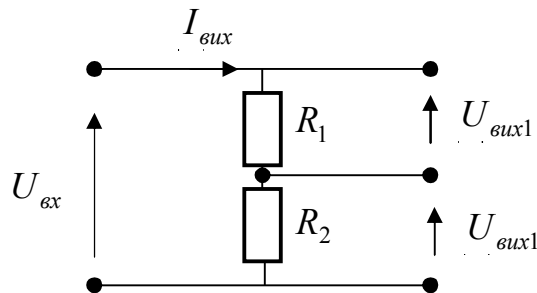


Рис. 4.4. Схема подільника напруги для ілюстрації прикладу оцінювання імовірності його працездатності

В отриману систему підставимо вихідні дані:

$$\begin{cases} -0,1 \leq 2 \cdot \delta R_1 - 2 \cdot \delta R_2 \leq 0,1; \\ -0,3 \leq -2 \cdot \delta R_1 + 2 \cdot \delta R_2 \leq 0,3; \\ -0,2 \leq \delta R_1 + 2 \cdot \delta R_2 \leq 0,2. \end{cases}$$

Як бачимо, друге рівняння системи – «неінформативне», тому допустиму область відхилень

$$\delta R_1 = \ln(R_1) - \ln(R_{01}) \approx |R_1 - R_{01}| / R_{01}, \quad \delta R_2 = \ln(R_2) - \ln(R_{02}) \approx |R_2 - R_{02}| / R_{02}$$

параметрів радіоелементів розраховуватимемо із такої системи:

$$\begin{cases} -0,1 \leq 2 \cdot \delta R_1 - 2 \cdot \delta R_2 \leq 0,1; \\ -0,2 \leq \delta R_1 + 2 \cdot \delta R_2 \leq 0,2. \end{cases}$$

Розв'язок $\tilde{\Omega}_{m=2}$ отриманої системи зображено на рис.4.5. На цьому ж рисунку зображено область розсіювання $Q(\alpha, m=2)$ для довірчої імовірності $\alpha=0,02$.

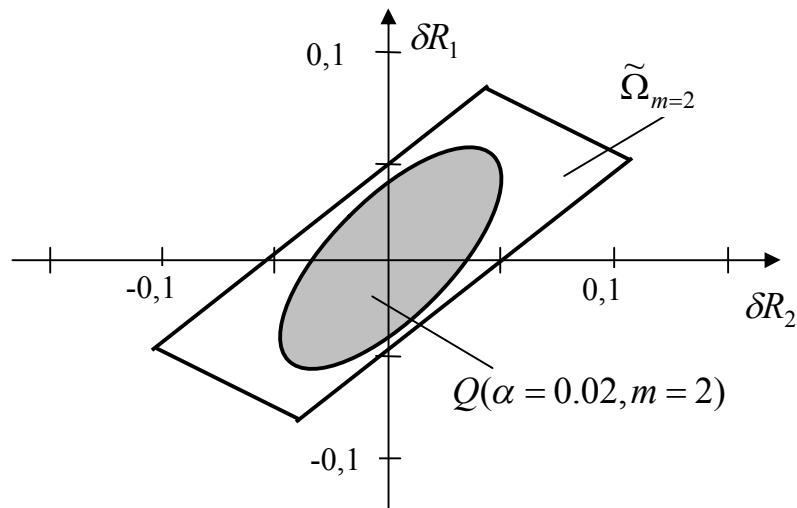


Рис. 4.5. Допустима область відхилень параметрів радіоелементів подільника напруги (схема рис.4.4)

Тепер оцінимо імовірність працездатності подільника напруги при заданому технологічному розкиді параметрів. З цією метою співставимо допустиму $\tilde{\Omega}_{m=2}$ та технологічну $Q(\alpha, m=2)$ область розсіювання. Враховуючи, що центри симетрії цих областей співпадають, для розв'язування даної задачі використаємо розроблений алгоритм.

Розв'яжемо систему рівнянь (4.35) (крок 1). У нашому випадку:

$$\tilde{E} = \begin{pmatrix} 0,1 & 0 \\ 0 & 0,2 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad D(\delta R_1, \delta R_2) = \begin{pmatrix} 7300 & -3310 \\ -3310 & 3200 \end{pmatrix}.$$

Тоді розв'язок (4.35) має такий вигляд:

$$\Lambda' = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7300 & -3310 \\ -3310 & 3200 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,1251 & -0,065 \\ -0,065 & 0,092 \end{pmatrix}.$$

Далі за формулою (4.36) розраховуємо $\chi^2(\alpha, m=2) = 1/0,1251 = 7,99$ (крок 2).

Користуючись таблицями χ^2 - розподілу [18] шукаємо значення довірчої імовірності $\alpha > 0,005$ (крок 3) і підставимо його у формулу для розрахунку нижньої межі P_d^- імовірності працездатності (4.32) (крок 4). У результаті отримаємо: $P_d^- > 0,995$.

Для загального випадку і при великій розмірності еліпсоїда розсіювання, знаходження імовірності працездатності ускладнюється через необхідність застосування складних чисельних процедур для розв'язування задачі (4.34).

Тим часом відомо, що мікроелектронна технологія виготовлення РЕК є груповим процесом, при якому відхилення параметрів δb_j визначають сумою індивідуальних та загальних відхилень [95]. Причому останні є визначальними. Своєю чергою, загальні відхилення параметрів радіоелементів визначають за параметрами технологічного процесу, кількість яких суттєво менша, ніж кількість параметрів радіоелементів. Наприклад, на стадії герметизації мікросхем термореактивною пластмасою цими параметрами є температура герметизації, в'язкість пластмаси та тривалість її перетворення до гелеподібного стану [77].

Цю особливість мікроелектронної технології виробництва РЕК, як групового процесу, можна використати для спрощення розрахунків імовірності працездатності. Для цього взамін функцій $\delta y_i(\vec{b})$ відхилень характеристик РЕК у системі нерівностей (4.26) будемо розглядати функції від вектора параметрів $\vec{\tau}$ технологічного процесу, тобто $\delta y_i(\vec{\tau})$, а елементи S_{ij} матриці чутливості – як чутливості i -тих характеристик РЕК до зміни значень j -тих параметрів технологічного процесу. У цьому випадку розмірності допустимого Q_m^- та довірчого $Q(\alpha, m)$ еліпсоїдів суттєво зменшуються.

Отже, якщо параметри технологічного процесу не залежні між собою, то для оцінки імовірності працездатності системи використовуємо формули (4.29), (4.30) та (4.32) із заміною, відповідно: вектора $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_m)^T$ на вектор стандартних відхилень параметрів технологічного процесу; вектора $\vec{\delta b}$ на вектор $\vec{\delta \tau}$. Якщо ж випадкові величини $\delta \tau_j$ відхилень параметрів технологічного процесу корельовані, а вектор $\vec{\delta \tau}$ розподілений згідно з багатовимірним нормальним законом, то у цьому випадку розв'язуємо задачу (4.34) із заміною у формулі (4.33), відповідно: матриці $D^{-1}(\vec{\delta b})$ на $D^{-1}(\vec{\delta \tau})$ – коваріаційну матрицю відхилень параметрів; вектора $\vec{\delta b}$ на вектор $\vec{\delta \tau}$. Тоді імовірність працездатності оцінюємо за формулою (4.32).

Висновки до розділу

Виділимо основні результати стосовно методів допустимого еліпсоїдного оцінювання параметрів моделей вхід-вихід, наведених у цьому розділі.

Наведений метод отримання допустимої еліпсоїдної оцінки області параметрів лінеаризованої моделі статичної системи уможливорює збільшення допусків на параметри системи. Доведено оптимальність отриманої еліпсоїдної оцінки для випадку, коли кількість вихідних характеристик системи співпадає з кількістю параметрів. Для цього ж випадку виведена формула, що задає множину допустимих областей параметрів у вигляді m -вимірних еліпсоїдів, проведено аналіз властивостей отриманої множини. Сформульовано умови щодо вибору еліпсоїдної оцінки допустимої області у такий спосіб, щоб максимально наблизити її до вигляду технологічної області розсіювання параметрів.

Наведено умови існування області допусків, коли статичну систему описано інтервальними моделями і розглянуто ітераційний алгоритм, у якому розміщено процедури локалізації області параметрів моделі і допустимого еліпсоїдного оцінювання.

На основі аналізу властивостей допустимої області параметрів статичної системи розглянуто спрощений метод та алгоритми оцінювання імовірності працездатності системи для випадку, коли значення параметрів моделі або логарифми їхніх значень розподілені згідно з нормальним законом розподілу. Ефективність методу проілюстрована на прикладі оцінювання імовірності працездатності радіоелектронного кола.

РОЗДІЛ 5

ПЛАНУВАННЯ ЕКСПЕРИМЕНТУ ПРИ ПОБУДОВІ ІНТЕРВАЛЬНИХ МОДЕЛЕЙ СТАТИЧНИХ СИСТЕМ

Існуючі підходи до розв'язування задач планування експерименту з інтервальними даними зорієнтовані на побудову насичених планів, коли кількість спостережень N співпадає з кількістю m невідомих параметрів. Як показано у підрозділі 1.5, критерії оптимальності насичених інтервальних експериментів, переважно, мінімізують розміри області параметрів Ω , чи розміри її еліпсоїдної оцінки. Саме на основі цих критеріїв побудована більшість підходів до планування інтервального експерименту. Тим часом для задач ідентифікації інтервальних моделей більш важливим є забезпечення гарантованої точності прогнозування на усій області експерименту χ . У цих випадках більш обґрунтовано використати I_G -критерій, який мінімізує максимальну на області χ похибку прогнозування $\Delta_{y(\bar{x})}$. Однак результати, наведені у підрозділах 1.4 та 1.5, засвідчують, що планування I_G -оптимальних експериментів ускладнене кусковістю функції похибки прогнозування $\Delta_{y(\bar{x})}$ та вимогами забезпечити гарантовану точність прогнозування, яка досягається тільки за умови $N > m$. Розширення можливостей планування інтервального експерименту є метою даного розділу, зокрема, розглянуто такі задачі [39, 48]:

- знаходження умов еквівалентності між I_G -оптимальними планами та планами, що мінімізують розміри області Ω [48];
- планування I_G -оптимальних насичених експериментів [48];
- побудова процедури послідовно-оптимального планування експериментів [39].

З іншого боку, застосування локалізаційних методів для побудови інтервальних моделей вимагає зосередження процедур планування експерименту на забезпеченні певних властивостей локалізаційної області та властивостей відповідних інтервальних моделей. Для випадку локалізації із виділенням насиченого блоку, у даному розділі наведено метод побудови апріорних планів інтервального експерименту [73].

5.1. Планування апріорних I_G - та I_E -оптимальних експериментів

Нехай відомі результати інтервального експерименту (1.23) з $N \geq m$ спостереженнями, коли область експерименту χ задана n -вимірною кулею з центром у нульовій точці, радіусом ρ :

$$\chi = \{ \bar{x} \in R^n \mid \bar{x}^T \cdot \bar{x} \leq \rho^2 \}. \quad (5.1)$$

і отримано розв'язок задачі ідентифікації у вигляді множини лінійних інтервальних моделей

$$\hat{y}(\bar{x}) = \bar{x}^T \cdot \vec{b}, \quad \vec{b} \in \Omega. \quad (5.2)$$

У цьому випадку максимальне значення похибки прогнозування лінійною інтервальною моделлю (5.2) досягається на поверхні кулі (5.1). Його значення обчислюємо за формулою (1.36)

$$\max_{\vec{x} \in \chi} \Delta_{y(\vec{x})} = I_G = \rho \cdot \max_{\vec{b}_p, \vec{b}_s \in \Omega} \|\vec{b}_p - \vec{b}_s\|,$$

наведеною у пункті 1.4.1. Як бачимо, максимальна похибка прогнозування залежить від розмірів області Ω , зокрема, від її діаметру, квадрат якого мінімізує I_E - критерій:

$$I_E = \left(\max_{\vec{b}_p, \vec{b}_s \in \Omega} \|\vec{b}_p - \vec{b}_s\| \right)^2. \quad (5.3)$$

Т е о р е м а 5.1. Для лінійної інтервальної моделі (5.2) статичної системи на заданій кулею (5.1) області експерименту з $N \geq m$, I_G - та I_E - оптимальні плани є еквівалентними.

Порівнюючи формули (1.36) та (5.3) приходимо до рівняння:

$$I_G = \rho \cdot \sqrt{I_E}, \quad (5.4)$$

яке підтверджує справедливість теореми.

Отже, при виконанні умов теореми 5.1, плани, які мінімізують діаметр області параметрів моделі одночасно забезпечують мінімум максимальної похибки прогнозування.

Перейдемо тепер до задачі знаходження I_G - та I_E - оптимальних насичених планів.

Нехай, інтервальна похибка $\Delta(\vec{x})$ спостережень є постійною в усіх точках області експерименту (5.1), тобто $\Delta(\vec{x}) = \Delta, \forall \vec{x} \in \chi$. Оскільки для побудови лінійної (за входними змінними) інтервальної моделі у вигляді (5.2) матриця плану експерименту X співпадає з матрицею значень базисних функцій F_m , то задачу знаходження I_G - оптимальних планів (« I_E -оптимальних») опускаємо в силу теореми 5.1) розглядаємо як задачу знаходження такої матриці F_m , яка забезпечує мінімальне значення I_G - критерію.

Вираз для I_G - критеріальної функції у випадку насиченого експерименту ($N=m$) отримаємо із формули (1.36), підставляючи замість векторів \vec{b}_p, \vec{b}_s їхні значення $\vec{b}_p = F^{-1} \cdot \vec{Y}_p, \vec{b}_s = F^{-1} \cdot \vec{Y}_s$:

$$I_G = \rho \cdot \max_{p,s=1,\dots,2^m} \|F_m^{-1} \cdot (\vec{Y}_p - \vec{Y}_s)\|.$$

Враховуючи, що вектори \vec{Y}_p, \vec{Y}_s утворені як можливі комбінації меж інтервальних даних $y_i^-, y_i^+, i = 1, \dots, m$, наприклад: $\vec{Y}_p = (y_1^-, y_2^+, y_3^-, \dots, y_m^+)^T$,

$\vec{Y}_s = (y_1^+, y_2^-, y_3^-, \dots, y_m^-)^T$, а інтервальна похибка є постійною, тобто $\Delta(\vec{x}_i) = 0,5 \cdot (y_i^+ - y_i^-) = \Delta$, $\forall i = 1, \dots, m$, отримана формула для I_G - критерію набуде такого вигляду:

$$I_G = 2 \cdot \Delta \cdot \rho \cdot \max_{p=1, \dots, 2^{m-1}} \|F^{-1} \cdot \vec{e}_p\|, \quad (5.5)$$

де \vec{e}_p - вектор, який складено із компонент ± 1 .

Оскільки область експерименту задано n – вимірною кулею (5.1), а в лінійній моделі (5.2) відсутня постійна складова b_0 , то будь-яку точку плану \vec{x}_i для побудови цієї моделі можна задати напрямком \vec{z}_i , $\|\vec{z}_i\| = 1$ та відстанню r_i , $0 \leq r_i \leq \rho$ від центру кулі, тобто:

$$\vec{x}_i = r_i \cdot \vec{z}_i.$$

Визначимо матрицю плану експерименту F_m за допомогою уведеного позначення:

$$F_m = (r_1 \cdot \vec{z}_1, \dots, r_m \cdot \vec{z}_m)^T. \quad (5.6)$$

Тепер використовуючи вираз (5.5) із урахуванням позначення (5.6), задачу знаходження I_G - оптимальних насичених планів формалізуємо у такому вигляді:

$$2 \cdot \Delta \cdot \rho \cdot \max_{p=1, \dots, 2^{m-1}} \|((r_1 \cdot \vec{z}_1, \dots, r_m \cdot \vec{z}_m)^T)^{-1} \cdot \vec{e}_p\| \xrightarrow{Z, r_i} \min, \\ 0 \leq r_i \leq \rho, \|\vec{z}_i\| = 1, i = 1, \dots, m, \quad (5.7)$$

де $Z = (\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_m)^T$.

Т е о р е м а 5.2. Розв'язком задачі (5.7) є план

$$F^* = \rho \cdot Z^*, \quad (5.8)$$

де $Z^* = (\vec{z}_1^*, \dots, \vec{z}_m^*)^T$ – будь-яка ортогональна матриця.

Покажемо істинність теореми.

Зафіксуємо матрицю Z у виразі (5.7) вважаючи її не виродженою та за умови: $\|\vec{z}_i\| = 1, i = 1, \dots, m$. Тоді із урахуванням перетворення

$$\|((r_1 \cdot \vec{z}_1, \dots, r_m \cdot \vec{z}_m)^T)^{-1} \cdot \vec{e}_p\| = \left\| \left(\frac{1}{r_1} \cdot \vec{z}_1, \dots, \frac{1}{r_m} \cdot \vec{z}_m \right)^T \cdot \vec{e}_p \right\| = \sqrt{\sum_{i=1}^m \frac{1}{r_i^2} \cdot (\vec{z}_i^T \cdot \vec{e}_p)^2},$$

де $(\vec{z}_1^*, \dots, \vec{z}_m^*)^T = Z^{-1}$, задачу (5.7) запишемо у такому вигляді:

$$2 \cdot \Delta \cdot \rho \cdot \max_{p=1, \dots, 2^{m-1}} \sqrt{\sum_{i=1}^m \frac{1}{r_i^2} \cdot \vec{z}_i^T \cdot \vec{e}_p} \xrightarrow{r_i} \min, \quad 0 \leq r_i \leq \rho, \quad i = 1, \dots, m. \quad (5.9)$$

Очевидно, що розв'язком цієї задачі для фіксованої матриці $Z \in \mathbb{R}^{m \times m}$: $r_i = \rho, \forall i = 1, \dots, m$. Як наслідок, із урахуванням позначення (5.6), – розв'язком задачі (5.7) є матриця $F^* = \rho \cdot Z$.

Тепер покажемо, що матриця $Z = Z^*$ є ортогональною. Для цього перетворимо вираз (5.7), поклавши $r_i = \rho, \forall i = 1, \dots, m$ із розв'язку задачі (5.9), отримаємо:

$$2 \cdot \Delta \cdot \max_{p=1, \dots, 2^{m-1}} \sqrt{\vec{e}_p^T \cdot (Z \cdot Z^T)^{-1} \cdot \vec{e}_p} \xrightarrow{Z} \min, \quad \|\vec{z}_i\| = 1, \quad i = 1, \dots, m. \quad (5.10)$$

Нехай розв'язком задачі (5.10) є ортогональна матриця Z^* . Тоді згідно з формулою (5.5) для I_G - критеріальної функції та із урахуванням позначення (5.6), отримаємо:

$$I_G = 2 \cdot \Delta \cdot \rho \cdot \max_{p=1, \dots, 2^{m-1}} \|(\rho \cdot Z^*)^{-1} \cdot \vec{e}_p\| = 2 \cdot \Delta \cdot \sqrt{m}.$$

Підставимо отриманий вираз замість I_G у вираз (5.4) і визначимо значення I_E - критеріальної функції за вищезазначених умов:

$$I_E = \frac{4 \cdot \Delta^2 \cdot m}{\rho^2}. \quad (5.11)$$

Тепер проведемо доведення від супротивного. Припустимо, що на множині не вироджених матриць $Z, \|\vec{z}_i\| = 1, i = 1, \dots, m$, існує така матриця Z , яка забезпечує значення I_E - критеріальної функції менше, ніж отримане за формулою (5.11). Використовуючи формулу (1.44) для I_A - критеріальної функції (задає суму квадратів довжин 2^{m-1} діагоналей многогранника Ω), із урахуванням заміни $F_m = \rho \cdot Z$ отримаємо таку нерівність:

$$I_A = \frac{2^{m+1} \cdot \Delta^2}{\rho^2} \cdot \text{Sp}(Z \cdot Z^T)^{-1} < 2^{m-1} \cdot I_E = 2^{m-1} \cdot \frac{4 \cdot \Delta^2 \cdot m}{\rho^2}, \quad (5.12)$$

де $\text{Sp}(\cdot)$ – означає слід матриці.

Враховуючи, що матриця $(Z \cdot Z^T)^{-1}$ є додатноозначеною, то із праці [158, теорема 1.1.15] отримуємо нерівність:

$$\text{Sp}(Z \cdot Z^T)^{-1} \geq m \cdot (\det(Z \cdot Z^T)^{-1})^{\frac{1}{m}} = m \cdot \left(\frac{1}{\det(Z \cdot Z^T)} \right)^{\frac{1}{m}}. \quad (5.13)$$

З іншого боку, відповідно до нерівності Адамара для додатноозначених матриць [158, теорема 1.1.11] та із урахуванням, що $\|\vec{z}_i\| = 1, i = 1, \dots, m$, отримаємо:

$$\det(Z \cdot Z^T) \leq 1. \quad (5.14)$$

Підставляючи нерівність (5.14) у вираз (5.13), а результат $(\text{Sp}(Z \cdot Z^T))^{-1} \geq m$ у формулу (5.12), отримаємо:

$$I_A \geq \frac{2^{m+1} \cdot \Delta^2 \cdot m}{\rho^2}. \quad (5.15)$$

Очевидно, що нерівність (5.15) протирічить нерівності (5.12) і прийнятим вище припущенням щодо не ортогональності матриці Z . Отже, мінімальні значення I_G -, I_E - критеріальних функцій досягаються, коли розв'язком задачі (5.10) є ортогональна матриця Z^* , що підтверджує справедливість теореми 5.2.

Із теореми 5.2 випливає два важливі наслідки.

Н а с л і д о к 1. У випадку реалізації I_G - та I_E - оптимальних насичених планів із постійною інтервальною похибкою $\Delta(\vec{x}) = \Delta$ спостережень на області експерименту, яку задано виразом (5.1), максимальне значення похибки прогнозування для лінійних інтервальних моделей (5.2) дорівнює $2 \cdot \Delta \cdot \sqrt{m}$.

Н а с л і д о к 2. Для лінійної інтервальної моделі у вигляді (5.2) на області експерименту, яку задано n -вимірною кулею (5.1), I_G - та I_E - оптимальні насичені плани є ортогональними.

На рис. 5.1 а) схематично зображено I_G - та I_E - оптимальні насичені плани для випадку $m = 2$, а на рис. 5.1 б) – для випадку $m = 3$.

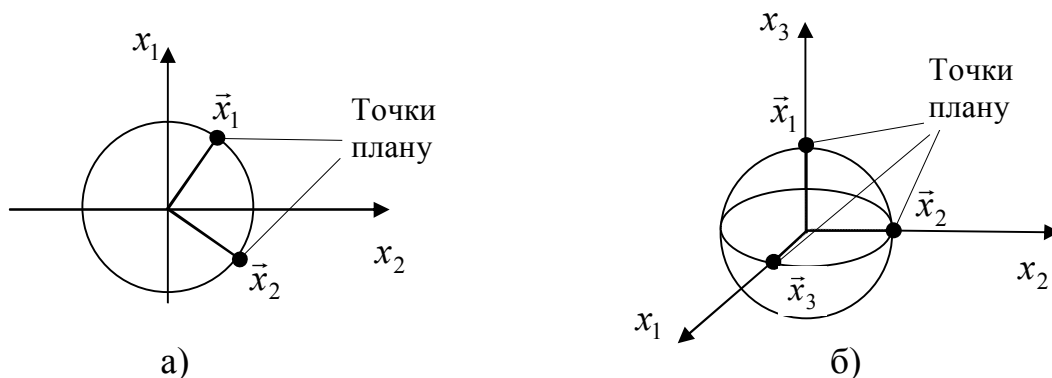


Рис. 5.1. Ілюстрація області експерименту у вигляді $n=m$ -вимірної кулі з точками I_G - та I_E - оптимальних насичених планів для випадків:

а) $m = 2$; б) $m = 3$

Т е о р е м а 5.3. Для лінійної інтервальної моделі у вигляді (5.2) на області експерименту, яку задано n -вимірною кулею (5.1) I_G -, I_E -, I_D -, I_A - оптимальні насичені плани еквівалентні між собою та ортогональні.

Спочатку покажемо еквівалентність для даного випадку між ортогональними I_G -, I_E - оптимальними насиченими планами та I_A - оптимальним насиченим планом. Для цього підставимо матрицю (5.8), яка для моделі (5.2) на області експерименту (5.1) задає ортогональні I_G -, I_E - оптимальні насичені плани, у вираз (1.44) для I_A - критеріальної функції, отримаємо її значення:

$$I_A = \frac{2^{m+1} \cdot \Delta^2 \cdot m}{\rho^2}.$$

Враховуючи істинність нерівності (5.15) для будь-якого плану, побудованого на кулі (5.1) для моделі (5.2), приходимо до еквівалентності між планом (5.8) та I_A - оптимальним планом.

Тепер для умов теореми 5.3 покажемо еквівалентність між ортогональним планом (5.8) та I_D - оптимальним планом. Підставимо ортогональну матрицю (5.8) у вираз (1.43) для I_D - критеріальної функції, отримаємо:

$$I_D = \frac{4^m \cdot \Delta^{2 \cdot m}}{\rho^{2 \cdot m}}.$$

З іншого боку, підставляючи будь-яку матрицю плану $F_m = \rho \cdot Z$, $\|\bar{z}_i\| = 1, i = 1, \dots, m$, який визначено на області експерименту (5.1) у вираз (1.43) для I_D - критеріальної функції, отримаємо:

$$I'_D = \frac{4^m \cdot \Delta^{2 \cdot m}}{\rho^{2 \cdot m}} \cdot \det(Z \cdot Z^T)^{-1}.$$

Згідно з нерівністю (5.14), для будь-якої матриці плану $F_m = \rho \cdot Z$, $\|\bar{z}_i\| = 1, i = 1, \dots, m$, справджується така нерівність:

$$\det(Z \cdot Z^T)^{-1} \geq 1.$$

Звідси:

$$I'_D \geq \frac{4^m \cdot \Delta^{2 \cdot m}}{\rho^{2 \cdot m}}.$$

Отже, мінімальне значення I_D - критерію досягається на області експерименту (5.1) для ортогонального насиченого плану (5.8), що засвідчує еквівалентність між цим планом та I_D - оптимальним насиченим планом і в цілому між I_G -, I_E -, I_D -, I_A - оптимальними насиченими планами.

5.2. Послідовно I_G - оптимальне планування експериментів

Використання насичених планів в задачах ідентифікації не завжди забезпечує гарантовану точність прогнозування для інтервальних моделей. За даних умов актуальними стають задачі синтезу послідовно-оптимальних планів, для яких взамін забезпечення мінімального значення критерію оптимальності при заданій кількості спостережень N вимагають забезпечення мінімуму критерію оптимальності покроково.

Для побудови послідовно I_G - оптимальних планів можна скористатися таким алгоритмом [39, 48].

Крок 1. Планування I_G - оптимального насиченого експерименту ($N = m$).

Крок k . Планування одного спостереження за критерієм мінімізації максимальної похибки прогнозування, отриманої після проведення спланованого на попередньому кроці насиченого експерименту (після першого кроку) чи спостереження (після $(k - 1)$ -го кроку).

У загальному випадку реалізація k -го кроку даного алгоритму є достатньо складною у зв'язку із необхідністю обчислення максимальної похибки прогнозування $\max_{\bar{x} \in \chi} \Delta_{y(\bar{x})}$, отриманої після попереднього кроку. Для випадку лінійної

інтервальної моделі (5.2), коли область експерименту задано n -вимірною кулею (5.1), із застосуванням формули (5.4) алгоритм обчислення цієї похибки $\max_{\bar{x} \in \chi} \Delta_{y(\bar{x})}$ спрощується. Однак, при великій розмірності вектора оцінок параметрів моделі \vec{b} , кількість вершин області Ω зростає і витрати на обчислення значень I_E , I_G - критеріальних функцій суттєво зростають. З іншого боку, для синтезу I_G - оптимальних планів доцільно використати властивості лінійних інтервальних моделей, які побудовано за результатами насиченого експерименту (див. підрозділ 2.2).

Нехай необхідно побудувати множину (коридор) лінійних інтервальних моделей (5.2) із похибкою прогнозування не більшою від заданої $\max_{\bar{x} \in \chi} \Delta_{y(\bar{x})}$ на області експерименту χ у вигляді многогранника:

$$\chi = \{ \bar{x} \in R^n \mid \bar{x} = \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot \bar{x}_i, \lambda_i \geq 0 \forall i, \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1 \}, \quad (5.16)$$

де $\bar{x}_i, i = 1, \dots, m$ – задані фіксовані точки.

Припустимо, що лінійні інтервальні моделі (5.2) включають постійну складову b_0 , яку також необхідно визначати у процесі ідентифікації, тобто $m = n + 1$. За даних умов, якщо m спостережень розмістити у вершинах області (5.16), то згідно з виразом (2.13) максимальне значення похибки прогнозування для інтервальної моделі (5.2) досягатиметься у точці плану \bar{x}_i з максимальною похибкою спостережень.

Припустимо, що інтервальна похибка $\Delta(\vec{x})$ спостережень є постійною в усіх точках області експерименту (5.16) і знайдемо I_G - оптимальний насичений план на цій області (крок 1).

Замінімо у формулі для обчислення похибки прогнозування лінійної інтервальної моделі (1.34) вектор $\vec{b}_p - \vec{b}_s$ на еквівалентний вектор для насиченого експерименту $2 \cdot \Delta \cdot F_m^{-1} \cdot \vec{e}_p$. Після проведення нескладних перетворень, задачу знаходження I_G - оптимального насиченого плану на кроці 1 алгоритму запишемо у такому вигляді:

$$I_G = 2 \cdot \Delta \cdot \max_{\vec{x}} \sum_{i=1}^m |\vec{x}^T \cdot \vec{f}_i| \xrightarrow{F_m} \min, \vec{x} \in \chi,$$

де f_i – i -тий стовпець матриці F_m^{-1} .

Із урахуванням (2.13) отриманий вираз набуває такого вигляду:

$$I_G = 2 \cdot \Delta \cdot (|\vec{x}_1^T \cdot \vec{f}_1| + \dots + |\vec{x}_i^T \cdot \vec{f}_i| + \dots + |\vec{x}_m^T \cdot \vec{f}_m|) \xrightarrow{F_m} \min, \vec{x} \in \chi, \quad (5.17)$$

де \vec{x}_i ($i=1, \dots, m$) – будь-яка вершина області (5.16).

Оскільки $F_m^{-1} = (\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_m)$, то із розв'язку задачі (5.17) випливає, що мінімальне значення I_G - критеріальної функції дорівнює $2 \cdot \Delta$ і досягається за умови $F_m = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m)^T$, тобто, коли точки плану розміщені у вершинах області (5.16).

На k -тому кроці алгоритму проводимо спостереження у точці плану насиченого експерименту, отриманого на першому кроці, в якій похибка прогнозування є максимальною. Причому максимальну похибку прогнозування

$\max_{\vec{x} \in \chi} \Delta_{\hat{y}(\vec{x})} = \max_{\vec{x}_i, i=1, \dots, m} \Delta_{\hat{y}(\vec{x}_i)}$ визначаємо із такого виразу:

$$\max_{\vec{x}_i, i=1, \dots, m} \Delta_{\hat{y}(\vec{x}_i)} = \min \{ \hat{y}_i^+, y_i^+ \} - \max \{ \hat{y}_i^-, y_i^- \},$$

де $\hat{y}_i^+, \hat{y}_i^-, y_i^+, y_i^-$ – верхня та нижня межі інтервалу прогнозування та виміряного інтервалу виходу на k -тому кроці, відповідно.

Такий вибір точки спостереження (для моделі випадкової обмеженої похибки [72]) уможливорює на області експерименту (5.16) покроково мінімізувати максимальну похибку прогнозування.

На практиці область χ експерименту, переважно, задають n -вимірною кулею чи кубом. Позначимо цю область χ^- і будемо вимагати, щоб $\chi^- \subset \chi$, тобто вершини \vec{x}_i опуклого многогранника, який визначає вираз (5.16), оберемо так, щоб він включав область χ^- (n -вимірну кулю, чи куб). Тоді за допомогою розглянутого вище алгоритму побудуємо послідовний план, який при реалізації

гарантовано забезпечить на усій області χ^- похибку прогнозування $\Delta_{y(\bar{x})}$, меншу від заданої $\max_{\bar{x}_i, i=1, \dots, m} \Delta_{\hat{y}(\bar{x})}$.

Для практичної реалізації запропонованого підходу вершини \bar{x}_i многогранної області (5.16) необхідно розміщувати так, щоб при її заданих розмірах (об'єму чи периметрі), розмір вписаної області χ^- був би максимальним. Враховуючи, що область (5.16) у n -вимірному просторі «входів» є многогранником із $(n+1)$ -ми вершинами, то оптимальний варіант розміщення вершин \bar{x}_i ($i=1, \dots, n+1$) забезпечуємо за умови однакових довжин усіх її ребер, тобто коли вона є тетраедр (для випадку $n=2$ – рівносторонній трикутник). Із урахуванням уведених умов, вираз (5.16) набуває такого вигляду:

$$\chi = \{ \bar{x} \in R^n \mid \bar{x} = \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot \bar{x}_i, \lambda_i \geq 0 \forall i, \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1,$$

$$\| \bar{x}_1 - \bar{x}_2 \| = \dots = \| \bar{x}_i - \bar{x}_j \| = \dots = \| \bar{x}_{m-1} - \bar{x}_m \| \neq 0, i, j = 1, \dots, m, i \neq j \} \quad (5.18)$$

На рис. 5.2 наведена область експерименту (5.18) із вписаною у неї кулею χ^- .

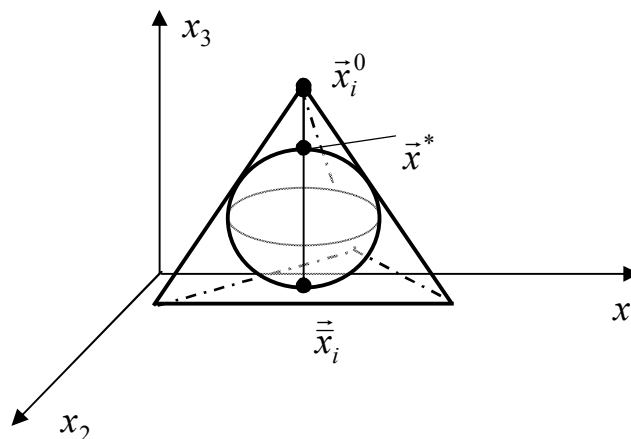


Рис. 5.2. Ілюстрація для обчислення максимальної похибки $\max_{\bar{x} \in \chi^-} \Delta_{y(\bar{x})}$ на n -вимірній кулі

Вираз для обчислення максимальної похибки $\max_{\bar{x} \in \chi^-} \Delta_{y(\bar{x})}$ на n -вимірній кулі χ^- , радіусом ρ , шукатимемо за умов, що максимальне значення похибки прогнозування $\max_{\bar{x}_i, i=1, \dots, m} \Delta_{\hat{y}(\bar{x})}$ на області (5.17) на k -тому кроці алгоритму досягнуто у точці \bar{x}_i^0 (див. рис. 5.2).

Спочатку, користуючись рис. 5.2, обчислимо координати точки \bar{x}^* на кулі у якій досягається максимальне значення похибки. Як бачимо з рис. 5.2, ця точка

кулі знаходиться найближче до точки \vec{x}_i^0 . Отже, вона належить відрізку \vec{x}_i, \vec{x}_i^0 . Спираючись на властивості тетраедра, координати точки $\vec{\bar{x}}_i$ обчислюємо як центр ваги грані, якій належить дана точка

$$\vec{\bar{x}}_i = \frac{\sum_{i=1}^{n+1} \vec{x}_i - \vec{x}_i^0}{n},$$

а похибку прогнозування – як лінійну комбінацію похибок у точках грані

$$\Delta_{\hat{y}(\vec{x})} = \frac{\sum_{i=1}^{n+1} \Delta_{y(\vec{x}_i)} - \max_{\vec{x}_i, i=1, \dots, m} \Delta_{\hat{y}(\vec{x})}}{n}.$$

Звідси отримаємо координати шуканої точки на кулі

$$\vec{x}^* = \vec{x}_i + 2 \cdot \rho \cdot \frac{\vec{x}_i^0 - \vec{\bar{x}}}{\|\vec{x}_i^0 - \vec{\bar{x}}\|}$$

і відповідне максимальне значення похибки прогнозування у цій точці:

$$\max_{\vec{x} \in \chi^-} \Delta_{\hat{y}(\vec{x})} = \max_{\vec{x}_i, i=1, \dots, m} \Delta_{\hat{y}(\vec{x})} \cdot \left(1 - \frac{\|\vec{x}_i^0 - \vec{x}^*\|}{\|\vec{x}_i^0 - \vec{\bar{x}}\|} \right) + \Delta_{\hat{y}(\vec{\bar{x}})} \cdot \frac{\|\vec{x}_i^0 - \vec{x}^*\|}{\|\vec{x}_i^0 - \vec{\bar{x}}\|}. \quad (5.19)$$

Для застосування алгоритму синтезу послідовно оптимальних планів за критерієм I_G - оптимальності на вписаній у область (5.18) n -вимірній кулі, необхідно, щоб радіус ρ цієї кулі був максимальним. Оскільки центри кулі і області (5.18) співпадають, а куля з максимальним радіусом дотикається до граней у точках, що є центрами ваг відповідних граней, то радіус кулі обчислюємо із виразу:

$$\rho = \left\| \frac{\sum_{i=1}^{n+1} \vec{x}_i}{n+1} - \frac{\sum_{i=1}^n \vec{x}_i}{n} \right\|, \quad (5.20)$$

де $\frac{\sum_{i=1}^{n+1} \vec{x}_i}{n+1}$, $\frac{\sum_{i=1}^n \vec{x}_i}{n}$ – вирази, що задають, відповідно, центр кулі та центр ваги грані області (5.18).

Приклад. Синтезуємо послідовно I_G -оптимальний експеримент з інтервальними даними на області (5.18) для побудови інтервальної моделі об'єкта з двома входами і одним виходом. Модель задаємо лінійною функцією у вигляді:

$$y_0(\bar{x}) = \beta_0 + \beta_1 \cdot x_1 + \beta_2 \cdot x_2.$$

Поставимо умову, щоб на крузі χ^- , радіусом $\rho=1$ і з центром у нульовій точці $(0, \dots, 0)$ інтервальна модель забезпечувала похибку прогнозування не більшу від заданого значення $\max_{\bar{x} \in \chi^-} \Delta_{\hat{y}(\bar{x})}$.

Оскільки шукана інтервальна модель є лінійною, то для побудови послідовно I_G -оптимального експерименту можна застосувати розроблений алгоритм.

Спочатку знайдемо вершини \bar{x}_i ($i=1, \dots, 3$) області експерименту (5.18). Враховуючи, що центри круга і рівностороннього трикутника (5.18) у нашому випадку співпадають із нульовою точкою, а також користуючись формулою (5.20) отримаємо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} \|\bar{x}_1 + \bar{x}_2\| = 2; \\ \|\bar{x}_1 + \bar{x}_3\| = 2; \\ \|\bar{x}_2 + \bar{x}_3\| = 2; \\ \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3 = (0, \dots, 0)^T. \end{cases}$$

Зафіксуємо координати вершини $\bar{x}_1 = (0, x_{12})$ і підставимо у отриману систему. Розв'язком системи є такі вершини трикутника (5.18): $\bar{x}_1 = (0, 2)^T$; $\bar{x}_2 = (\sqrt{3}, -1)^T$; $\bar{x}_3 = (-\sqrt{3}, -1)^T$.

Чисельний експеримент проводили за умов отримання інтервалів для «виходу» $[y^-(\bar{x}_i); y^+(\bar{x}_i)]$ із виразів $y^-(\bar{x}_i) = y(\bar{x}_i) - 3$, $y^+(\bar{x}_i) = y(\bar{x}_i) + 3$, відповідно, де $y(\bar{x}_i) = 7 + 2 \cdot x_{1i} + 4 \cdot x_{2i} + e_i$, $e_i \in [-3; 3]$ – обмежена похибка, яку моделювали із застосуванням генератора випадкових чисел. Задане максимально допустиме значення похибки прогнозування $\max_{\bar{x} \in \chi^-} \Delta_{\hat{y}(\bar{x})}$ інтервальної моделі на кругові дорівнює 1. Максимальну похибку прогнозування $\max_{\bar{x} \in \chi^-} \Delta_{\hat{y}(\bar{x})}$ на крузі обчислювали за формулою (5.19).

Результати чисельного моделювання та розрахункові значення похибок прогнозування наведені у таблиці 5.1.

Графіки залежностей максимальних похибок прогнозування від кількості спостережень на областях, заданих, відповідно, рівностороннім трикутником (5.18) та кругом, наведені на рис. 5.3.

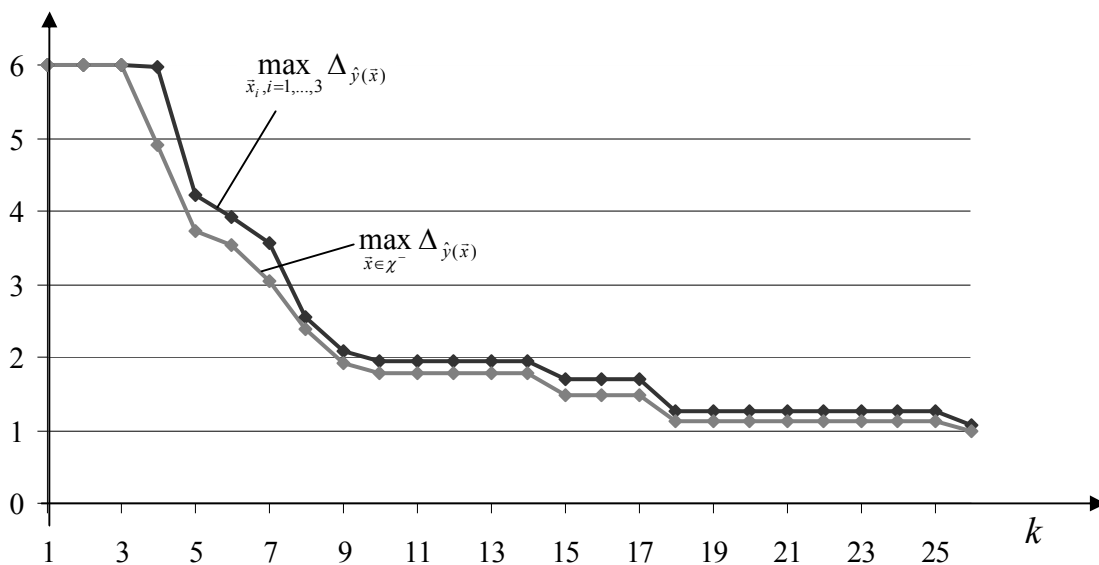


Рис. 5.3. Залежності максимальних похибок прогнозування інтервальної моделі від кількості спостережень для випадку $m = 2$

Як бачимо з рис. 5.3, для усіх спостережень виконується умова

$$\max_{\bar{x}_i, i=1, \dots, 3} \Delta_{\hat{y}(\bar{x})} \geq \max_{\bar{x} \in \chi^-} \Delta_{\hat{y}(\bar{x})}$$

і при цьому значення максимальної похибки прогнозування на області експерименту монотонно зменшується. Її задане максимальне значення на крузі досягається після реалізації 26 кроків алгоритму, тобто 28 спостережень. Тим часом, як для забезпечення цього ж значення похибки на області (5.18) не достатньо 28 спостережень (див. табл. 5.1).

Наведені на рис. 5.3, графіки також ілюструють неінформативні спостереження, внаслідок проведення яких максимальна похибка прогнозування не змінюється. Зауважимо, що проведені спостереження на перших трьох кроках є інформативними, оскільки забезпечують зменшення похибки прогнозування у цих точках (див. табл. 5.1).

Результати чисельного експерименту дають можливість зробити висновок, що найбільш ефективно зменшення похибки прогнозування досягається на початку експерименту, тобто коли її значення є достатньо великим. Так, із рис. 5.3 бачимо, що похибка прогнозування зменшилась у три рази з 1 по 9 крок, тоді як за решту 17 кроків, на яких 13 спостережень є не інформативними, вона зменшилась усього у два рази.

Отже, отримані результати підтверджують правильний вибір критерію планування точки спостереження на k -тому кроці, у якій похибка прогнозування є максимальною і загалом працездатність розробленого алгоритму послідовно I_G -оптимального планування.

Результати чисельного експерименту

№ спостереж.	№ кроку	\bar{x}_i^T	$[y_i^-; y_i^+]$	$\Delta_{\hat{y}(\bar{x}_i)}$	$\max_{\bar{x}, j=1, \dots, 3} \Delta_{\hat{y}(\bar{x})}$	$\max_{\bar{x} \in \mathcal{X}^-} \Delta_{\hat{y}(\bar{x})}$
1	1	(0,2)	[13,19;19,19]	6	6	6
2		$(\sqrt{3}, -1)$	[-3,03;2,97]	6		
3		$(-\sqrt{3}, -1)$	[1,04;7,04]	6		
4	2	(0,2)	[9,13;15,13]	1,94	6	6
5	3	$(\sqrt{3}, -1)$	[-3,00;3,00]	5,97	6	6
6	4	$(-\sqrt{3}, -1)$	[3,49;9,49]	3,55	5,97	4,895
7	5	$(\sqrt{3}, -1)$	[-4,78;1,22]	4,22	4,22	3,728
8	6	$(\sqrt{3}, -1)$	[-2,70;3,30]	3,92	3,92	3,528
9	7	$(\sqrt{3}, -1)$	[-0,86;5,14]	2,08	3,55	3,037
10	8	$(-\sqrt{3}, -1)$	[4,48;10,48]	2,56	2,56	2,377
11	9	$(-\sqrt{3}, -1)$	[5,79;11,79]	1,25	2,08	1,918
12	10	$(\sqrt{3}, -1)$	[-5,16;0,84]	1,7	1,94	1,785
13	11	(0,2)	[11,66;17,66]	1,94	1,94	1,785
14	12	(0,2)	[9,31;15,31]	1,94	1,94	1,785
15	13	(0,2)	[11,90;17,90]	1,94	1,94	1,785
16	14	(0,2)	[9,33;15,33]	1,94	1,94	1,785
17	15	(0,2)	[14,24;20,24]	0,89	1,7	1,49
18	16	$(\sqrt{3}, -1)$	[-4,96;1,04]	1,7	1,7	1,49
19	17	$(\sqrt{3}, -1)$	[-3,07;2,93]	1,7	1,7	1,49
20	18	$(\sqrt{3}, -1)$	[-6,00;0,00]	0,86	1,25	1,125
21	19	$(-\sqrt{3}, -1)$	[2,24;8,24]	1,25	1,25	1,125
22	20	$(-\sqrt{3}, -1)$	[3,37;9,37]	1,25	1,25	1,125
23	21	$(-\sqrt{3}, -1)$	[3,70;9,70]	1,25	1,25	1,125
24	22	$(-\sqrt{3}, -1)$	[4,06;10,06]	1,25	1,25	1,125
25	23	$(-\sqrt{3}, -1)$	[2,54;8,54]	1,25	1,25	1,125
26	24	$(-\sqrt{3}, -1)$	[2,90;8,90]	1,25	1,25	1,125
27	25	$(-\sqrt{3}, -1)$	[5,64;11,64]	1,25	1,25	1,125
28	26	$(-\sqrt{3}, -1)$	[0,85;6,85]	1,06	1,06	0,998

5.3. Оптимальне планування експерименту у випадку локалізації параметрів інтервальної моделі із виділенням насиченого блоку

Застосування локалізаційних методів для експериментальної ідентифікації інтервальних моделей створює потреби у розробці процедур планування експериментів, які забезпечують певні властивості локалізаційної області. Відповідно, критерії оптимальності таких експериментів повинні мінімізувати розміри локалізаційної області.

У даному підрозділі розглянуто задачі синтезу критеріїв оптимальності планів експерименту з $N > m$ спостереженнями у випадку застосування методу локалізації із виділенням насиченого блоку експерименту [73]. На основі розглянутих критеріїв та дослідження властивостей інтервальних похибок побудовано апіорні оптимальні плани [73].

5.3.1. Критерії оптимальності «локалізаційного» експерименту із випадковими інтервальними похибками

Нехай задано деяку область зміни значень входів x_1, \dots, x_n об'єкта, тобто область експерименту χ , структура лінійно-параметричної функції (1.21) і необхідно побудувати апіорний план експерименту з інтервальними спостереженнями виходів $[y_i^-, y_i^+]$, $i = 1, \dots, N$, $N > m$ у такий спосіб, щоб в результаті його реалізації забезпечити мінімальні розміри області локалізації Ω_m розв'язку Ω системи інтервальних рівнянь (1.25). Для цього у розглянутому методі локалізації із виділенням насиченого блоку (див. підрозділ 3.2) необхідно, щоб вигляд області Ω_m був максимально подібним до вигляду області Ω . Враховуючи, що конфігурації областей Ω_m і Ω визначають, відповідно, матриці плану F_m та F , найбільшої подібності між ними можна досягнути за умови $F = F_m$ ($\det(F) \neq 0$). Своєю чергою, у випадку $N > m$, вказана умова виконується тільки, коли систему інтервальних рівнянь (1.25) побудовано на базі спостережень у m різних точках \bar{x}_i , тобто коли частину спостережень у кількості $N - m$ дублюють.

Тоді основна рекурентна формула (3.8) методу локалізації із виділенням насиченого блоку $y_i^-(k+1) = y_i^-(k) + \delta_i^-(k+1)$, $y_i^+(k+1) = y_i^+(k) - \delta_i^+(k+1)$, $i = 1, \dots, m$, набуває вигляду (3.22):

$$[y_i^-(k+1); y_i^+(k+1)] = [y_i^-(k); y_i^+(k)] \cap [y_{k+1}^-; y_{k+1}^+],$$

де k – означає номер повторного спостереження у точках \bar{x}_i .

У випадку відомих імовірнісних властивостей похибок спостережень, запропонований спосіб вибору матриці плану F уможливорює побудову оптимального «локалізаційного» експерименту.

Припустимо, що похибки e_i повторних спостережень у точках \bar{x}_i є незалежними, випадковими та адитивними. Останню умову формально запишемо таким виразом: $y_i(k) = y_{0i} + e_i(k)$. Також відомою є функція щільності розподі-

лу імовірностей $W(e_i)$ похибок на інтервалі $[-\Delta_i; \Delta_i]$. Далі буде показано, що для оптимальних апріорних планів у певних випадках вказану умову буде «пом'якшено».

Розглянуті припущення відповідають моделі випадкової інтервальної похибки спостережень, властивості якої проаналізовано у підрозділі 1.3.

Уведемо позначення Δ_{N_i} – для ширини результуючого інтервалу $[y_i^-(k+1); y_i^+(k+1)]$, отриманого у точці \bar{x}_i після $N_i = k + 1$ повторних спостережень. Для заданої кількості спостережень її значення визначаємо за статистичною характеристикою – розмахом R_i випадкової похибки e_i :

$$\Delta_{N_i} = y_i^+(k+1) - y_i^-(k+1) = 2 \cdot \Delta_i - R_i. \quad (5.21)$$

Як відомо з праці [36], розмах випадкової величини є випадковим. Тому ширина Δ_{N_i} є також випадковою. Користуючись формулою для визначення інтегральної функції $w(R_i)$ розподілу розмаху випадкової величини e_i [36]

$$w(R_i) = N_i \cdot \int_{-\infty}^{\infty} w(e_i) \cdot (W(e_i + R_i) - W(e_i))^{N_i-1} de_i$$

і з урахуванням, що похибка e_i є обмеженою за амплітудою, отримаємо формулу для функції $w(\Delta_{N_i})$, що задає розподіл випадкової ширини інтервалу $[y_i^-(k+1); y_i^+(k+1)]$:

$$w(\Delta_{N_i}) = 1 - N_i \cdot \int_{-\Delta_i}^{\Delta_i} w(e_i) \cdot (W(e_i + 2 \cdot \Delta_i - R_i) - W(e_i))^{N_i-1} de_i. \quad (5.22)$$

Із останньої – обчислимо математичне сподівання $M(\Delta_{N_i})$ та дисперсію $D(\Delta_{N_i})$ ширини цього інтервалу, відповідно:

$$M(\Delta_{N_i}) = \int_0^{2\Delta_i} \Delta_{N_i} \cdot d(w(\Delta_{N_i})), \quad (5.23)$$

$$D(\Delta_{N_i}) = \int_0^{2\Delta_i} (M(\Delta_{N_i}) - \Delta_{N_i})^2 \cdot d(w(\Delta_{N_i})). \quad (5.24)$$

Враховуючи прийнятту модель інтервальної похибки та формули (1.43) – (1.45), відповідно, для I_D -, I_A - та I_E - критеріїв оптимальності насичених планів, побудуємо такі критеріальні функції оптимальності «локалізаційних» планів:

$$M(I_D) = M\left[\prod_{i=1}^m \Delta_{N_i}^2 \cdot \det(F_m \cdot F_m^T)^{-1}\right], \quad (5.25)$$

$$M(I_A) = 2^{m-1} \cdot M[Sp((F_m \cdot F_m^T)^{-1} \cdot \text{diag}(\Delta_{N_1}^2, \dots, \Delta_{N_i}^2, \dots, \Delta_{N_m}^2))], \quad (5.26)$$

$$M(I_E) = M[\max_{p=1, \dots, 2^{m-1}} \{\tilde{\Delta}_p^T(N) \cdot (F_m \cdot F_m^T)^{-1} \cdot \tilde{\Delta}_p(N)\}], \quad (5.27)$$

де $\tilde{\Delta}_p^T(N) = (\pm\Delta_{N_1}, \dots, \pm\Delta_{N_i}, \dots, \pm\Delta_{N_m})$ – вектори, компонентами яких є ширина результуючих інтервалів із від’ємними або додатними знаками в залежності від значення індексу p .

Як видно, ці критеріальні функції задають математичні сподівання, відповідно квадрату об’єму, суми квадратів довжин діагоналей та квадрату довжини максимальної діагоналі області локалізації, в залежності від обраної матриці плану F_m та кількості спостережень N_i , $i = 1, \dots, m$.

Виразимо уведені критерії через характеристики випадкової ширини Δ_{N_i} .

Спочатку проведемо перетворення у формулі (5.25). Для цього винесемо не-випадкову величину за знак математичного сподівання. У результаті отримаємо:

$$M(I_D) = \det(F_m \cdot F_m^T)^{-1} \cdot M[\prod_{i=1}^m \Delta_{N_i}^2]. \quad (5.28)$$

Оскільки випадкові величини Δ_{N_i} , $i = 1, \dots, m$ є не залежними, то істинним є такий вираз:

$$M[\prod_{i=1}^m \Delta_{N_i}^2] = \prod_{i=1}^m (M^2(\Delta_{N_i}) + D(\Delta_{N_i})). \quad (5.29)$$

Підставимо отриману формулу у вираз (5.28), отримаємо:

$$M(I_D) = \det(F_m \cdot F_m^T)^{-1} \cdot \prod_{i=1}^m (M^2(\Delta_{N_i}) + D(\Delta_{N_i})). \quad (5.30)$$

Тепер проведемо аналогічні перетворення над формулами для $M(I_A)$ - та $M(I_E)$ - критеріальних функцій. У результаті отримаємо:

$$M(I_A) = 2^{m-1} \cdot Sp[(F_m \cdot F_m^T)^{-1} \cdot \text{diag}(M^2(\Delta_{N_1}) + D(\Delta_{N_1}), \dots, M^2(\Delta_{N_i}) + D(\Delta_{N_i}), \dots, M^2(\Delta_{N_m}) + D(\Delta_{N_m}))], \quad (5.31)$$

$$M(I_E) = \max_{p=1, \dots, 2^{m-1}} \{\tilde{\Delta}_p^T(N) \cdot (F_m \cdot F_m^T)^{-1} \cdot \tilde{\Delta}_p(N)\} +$$

$$Sp[(F_m \cdot F_m^T)^{-1} \cdot \text{diag}(D(\Delta_{N_1}), \dots, D(\Delta_{N_i}), \dots, D(\Delta_{N_m}))], \quad (5.32)$$

де $\tilde{\Delta}_p^T(N) = (\pm M(\Delta_{N_1}), \dots, \pm M(\Delta_{N_i}), \dots, \pm M(\Delta_{N_m}))$ – вектори, компонентами яких є математичні сподівання ширини результуючих інтервалів із додатними або від’ємними знаками.

Отже, задача планування «локалізаційного» експерименту на заданій області χ за умов випадкової інтервальної похибки і заданій загальній кількості спостережень N полягає у знаходженні спектру оптимального плану (m - оптимальних точок спостережень, тобто матриці F_m) і частот $N_i, i = 1, \dots, m$, $\sum_{i=1}^m N_i = N$, виходячи із умови мінімізації відповідної критеріальної функції, заданої формулою (5.30), (5.31) чи (5.32), тобто:

$$M(I_D) \xrightarrow{F_m, N_i} \min, \bar{x}_i \in \chi, \sum_{i=1}^m N_i = N, N_i \in \{1, 2, \dots, N - m + 1\}, i = 1, \dots, m, \quad (5.33)$$

$$M(I_A) \xrightarrow{F_m, N_i} \min, \bar{x}_i \in \chi, \sum_{i=1}^m N_i = N, N_i \in \{1, 2, \dots, N - m + 1\}, i = 1, \dots, m, \quad (5.34)$$

$$M(I_E) \xrightarrow{F_m, N_i} \min, \bar{x}_i \in \chi, \sum_{i=1}^m N_i = N, N_i \in \{1, 2, \dots, N - m + 1\}, i = 1, \dots, m. \quad (5.35)$$

5.3.2. Синтез $M(I_D)$ -оптимальних планів

Для синтезу оптимальних локалізаційних експериментів необхідно розв’язати одну із задач математичного програмування (5.33)- (5.35). На практиці, при великій розмірності матриці плану F_m ($m > 10$) кількість невідомих, які необхідно обчислити із розв’язку цих задач суттєво зростає і досягає декількох сотень. Очевидно, що за таких умов синтез оптимальних планів є практично неможливим. З іншого боку, застосування відомих властивостей інтервальних похибок спрощує побудову $M(I_D)$ - оптимальних планів.

Для ілюстрації цього, розглянемо таку функції:

$$f(N_i) = \frac{M^2(\Delta_{N_i}) + D(\Delta_{N_i})}{\Delta_i^2}. \quad (5.36)$$

Встановимо властивості функції $f(N_i)$, які залежать від властивостей обмеженої похибки спостережень e_i . Не обмежуючи загальності припустимо, що похибка e_i розподілена згідно з рівномірним законом розподілу:

$$w(e_i) = \begin{cases} 0, & e_i < -\Delta_i; \\ \frac{e_i + \Delta_i}{2 \cdot \Delta_i}, & e_i \in [-\Delta_i; \Delta_i]; \\ 1, & e_i > \Delta_i. \end{cases}$$

Отримаємо за цією умовою вирази для $M(\Delta_{N_i})$ і $D(\Delta_{N_i})$. Спочатку за формулою (5.22) отримаємо вираз для функції щільності розподілу ширини Δ_{N_i} результуючого інтервалу. Тоді підставимо його у формулу (5.23). У результаті отримаємо [72]:

$$M(\Delta_{N_i}) = \int_0^{2\Delta_i} N_i \cdot (N_i - 1) \cdot \left(-\frac{1}{2 \cdot \Delta_i}\right)^{N_i} \cdot (\Delta_{N_i})^2 \cdot (\Delta_{N_i} - 2 \cdot \Delta_i)^{N_i-2} \cdot d\Delta_{N_i} = \frac{4 \cdot \Delta_i}{N_i + 1}.$$

Аналогічно, застосовуючи формули (5.22), (5.24), отримаємо вираз для дисперсії:

$$\begin{aligned} D(\Delta_{N_i}) &= \int_0^{2\Delta_i} \left(\frac{4 \cdot \Delta_i}{N_i + 1} - \Delta_{N_i}\right)^2 \cdot N_i \cdot (N_i - 1) \cdot \left(-\frac{1}{2 \cdot \Delta_i}\right)^{N_i} \cdot \Delta_{N_i} \cdot (\Delta_{N_i} - 2 \cdot \Delta_i)^{N_i-2} \cdot d\Delta_{N_i} = \\ &= \frac{8 \cdot \Delta_i^2 \cdot (N_i - 1)}{(N_i + 2) \cdot (N_i + 1)^2}. \end{aligned}$$

Перепишемо тепер вираз (5.36) із урахуванням отриманих формул для математичного сподівання та дисперсії ширини Δ_{N_i} результуючого інтервалу:

$$f(N_i) = \frac{16}{(N_i + 1)^2} + \frac{8 \cdot (N_i - 1)}{(N_i + 2) \cdot (N_i + 1)^2}. \quad (5.37)$$

Тепер із виразу (5.37) виділимо такі властивості функції $f(N_i)$:

1. Функція $f(N_i)$ є монотонно спадною.
2. $f(N_i) > 0 \quad \forall N_i \in \{1, 2, \dots, N - m + 1\}$.
3. Якщо $N_i = 1$, то $f(N_i) = 4$ (для рівномірного закону розподілу).
4. Якщо $N_i \longrightarrow \infty$, то $f(N_i) \longrightarrow 0$.

Зауважимо, що вказані властивості справджуються у випадку будь-якого обмеженого закону розподілу похибки e_i , за виключенням властивості 3, що власне дозволяє стверджувати: усі наведені нижче результати не залежать від вигляду неперервної на інтервалі $[-\Delta_i; \Delta_i]$ функції $W(e_i)$ щільності розподілу імовірностей даної похибки.

Спираючись на властивості функції $f(N_i)$ перейдемо до синтезу $M(I_D)$ - оптимальних планів. Спочатку сформулюємо допоміжне твердження.

Л е м а 5.1. Розв'язок задачі (5.33) еквівалентний результату розв'язування такої послідовності задач:

$$\det(F_m \cdot F_m^T)^{-1} \cdot \prod_{i=1}^m \Delta_i^2 \xrightarrow{F_m} \min, \quad \bar{x}_i \in \mathcal{X}; \quad (5.38)$$

$$\prod_{i=1}^m \left((M^2(\Delta_{N_i}) + D(\Delta_{N_i})) \cdot \Delta_i^{-2} \right) \xrightarrow{N_i} \min, \quad \sum_{i=1}^m N_i = N,$$

$$N_i \in \{1, 2, \dots, N - m + 1\}, \quad i = 1, \dots, m. \quad (5.39)$$

Для доведення леми достатньо показати, що формула (5.30) для розрахунку значень $M(I_D)$ - критеріальної функції складається із двох додатних та незалежних між собою співмножників.

Як бачимо із формули (5.30), цими співмножниками є цільові функції задач математичного програмування (5.38) та (5.39). Оскільки матриця $F_m \cdot F_m^T$ є додатноозначеною, то:

$$\det(F_m \cdot F_m^T)^{-1} \cdot \prod_{i=1}^m \Delta_i^2 > 0.$$

До того ж значення цільової функції задачі (5.38) не залежать від значень N_i . Отже, перший співмножник критеріальної функції (5.30) є додатним і не залежить від аргументу цільової функції (5.39).

Тепер покажемо аналогічні властивості для другого співмножника критеріальної функції (5.39). Із властивості 2 для функції $f(N_i)$ випливають такі нерівності:

$$\prod_{i=1}^m ((M^2(\Delta_{N_i}) + D(\Delta_{N_i})) \cdot \Delta_i^{-2}) > 0, \quad \forall N_i \in \{1, 2, \dots, N - m + 1\}.$$

Отже, і другий співмножник виразу (5.30) є додатним. Підставляючи у цільовій функції задачі (5.39) замість виразу

$$(M^2(\Delta_{N_i}) + D(\Delta_{N_i})) \cdot \Delta_i^{-2}$$

формулу (5.37), отримаємо:

$$\prod_{i=1}^m f(N_i) \left(\frac{16}{(N_i + 1)^2} + \frac{8 \cdot (N_i - 1)}{(N_i + 2) \cdot (N_i + 1)^2} \right) \xrightarrow{N_i} \min ,$$

$$\sum_{i=1}^m N_i = N, \quad N_i \in \{1, 2, \dots, N - m + 1\}, \quad i = 1, \dots, m. \quad (5.40)$$

Як бачимо, значення цільової функції задачі (5.40), яка еквівалентна із задачею (5.39), не залежать від матриці F_m - аргументу цільової функції (5.38), що і потрібно було довести.

Т е о р е м а 5.4. Спектр $M(I_D)$ - оптимального плану співпадає зі спектром I_D - оптимального насиченого плану на спільній області експерименту χ , а частоти у точках спектру є однаковими, тобто $N_1 = \dots = N_i = \dots = N_m = \frac{N}{m}$, якщо N кратне m .

Порівнюючи цільову функцію задачі (5.38), розв'язок якої є матриця F_m , тобто спектр $M(I_D)$ - оптимального плану, із виразом (1.43), що задає I_D - кри-

теріальну функцію бачимо, що вони співпадають з точністю до постійного множника. Отже, якщо області експерименту при побудові цих планів співпадають, то і їхні спектри також співпадають.

Тепер покажемо, що у цьому випадку частоти у точках спектру є однаковими. Для цього замінимо задачу (5.40) без урахування обмежень дискретності плану $N_i \in \{1, 2, \dots, N - m + 1\}$ ($i = 1, \dots, m$), на задачу знаходження екстремуму такої функції Лагранжа:

$$L(N_1, \dots, N_i, \dots, N_m, \lambda) = \prod_{i=1}^m f(N_i) + \lambda \cdot \left(\sum_{i=1}^m N_i - N \right),$$

де λ -множник Лагранжа.

Запишемо умови існування екстремуму цієї функції:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial(f(N_1))}{\partial N_1} \cdot \prod_{i=2}^m f(N_i) = -\lambda; \\ \vdots \\ \frac{\partial(f(N_i))}{\partial N_i} \cdot \prod_{j=1, i \neq j}^m f(N_j) = -\lambda; \\ \vdots \\ \frac{\partial(f(N_m))}{\partial N_m} \cdot \prod_{i=1}^{m-1} f(N_i) = -\lambda, \\ \sum_{i=1}^m N_i - N = 0. \end{array} \right.$$

Звідси:

$$\frac{\partial(f(N_1))}{\partial N_1} \cdot \prod_{i=2}^m f(N_i) = \dots = \frac{\partial(f(N_i))}{\partial N_i} \cdot \prod_{j=1, i \neq j}^m f(N_j) = \dots = \frac{\partial(f(N_m))}{\partial N_m} \cdot \prod_{i=1}^{m-1} f(N_i); \quad \sum_{i=1}^m N_i = N.$$

Оскільки функція $f(N_i)$ є монотонно спадною (властивість 1), то отримані умови справджуються тільки у випадку $f(N_1) = \dots = f(N_i) = \dots = f(N_m)$, звідси $N_1 = \dots = N_i = \dots = N_m$. Із урахуванням обмеження:

$$\sum_{i=1}^m N_i = N,$$

отримаємо: $N_1 = \dots = N_i = \dots = N_m = \frac{N}{m}$.

Розв'язок задачі (5.40) отримано без урахування дискретності плану $N_i \in \{1, 2, \dots, N - m + 1\}$ ($i = 1, \dots, m$). Однак за умовою теореми, число N кратне m , що завжди забезпечує дискретність плану.

У випадку порушення умови кратності кількості спостережень до кількості

невдомих параметрів, частоти у точках спектру оптимального плану повинні відрізнятися мінімально.

Т е о р е м а 5.5. Спектр $M(I_D)$ - оптимального плану співпадає зі спектром D - оптимального насиченого плану регресійного експерименту, якщо виконується хоча б одна із умов:

1. $\Delta(\bar{x}) = \Delta, \sigma(\bar{x}) = \sigma, \forall \bar{x} \in \chi.$
2. $\Delta^2(\bar{x}) = \sigma^2(\bar{x}), \forall \bar{x} \in \chi.$

Істинність теореми безпосередньо впливає із теореми 5.4 та теореми еквівалентності між I_D - оптимальними насиченими планами та D - оптимальними насиченими планами регресійного експерименту [31].

Із застосуванням теорем 5.4 та 5.5 синтез $M(I_D)$ - оптимальних планів спрощується, оскільки, по-перше, не потрібно задавати імовірнісні властивості випадкової обмеженої похибки спостережень, а, по-друге, є можливість використати існуючі каталоги D - оптимальних насичених планів регресійного експерименту для поліноміальних моделей [17].

5.3.3. Умови еквівалентності між $M(I_D)$ -, $M(I_A)$ - та $M(I_E)$ - оптимальними планами

У загальному випадку для синтезу $M(I_A)$ - та $M(I_E)$ - оптимальних планів необхідно застосовувати складні обчислювальні схеми для розв'язування задач математичного програмування, які особливо складно реалізувати при зростанні розмірності матриці плану. Тому важливо встановити ті випадки, коли вказані плани є еквівалентними з $M(I_D)$ - оптимальними планами.

Для отримання співвідношень між кількісними характеристиками планів, які задають сподівані значення $M(I_D)$ та $M(I_A)$ скористуємося нерівністю, наведеною у праці [158 , теорема 1.1.15]

$$Sp(B \cdot C) \geq m \cdot (\det(C) \cdot \det(B))^{1/m}, \quad (5.41)$$

де B, C – додатноозначені матриці.

Підставимо у нерівність(5.41), замість матриці B , додатноозначену матрицю $(F_m \cdot F_m^T)^{-1}$, а замість C додатноозначену діагональну матрицю $diag(M^2(\Delta_{N_1}) + D(\Delta_{N_1}), \dots, M^2(\Delta_{N_m}) + D(\Delta_{N_m}))$, отримаємо

$$Sp[(F_m \cdot F_m^T)^{-1} \cdot diag(M^2(\Delta_{N_1}) + D(\Delta_{N_1}), \dots, M^2(\Delta_{N_m}) + D(\Delta_{N_m}))] \geq m \cdot [\det(F_m \cdot F_m^T)^{-1} \cdot \det(diag(M^2(\Delta_{N_1}) + D(\Delta_{N_1}), \dots, M^2(\Delta_{N_m}) + D(\Delta_{N_m})))]^{1/m}. \quad (5.42)$$

Тепер проведемо заміни у нерівності (5.42) за формулами (5.30) та (5.31) для $M(I_D)$ - та $M(I_A)$ - критеріальних функцій, отримаємо таку нерівність:

$$M(I_A) / 2^{m-1} \geq m \cdot (M(I_D))^{1/m}. \quad (5.43)$$

Оскільки $M(I_A)$ - критеріальна функція задає математичне сподівання суми квадратів довжин 2^{m-1} діагоналей, а $M(I_E)$ - критеріальна функція є математичним сподіванням квадрату довжини найдовшої діагоналі області локалізації, то із нерівності (5.43) випливає така нерівність:

$$M(I_A) \leq 2^{m-1} \cdot M(I_E). \quad (5.44)$$

На основі встановлених співвідношень між значеннями критеріальних функцій, отримаємо умови еквівалентності між $M(I_D)$ -, $M(I_A)$ - та $M(I_E)$ - оптимальними планами. Сформулюємо ці умови у вигляді теореми.

Т е о р е м а 5.6. $M(I_D)$ -, $M(I_A)$ - та $M(I_E)$ - оптимальні плани є еквівалентними між собою для лінійної багатофакторної моделі (5.2) на області експерименту, яку задано n -вимірною кулею (5.1).

Покажемо справедливність теореми.

Із теорем 5.3 та 5.4 випливає, що для лінійної багатофакторної моделі (5.2), на області експерименту, яку задано кулею (5.1), спектр $M(I_D)$ - оптимального плану визначає ортогональна матриця F_m , а частоти необхідно рівномірно розподілити у точках спектру, тобто $N_i = N/m$, $i = 1, \dots, m$. Тоді цей план, забезпечує мінімальне значення $M(I_D)$ - критеріальної функції:

$$\min_{F_m, N_i} M(I_D) = (M^2(\Delta_{N_i}) + D(\Delta_{N_i}))^m. \quad (5.45)$$

Зауважимо, що праву частину рівняння (5.45) обчислено за формулою (5.30).

Значення $M(I_A)$ - критеріальної функції для цього $M(I_D)$ - оптимального плану отримаємо за формулою (5.31)

$$M(I_A) = 2^{m-1} \cdot m \cdot (M^2(\Delta_{N_i}) + D(\Delta_{N_i})). \quad (5.46)$$

Підставимо отримані значення $M(I_A)$ - та $M(I_D)$ - критеріальної функції для $M(I_D)$ - оптимального плану у нерівність (5.43). У такому разі вказана нерівність набуває вигляду рівняння, що своєю чергою означає еквівалентність $M(I_A)$ - та $M(I_D)$ -оптимальних планів.

Тепер підставимо у нерівність (5.44) значення $M(I_A)$ - критеріальної функції та значення $M(I_E)$ - критеріальної функції із виразу (5.46):

$$M(I_E) = m \cdot (M^2(\Delta_{N_i}) + D(\Delta_{N_i})). \quad (5.47)$$

Зауважимо, що обидва значення обчислено для $M(I_A)$ - та $M(I_D)$ - оптимальних планів. У такому разі нерівність (5.44) набуває вигляду рівняння, що засвідчує еквівалентність $M(I_D)$ -, $M(I_A)$ - та $M(I_E)$ - оптимальних планів між собою.

Н а с л і д о к. Спектри $M(I_D)$, $M(I_A)$ - та $M(I_E)$ - оптимальних планів для лінійних багатофакторних моделей (5.2) на області експерименту, яку задано n -вимірною кулею, визначаємо ортогональними матрицями, а частоти рівномірно розподіляємо у точках спектру.

5.3.4. Приклади синтезу $M(I_A)$ - оптимальних планів

Розглянемо випадок, коли застосування теореми 5.6 для побудови $M(I_A)$ - оптимального плану неможливе. Наприклад, у випадку, коли лінійна багатофакторна модель містить постійну складову [73].

Побудуємо $M(I_A)$ - оптимальні плани для $N = 3, 6, 9, 12$ спостережень на області експерименту $x_i \in [-1;1]$ з метою локалізації області параметрів лінійної моделі $y_0(x) = \beta_0 + \beta_1 \cdot x$. Адитивну випадкову похибку спостережень e_i вважатимемо розподіленою рівномірно:

$$w(e_i) = \begin{cases} 0, e_i < -\Delta; \\ \frac{e_i + \Delta}{2 \cdot \Delta}, e_i \in [-\Delta; \Delta]; \\ 1, e_i > \Delta. \end{cases}$$

Для отримання формального запису задачі побудови $M(I_A)$ - оптимальних планів (5.34) спочатку скористуємося формулою (5.31) для $M(I_A)$ - критерію, враховуючи, що у даному випадку спектр плану визначає матриця

$$F_m = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{pmatrix}.$$

Функцію $f(N_i)$ для рівномірного закону визначає вираз (5.37). Для спрощення покладемо $\Delta=1$. Після нескладних перетворень задача знаходження $M(I_A)$ - оптимального плану (5.34) при $N=3$ матиме такий вигляд:

$$\frac{16 \cdot \Delta^2}{(1+x_1^2) \cdot (1+x_2^2) - (1+x_1 \cdot x_2)^2} \cdot \left[(1+x_2^2) \cdot \left(\frac{2}{(N_1+1)^2} + \frac{(N_1-1)}{(N_1+2) \cdot (N_1+1)^2} \right) + (1+x_1^2) \cdot \left(\frac{2}{(N_2+1)^2} + \frac{(N_2-1)}{(N_2+2) \cdot (N_2+1)^2} \right) \right] \xrightarrow{x_1, x_2, N_1, N_2} \min, x_1, x_2 \in [-1;1],$$

$$N_1 + N_2 = 3, N_1, N_2 \in \{1,2\}.$$

Аналогічний вигляд матимуть задачі знаходження $M(I_A)$ - оптимальних планів для випадків $N=6, N=9, N=12$ із заміною умови $N_1 + N_2 = 3, N_1, N_2 \in \{1,2\}$ на відповідні умови: $N_1 + N_2 = 6, N_1, N_2 \in \{1, \dots, 5\}, N_1 + N_2 = 9, N_1, N_2 \in \{1, \dots, 8\}; N_1 + N_2 = 12, N_1, N_2 \in \{1, \dots, 11\}$.

Для розв'язування отриманих задач застосуємо ППП MATLAB. У результаті отримуємо:

$$F_m = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

якщо $N = 3$, то $- N_1 = 1, N_2 = 2, M(I_A) = 6$; якщо $N = 6$, то $- N_1 = 3, N_2 = 3, M(I_A) = 2,4$; якщо $N = 9$, то $- N_1 = 4, N_2 = 5, M(I_A) = 1,371$; якщо $N = 12$, то $- N_1 = 6, N_2 = 6, M(I_A) = 0,898$.

Для порівняння сподіваних значень суми квадратів довжин діагоналей паралелограма Ω_m (області параметрів), заданих значеннями $M(I_A)$ - критеріальної функції, з реальними проводились чисельні експерименти для отриманих планів. Причому межі інтервалів виходу $[y^-(\bar{x}_i); y^+(\bar{x}_i)]$ отримували із виразів відповідно:

$$y^-(\bar{x}_i) = y(\bar{x}_i) - 1, \quad y^+(\bar{x}_i) = y(\bar{x}_i) + 1,$$

де $y(\bar{x}_i) = 5 + 3 \cdot x_i + e_i$;

$e_i \in [-1; 1]$ – обмежену похибку моделювали із застосуванням генератора випадкових чисел згідно з рівномірним законом розподілу.

Суму квадратів довжин діагоналей $l_1^2 + l_2^2$, отриманої області параметрів лінійної моделі розраховували за формулою (1.44):

$$l_1^2 + l_2^2 = 8 \cdot Sp(E \cdot (F \cdot F^T)^{-1} \cdot E),$$

у якій матриця $E = diag(\Delta_1, \dots, \Delta_i, \dots, \Delta_m)$ була замінена на діагональну матрицю із елементами $\Delta_{N_i}/2, (i = 1, \dots, m)$, що задають ширину результуючих інтервалів у точках x_i .

Результати чисельних експериментів, наведено у таблицях 5.2, 5.3, 5.4 та 5.5, відповідно.

Таблиця 5.2

Результати чисельного експерименту при $N=3$

№ спост.	1	2	3
i	1	2	2
x_i	-1	1	1
$[y_i^-; y_i^+]$	[0,5;2,5]	[7,4;9,4]	[7,8;9,8]
Δ_{N_i}	2	2	1,6

Отримане значення суми квадратів довжин діагоналей паралелограма Ω_m для даного випадку: $l_1^2 + l_2^2 = 6,56$.

Таблиця 5.3

Результати чисельного експерименту при $N=6$

$N_{\text{спост.}}$	1	2	3	4	5	6
i	1	1	1	2	2	2
x_i	-1	-1	-1	1	1	1
$[y_i^-; y_i^+]$	[1,6;3,6]	[1,3;3,3]	[0,4;2,4]	[7,1;9,1]	[6,8;8,8]	[6,5;8,5]
Δ_{N_i}	2	1,7	0,8	2	1,7	1,4

Отримане значення суми квадратів довжин діагоналей паралелотопа Ω_m :

$$l_1^2 + l_2^2 = 2,6.$$

Таблиця 5.4

Результати чисельного експерименту при $N=9$

$N_{\text{спост.}}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
i	1	1	1	1	2	2	2	2	2
x_i	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1
$[y_i^-; y_i^+]$	[1,1;3,1]	[0,4;2,4]	[0,1;2,1]	[0,8;2,8]	[8;10]	[7,4;9,4]	[6,7;8,7]	[7,8;9,8]	[7;9]
Δ_{N_i}	2	1,3	1	1	2	1,4	0,7	0,7	0,7

Отримане значення суми квадратів довжин діагоналей паралелотопа Ω_m :

$$l_1^2 + l_2^2 = 1,49.$$

Таблиця 5.5

Результати чисельного експерименту при $N=12$

$N_{\text{спост.}}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
i	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2
x_i	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1
$[y_i^-; y_i^+]$	[1,8;3,8]	[1;3]	[1,5;3,5]	[0,2;2,2]	[1,4;3,4]	[1,6;3,6]	[6,8;8,8]	[7,5;9,5]	[7,9;9,9]	[7,6;9,6]	[6,7;8,7]	[7,2;9,2]
Δ_{N_i}	2	1,2	1,2	0,4	0,4	0,4	2	1,3	0,9	0,9	0,8	0,8

Отримане значення суми квадратів довжин діагоналей паралелотопа Ω_m :

$$l_1^2 + l_2^2 = 0,8.$$

Рис. 5.4 ілюструє співвідношення між сподіваними значеннями суми квадратів довжин діагоналей паралелотопа Ω_m , які розраховані для $M(I_A)$ -оптимальних апріорних планів, та сумами квадратів довжин діагоналей паралелотопа Ω_m (області параметрів), які отримано за результатами чисельних експериментів для різної кількості спостережень ($N = 3, 6, 9, 12$).

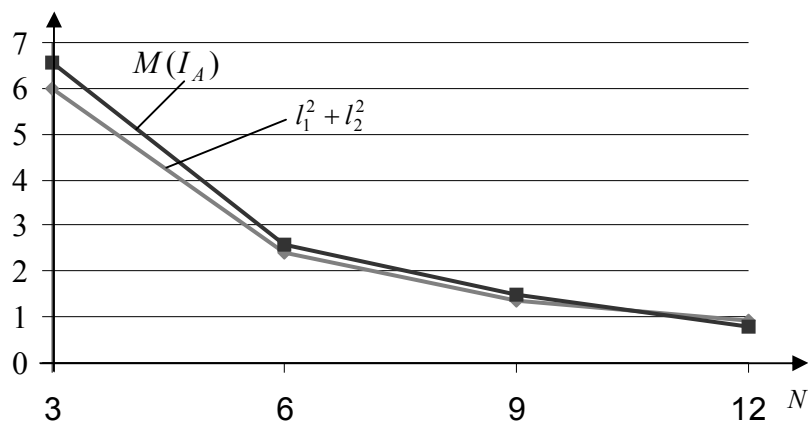


Рис. 5.4. Залежності теоретичного та експериментально розрахованого значення $M(I_A)$ -критеріальної функції від кількості спостережень у експерименті

Як видно із рис. 5.4, при зростанні кількості спостережень у експерименті сподіване значення $M(I_A)$ - критеріальної функції для $M(I_A)$ -оптимального плану наближається до значення, отриманого за результатами експерименту, який реалізовано за цим же планом. При цьому значення функції монотонно зменшується при збільшенні кількості спостережень.

Отже, наведені результати засвідчують, що при достатньо великій кількості спостережень N існує не тільки можливість організації оптимального локалізаційного експерименту, але і отримання достатньо достовірної апіорної оцінки розмірів області локалізації Ω_m параметрів моделі.

5.4. Особливості побудови та застосування таблиць оптимальних планів експерименту у випадку локалізації параметрів на основі виділення насиченого блоку для поліноміальних моделей

Розроблені у підрозділі 5.3 критерії оптимальності експериментів за умов інтервальних даних, придатні для синтезу оптимальних планів локалізації параметрів моделей статичних систем, які задано лінійно-параметричними рівняннями з відомими базисними функціями різних типів (поліноми, тригонометричні та логарифмічні функції, тощо). Причому для знаходження оптимальних планів необхідно застосовувати складні обчислювальні процедури розв'язування задач математичного програмування (5.33), (5.34) чи (5.35).

Тим часом, для опису статичних систем достатньо часто використовують поліноміальні моделі, зокрема, лінійні та квадратичні. Із застосуванням розроблених у підрозділі 5.3 методів планування експериментів для локалізації параметрів моделей даного типу створено та систематизовано таблиці оптимальних планів (каталоги).

Розглянемо особливості побудови цих таблиць.

При складанні таблиць оптимальних планів розглянуто випадки:

- лінійних за входами моделей статичних систем із постійною складовою

$$y(\vec{x}) = b_0 + \sum_{k=1}^n b_k \cdot x_k \quad (5.48)$$

та без постійної складової

$$y(\vec{x}) = \sum_{k=1}^n b_k \cdot x_k ; \quad (5.49)$$

неповних квадратичних моделей двох типів

$$y(\vec{x}) = b_0 + \sum_{k=1}^n b_k \cdot x_k + \sum_{k<j} b_{kj} \cdot x_k \cdot x_j \quad (5.50)$$

та

$$y(\vec{x}) = b_0 + \sum_{k=1}^n b_k \cdot x_k + \sum_{k=1}^n b_{kk} \cdot x_k^2 ; \quad (5.51)$$

- повної квадратичної моделі

$$y(\vec{x}) = b_0 + \sum_{k=1}^n b_k \cdot x_k + \sum_{k=1}^n b_{kk} \cdot x_k^2 + \sum_{k<j} b_{kj} \cdot x_k \cdot x_j , \quad (5.52)$$

де b_{kk}, b_{kj} – коефіцієнти при квадратичних членах та при членах взаємодії вхідних змінних моделі.

У таблицях додатку А вказані моделі відзначені як типи: I, II, III, IV та V, відповідно.

Області планування експерименту задавали n -вимірними кубом

$$\chi = \{ \vec{x} \in R^n \mid |x_k| \leq 1, k=1, \dots, n \}$$

та кулею одиничного радіусу

$$\chi = \{ \vec{x} \in R^n \mid \vec{x}^T \cdot \vec{x} \leq 1 \}.$$

Отримані матриці оптимальних планів є придатними для використання за умов виконання гіпотез методу аналізу інтервальних даних, коли вихідні змінні у спостереженнях представлені в інтервальному вигляді згідно з моделлю випадкової (1.17) інтервальної похибки.

Реалізація розроблених оптимальних планів забезпечує таку організацію експерименту, яка уможлиблює отримання оптимальних оцінок вектора невідомих параметрів інтервальної моделі статичної системи. Причому область оцінок вектора невідомих параметрів локалізуємо паралелотопом Ω_m , з конфігурацією, визначеною насиченим блоком експерименту.

Характеристики оптимальних планів, наведені в таблицях, визначають розміри області Ω_m локалізації параметрів, відповідно: $M(I_D)$, $M(I_A)$ та $M(I_E)$. Значення $M(I_D)$ -, $M(I_A)$ - та $M(I_E)$ -критеріальних функцій для фіксованого плану експерименту обчислено із урахуванням, що випадкова обмежена похибка спостережень e_i у формулі (1.17) розподілена за рівномірним законом розподілу, а інтервальна похибка є постійною на усій області експерименту ($\Delta(\vec{x})=1, \forall \vec{x} \in \chi$), тобто:

$$w(e_i) = \begin{cases} 0, e_i < -1; \\ \frac{e_i + 1}{2}, e_i \in [-1; 1]; \\ 1, e_i > 1. \end{cases} \quad (5.53)$$

У випадку мінімальної інформації про імовірнісні характеристики статичної системи, припущення про рівномірний закон розподілу похибки спостережень (5.53) у найбільшій мірі відповідає принципу невизначеності Бернуллі – Лапласа і обґрунтовує вибір кількості спостережень в експерименті, яка забезпечує потрібну точність моделі.

Для отримання значень критеріальних функцій $M(I_D)$, $M(I_A)$ та $M(I_E)$ для фіксованого плану експерименту із урахуванням заданого закону розподілу похибки e_i , використовували такі формули:

$$M(I_D) = \det(F_m \cdot F_m^T)^{-1} \cdot \prod_{i=1}^m \left(\frac{16}{(N_i + 1)^2} + \frac{8 \cdot (N_i - 1)}{(N_i + 2) \cdot (N_i + 1)^2} \right), \quad (5.54)$$

$$M(I_A) = 2^{m-1} \cdot Sp[(F_m \cdot F_m^T)^{-1} \times \\ \times \text{diag} \left(\left[\frac{16}{(N_1 + 1)^2} + \frac{8 \cdot (N_1 - 1)}{(N_1 + 2) \cdot (N_1 + 1)^2} \right], \dots, \left[\frac{16}{(N_m + 1)^2} + \frac{8 \cdot (N_m - 1)}{(N_m + 2) \cdot (N_m + 1)^2} \right] \right)] \quad (5.55)$$

$$M(I_E) = \max_{p=1, \dots, 2^{m-1}} \{ \tilde{\Delta}_p^T(N) \cdot (F_m \cdot F_m^T)^{-1} \cdot \tilde{\Delta}_p(N) \} +$$

$$Sp \left[(F_m \cdot F_m^T)^{-1} \times \text{diag} \left(\frac{8 \cdot (N_1 - 1)}{(N_1 + 2) \cdot (N_1 + 1)^2}, \dots, \frac{8 \cdot (N_m - 1)}{(N_m + 2) \cdot (N_m + 1)^2} \right) \right], \quad (5.56)$$

$$\text{де } \tilde{\Delta}_p^T(N) = \left(\pm \frac{4}{N_1 + 1}, \dots, \pm \frac{4}{N_m + 1} \right).$$

Формули (5.54), (5.55) та (5.57) отримано з формул (5.30), (5.31) та (5.32), відповідно, із заміною замість $M(\Delta_{N_i})$ та $D(\Delta_{N_i})$ їхніх значень, розрахованих за

формулами (5.23) та (5.24) для рівномірного закону розподілу похибки із функцією у вигляді (5.53).

Зауважимо, що наведені у таблицях додатку А $M(I_D)$ - оптимальні плани є робастними. Тобто вони є оптимальними для «локалізаційних» експериментів у випадку будь-якого обмеженого закону розподілу похибки спостережень e_i , хоча сподіване значення об'єму $M(I_D)$ паралелотопа Ω_m у таблицях наведено для випадку рівномірного закону. Аналогічна властивість робастності стосується планів, які побудовано для моделі (5.49) на області експерименту у вигляді багатовимірної кулі.

Для порівняння планів у таблицях наведено значення відносних показників їх $e^{(M(I_D))}$ - $e^{(M(I_A))}$ -, $e^{(M(I_E))}$ - ефективності, відповідно:

$$e^{(M(I_D))} = M(I_D(X_D)) / M(I_D),$$

$$e^{(M(I_A))} = M(I_A(X_A)) / M(I_A),$$

$$e^{(M(I_E))} = M(I_E(X_E)) / M(I_E),$$

де X_D , X_A , X_E означають матриці $M(I_D)$ -, $M(I_A)$ - та $M(I_E)$ - оптимальних планів, відповідно;

$M(I_D(X_D))$, $M(I_A(X_A))$, $M(I_E(X_E))$ задають значення $M(I_D)$ -, $M(I_A)$ -, $M(I_E)$ - критеріальних функцій, для відповідних оптимальних планів.

Наведені у додатку А матриці оптимальних планів, переважно, побудовані із застосуванням теорем 5.4, 5.5, 5.6 на основі існуючих каталогів та методів синтезу оптимальних планів насичених регресійних експериментів [17]. Виключенням є оптимальні плани за номерами 19–26. Для їх побудови розв'язували задачі математичного програмування, відповідно: для планів 19, 20, 22 – задача (5.33); для планів 21, 23, 24 – задача (5.34); для планів 25, 26 – задача (5.35).

Для оптимальних за $M(I_D)$ - критерієм планів наведено тільки матриці насичених експериментів ($N=m$), оскільки відповідно до теореми 5.5, для заданої структури моделі статичної системи, при фіксованій кількості вхідних змінних ці матриці визначають спектр усіх планів експериментів із $N>m$. При цьому частоти є однаковими у точках спектру.

Аналогічно, у випадку побудови моделі (5.49) статичної системи, коли область експерименту задано n -вимірною кулею для усіх $M(I_A)$ - та $M(I_E)$ - оптимальних планів, у додатку А наведено тільки ортогональні матриці спектрів планів насичених експериментів.

Тепер розглянемо порядок застосування таблиць $M(I_D)$ -, $M(I_A)$ - та $M(I_E)$ - оптимальних планів експерименту для побудови моделей статичних систем на основі інтервальних даних для вихідних змінних.

Блок-схема алгоритму вибору придатної матриці плану для побудови інтервальної моделі статичної системи наведена на рис. 5.5.

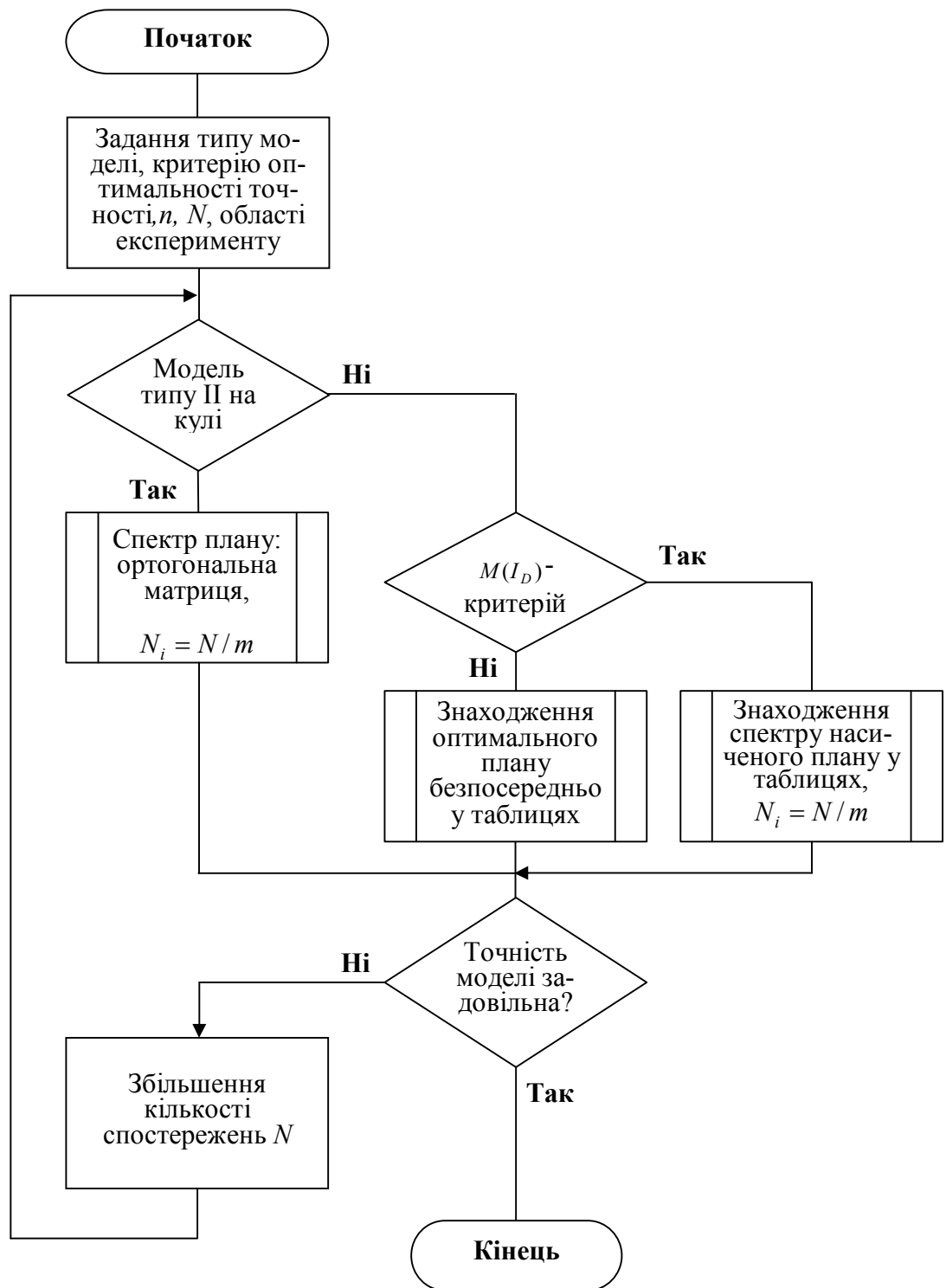


Рис.5.5. Блок-схема алгоритму вибору матриці плану для побудови інтервальної моделі статичної системи

Згідно з блок-схемою, спочатку задаємо тип моделі I, II, III, IV чи V, яку визначено формулами (5.48), (5.49), (5.50), (5.51) чи (5.52), відповідно. Потім вказуємо критерій оптимальності плану, потрібну точність моделі (значення критеріальної функції), область експерименту, кількість вхідних змінних n моделі та кількість спостережень в експерименті N .

Враховуючи, що точність оцінок параметрів інтервальної моделі статичної системи залежить від сподіваних значень квадрату об'єму $M(I_D)$, суми квадратів довжин діагоналей $M(I_A)$ чи сподіваної довжини найбільшої діагоналі $M(I_E)$ локалізаційної області Ω_m , числове значення кількості спостережень в експерименті можна визначити користуючись таблицями оптимальних планів, виходячи із потрібної точності оцінок параметрів.

Оскільки у таблицях оптимальних планів наведено значення $M(I_D)$ -, $M(I_A)$ -, $M(I_E)$ - критеріальних функцій для випадку $\Delta(\vec{x})=1$, то для знаходження цих значень для $\Delta(\vec{x}) = const = \Delta \neq 1$, необхідно провести перерахунок за такими формулами:

$$M(\tilde{I}_D) = \Delta^{2 \cdot m} \cdot M(I_D), \quad M(\tilde{I}_A) = \Delta^2 \cdot M(I_A), \quad M(\tilde{I}_E) = \Delta^2 \cdot M(I_E),$$

де $M(\tilde{I}_D)$, $M(\tilde{I}_A)$, $M(\tilde{I}_E)$ - задають значення $M(I_D)$ -, $M(I_A)$ -, $M(I_E)$ - критеріальних функцій, відповідно, для випадку $\Delta(\vec{x}) = \Delta$.

Якщо вигляд моделі статичної системи задано формулою (5.49), а область експерименту є n -вимірною кулею, то спектр оптимального плану за будь-яким із критеріїв $M(I_D)$ -, $M(I_A)$ -, $M(I_E)$ - оптимальності визначаємо ортогональною матрицею, а загальну кількість спостережень N необхідно якомога рівномірніше розподілити у m точках спектру.

Для усіх $M(I_D)$ - оптимальних планів незалежно від типу моделі і області експерименту спочатку необхідно знайти матрицю спектру для випадку $N=m$, а потім задану кількість спостережень рівномірно розподілити у m точках спектру.

В усіх інших випадках, згідно з вказаними вимогами до моделі статичної системи, спочатку у таблицях характеристик оптимальних планів знаходимо номер потрібного плану, а потім безпосередньо за його номером – відповідну матрицю.

Отримані матриці планів задають безрозмірні масштабовані на області експерименту

$$\chi = \{ \vec{x} \in R^n \mid |x_k| \leq 1, k=1, \dots, n \} \text{ чи } \chi = \{ \vec{x} \in R^n \mid \vec{x}^T \cdot \vec{x} \leq 1 \}$$

значення вхідних змінних для усіх спостережень. Для отримання реальних значень вхідних змінних \tilde{x}_i моделі статичної системи необхідно використати формули перерахунку. Наприклад, у випадку області експерименту, яку задано паралелепіпедом

$$\chi = \{ \vec{x} \in R^n \mid x_{hk} \leq \tilde{x}_k \leq x_{ek}, k=1, \dots, n \},$$

де x_{hk}, x_{ek} означають, відповідно, найбільше та найменше можливі значення вхідної змінної, для отримання реальних значень \tilde{x}_{ik} вхідних змінних застосуємо таку формулу для перерахунку:

$$\tilde{x}_{ik} = (x_{ik} \cdot (x_{ek} - x_{nk}) + (x_{ek} + x_{nk})) / 2.$$

Причому значення k -тої вхідної змінної в i -тому спостереженні отримуємо із матриці плану

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} \dots x_{1k} \dots x_{1n} \\ \vdots \quad \dots \quad \vdots \quad \dots \quad \vdots \\ x_{i1} \dots x_{ik} \dots x_{in} \\ \vdots \quad \dots \quad \vdots \quad \dots \quad \vdots \\ x_{m1} \dots x_{mk} \dots x_{mn} \end{pmatrix}.$$

З метою економнішого запису матриць оптимальних планів локалізаційного експерименту в додатку **A** вони наведені у транспонованому вигляді, тобто замість матриць X , наведено матриці X^T .

На закінчення зауважимо, що розроблені оптимальні плани експерименту для реалізації методу локалізації параметрів інтервальних моделей розширюють можливості методів інтервального аналізу при моделюванні статичних систем.

Висновки до розділу

Доведено еквівалентність між I_G - та I_E -оптимальними планами для лінійної багатофакторної факторної моделі на заданій кулею області експерименту з $N \geq m$ спостереженнями, що розширює можливості методів побудови моделей «вхід-вихід» статичних систем на основі аналізу інтервальних даних.

Доведено еквівалентність між собою та ортогональність I_G -, I_E -, I_D -, I_A -оптимальних насичених планів експерименту для лінійної багатофакторної моделі статичної системи на області експерименту у вигляді n -вимірної кулі, що спрощує розв'язування задач активної ідентифікації інтервальних моделей статичних систем.

Встановлено, що у випадку реалізації I_G - I_E -, I_D -, I_A -оптимальних насичених планів із постійною інтервальною похибкою $\Delta(\vec{x}) = \Delta$ спостережень на області експерименту у вигляді n -вимірної кулі, максимальне значення похибки прогнозування для лінійних інтервальних моделей дорівнює $2 \cdot \Delta \cdot \sqrt{m}$. Отриманий вираз є оцінкою потенційної точності лінійної інтервальної моделі статичної системи при її побудові на основі інтервальних даних експерименту.

Створено алгоритм послідовного I_G -оптимального планування експериментів на многогранній області і адаптовано його для більш поширеного випадку, коли область експерименту задано n -вимірною кулею. Ефективність алгоритму підтверджено результатами чисельного експерименту.

Для випадку локалізації області параметрів із виділенням насиченого блоку формалізовано задачу синтезу оптимальних планів «локалізаційних» експериментів із випадковими інтервальними похибками на основі розроблених критеріїв $M(I_A)$ - $M(I_D)$ - та $M(I_E)$ -оптимальності, що мінімізують математичні

сподівання, відповідно: квадрату об'єму; суми квадратів довжин діагоналей та квадрату довжини максимальної діагоналі області локалізації. Доведено, що спектр $M(I_D)$ -оптимального плану співпадає зі спектром I_D -оптимального насиченого плану та D -оптимального насиченого плану регресійного експерименту на спільній області експерименту χ , а частоти у точках спектру є однаковими, тобто $N_1 = \dots = N_i = \dots = N_m = N/m$. Отримана властивість дає можливість при побудові інтервальних моделей статичних систем із застосуванням методу локалізації із виділенням насиченого блоку експерименту використовувати відомі таблиці оптимальних планів регресійних експериментів. Показано, що $M(I_D)$ -оптимальні плани є робастними. Ця властивість розширює можливості застосування цих планів при побудові моделей в умовах відсутності інформації про імовірнісні властивості системи.

Доведено, що для лінійної багатofакторної моделі з нульовою постійною складовою на області експерименту у вигляді n -вимірної кулі $M(I_A)$ - $M(I_D)$ - та $M(I_E)$ -оптимальні плани є еквівалентні між собою, їхні спектри визначають ортогональні матриці, а частоти необхідно рівномірно розподіляти у точках спектру. Доведена властивість суттєво спрощує обчислювальні процедури активної ідентифікації лінійних багатofакторних моделей статичних систем.

На прикладі синтезу $M(I_A)$ -оптимальних планів із використанням формул для $M(I_A)$ - $M(I_D)$ - та $M(I_E)$ -критеріальних функцій, при великій кількості спостережень N отримали достовірні апіорні оцінки точності параметрів інтервальної моделі.

РОЗДІЛ 6

ПРИКЛАДИ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ СТАТИЧНИХ СИСТЕМ З ІНТЕРВАЛЬНИМИ ДАНИМИ

Особливості застосування, наведених у розділах 1 – 5 теоретичних засад побудови інтервальних моделей «вхід-вихід» проілюстровано у цьому розділі на прикладах дослідження різноманітних об'єктів та систем, для яких задання вихідних характеристик в інтервальному вигляді є єдиноможливим.

Розглянуто декілька статичних систем, дослідженням та моделюванням яких доводилося займатися автору разом зі своїми учнями. Спочатку розглянуто задачу синтезу інтервальної моделі для прогнозування коридору відносної кількості захворювань в залежності від стану довкілля та впливу соціальних чинників. Вказані чинники складно виразити у кількісному вигляді. Тому, для підготовки даних з метою побудови інтервальної моделі розглянуто спрощену схему кількісного представлення вхідних змінних моделі на основі теорії нечітких множин, зокрема із використанням поняття лінгвістичної змінної. Подібні задачі достатньо часто зустрічаються також в економічних дослідженнях. Тому запропоновані схеми можуть бути корисними також для аудиторії дослідників-економістів.

Іншу задачу розглянуто на прикладі побудови інтервальної моделі прогнозування генерованої електроенергії малою гідроелектростанцією. Вказану модель побудовано на реальних даних, які отримано у процесі дослідження можливостей малої гідроелектростанції на р. Стрипа в Тернопільській області.

Третя задача стосується створення та застосування інтервальних моделей у медицині.

Розглянуті задачі ілюструють можливості методів аналізу інтервальних даних для побудови інтервальних моделей статичних систем і можуть слугувати практичними рекомендаціями щодо застосування вказаних методів. Для більшої наглядності, розглянутих у попередніх розділах методів, проводиться деяке спрощення постановок практичних задач. Причому основну увагу сконцентровано на особливостях застосування розглянутих методів.

6.1. Інтервальна модель для прогнозування кількості захворювань у системі екологічного контролю

Ілюстрацію застосування розглянутих методів побудови інтервальних моделей проведемо на прикладі побудови інтервальної моделі для прогнозування кількості захворювань у системі екологічного контролю міста Тернополя. Дані для побудови вказаної моделі було отримано в результаті досліджень, що проводились у типових соціально-екологічних зонах м. Тернополя спільно із санітарно-епідеміологічною станцією протягом 1994 по 2001р.

Діяльність підприємств в умовах промислового міста супроводжує порушення екологічного балансу, який безпосередньо впливає на захворювання населення. У працях [9, 53, 201 – 203] показано, що вплив господарської діяльно-

сті на захворюваність може підсилюватися або послаблюватися соціальними факторами. Тому для оцінки масштабів нанесених збитків навколишньому середовищу внаслідок діяльності підприємств необхідно використовувати методику комплексного дослідження, розроблену, наприклад, у працях [9, 188].

Одним із основних етапів реалізації методики є прогнозування кількості захворювань у житловій зоні, що межує із санітарно-захисною зоною (СЗЗ) підприємства. Для реалізації цього етапу необхідно провести [52]: соціально-екологічне зонування міста; вимірювання концентрацій шкідливих викидів та шумових навантажень у визначених зонах; експертну оцінку соціальних умов проживання населення та аналіз кількості випадків захворювань у соціально-екологічних зонах; обчислення значень узагальнених соціального та екологічного факторів; ідентифікація взаємозв'язків між соціально-екологічними факторами та рівнем захворюваності шляхом розробки багатфакторної моделі.

6.1.1. Особливості отримання узагальнених соціальних та екологічних чинників

Соціально-екологічне зонування проводили на прикладі м. Тернополя з метою виділення частин території міста з відповідними переважаючими екологічними факторами і де проживають групи населення з характерними близькими соціальними ознаками. У результаті зонування було виділено усього 21 соціально-екологічну зону: 7 районів (вулиць) із різними екологічними факторами, у кожному із яких по три групи населення з характерними соціальними ознаками.

Інтегральну оцінку екологічних факторів отримали на основі лінгвістичного підходу та теорії нечітких множин, які описані у праці [52].

Узагальнений екологічний фактор розглядаємо як лінгвістичну змінну з такою структурою: $\langle L, T, V \rangle$, де L – ім'я лінгвістичної змінної; T – множина лінгвістичних значень; $V = \{v_1, \dots, v_i, \dots, v_n\}$ – множина базисних змінних.

Позначимо узагальнений екологічний фактор за x_i і опишемо його такою структурою: $\langle \text{«екологічні умови»}, \{\text{«хороші» «задовільні» «погані»}\}, \{v_1, \dots, v_i, \dots, v_N\} \rangle$, де i – номер соціально-екологічної зони (СЕЗ). Задамо лінгвістичне значення «задовільні» лінгвістичної змінної «екологічні умови», для кожної базисної змінної $v_1, \dots, v_i, \dots, v_N$.

Отримуємо нечітку множину $A_i = \{\mu_{A_i}(v_i) | v_i\}$, $i=1, \dots, 21$, де $\mu_{A_i}(v_i) \in [0,1]$ – функція належності, яка задає відношення базисної змінної до нечіткої множини, тобто ступінь відповідності твердження «екологічні умови задовільні» для заданої соціально-екологічної зони. У результаті, значення узагальненого екологічного фактора для заданої соціально-екологічної зони визначаємо з виразу: $x_{1i} = \mu_{A_i}(v_i)$.

Для побудови функції відповідності μ_{A_i} проводили періодичні вимірювання концентрацій шкідливих викидів транспортом та підприємствами, а також шумових навантажень у 7 районах (один раз на місяць чи квартал) на протязі шести років. Результати вимірювань накопичували у спеціально створеній для

цих цілей базі даних «ЕКОЛОГІЯ». За основу для обчислення значення $\mu_{A_1}(v_i)$ у заданій соціально-екологічній зоні застосували методику, яку розробили спеціалісти відділу екологічної медицини СЕС відповідно до нормативних документів СН 369-74. Причому попередньо, для кожної соціально-екологічної зони розраховували такі показники: C_l – відношення фактичної концентрації l – тої речовини до гранично допустимої концентрації цієї ж речовини; інтегровані оцінки забруднення території району підприємством C_Σ , обчислені відповідно до «Вказівок по розрахунку розсіювання в атмосфері шкідливих речовин, що містяться у викидах підприємств» за такою формулою:

$$C_\Sigma = \sum_{l=1}^L \frac{C_l}{C_{ГДК}^l}.$$

Тоді базисна змінна для i -тої соціально-екологічної зони набуває такого вигляду: $v_i = \max_{\Sigma, l} \{C_\Sigma, C_l\}$. Графік функції належності $\mu_{A_1}(v_i)$, для випадку $v_i \leq 1$, наведено на рис. 6.1 а), а для випадку $v_i \geq 1$ - на рис.6.1 б).

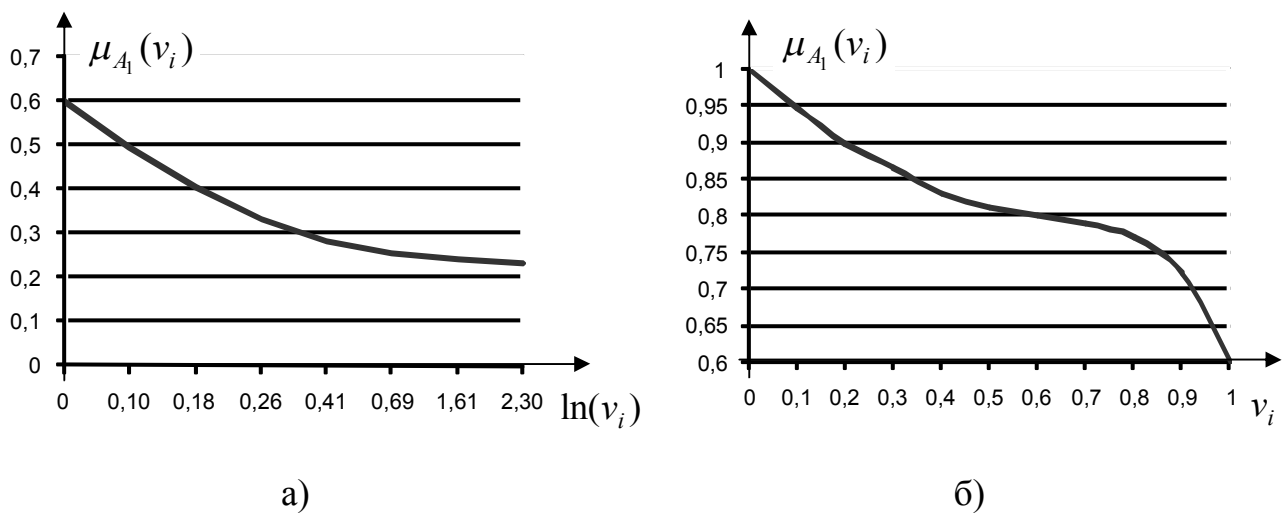


Рис. 6.1. Графік функції належності $\mu_{A_1}(v_i)$:
а) для випадку $v_i \leq 1$; б) для випадку $v_i \geq 1$

Результати оцінювання значень узагальненого екологічного фактора для районів міста відповідно до розглянутого підходу наведені у таблиці 6.1. Для порівняння, у цій же таблиці наведені рангові оцінки, отримані шляхом опрацювання результатів опитування екологів міста за методикою усереднення рангових оцінок [52].

Оцінки значень узагальненого екологічного фактора

Назва вулиці	№ СЕЗ	«Екологічні умови задовільні»	Рангові оцінки задовільності екологічних умов
Волинська	1	0,91	1
Волинська	2	0,91	1
Волинська	3	0,91	1
Гетьмана Орлика	4	0,62	4
Гетьмана Орлика	5	0,62	4
Гетьмана Орлика	6	0,62	4
За Рудкою	7	0,65	4
За Рудкою	8	0,65	4
За Рудкою	9	0,65	4
Ген. Тарнавського	10	0,70	3
Ген. Тарнавського	11	0,70	3
Ген. Тарнавського	12	0,70	3
Збаразька	13	0,23	5
Збаразька	14	0,23	5
Збаразька	15	0,23	5
Замонастирська - Гайова	16	0,34	5
Замонастирська - Гайова	17	0,34	5
Замонастирська - Гайова	18	0,34	5
Гагаріна	19	0,75	2
Гагаріна	20	0,75	2
Гагаріна	21	0,75	2

Аналогічний підхід застосовували для побудови узагальнених соціальних факторів [49]. Характеристику вагомих соціальних факторів наведено у таблиці 6.2.

Таблиця 6.2.

Вагомі соціальні ознаки при оцінюванні захворюваності населення

Назва соціального фактора	Соціальні ознаки
Умови проживання	Розмір житла (площа на 1-го мешканця)
	Освітленість житла
	Спосіб опалювання
	Регулярність та якість водопостачання
	Загальний стан житла (відсутність надмірної вологості)
Матеріальний стан	Дохід на одну особу
	Наявність додаткових можливостей для організації відпочинку
	Наявність присадибної ділянки
	Рівень забезпечення харчування
Спосіб життя	Наявність щоденного сну більше 7 годин
	Сприятливі сімейні стосунки
	Доброзичливі службові стосунки
	Рухомий спосіб життя
	Регулярність, раціональність та повноцінність харчування
	Регулярність заняття спортом
	Відсутність шкідливих звичок (куріння, зловживання алкоголем)

Для характеристики узагальнених соціальних факторів увели такі лінгвістичні змінні: «Умови проживання», «Матеріальний стан», «Спосіб життя». Надамо цим змінним значення «задовільні». Отримаємо відповідні нечіткі множини A_2 , A_3 , A_4 із функціями належності $\mu_{A_2}(w_i)$, $\mu_{A_3}(w_i)$, $\mu_{A_4}(w_i)$, які визначають ступінь відповідності твердження «Соціальні умови – задовільні» для фіксованого відсотка w_i осіб заданої соціально-екологічної зони. Для побудови факторної моделі узагальнені соціальні фактори позначаємо за x_2 , x_3 , x_4 , а їхні значення встановлюємо еквівалентними відповідним значенням функцій належності $\mu_{A_2}(w_i)$, $\mu_{A_3}(w_i)$, $\mu_{A_4}(w_i)$ при $w_i=100\%$.

Значення функцій належності для кожної соціально-екологічної зони розраховували за наступною методикою. Спочатку виділяли детальні характеристики кожного із узагальнених соціальних факторів. «Умови проживання» характеризували: розмірами житла, його освітленістю, способом опалювання, наявністю інших зручностей. «Матеріальний стан» характеризували: доходами на одну особу, наявністю додаткових можливостей для організації відпочинку, наявністю присадибної ділянки, рівнем забезпечення харчування. Характеристиками «Способу життя» задали: наявність щоденного сну більше 7 годин, сімейні стосунки та стосунки на роботі, наявність шкідливих звичок (куріння, надмірне вживання алкоголю), регулярність заняття спортом. Характеристики соціальних факторів отримували із опитування населення соціально-екологічної зони, а для амбулаторних хворих – від дільничних лікарів і заносили в базу даних «ЕКОЛОГІЯ». Від дільничних лікарів також отримали дані про кількість захворювань y_i населення соціально-екологічної зони і з урахуванням відсотка звертань з приводу хвороби та похибки діагнозу. Вказані дані записували в базу «ЕКОЛОГІЯ» в інтервальному вигляді $[y_i^-; y_i^+]$.

Результати оцінки кількості захворювань у розрізі СЕЗ наведені в таблиці 6.3 в інтервальному вигляді.

Таблиця 6.3.

Захворюваність населення соціально – екологічних зон на 100 осіб

Назва вулиці	№ СЕЗ	Захворюваність на 100 осіб
Волинська	1	[24;30]
Волинська	2	[38;48]
Волинська	3	[30;38]
Гетьмана Орлика	4	[51;66]
Гетьмана Орлика	5	[46;56]
Гетьмана Орлика	6	[72;90]
За Рудкою	7	[39;48]

Назва вулиці	№ СЕЗ	Захворюваність на 100 осіб
За Рудкою	8	[44;55]
За Рудкою	9	[43;53]
Ген. Тарнавського	10	[57;72]
Ген. Тарнавського	11	[63;78]
Ген. Тарнавського	12	[60;75]
Збаразька	13	[83;97]
Збаразька	14	[115;135]
Збаразька	15	[99;120]
Замонастирська - Гайова	16	[78;96]
Замонастирська - Гайова	17	[93;111]
Замонастирська - Гайова	18	[84;99]
Гагаріна	19	[54;69]
Гагаріна	20	[64;80]
Гагаріна	21	[66;82]

Потім згідно з розглянутими соціальними характеристиками проводили декомпозицію кожної лінгвістичної змінної зі значенням «задовільні». Проведена декомпозиція, дала можливість отримати набори нечітких змінних, які описані нечіткими множинами: $\{A_{t2}\}$, $\{A_{t3}\}$, $\{A_{t4}\}$ із відповідними функціями належності $\mu_{A_{t2}}(w_i)$, $\mu_{A_{t3}}(w_i)$, $\mu_{A_{t4}}(w_i)$. Значення функцій належності $\mu_{A_{t2}}(w_i)$, $\mu_{A_{t3}}(w_i)$, $\mu_{A_{t4}}(w_i)$, при $w_i=100\%$ визначали як відсоток осіб в i -тій соціально-екологічній зоні зі спільною t -тою соціальною характеристикою. На наступному кроці отримали нечіткі множини

$$A_2 = \bigcap_t A_{t2}^{\alpha_t}, \quad A_3 = \bigcap_t A_{t3}^{\alpha_t}, \quad A_4 = \bigcap_t A_{t4}^{\alpha_t}$$

і відповідні до них функції належності

$$\mu_{A_2}(w_i) = \min_t \{\mu_{A_{t2}}^{\alpha_{t2}}(w_i)\}, \quad \mu_{A_3}(w_i) = \min_t \{\mu_{A_{t3}}^{\alpha_{t3}}(w_i)\}, \quad \mu_{A_4}(w_i) = \min_t \{\mu_{A_{t4}}^{\alpha_{t4}}(w_i)\},$$

де α_{t2} , α_{t3} , α_{t4} – коефіцієнти важливості, які визначають інтенсивність впливу певної соціальної характеристики на результуючий показник (захворюваність).

Коефіцієнти важливості визначали на основі коефіцієнтів кореляції між соціальною характеристикою, заданою значенням відповідної функції

належності $\mu_{A_2}(w_i)$, $\mu_{A_3}(w_i)$, чи $\mu_{A_4}(w_i)$ для $w_i=100\%$ і середнім значенням $\bar{y}_i = 0,5 \cdot (y_i^- + y_i^+)$ результуючого показника (кількість захворювань) у розрізі 21-ї соціально-екологічної зони. Обчислені попарні відношення коефіцієнтів кореляції уможливили побудову матриці вагових коефіцієнтів, із якої, згідно з методикою, описаною в праці [9], отримали: α_{i2} , α_{i3} , α_{i4} .

Результати оцінювання значень узагальнених соціальних факторів для 21-ї соціально-екологічної зони міста, обчислені відповідно до розглянутого підходу, наведені у таблиці 6.4.

Таблиця 6.4.

Оцінки значень узагальнених соціальних факторів

Назва вулиці	№ СЕЗ	«Умови проживання - задовільні»	«Матеріальний стан – задовільний»	«Спосіб життя – задовільний»
Волинська	1	0,923	0,709	0,933
Волинська	2	0,912	0,564	0,482
Волинська	3	0,931	0,621	0,784
Гетьмана Орлика	4	0,754	0,518	0,421
Гетьмана Орлика	5	0,703	0,619	0,521
Гетьмана Орлика	6	0,603	0,354	0,245
За Рудкою	7	0,922	0,803	0,954
За Рудкою	8	0,902	0,622	0,655
За Рудкою	9	0,784	0,735	0,921
Ген. Тарнавського	10	0,442	0,423	0,421
Ген. Тарнавського	11	0,456	0,385	0,327
Ген. Тарнавського	12	0,431	0,356	0,435
Збаразька	13	0,342	0,318	0,423
Збаразька	14	0,255	0,267	0,196
Збаразька	15	0,248	0,225	0,247
Замонастирська - Гайова	16	0,521	0,359	0,343
Замонастирська - Гайова	17	0,347	0,277	0,288
Замонастирська - Гайова	18	0,351	0,290	0,412
Гагаріна	19	0,358	0,443	0,364
Гагаріна	20	0,276	0,337	0,294
Гагаріна	21	0,234	0,318	0,275

6.1.2. Ідентифікація інтервальної моделі взаємозв'язку між соціально-екологічними чинниками та рівнем захворюваності

Особливості отримання узагальнених соціальних та екологічних факторів, а також спосіб представлення результуючої характеристики (кількість захворювань) в інтервальному вигляді унеможливають застосування для ідентифікації взаємозв'язків між соціально-екологічними факторами та рівнем захворюваності теорії імовірностей та статистичних методів, зокрема, регресійного аналізу. Для розв'язування вказаної задачі запропоновано використати метод аналізу інтервальних даних.

Вихідні дані для побудови інтервальної моделі наведено у таблиці 6.5.

Таблиця 6.5.

Зведена таблиця характеристик соціально-екологічних зон

№ СЕЗ	Екологічний фактор	Соціальні фактори			Захворюваність на 100 осіб
		x_{2i}	x_{3i}	x_{4i}	
i	x_{1i}	x_{2i}	x_{3i}	x_{4i}	$[y_i^-; y_i^+]$
1	0,91	0,923	0,709	0,933	[24;30]
2	0,91	0,912	0,564	0,482	[38;48]
3	0,91	0,931	0,621	0,784	[30;38]
4	0,62	0,754	0,518	0,421	[51;66]
5	0,62	0,703	0,619	0,521	[46;56]
6	0,62	0,603	0,354	0,245	[72;90]
7	0,65	0,922	0,803	0,954	[39;48]
8	0,65	0,902	0,622	0,655	[44;55]
9	0,65	0,784	0,735	0,921	[43;53]
10	0,70	0,442	0,423	0,421	[57;72]
11	0,70	0,456	0,385	0,327	[63;78]
12	0,70	0,431	0,356	0,435	[60;75]
13	0,23	0,342	0,318	0,423	[83;97]
14	0,23	0,255	0,267	0,196	[115;135]
15	0,23	0,248	0,225	0,247	[99;120]
16	0,34	0,521	0,359	0,343	[78;96]
17	0,34	0,347	0,277	0,288	[93;111]
18	0,34	0,351	0,290	0,412	[84;99]
19	0,75	0,358	0,443	0,364	[54;69]
20	0,75	0,276	0,337	0,294	[64;80]
21	0,75	0,234	0,318	0,275	[66;82]

6.1.2.1. Синтез оптимальної структури моделі

Пошук оптимальної моделі здійснювали у класі поліномів. Для синтезу оптимальної структури застосували метод послідовного включення, який наведено у підрозділі 2.1. За критерії оптимальності обирали мінімум кількості елементів поліноміальної структури та об'єму описаного навколо області параметрів моделі прямокутного паралелепіпеда Π^+ (критерій точності), для заданої у кількості 4 входів-факторів.

Спочатку, виходячи із особливостей об'єкту досліджень, у модель взаємозв'язку між соціально-екологічними факторами та кількістю захворювань включили усі чотири фактори. Отже, у цьому випадку найпростішу модель задає поліном першого порядку:

$$y(\vec{x}) = b_0 + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + b_3 \cdot x_3 + b_4 \cdot x_4,$$

де $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$;

x_1 – узагальнений екологічний фактор;

x_2 , – узагальнений фактор, що задає ступінь відповідності для групи населення твердженню «Умови проживання – задовільні»;

x_3 – задає ступінь відповідності для групи населення твердженню «Матеріальний стан – задовільний»;

x_4 – задає ступінь відповідності для групи населення твердженню «Спосіб життя – задовільний».

Користуючись даними таблиці 6.5 для обраної структури моделі, склали систему інтервальних рівнянь:

$$y_i^- \leq b_0 + b_1 \cdot x_{1i} + b_2 \cdot x_{2i} + b_3 \cdot x_{3i} + b_4 \cdot x_{4i} \leq y_i^+, \quad i = 1, \dots, 21.$$

Перевірку адекватності запропонованої моделі проводили у спосіб обчислення вершин прямокутного локалізаційного паралелепіпеда Π^+ розв'язків системи. Для цього застосовували програмний модуль SYNSTRUC, який побудовано за алгоритмом, описаним у підрозділі 3.1.

Складена система інтервальних рівнянь для даної структури моделі виявилась несумісною.

Тоді було прийнято рішення ускладнити модель у спосіб додавання членів, які відображають парну взаємодію факторів: $x_1 \cdot x_2$, $x_1 \cdot x_3$, $x_1 \cdot x_4$, $x_2 \cdot x_3$, $x_2 \cdot x_4$, $x_3 \cdot x_4$. У результаті сформувавши шість таких моделей:

$$y(\vec{x}) = b_0 + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + b_3 \cdot x_3 + b_4 \cdot x_4 + b_{jk} \cdot x_j \cdot x_k, \quad j, k = 1, \dots, 4, \quad j < k.$$

За результатами перевірки адекватності отриманих моделей встановили, що жодна із інтервальних систем, складених на їхній основі не виявилася сумісною.

Шляхом «нارощування» параметрів моделі (до семи) з коефіцієнтами пар-

них взаємодій отримали 15 моделей-претендентів, у результаті перевірки яких встановили:

- п'ять моделей із членом парної взаємодії $b_{34} \cdot x_3 \cdot x_4$

$$y(\bar{x}) = b_0 + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + b_3 \cdot x_3 + b_4 \cdot x_4 + b_{jk} \cdot x_j \cdot x_k + b_{34} \cdot x_3 \cdot x_4, \quad j = 1, 2, \quad k = 2, \dots, 4, \quad j < k$$

забезпечують сумісність складених інтервальних систем рівнянь, але мають незначущі параметри, обнулення яких призводило до несумісності системи, а також мають незадовільні прогностичні властивості (мінімальний об'єм V_{Π^+} прямокутного паралелепіпеда Π^+ , $V_{\Pi^+} = 1,37 \cdot 10^{11}$), тому ці моделі вилучили з подальшого розгляду;

- згідно з критерієм точності також вилучили з розгляду дві моделі

$$y(\bar{x}) = b_0 + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + b_3 \cdot x_3 + b_4 \cdot x_4 + b_{13} \cdot x_1 \cdot x_3 + b_{24} \cdot x_2 \cdot x_4,$$

$$y(\bar{x}) = b_0 + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + b_3 \cdot x_3 + b_4 \cdot x_4 + b_{13} \cdot x_1 \cdot x_4 + b_{24} \cdot x_2 \cdot x_4,$$

для яких $V_{\Pi^+} = 1,07 \cdot 10^7$ та $V_{\Pi^+} = 4,21 \cdot 10^9$, відповідно;

- решта моделей не забезпечила сумісності інтервальних систем рівнянь, які побудовано на їхній основі, тому їх ускладнювали до восьми членів.

Враховуючи результати вищепроведеного аналізу, на наступному етапі є зміст розглядати тільки ті моделі з восьми членів, які не включають комбінацій членів парних взаємодій, що призвели до вилучення попередніх моделей із розгляду. Наприклад, не має змісту розглядати моделі, у яких одночасно є елементи парних взаємодій $x_j \cdot x_k$ ($j = 1, 2, \quad k = 2, \dots, 4, \quad j < k$) та $x_3 \cdot x_4$, чи $x_1 \cdot x_3$ та $x_2 \cdot x_4$. Отже, на наступному етапі синтезу структури, спочатку розглядали такі моделі:

$$y(\bar{x}) = b_0 + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + b_3 \cdot x_3 + b_4 \cdot x_4 + b_{12} \cdot x_1 \cdot x_2 + b_{13} \cdot x_1 \cdot x_3 + b_{14} \cdot x_1 \cdot x_4,$$

$$y(\bar{x}) = b_0 + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + b_3 \cdot x_3 + b_4 \cdot x_4 + b_{12} \cdot x_1 \cdot x_2 + b_{13} \cdot x_1 \cdot x_3 + b_{23} \cdot x_2 \cdot x_3,$$

$$y(\bar{x}) = b_0 + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + b_3 \cdot x_3 + b_4 \cdot x_4 + b_{12} \cdot x_1 \cdot x_2 + b_{14} \cdot x_1 \cdot x_4 + b_{23} \cdot x_2 \cdot x_3,$$

$$y(\bar{x}) = b_0 + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + b_3 \cdot x_3 + b_4 \cdot x_4 + b_{12} \cdot x_1 \cdot x_2 + b_{23} \cdot x_2 \cdot x_3 + b_{24} \cdot x_2 \cdot x_4,$$

$$y(\bar{x}) = b_0 + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + b_3 \cdot x_3 + b_4 \cdot x_4 + b_{13} \cdot x_1 \cdot x_3 + b_{14} \cdot x_1 \cdot x_4 + b_{23} \cdot x_2 \cdot x_3,$$

які виявились «неадекватними», тобто, складені із їхнім застосуванням на основі таблиці 6.5 інтервальні системи рівнянь не мали розв'язку. Потім на базі восьми моделей із попереднього етапу було побудовано 32 моделі з відповідними членами потрібної взаємодії факторів $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$, $x_1 \cdot x_2 \cdot x_4$, $x_1 \cdot x_3 \cdot x_4$, $x_2 \cdot x_3 \cdot x_4$, серед яких виявили адекватні:

$$y^1(\bar{x}) = b_0 + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + b_3 \cdot x_3 + b_4 \cdot x_4 + b_{12} \cdot x_1 \cdot x_2 + b_{23} \cdot x_2 \cdot x_3 + b_{123} \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3,$$

$$y^2(\bar{x}) = b_0 + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + b_3 \cdot x_3 + b_4 \cdot x_4 + b_{12} \cdot x_1 \cdot x_2 + b_{24} \cdot x_2 \cdot x_4 + b_{123} \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3,$$

$$y^3(\bar{x}) = b_0 + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + b_3 \cdot x_3 + b_4 \cdot x_4 + b_{14} \cdot x_1 \cdot x_4 + b_{23} \cdot x_2 \cdot x_3 + b_{123} \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3,$$

$$\begin{aligned}
y^4(\bar{x}) &= b_0 + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + b_3 \cdot x_3 + b_4 \cdot x_4 + b_{23} \cdot x_2 \cdot x_3 + b_{24} \cdot x_2 \cdot x_4 + b_{123} \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3, \\
y^5(\bar{x}) &= b_0 + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + b_3 \cdot x_3 + b_4 \cdot x_4 + b_{14} \cdot x_1 \cdot x_4 + b_{23} \cdot x_2 \cdot x_3 + b_{124} \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_4, \\
y^6(\bar{x}) &= b_0 + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + b_3 \cdot x_3 + b_4 \cdot x_4 + b_{23} \cdot x_2 \cdot x_3 + b_{24} \cdot x_2 \cdot x_4 + b_{124} \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_4, \\
y^7(\bar{x}) &= b_0 + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + b_3 \cdot x_3 + b_4 \cdot x_4 + b_{12} \cdot x_1 \cdot x_2 + b_{13} \cdot x_1 \cdot x_3 + b_{124} \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_4, \\
y^8(\bar{x}) &= b_0 + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + b_3 \cdot x_3 + b_4 \cdot x_4 + b_{12} \cdot x_1 \cdot x_2 + b_{24} \cdot x_2 \cdot x_4 + b_{124} \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_4, \\
y^9(\bar{x}) &= b_0 + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + b_3 \cdot x_3 + b_4 \cdot x_4 + b_{13} \cdot x_1 \cdot x_3 + b_{14} \cdot x_1 \cdot x_4 + b_{124} \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_4, \\
y^{10}(\bar{x}) &= b_0 + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + b_3 \cdot x_3 + b_4 \cdot x_4 + b_{13} \cdot x_1 \cdot x_3 + b_{23} \cdot x_2 \cdot x_3 + b_{124} \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_4, \\
y^{11}(\bar{x}) &= b_0 + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + b_3 \cdot x_3 + b_4 \cdot x_4 + b_{23} \cdot x_2 \cdot x_3 + b_{24} \cdot x_2 \cdot x_4 + b_{124} \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_4.
\end{aligned}$$

Усі моделі із членом потрійної взаємодії факторів $x_2 \cdot x_3 \cdot x_4$ спростили у спосіб обнулення обох членів парних взаємодій. Усі вказані моделі за цих умов набули такого вигляду:

$$y^{12}(\bar{x}) = b_0 + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + b_3 \cdot x_3 + b_4 \cdot x_4 + b_{234} \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4.$$

Проте отримана модель має не високі прогностичні властивості (об'єм V_{Π^+} прямокутного паралелепіпеда Π^+ , $V_{\Pi^+} = 9,67 \cdot 10^6$).

Діаграма, що відображає значення показника точності для кожної із отриманих 12-ти моделей наведена на рис. 6.2.

Як бачимо із рисунка 6.2, найкращою за критерієм точності, серед розглянутих моделей, є модель $y^3(\bar{x})$ за номером 3. Об'єм описаного навколо області параметрів цієї моделі прямокутного паралелепіпеда Π^+ дорівнював 8325 ($\ln(V_{\Pi^+})=9,03$). Серед моделей із найменшою кількістю коефіцієнтів (шість), найкращою виявилась модель $y^{12}(\bar{x})$ за номером 12, однак вона має гірші прогностичні властивості, аніж модель $y^3(\bar{x})$.

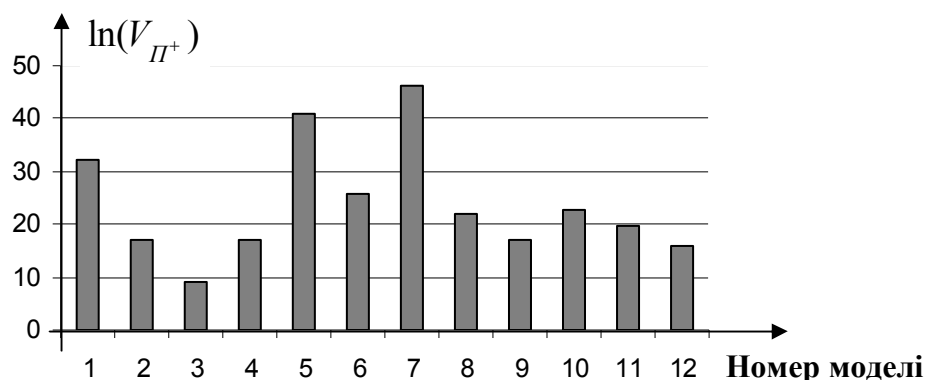


Рис. 6.2. Показники точності адекватних моделей

Подальше нарощування членів у моделях не має змісту, оскільки супроводжується втратою точності моделей.

Отже, для побудови інтервальної моделі взаємозв'язку між соціально-екологічними факторами та кількістю захворювань обрали таку базову структуру моделі [49]:

$$y(\bar{x}) = b_0 + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + b_3 \cdot x_3 + b_4 \cdot x_4 + b_5 \cdot x_1 \cdot x_4 + b_6 \cdot x_2 \cdot x_3 + b_7 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3.$$

Із застосуванням методу інтервальної локалізації оцінили інтервальні значення параметрів отриманої моделі: $[b_0^-; b_0^+] = [187,84; 188,36]$, $[b_1^-; b_1^+] = [-54,83; -53,99]$, $[b_2^-; b_2^+] = [-91,04; -87,04]$, $[b_3^-; b_3^+] = [-165,65; -160,35]$, $[b_4^-; b_4^+] = [-62,70; -60,38]$, $[b_5^-; b_5^+] = [53,99; 59,74]$, $[b_6^-; b_6^+] = [244,19; 250,26]$, $[b_7^-; b_7^+] = [-112,01; -101,01]$.

Як бачимо, усі з отриманих параметрів моделі є значущими.

6.1.2.2. Локалізація параметрів інтервальної моделі із виділенням насиченого блоку

Для підвищення точності прогнозування за допомогою інтервальної моделі взаємозв'язку між соціально-екологічними факторами і кількістю захворювань та забезпечення аналітичного задання меж її коридору прогнозування для обраної базової структури моделі застосували метод локалізації параметрів із виділенням насиченого блоку, розглянутий у підрозділах 3.2, та 3.3.

Насиченим блоком локалізували розв'язки такої системи інтервальних рівнянь [49]:

$$y_i^- \leq b_0 + b_1 \cdot x_{1i} + b_2 \cdot x_{2i} + b_3 \cdot x_{3i} + b_4 \cdot x_{4i} + b_5 \cdot x_{1i} \cdot x_{4i} + b_6 \cdot x_{2i} \cdot x_{3i} + b_7 \cdot x_{1i} \cdot x_{2i} \cdot x_{3i} \leq y_i^+, \quad i = 1, \dots, 21. \quad (6.1)$$

Для отримання базового насиченого блоку із $m = 8$ інтервальних рівнянь системи (6.1), який задаватиме конфігурацію локалізаційного паралелотопа Ω_m області параметрів моделі, необхідно розв'язати задачу математичного програмування (3.6) на дискретній множині значень входів моделі (факторів), де матриця F_m у нашому випадку матиме такий вигляд:

$$F_m = \{1, x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}, x_{4i}, x_{1i} \cdot x_{4i}, x_{2i} \cdot x_{3i}, x_{1i} \cdot x_{2i} \cdot x_{3i}, \quad i = 1, \dots, 8\}.$$

Зауважимо, що метою розв'язування задачі (3.6) є формування такої системи із m рівнянь, щоб вигляд паралелотопа Ω_m , який є її розв'язком у просторі параметрів, був максимально подібним до вигляду многогранника Ω – розв'язку усієї системи (6.1). Виходячи з цього, взамін розв'язування задачі (3.6) для формування базового насиченого блоку застосували підхід, який побудовано на аналізі вершин області параметрів Ω [49]:

$$\begin{aligned} \vec{b}^1 &= (187,84; -54,146; -91,046; -160,35; -60,383; 53,998; 244,2; -101,01)^T, \\ \vec{b}^2 &= (188,37; -54,231; -87,871; -165,2; -62,624; 59,325; 250,09; -111,48), \\ \vec{b}^3 &= (188,08; -54,835; -87,162; -164,13; -62,521; 59,041; 248,17; -110,09), \\ \vec{b}^4 &= (188,2; -53,995; -87,852; -165,18; -62,216; 58,7; 249,99; -111,36), \\ \vec{b}^5 &= (188,04; -54,201; -87,039; -164,74; -62,632; 59,749; 248,83; -112,02), \\ \vec{b}^6 &= (188,3; -54,031; -87,858; -165,65; -62,208; 58,977; 250,21; -111,45), \\ \vec{b}^7 &= (188,26; -54,121; -87,840; -165,14; -62,707; 59,441; 250,26; -111,811). \end{aligned}$$

Вищенаведені координати деяких вершин області Ω отримали в результаті реалізації методу інтервальної локалізації у процесі синтезу структури моделі.

Обчислення показали, що найбільша відстань (14,89) є між вершинами \vec{b}^1 та \vec{b}^7 . Вірогідно, що у випадку сильної «втягнутості» області Ω саме ці вершини (або наближені до них) мають належати найдовшій чи одній із найдовших діагоналей локалізаційного паралелотопа Ω_m . Тоді, вказані вершини можуть бути спільними для відповідних восьми граней паралелотопа Ω_m . Враховуючи, що кожен грань паралелотопа Ω_m задаємо лівою чи правою частиною одного з інтервальних рівнянь системи (6.1), для знаходження базового насиченого блоку спочатку обираємо вісім інтервальних рівнянь, розв'язками системи яких є область у вигляді паралелотопа із вершиною \vec{b}^1 . Аналогічно обираємо вісім інтервальних рівнянь, розв'язками системи яких є паралелотоп із вершинами, серед яких є вершина \vec{b}^2 . Потім оцінюємо об'єми отриманих паралелотопів Ω_m і за базову систему обираємо тих вісім інтервальних рівнянь, які забезпечують найменші розміри області локалізації.

У результаті реалізації описаного підходу отримали базовий блок інтервальних рівнянь, який включає рівняння системи (6.1) із такими номерами: 1, 2, 5, 7, 9, 13, 14 та 21. Запишемо базовий блок у матричному вигляді:

$$\vec{Y}^- \leq F_m \cdot \vec{b} \leq \vec{Y}^+, \quad (6.2)$$

де $\vec{Y}^- = (24, 38, 46, 39, 43, 83, 115, 66)^T$;

$\vec{Y}^+ = (30, 48, 56, 48, 53, 97, 135, 82)^T$;

$\vec{b} = (b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7)^T$ – вектор невідомих параметрів моделі;

$$F_{m=8} = \begin{pmatrix} 1 & 0,91 & 0,923 & 0,709 & 0,933 & 0,84903 & 0,65441 & 0,59551 \\ 1 & 0,91 & 0,912 & 0,564 & 0,482 & 0,43862 & 0,51437 & 0,46808 \\ 1 & 0,62 & 0,703 & 0,619 & 0,521 & 0,32302 & 0,43516 & 0,26980 \\ 1 & 0,65 & 0,922 & 0,803 & 0,954 & 0,62010 & 0,74037 & 0,48124 \\ 1 & 0,65 & 0,784 & 0,735 & 0,921 & 0,59865 & 0,57624 & 0,37456 \\ 1 & 0,23 & 0,342 & 0,318 & 0,423 & 0,09729 & 0,10876 & 0,02501 \\ 1 & 0,23 & 0,255 & 0,267 & 0,196 & 0,04508 & 0,06809 & 0,01566 \\ 1 & 0,75 & 0,234 & 0,318 & 0,275 & 0,20625 & 0,07441 & 0,05581 \end{pmatrix}. \quad (6.3)$$

Далі, для локалізації параметрів моделі на основі отриманого базового насиченого блоку застосували програмний модуль LOCNAS, який реалізовано на базі паралельних обчислювальних графів (рис. 3.2). У результаті, локалізовану область параметрів визначили із розв'язку системи (6.2), у якій вектори \vec{Y}^- та \vec{Y}^+ набули такого вигляду:

$$\vec{Y}^- = (29,93; 38; 55,95; 47,88; 43; 96,93; 115; 81,67)^T; \quad (6.4)$$

$$\vec{Y}^+ = (30; 38,04; 56; 48; 43,05; 97; 115,06; 82)^T. \quad (6.5)$$

Об'єм паралелотопа Ω_m , який отримано з розв'язку насиченої системи (6.2) із урахуванням векторів (6.4) та (6.5), дорівнює $V_{\Omega_m} = 1,32 \cdot 10^{-3}$, що у $6,26 \cdot 10^6$ разів менше від об'єму прямокутного паралелепіпеда Π^+ , який отримано при інтервальній локалізації для тієї ж моделі.

6.1.2.3. Оцінка прогностичних властивостей моделі

Для забезпечення аналітичного задання меж коридору прогнозування інтервальної моделі, область Ω_m опишемо еліпсоїдом (1.50).

$$Q_{m=8} = \{ \vec{b} \in R^m \mid (\vec{b} - \vec{\bar{b}})^T \cdot F_m^T \cdot E^{-2} \cdot F_m \cdot (\vec{b} - \vec{\bar{b}}) = m \},$$

де $\vec{\bar{b}} = (189,415; -54,324; -76,193; -180,775; -69,321; 76,445; 267,847; -146,141)^T$ – вектор, обчислений за формулою (1.32) $\vec{\bar{b}} = F_m^{-1} \cdot \vec{\bar{Y}}$;

$$\vec{\bar{Y}} = 0,5(\vec{Y}^- + \vec{Y}^+);$$

F_m – матриця та \vec{Y}^- , \vec{Y}^+ – вектори, які задано виразами (6.3) та (6.4), (6.5), відповідно;

$E = \text{diag} \{0,035; 0,02; 0,025; 0,06; 0,025; 0,035; 0,0315; 0,165\}$ – діагональна матриця інтервальних похибок, яку обчислено із компонент векторів (6.4), (6.5).

Застосування замість локалізованої області Ω_m області параметрів у вигляді описаного m -вимірного еліпсоїда уможливило побудову такого коридору прогнозування:

$$\begin{aligned} [\hat{y}(\vec{x})] \Big|_{\vec{b} \in Q_{m=8}} = & [189,415 - 54,324 \cdot x_1 - 76,193 \cdot x_2 - 180,775 \cdot x_3 - 69,321 \cdot x_4 + \\ & + 76,445 \cdot x_1 \cdot x_4 + 267,847 \cdot x_2 \cdot x_3 - 146,141 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \pm 0,5 \cdot \Delta_{\hat{y}(\vec{x})} \Big|_{\vec{b} \in Q_{m=8}}], \end{aligned} \quad (6.6)$$

де $\Delta_{\hat{y}(\vec{x})} \Big|_{\vec{b} \in Q_{m=8}} = 2(8 \cdot (1, x_1, x_2, x_3, x_4, x_1 \cdot x_4, x_2 \cdot x_3, x_1 \cdot x_2 \cdot x_3) \cdot H^{-1} \cdot$

$\cdot (1, x_1, x_2, x_3, x_4, x_1 \cdot x_4, x_2 \cdot x_3, x_1 \cdot x_2 \cdot x_3)^T)^{1/2}$;

$$H^{-1} = (F_m^T \cdot E^{-2} \cdot F_m)^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0,352 & -0,006 & 3,048 & -4,359 & -1,869 & 4,705 & 5,109 & -9,523 \\ -0,006 & 0,138 & -0,376 & 0,175 & 0,205 & -0,428 & -0,125 & 0,596 \\ 3,048 & -0,376 & 29,694 & -40,401 & -17,782 & 44,819 & 46,701 & -89,923 \\ -4,359 & 0,175 & -40,401 & 56,395 & 24,368 & -61,575 & -65,583 & 124,354 \\ -1,869 & 0,205 & -17,782 & 24,36 & 10,756 & -27,019 & -28,299 & 54,196 \\ 4,705 & -0,428 & 44,819 & -61,575 & -27,019 & 68,059 & 71,432 & -136,744 \\ 5,109 & -0,125 & 46,701 & -65,583 & -28,299 & 71,432 & 76,491 & -144,426 \\ -9,523 & 0,596 & -89,923 & 124,354 & 54,196 & -136,744 & -144,426 & 275,471 \end{pmatrix}.$$

У таблиці 6.6 наведено результати прогнозування кількості захворювань за допомогою інтервальної моделі взаємозв'язку між соціально-екологічними факторами та захворюваністю населення. Ці результати отримано для контрольованих соціально-екологічних зон згідно з виразом (6.6). Для порівняння, у цій же таблиці наведено дані спостережень про кількість захворювань.

Таблиця 6.6.

Таблиця результатів прогнозування кількості захворювань

№ СЕЗ	Кількість захворювань на 100 осіб		Похибка прогнозування
	Результати прогнозування	Дані спостережень	
<i>I</i>	$[\hat{y}_i^-; \hat{y}_i^+]$	$[y_i^-; y_i^+]$	$\Delta_{\hat{y}(\bar{x})} _{\bar{b} \in Q_{m=8}}$
1	[29,86; 30,06]	[24;30]	0,2
2	[37,98; 38,08]	[38;48]	0,1
3	[33,39; 36,50]	[30;38]	3,11
4	[62,06; 67,22]	[51;66]	5,16
5	[55,90; 56,04]	[46;56]	0,14
6	[74,64; 81,88]	[72;90]	7,24
7	[47,76; 48,11]	[39;48]	0,35
8	[54,29; 59,82]	[44;55]	5,53
9	[42,96; 43,10]	[43;53]	0,14
10	[64,71; 66,38]	[57;72]	1,67
11	[69,67; 72,21]	[63;78]	2,54
12	[70,28; 75,16]	[60;75]	4,88
13	[96,86; 97,07]	[83;97]	0,21
14	[114,94; 115,13]	[115;135]	0,19
15	[117,18; 118,10]	[99;120]	0,92
16	[89,15; 95,43]	[78;96]	6,28
17	[101,43; 104,44]	[93;111]	3,01
18	[94,96; 97,30]	[84;99]	2,34
19	[60,96; 63,14]	[54;69]	2,18
20	[77,50; 78,33]	[64;80]	0,83
21	[81,37; 82,30]	[66;82]	0,93

Як бачимо із таблиці 6.6, максимальна похибка прогнозування не перевищує значення 7,24. Прогнозовані інтервали переважно включені в інтервали, які отримано за результатами експериментальних досліджень (в окремих випадках перетинають їх), що засвідчує адекватність побудованої інтервальної моделі та достатньо високу її точність.

Побудовану інтервальну модель застосовували для оцінки комплексного впливу автотранспортного підприємства АТП-16127 (розміщене у місті Тернополі) на зміну соціально-екологічного балансу.

Підприємство має дванадцять найбільш інтенсивних джерел викидів шкідливих речовин у атмосферу і планує наростити свої потужності удвічі, що призведе до збільшення обсягів викидів бутилацетату, толуолу, тетраетилсвинцю, сірчаного ангідриду, формальдегіду. Санітарно-захисна зона АТП-16127 згідно з СН-245-71 становить 50 метрів. За результатами вимірювань концентрацій шкідливих речовин у повітрі та на ґрунті, шумових навантажень на території житлової забудови, що межує із СЗЗ АТП-16127 встановлено значення узагальненого екологічного фактора $x_1=0,23$, узагальнених соціальних факторів $x_2=0,261$, $x_3=0,22$, $x_4=0,242$ та розраховано згідно з моделлю (6.6) прогнозований інтервал захворювань $[\hat{y}(\bar{x})] = [115; 123]$.

У випадку збільшення потужності підприємства у двічі, значення узагальненого екологічного фактора x_1 , яке обчислюємо за розглянутою методикою, становитиме $x_1=0,14$, а прогнозований інтервал захворювань у житловій зоні: $\hat{y}(\bar{x}) = [119; 127]$. Хоча отримані інтервали і перетинаються, при нарощуванні потужностей автотранспортним підприємством, прогнозується зростання кількості захворювань. Тому, для нарощування потужностей у межах існуючого проекту ГДВ підприємству було запропоновано здійснити ряд заходів соціального та технологічного характеру, які б уможливили зниження прогнозованого рівня захворюваності.

Розроблені інтервальні моделі протягом декількох років дають можливість спеціалістам СЕС досліджувати вплив господарської діяльності підприємств на зміну широкого спектру екологічних та соціальних факторів і запобігати зростанню рівня захворюваності при реалізації проектів промислової забудови міста.

6.2. Інтервальна модель для прогнозування добової генерованої електроенергії малої гідроелектростанції

За умов енергетичної кризи, яку на даний момент переживають більшість країн світу у тому числі і Україна, важливим є перехід до нетрадиційних джерел енергоресурсів а також раціональне використання усіх наявних ресурсів. Одним із таких видів є гідроресурси. Україна має достатньо велику кількість малих річок, енергію яких із успіхом та без шкоди довікілью можна було б використовувати для додаткового вироблення електроенергії. Тим більше, що у післявоєнні роки накопичено достатній досвід використання такого

виду ресурсів. Із початку ХХІ століття в Україні розпочалося активне відновлення малих гідроелектростанцій (МГЕС), що зумовило потребу їх дослідження з метою збільшення потужності. Для розв'язування вказаних задач необхідно розробляти математичні моделі для прогнозування генерованої електроенергії МГЕС залежно від факторів впливу, якими переважно є гідроресурси та характеристики гідротехнічних споруд.

Як відомо, для розв'язування такого класу задач традиційно використовують регресійний аналіз, який побудований на методі найменших квадратів. Проте критерій мінімуму середньоквадратичної похибки між експериментальними та прогнозованими даними не забезпечуватиме можливості дотримання заданого коридору генерованої потужності МГЕС. За цих умов більш придатними є методи побудови моделей характеристик МГЕС на основі аналізу інтервальних даних.

Для побудови вказаного класу моделей використано дані, які отримані на реально діючій МГЕС «Топольки» на р. Стрипа у Бучацькому районі Тернопільської області, на якій було встановлено гідротехнічне обладнання австрійської фірми «Фойт». МГЕС має одну турбіну з потужністю 90 кВт і станція виробляє близько 55 кВт/год. електроенергії.

Проведений аналіз зовнішніх факторів впливу показав, що зовнішнім середовищем для МГЕС є система постачання гідроресурсів, яку характеризують два не корельовані між собою фактори: напір води, тобто різниця рівнів верхнього і нижнього б'єфів, та рівень води на гідро пості уверху по течії річки. З іншого боку, оскільки МГЕС функціонує в єдиній енергосистемі, то генеровану електроенергію також визначає реактивна потужність.

Для спрощення подальшого розгляду позначимо генеровану за добу електроенергію за y , а набір факторів, що впливають на цю характеристику $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$, де x_1 – реактивна потужність; x_2 – напір (різниця відміток верхнього і нижнього б'єфів); x_3 – рівень води на гідропості у верху по течії річки.

Тоді задачу знаходження моделі для прогнозування генерованої електроенергії МГЕС залежно від значень набору факторів $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ впливу \vec{x}_i , формалізуємо у вигляді:

$$|y(\vec{x}_i) - y_0(\vec{x}_i)| \leq \xi_i, \quad (6.7)$$

тобто виходячи із умов забезпечення відхилення між прогнозованою чи реальною $y(\vec{x}_i)$ та бажаною потужністю $y_0(\vec{x}_i)$, не більшого від ξ_i для усіх заданих значень наборів факторів \vec{x}_i .

Для забезпечення неавтономного функціонування МГЕС в енергосистемі достатньо щоб відхилення ξ_i генерованої потужності від заданого графіку не перевищували 10%, тобто $\xi_i = 10\%$ для усіх значень наборів факторів впливу.

За цих умов справджується включення:

$$y_0(\vec{x}_i) \in [y(x_i) - \xi_i; y(x_i) + \xi_i], \quad \forall \vec{x}_i \in x. \quad (6.8)$$

Тоді для побудови інтервальної моделі генерованої електроенергії МГЕС запишемо таку систему обмежень:

$$\begin{cases} y^-(\bar{x}_1) \leq y_0(\bar{x}_1) \leq y^+(\bar{x}_1); \\ \vdots \\ y^-(\bar{x}_i) \leq y_0(\bar{x}_i) \leq y^+(\bar{x}_i); \\ \vdots \\ y^-(\bar{x}_N) \leq y_0(\bar{x}_N) \leq y^+(\bar{x}_N); \end{cases} \quad (6.9),$$

де значення $y^-(x_i) = y(x_i) - \xi_i$, $y^+(x_i) = y(x_i) + \xi_i$ та \bar{x}_i наведені в таблиці.

Математичну залежність $y_0(x)$ генерованої електроенергії представимо у вигляді лінійно-параметричного рівняння (1.22):

$$y_0(\bar{x}) = \beta_0 + \beta_1 \cdot \varphi_1(\bar{x}) + \dots + \beta_m \cdot \varphi_m(\bar{x}).$$

Тоді система обмежень (6.9) матиме вигляд ІСЛАР (1.24). Як показано у першому розділі, розв'язками цієї системи є область у вигляді опуклого многогранника Ω , а отримана область значень параметрів Ω породжує множину інтервальних моделей (1.27).

Математичну модель для прогнозування генерованої потужності МГЕС обираємо із функціонального коридору. Причому замість області параметрів у вигляді многогранника Ω шукаємо її оцінку у вигляді описаного прямокутного паралелепіпеда P^+ , що дає можливість перейти до інтервальних оцінок параметрів при записі моделі. Вихідні дані для отримання моделі наведено в таблиці 6.7.

Таблиця 6.7

Зведені дані про потужність та фактори впливу на її генерування у МГЕС

Дата	№	Реактивна потужність	Напір	Рівень води на гідропості	Межі генерованої подової електроенергії
	i	x_{1i}	x_{2i}	x_{3i}	$[y^-(x_i); y^+(x_i)]$
02.01.07	1	182,5	4,6	6,5	[1087,2;1211,28]
10.01.07	2	182,6	4,6	5,8	[1105,32;1231,468]
16.01.07	3	182,7	4,7	5,5	[1069,08;1191,092]
22.01.07	4	182,7	4,7	4,97	[1069,08;1191,092]
27.01.07	5	182,7	4,7	5,45	[1087,2;1211,28]
31.01.07	6	182,7	4,6	6,8	[906;1009,4]
04.02.07	7	182,9	4,7	7,5	[1069,08;1191,092]
08.02.07	8	183	4,7	11,9	[1087,2;1211,28]
12.02.07	9	183,1	4,7	14,9	[1087,2;1211,28]
19.02.07	10	183,1	4,7	12,5	[1105,32;1231,468]
25.02.07	11	183,1	4,7	9,8	[1123,44;1251,656]

Дата	№	Реактивна потужність	Напір	Рівень води на гідропості	Межі генерованої подобової електроенергії
07.03.07	12	183,1	4,55	10,4	[1087,2;1211,28]
12.03.07	13	183,1	4,65	15,5	[1087,2;1211,28]
18.03.07	14	183,1	4,6	13,7	[1141,56;1271,844]
31.03.07	15	184,6	4,65	13,7	[1105,32;1231,468]
05.04.07	16	184,6	4,7	14,9	[1159,68;1292,032]
08.04.07	17	184,6	4,7	17	[1159,68;1292,032]
17.04.07	18	184,6	4,7	14	[1159,68;1292,032]
21.04.07	19	184,6	4,7	12,8	[1159,68;1292,032]
23.04.07	20	184,7	4,7	12,5	[1141,56;1271,844]
02.05.07	21	184,8	4,7	11,6	[1159,68;1292,032]
08.05.07	22	184,8	4,7	10,4	[1159,68;1292,032]
12.05.07	23	184,8	4,7	10,1	[1177,8;1312,22]
21.05.07	24	184,9	4,7	9	[1014,72;1130,528]
25.05.07	25	184,9	4,7	7,7	[942,24;1049,776]
05.06.07	26	186,8	4,75	8,1	[1014,72;1130,528]
12.06.07	27	186,8	4,7	7,3	[1050,96;1170,904]
16.06.07	28	187,2	4,7	7,5	[1087,2;1211,28]
25.06.07	29	187,2	4,7	7,1	[1105,32;1231,468]
29.06.07	30	187,2	4,8	7,3	[1105,32;1231,468]
03.07.07	31	187,2	4,75	8,3	[1087,2;1211,28]
07.07.07	32	187,2	4,7	8,8	[978,48;1090,152]
13.07.07	33	187,2	4,7	8,3	[1069,08;1191,092]
17.07.07	34	187,2	4,7	13,7	[1087,2;1211,28]
23.07.07	35	187,2	4,7	9,8	[1050,96;1170,904]
05.08.07	36	189,1	4,6	7,24	[1050,96;1170,904]
16.08.07	37	189,1	4,65	5,99	[1141,56;1271,844]
26.08.07	38	189,1	4,75	5,64	[978,48;1090,152]
09.09.07	39	189,1	4,7	5,74	[1105,32;1231,468]
15.09.07	40	189,1	4,65	6,49	[960,36;1069,964]
25.09.07	41	189,1	4,7	8,02	[978,48;1090,152]
11.10.07	42	189,1	4,7	6,74	[942,24;1049,776]
15.10.07	43	189,2	4,75	6,49	[942,24;1049,776]
05.11.07	44	189,2	4,75	5,74	[996,6;1110,34]
02.11.07	45	189,2	4,7	4,64	[1014,72;1130,528]
11.11.07	46	189,3	4,7	4,32	[978,48;1090,152]
16.11.07	47	189,3	4,7	4,78	[978,48;1090,152]
25.11.07	48	189,4	4,6	4,78	[1032,84;1150,716]
11.12.07	49	189,4	4,8	5,74	[1105,32;1231,468]
23.12.07	50	189,4	4,8	4,11	[1014,72;1130,528]
31.12.07	51	189,5	4,75	5,01	[1105,32;1231,468]

Для синтезу оптимальної структури використали метод послідовного включення елементів структури. Для цього застосували програмний модуль SYNSTRUC. За критерії оптимальності структури обрали мінімум кількості коефіцієнтів у моделі та мінімум об'єму описаного навколо області параметрів моделі прямокутного паралелепіпеда Π^+ (критерій точності).

Найпростішу модель задали поліномом першого порядку:

$$y(\vec{x}) = b_0 + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + b_3 \cdot x_3,$$

Із застосуванням таблиці 6.7 склали інтервальну систему рівнянь у вигляді (1.24):

$$y_i^- \leq b_0 + b_1 \cdot x_{1i} + b_2 \cdot x_{2i} + b_3 \cdot x_{3i} \leq y_i^+, \quad i = 1, \dots, 51.$$

Отримана система інтервальних рівнянь для даної структури моделі виявилась несумісною, що означало «неадекватність» моделі.

Тоді прийняли рішення ускладнити модель у спосіб додавання членів, що відображають парну взаємодію факторів: $x_1 \cdot x_2$, $x_1 \cdot x_3$, $x_2 \cdot x_3$. У результаті сформувавали три моделі у такому вигляді:

$$y(\vec{x}) = b_0 + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + b_3 \cdot x_3 + b_{jk} \cdot x_j \cdot x_k; \quad j, k = 1, \dots, 3, \quad j < k.$$

У процесі перевірки адекватності отриманих моделей встановили, що жодна із інтервальних систем, складених на їхній основі не виявилась сумісною.

Шляхом «нарощування» членів моделі (до шести та семи) з коефіцієнтами парних взаємодій отримали 4 моделі-претенденти, у результаті перевірки яких не виявили адекватних моделей.

Подальше «нарощування» структури моделі здійснювали за рахунок включення таких членів: $b_{jk} \cdot x_j \cdot x_k^2$; $j, k = 1, \dots, 3$, $j < k$. Серед згенерованих моделей

$$y(\vec{x}) = b_0 + b_p x_k + b_p \cdot x_j \cdot x_k + b_p \cdot x_j \cdot x_k^2, \quad j, k = 1, \dots, 3, \quad j < k, \quad p = 1, \dots, 12,$$

адекватних моделей не виявили. Тому прийняли рішення про розширення базису структурних елементів, за рахунок включення тригонометричних функцій у вигляді: $\sin(x_k)$, $\cos(x_k)$, $k = 1, \dots, 3$. Генерування моделей-претендентів відбувалося за наступною схемою. На початковому етапі розглядали моделі у такому вигляді:

$$y(\vec{x}) = b_0 + b_p x_k + b_p \cdot x_j \cdot x_k + b_p \cdot f(x_k) + b_p \cdot x_j \cdot x_k^2, \quad j, k = 1, \dots, 3, \quad j < k,$$

$$f(x_k) = (\sin(x_k), \cos(x_k)), \quad p = 1, \dots, 4.$$

На даному етапі отримали єдину модель

$$y(\vec{x}) = b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_1 x_3 + b_3 \cdot \sin(x_3) + b_4 \cdot x_1 \cdot x_2^2. \quad (6.10)$$

Отримана модель має задовільні прогностичні властивості (об'єм V_{Π^+} прямокутного паралелепіпеда Π^+ дорівнював $V_{\Pi^+} = 6.0354 \cdot 10^{-8}$).

Подальше «нарощування» членів моделі не має змісту, оскільки супроводжується втратою її точності.

Із розв'язку задач лінійного програмування у загальному вигляді (1.38) отримали такі вершини \vec{b}_s області параметрів інтервальної моделі: $\vec{b}_1=(5,5767; 0,0956; -5,6847; -0,0080)$, $\vec{b}_2=(5,6290; 0,0910; -5,8634; -0,0069)$, $\vec{b}_3=(5,6223; 0,0909; -5,8254; -0,0077)$, $\vec{b}_4=(5,5929; 0,0959; -5,6754; -0,0076)$, $\vec{b}_5=(5,6223; 0,0909; -5,8634; -0,0069)$, $\vec{b}_6=(5,5767; 0,0956; -5,6754; -0,0076)$, $\vec{b}_7=(5,5767; 0,0956; -5,8314; -0,0081)$, $\vec{b}_8=(5,6016; 0,0959; -5,8634; -0,0069)$

та гарантовані коридори для згенерованої потужності МГЕС:

$$[\hat{y}^-(\vec{x}); \hat{y}^+(\vec{x})] = [\min_{\vec{b}_s \in \Pi^+} (b^s_1 \cdot x_1 + b^s_2 \cdot x_1 x_3 + b^s_3 \cdot \sin(x_3) + b^s_4 \cdot x_1 \cdot x_2^2); \max_{\vec{b}_s \in \Pi^+} (b^s_1 \cdot x_1 + b^s_2 \cdot x_1 x_3 + b^s_3 \cdot \sin(x_3) + b^s_4 \cdot x_1 \cdot x_2^2)].$$

На рис 6.3 наведено графіки для порівняння експериментальних даних та результатів моделювання на основі інтервальної моделі

$$\hat{y}(\vec{x}) = \bar{b}_1 \cdot x_1 + \bar{b}_2 \cdot x_1 x_3 + \bar{b}_3 \cdot \sin(x_3) + \bar{b}_4 \cdot x_1 \cdot x_2^2,$$

де $\vec{\bar{b}} = (\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3, \bar{b}_4)$ – вектор, який отримано за середньою точкою $\vec{\bar{b}} = \frac{1}{2 \cdot m} \sum_{s=1}^{2m} \vec{b}_s$ області Ω , тобто:

$$\bar{b}_1 = \frac{1}{8} \cdot (5,5767 + 5,629 + 5,6223 + 5,5929 + 5,6223 + 5,5767 + 5,5767 + 5,6016) = 5,5998,$$

$$\bar{b}_2 = \frac{1}{8} (0,0956 + 0,091 + 0,0909 + 0,0959 + 0,0909 + 0,0956 + 0,0956 + 0,0959) = 0,0939,$$

$$\bar{b}_3 = \frac{1}{8} ((-5,6847) + (-5,8634) + (-5,8254) + (-5,6754) + (-5,8634) + (-5,6754) + (-5,8314) + (-5,8634)) = -5,7853,$$

$$\bar{b}_4 = \frac{1}{8} ((-0,0080) + (-0,0069) + (-0,0077) + (-0,0076) + (-0,0069) + (-0,0076) + (-0,0081) + (-0,0069)) = (-0,0075).$$

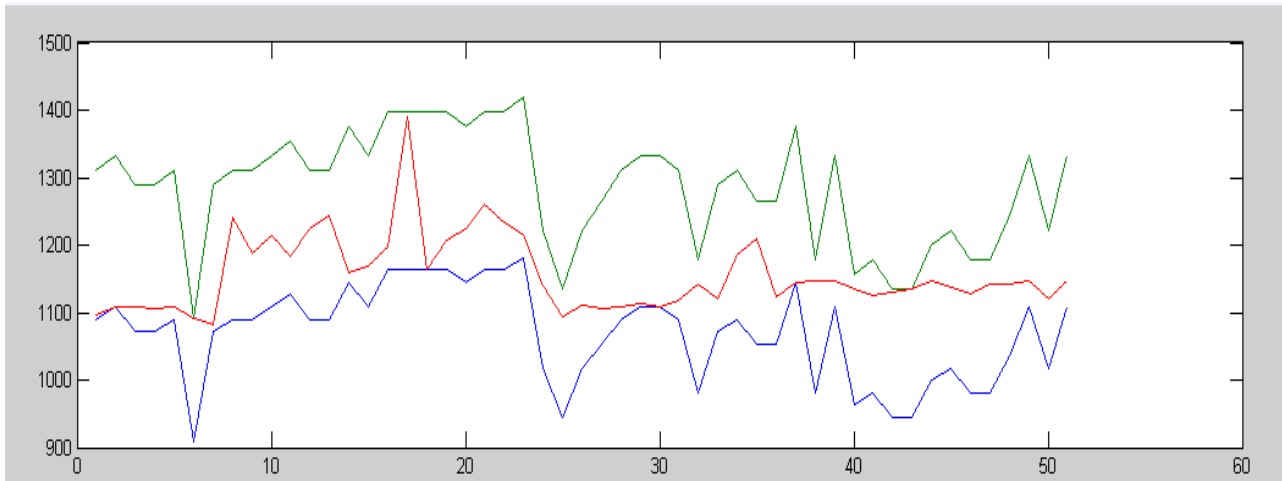


Рис. 6.3. Графік зміни подової генерованої електроенергії МГЕС

На рис. 6.3 по осі абсцис відкладено номер доби відповідно до таблиці 6.7, а по осі ординат – генерована подової електроенергія в кВт/год.

Як видно із рис. 6.3, прогнозована за середньою точкою доба генерована електроенергія знаходиться у межах, які задано умовами допустимих значень.

Застосування отриманої моделі дає можливість досліджувати потенційні можливості та умови збільшення потужності генерованої електроенергії на МГЕС у залежності від факторів впливу.

6.3. Інтервальна модель для задачі візуалізації зворотного гортанного нерва у процесі хірургічної операції на щитовидній залозі

Основною проблемою при проведенні хірургічної операції на щитовидній залозі є виявлення зворотного гортанного нерва, пошкодження якого призводить до втрати пацієнтом голосу, а також до інших негативних наслідків, пов'язаних з функціонуванням дихальної системи людини. Сучасні технічні засоби, які використовують у процесі проведення таких операцій унеможливають візуалізацію процесу виявлення гортанного нерва, а також ґрунтуються на небезпечній процедурі уведення пацієнта до третьої стадії анестезії, у якій високий ризик переходу до стану клінічної смерті.

Процес візуалізації гортанного нерва є надзвичайно складний і включає процедуру його виявлення. Проведений аналіз відомих технічних засобів виявлення зворотного гортанного нерва під час проведення операцій на щитовидній залозі [293] дав можливість встановити загальний принцип їх роботи, який ґрунтується на подразненні постійним електричним струмом області хірургічного втручання і оцінюванні результатів цього подразнення на голосових зв'язках. Якщо область подразнення включає зворотній гортанний нерв, то відбувається скорочення голосових зв'язок, якщо ж подразнення зроблено на м'язовій тканині, то реакція на подразнення буде незначною. Незважаючи на широке застосування у практиці розглянутих технічних засобів, їхнє функціонування відзначається такими недоліками:

- необхідністю встановлення сенсорів, які фіксують реакцію голосових зв'язок на сигнал стимуляції гортанного нерва в області розміщення голосових зв'язок, що вимагає переведення пацієнта у третю стадію анестезії, яка характеризується небезпекою для його життя;

- відсутністю засобів візуалізації розміщення гортанного нерва без розтину м'язової тканини, що призводить до його пошкодження.

6.3.1. Спосіб та засоби для візуалізації гортанного нерва

В основу нового способу ідентифікації гортанного нерва з інших тканин хірургічної рани при проведенні хірургічних операцій на щитовидній залозі, запропонованого авторами [56], покладено підвищення точності виявлення та візуалізація місцезнаходження гортанного нерва у хірургічній рані, підвищення достовірності його ідентифікації.

Поставлену задачу вирішують тим, що подразнення тканин у хірургічній рані здійснюють змінним струмом із фіксованою частотою, для якого забезпечується мала провідність електричного сигналу м'язовими тканинами і висока провідність електричного сигналу гортанним нервом та м'язами, які керують натягом голосових зв'язок. Паралельно проводимо реєстрацію скорочення голосових зв'язок на даній частоті звуковим сенсором, який встановлено у дихальну трубку, яку своєю чергою розміщено у гортані пацієнта. Далі отриманий звуковий сигнал перетворюють у електричний сигнал, а вихідний інформаційний сигнал, який характеризує наближеність до гортанного нерва, визначають за зміною амплітуди електричного струму із заданою частотою.

Ілюстрацію запропонованого способу зображено на рис. 6.4.

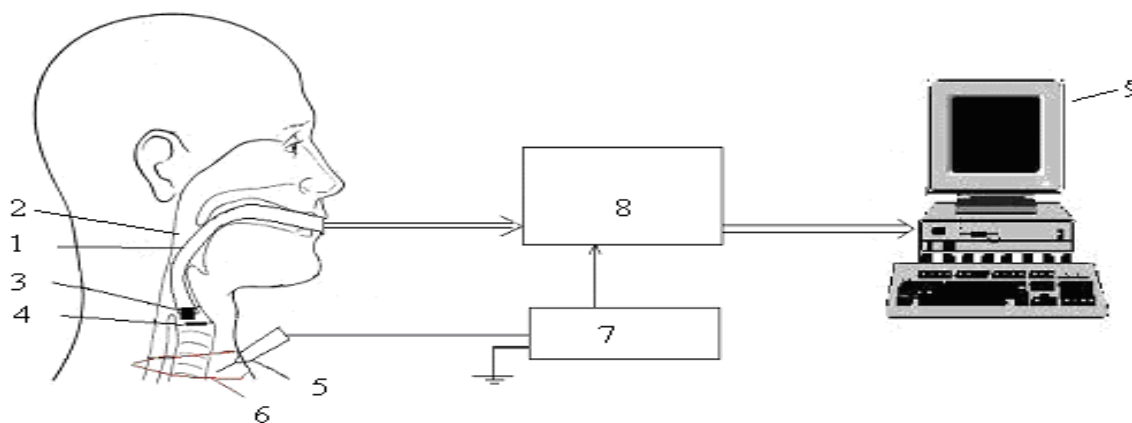


Рис. 6.4. Схема отримання інформаційного сигналу для ідентифікації гортанного нерва

Спосіб ідентифікації гортанних нервів при проведенні хірургічних операцій на щитовидній залозі реалізується у такій послідовності.

У дихальну трубку – 1, яку розміщено у гортані пацієнта – 2, встановлено сенсор звукових коливань – 3, який розміщено над голосовими зв'язками – 4. За допомогою щупа – 5 зондують тканини у хірургічній рані – 6. Щуп – 5 з'єднаний з генератором змінного струму – 7 із силою від 0,5 – 2 мА та з фіксованою частотою для якої забезпечується мала провідність електричного сигналу

м'язовими тканинами і висока провідність електричного сигналу гортанним нервом на м'язи, які керують натягом голосових зв'язок.

Потік повітря, який проходить через дихальну трубку, створює звукові коливання, спектр яких змінюється внаслідок модуляції вібраціями голосових зв'язок, відповідно до частоти струму їх збудження. Причому, через малу провідність електричного сигналу з фіксованою частотою м'язовими тканинами і високу провідність електричного сигналу на цій же частоті гортанним нервом, амплітуда модульованого звукового сигналу є пропорційною відстані від точки встановлення щупа до гортанного нерва на хірургічній рані. Ці коливання фіксують звуковим сенсором – 3, перетворюють у електричний сигнал, підсилюють підсилювачем – 8 і подають на стандартний аудіо вхід звукової картки комп'ютера – 9, де проводиться, опрацювання вказаного сигналу. Вихідний інформаційний сигнал характеризує наближеність розміщення щупа до гортанного нерва. Його визначають за зміною амплітуди виділеного електричного синусоїдального сигналу із заданою частотою, при зменшенні відстані до нерва амплітуда сигналу зростає.

Для візуалізації розміщення гортанного нерва у хірургічній рані використано засоби опрацювання інформаційного сигналу. Зокрема, програмний модуль опрацювання сигналу, який включає процедури: фільтрацію сигналу на частоті подразнення, визначення максимальної амплітуди відфільтрованого сигналу для кожного проведеного спостереження та запис отриманих даних в інтервальному вигляді, за рахунок урахування похибок різної природи. Причому інтервальну оцінку амплітуди $[U_{max}^-; U_{max}^+]$ записують сумісно із координатами (x, y) , які фіксують на стерильній сітці, розміщеній на рані.

Схему отримання експериментальних даних, яку розроблено у праці [293], зображено на рис. 6.5.

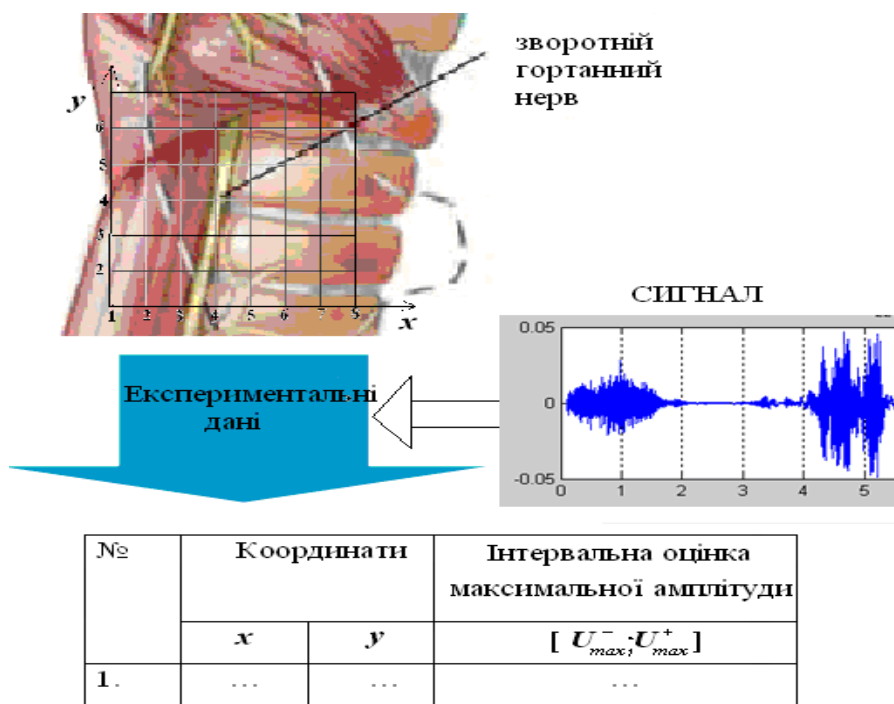


Рис. 6.5. Схema отримання експериментальних даних

6.3.2. Інтервальна модель із гарантованими інтервальними оцінками параметрів для візуалізації зворотнього гортанного нерва на хірургічній рані

Позначимо максимальну амплітуду інформаційного сигналу за $U_{\max}(x_i, y_i)$, де x_i, y_i – координати точки на області хірургічного втручання. Тоді отриманні на основі опрацювання інформаційного сигналу дані із урахуванням вимірювальних похибок та шумів представимо в інтервальному вигляді

$$(x_i, y_i) \rightarrow [U_{\max i}^-; U_{\max i}^+], \quad i = 1, \dots, N, \quad (6.10)$$

де $U_{\max i}^-, U_{\max i}^+$ – відповідно нижня і верхня межі можливого значення амплітуди отриманого сигналу.

Для побудови інтервальної моделі розподілу максимальної амплітуди інформаційного сигналу на хірургічній рані необхідно визначити структуру цієї моделі у вигляді лінійно-параметричної функції

$$U_{\max}(x, y) = b_0 + b_1 \cdot \varphi_1(x_i, y_i) + \dots + b_m \cdot \varphi_m(x_i, y_i), \quad (6.11)$$

де $\varphi_1(x, y), \dots, \varphi_m(x, y)$ – базисні функції від координат (x, y) .

Проведенні експерименти підчас операцій на щитовидній залозі, із застосуванням вищеописаної схеми формування інформативного сигналу, у якій максимальне значення амплітуди інформаційного сигналу при кожному вимірюванні задано в інтервальному вигляді, дали можливість сформувати таблицю 6.8.

Для пошуку структури, що уможливорює побудову адекватної моделі розподілу максимальної амплітуди інформаційного сигналу на області хірургічного втручання, необхідно задавати деяку початкову структуру у вигляді (6.11), сформувати з її застосуванням та даних із таблиці 6.8 ІСЛАР

$$U_{\max i}^- \leq b_0 + b_1 \cdot \varphi_1(x_i, y_i) + \dots + b_m \cdot \varphi_m(x_i, y_i) \leq U_{\max i}^+, \quad i = 1, \dots, N \quad (6.12)$$

і оцінити сумісність цієї системи.

Перевірка адекватності запропонованої моделі проводилась у спосіб обчислення вершин прямокутного локалізаційного паралелепіпеда Π^+ . Для цього застосовували програмний модуль SYNSTRUC, який побудовано на базі алгоритму, описаного у підрозділі 3.1.

Тоді коридор прогнозування, за яким будуємо область на хірургічній рані, яка гарантовано включає зворотній гортанний нерв, має такий вигляд:

$$[U_{\max}^-(x, y), U_{\max}^+(x, y)] = [\vec{b}]^T \cdot \vec{\varphi}(x, y),$$

де $[\vec{b}] = ([b_1^-; b_1^+], \dots, [b_m^-; b_m^+])^T$ – інтервальний вектор.

**Результати інтервального оцінювання максимальної
амплітуди інформаційного сигналу**

№	Координати		Інтервальна оцінка максимальної амплітуди		№	Координати		Інтервальна оцінка максимальної амплітуди	
	x	y	$[U_{\max}^-; U_{\max}^+]$			x	y	$[U_{\max}^-; U_{\max}^+]$	
1	1	1	8,0974	11,5326	19	4	1	13,1134	18,6766
2	1	2	9,5576	13,6124	20	4	2	23,3475	33,2525
3	1	3	13,0391	18,5709	21	4	3	43,1516	61,4584
4	1	4	15,2955	21,7845	22	4	4	47,4375	67,5625
5	1	5	19,8619	28,2881	23	4	5	49,5001	70,4985
6	1	6	25,6492	36,5308	24	4	6	43,3125	61,6875
7	2	1	9,0626	12,9074	25	5	1	13,2021	18,8001
8	2	2	14,421	20,539	26	5	2	32,1750	45,825
9	2	3	21,7099	30,9201	27	5	3	43,3125	61,6875
10	2	4	28,5656	40,6844	28	5	4	47,0250	66,975
11	2	5	33,8498	48,2103	29	5	5	44,5501	63,4495
12	2	6	43,032	61,288	30	5	6	26,8125	38,1875
13	3	1	10,1516	14,4584	31	6	1	16,5001	23,4996
14	3	2	18,1335	25,8265	32	6	2	37,5375	53,4625
15	3	3	31,5892	44,9907	33	6	3	46,4063	66,0938
16	3	4	37,8716	53,9384	34	6	4	42,0750	59,925
17	3	5	47,8912	68,2087	35	6	5	24,3375	34,6625
18	3	6	50,7004	72,2096	36	6	6	16,9125	24,0875

Описаний у підрозділі 2.1, метод пошуку адекватної структури передбачає послідовне ускладнення (збільшення кількості базисних функцій заданого класу) до тих пір поки система у вигляді (6.12) не стане сумісною.

Розглянемо вказану послідовність детально. Спочатку задали структуру лінійно-параметричної функції (6.11) у такому вигляді:

$$U_{\max}(x, y) = b_0 + b_1 \cdot x + b_2 \cdot y.$$

На основі таблиці 6.8 – інтервальних оцінок максимальної амплітуди інформаційного сигналу – реакції на подразнення м'язової тканини на хірургічній рані, склали ІСЛАР у вигляді (6.12) і оцінили розв'язки даної ІСЛАР. Для цієї мети використали модуль SYNSTRUC. У процесі використання вказаного програмного модуля виявилось, що ІСЛАР є несумісною.

На наступній ітерації ускладнили структуру лінійно-параметричної функції розподілу максимальної амплітуди інформаційного сигналу на області хірургічного втручання до вигляду:

$$U_{\max}(x, y) = b_0 + b_1 \cdot x + b_2 \cdot y + b_3 \cdot x^2 + b_4 \cdot y^2 + b_5 \cdot x \cdot y$$

Отримана система інтервальних рівнянь у вигляді (6.12) на основі даних табл. 6.8 виявилась несумісною. Подальше ускладнення структури у класі поліноміальних функцій не дало можливості побудувати сумісну ІСЛАР у вигляді (6.12).

Детальний аналіз даних табл. 6.8 показав, що структуру адекватної моделі розподілу максимальних амплітуд інформаційного сигналу на області хірургічного втручання слід шукати із включенням базисних функцій у такому вигляді:

$$\varphi(x, y) = \sin^2(x, y)$$

На наступній ітерації пошуку структури розглядали таку структуру моделі:

$$U_{\max}(x, y) = b_0 + b_1 \cdot \sin^2\left(x \cdot \frac{\pi}{6}\right) + b_2 \cdot \sin^2\left(y \cdot \frac{\pi}{6}\right) + b_3 \cdot \sin^2\left(x \cdot y \cdot \frac{\pi}{36}\right) + b_4 \cdot x + b_5 \cdot y + b_6 \cdot x^2 + b_7 \cdot y^2 + b_8 \cdot x \cdot y$$

Із застосуванням програмного модуля SYNSTRUC встановили, що складена ІСЛАР має розв'язки. Проте частина коефіцієнтів моделі виявилась незначущими, зокрема коефіцієнти: $b_1, b_2, b_4, b_5, b_6, b_8$. Послідовне виключення цих коефіцієнтів і відповідних базисних функцій у вибраній структурі моделі дало можливість отримати таку сумісну ІСЛАР:

$$\begin{aligned} 8,0974 &\leq b_0 + 0,007588 \cdot b_1 + 1 \cdot b_2 \leq 11,5326 \\ 9,5576 &\leq b_0 + 0,030123 \cdot b_1 + 4 \cdot b_2 \leq 13,6124 \\ 13,0391 &\leq b_0 + 0,066921 \cdot b_1 + 9 \cdot b_2 \leq 18,5709 \\ 15,2955 &\leq b_0 + 0,116864 \cdot b_1 + 16 \cdot b_2 \leq 21,7845 \\ 19,8619 &\leq b_0 + 0,178437 \cdot b_1 + 25 \cdot b_2 \leq 28,2881 \\ 25,6492 &\leq b_0 + 0,24977 \cdot b_1 + 36 \cdot b_2 \leq 36,5308 \\ 9,0626 &\leq b_0 + 0,030123 \cdot b_1 + 1 \cdot b_2 \leq 12,9074 \\ 14,421 &\leq b_0 + 0,116864 \cdot b_1 + 4 \cdot b_2 \leq 20,539 \\ 21,7099 &\leq b_0 + 0,24977 \cdot b_1 + 9 \cdot b_2 \leq 30,9201 \\ 28,5656 &\leq b_0 + 0,412827 \cdot b_1 + 16 \cdot b_2 \leq 40,6844 \\ 33,8498 &\leq b_0 + 0,586388 \cdot b_1 + 25 \cdot b_2 \leq 48,2103 \\ 43,032 &\leq b_0 + 0,74954 \cdot b_1 + 36 \cdot b_2 \leq 61,288 \\ 10,1516 &\leq b_0 + 0,066921 \cdot b_1 + 1 \cdot b_2 \leq 14,4584 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
18,1335 &\leq b_0 + 0,24977 \cdot b_1 + 4 \cdot b_2 \leq 25,8265 \\
31,5892 &\leq b_0 + 0,499602 \cdot b_1 + 9 \cdot b_2 \leq 44,9907 \\
37,8716 &\leq b_0 + 0,74954 \cdot b_1 + 16 \cdot b_2 \leq 53,9384 \\
47,8912 &\leq b_0 + 0,932681 \cdot b_1 + 25 \cdot b_2 \leq 68,2087 \\
50,7004 &\leq b_0 + 0,999999 \cdot b_1 + 36 \cdot b_2 \leq 72,2096 \\
13,1134 &\leq b_0 + 0,116864 \cdot b_1 + 1 \cdot b_2 \leq 18,6766 \\
23,3475 &\leq b_0 + 0,412827 \cdot b_1 + 4 \cdot b_2 \leq 33,2525 \\
43,1516 &\leq b_0 + 0,74954 \cdot b_1 + 9 \cdot b_2 \leq 61,4584 \\
47,4375 &\leq b_0 + 0,969604 \cdot b_1 + 16 \cdot b_2 \leq 67,5625 \\
49,5001 &\leq b_0 + 0,970148 \cdot b_1 + 25 \cdot b_2 \leq 70,4985 \\
43,3125 &\leq b_0 + 0,750919 \cdot b_1 + 36 \cdot b_2 \leq 61,6875 \\
13,2021 &\leq b_0 + 0,178437 \cdot b_1 + 1 \cdot b_2 \leq 18,8001 \\
32,175 &\leq b_0 + 0,586388 \cdot b_1 + 4 \cdot b_2 \leq 45,825 \\
43,3125 &\leq b_0 + 0,932681 \cdot b_1 + 9 \cdot b_2 \leq 61,6875 \\
47,025 &\leq b_0 + 0,970148 \cdot b_1 + 16 \cdot b_2 \leq 66,975 \\
44,5501 &\leq b_0 + 0,672049 \cdot b_1 + 25 \cdot b_2 \leq 63,4495 \\
26,8125 &\leq b_0 + 0,25115 \cdot b_1 + 36 \cdot b_2 \leq 38,1875 \\
16,5001 &\leq b_0 + 0,24977 \cdot b_1 + 1 \cdot b_2 \leq 23,4996 \\
37,5375 &\leq b_0 + 0,74954 \cdot b_1 + 4 \cdot b_2 \leq 53,4625 \\
46,4063 &\leq b_0 + 0,999999 \cdot b_1 + 9 \cdot b_2 \leq 66,0938 \\
42,075 &\leq b_0 + 0,750919 \cdot b_1 + 16 \cdot b_2 \leq 59,925 \\
24,3375 &\leq b_0 + 0,25115 \cdot b_1 + 25 \cdot b_2 \leq 34,6625 \\
16,9125 &\leq b_0 + 0,0000025 \cdot b_1 + 36 \cdot b_2 \leq 24,0875
\end{aligned}$$

для заданої структури моделі

$$U_{\max}(x, y) = b_0 + b_1 \cdot \sin^2\left(x \cdot y \cdot \frac{\pi}{36}\right) + b_2 \cdot y^2.$$

Своєю чергою, отримана оцінка розв'язку цієї ІСЛАР у вигляді описаного прямокутного паралелепіпеда уможливила отримання інтервальної моделі (коридору) із гарантованими інтервальними оцінками параметрів

$$[\hat{U}_{\max}(x, y)] = [7,26; 11,01] + [38,63; 55,3] \cdot \sin^2\left(x \cdot y \cdot \frac{\pi}{36}\right) + [0,17; 0,47] \cdot y^2.$$

Отриманий коридор інтервальних моделей уможливорює візуалізувати розміщення гортанного нерва.

Графічне представлення коридору розподілу максимальних амплітуд інформаційного сигналу на хірургічній рані наведено на рис. 6.6. Проекція «гребеня» цього коридору на область хірургічного втручання задає ймовірне розміщення зворотного гортанного нерва. Саме на ділянці його розміщення спостерігається найбільша амплітуда інформаційного сигналу.

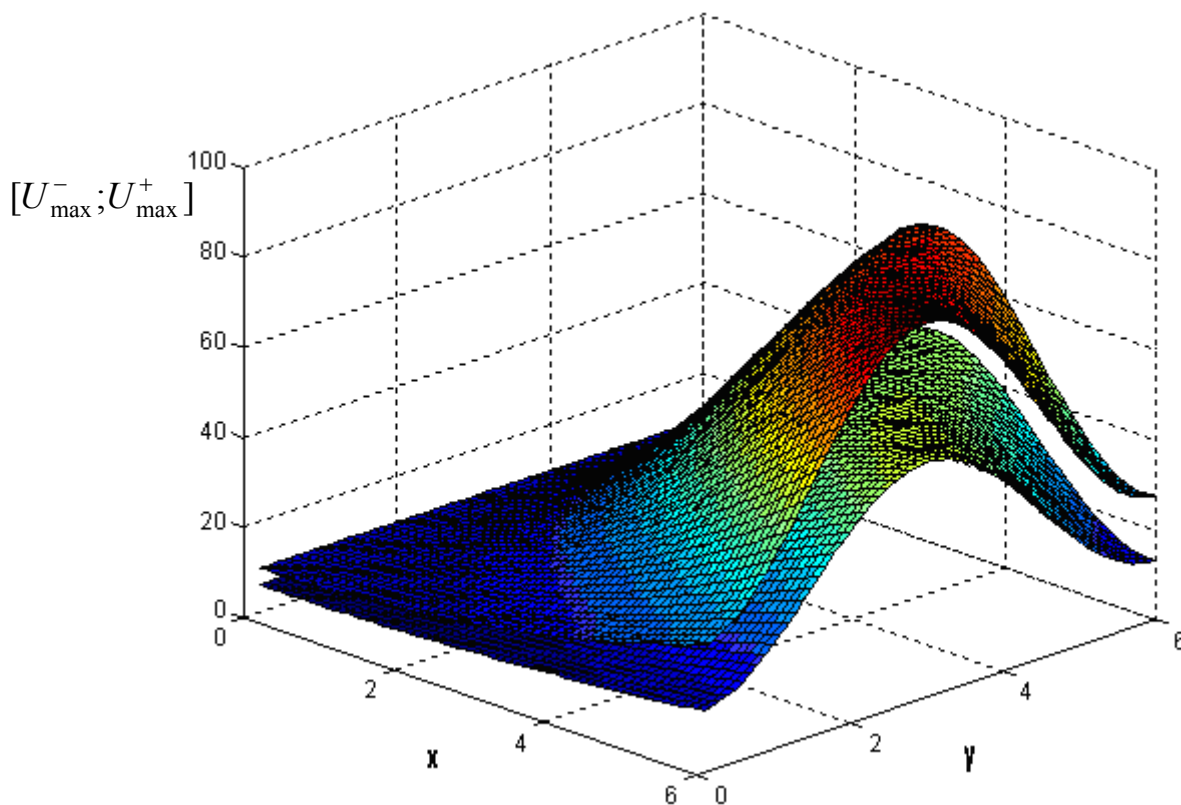


Рис. 6.6. Графічне представлення коридору для інтервальних моделей для візуалізації зворотного гортанного нерва

Як видно із рис. 6.6, максимальне значення амплітуди інформаційного сигналу, який визначає розміщення зворотного гортанного нерва, знаходиться в межах, що визначають «гребені» нижньої та верхньої меж коридору.

Для отримання гарантованої оцінки області розміщення зворотного гортанного нерва на хірургічній рані необхідно визначити мінімальний пороговий рівень амплітуди інформаційного сигналу, який ймовірно ще може відповідати точці безпосереднього збудження гортанного нерва. Очевидно, що цей рівень амплітуди \bar{U}_{\min} інформаційного сигналу відповідає мінімальному значенню на гребені функції для нижньої межі коридору. Це значення обчислюємо за формулою:

$$\bar{U}_{\min} = \max \left\{ \min_{x_i} \max_{y_j} U(x_i, y_j), i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M; \right. \\ \left. \max_{x_i} \min_{y_j} U(x_i, y_j), i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M \right\}. \quad (6.13)$$

На рис. 6.7. проілюстровано правило вибору вказаної точки – порогу (6.13).

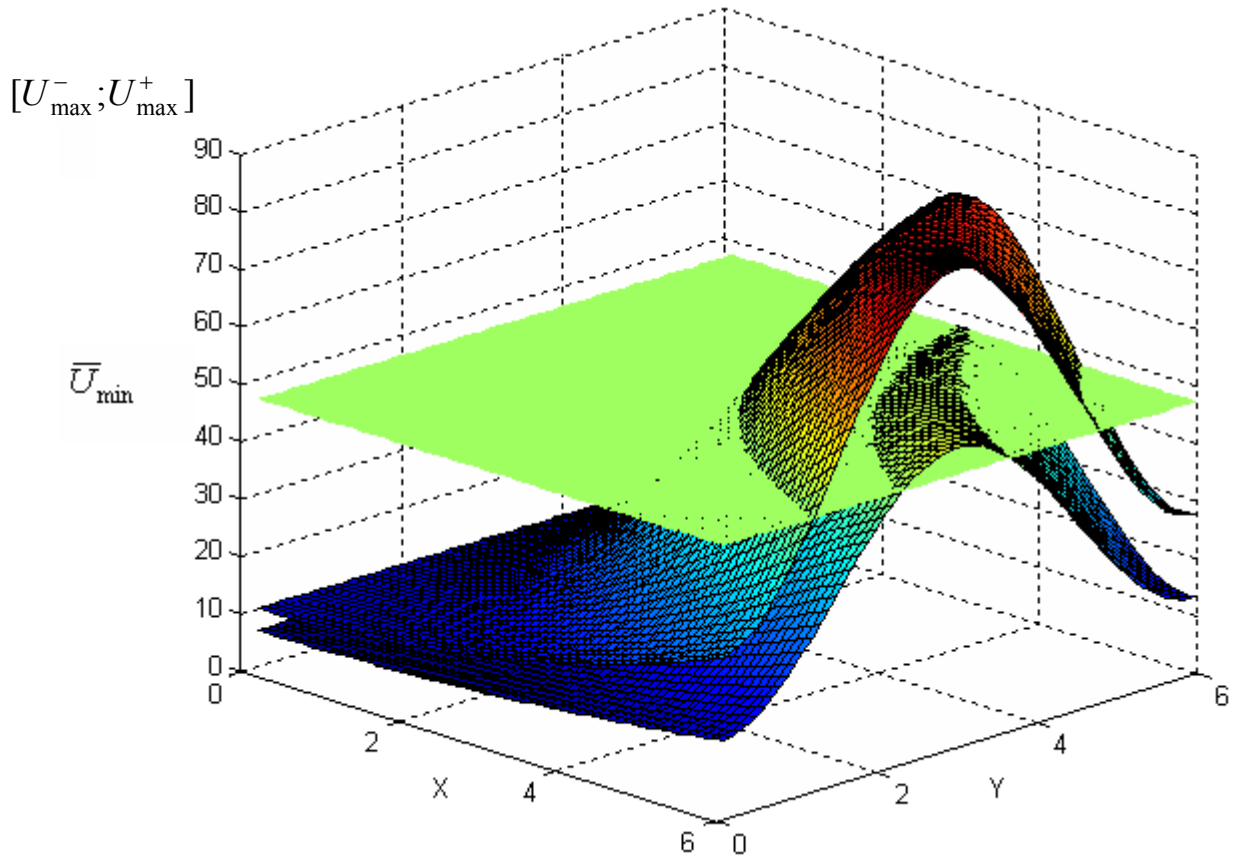


Рис. 6.7. Ілюстрація вибору порогового значення амплітуди інформаційного сигналу для візуалізації розміщення зворотного гортанного нерва

Тоді гарантовану область хірургічного втручання визначаємо за формулою:

$$\chi = \left\{ \vec{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid \hat{U}^+(x, y) \leq \bar{U}_{\min} \right\}. \quad (6.14)$$

Отримана із (6.14) множина χ точок \vec{p} на області хірургічного втручання з координатами (x, y) визначає гарантовану область хірургічного втручання, тобто область, яка не включає гортанний нерв.

На рис. 6.8. показано фрагмент гарантованої області хірургічного втручання (сірий фон), побудовану з використанням вищеописаного методу на реальних експериментальних даних табл. 6.8.

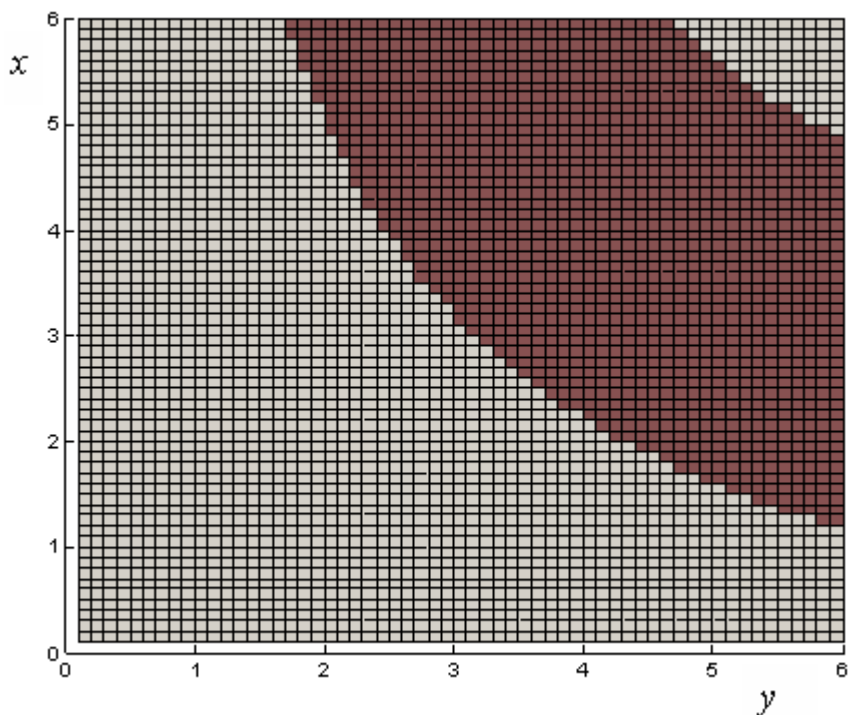


Рис. 6.8. Фрагмент гарантованої області хірургічного втручання

На цьому ж рисунку також нанесена область у якій розміщений зворотній гортанний нерв (темним фоном).

Отже, вищеописаний підхід дає можливість не тільки ідентифікувати зворотній гортанний нерв, але і візуалізувати на хірургічній рані область його розміщення, що створює можливість уникнути його пошкодження під час хірургічного втручання.

Висновки до розділу

На заключення виділимо основні результати даного розділу.

Застосування, наведених у розділах 1 – 5 теоретичних засад побудови інтервальних моделей «вхід-вихід» проілюстровано у цьому розділі на прикладі синтезу інтервальної моделі для прогнозування коридору відносної кількості захворювань у залежності від стану довкілля та соціальних чинників впливу. Співставлення реальних даних із прогнозованими за допомогою моделі підтверджує її високу адекватність. Особливо варто відмітити, що чинники стану довкілля та соціальні чинники у цьому прикладі переважно представлені у якісному вигляді, що спонукало, для підготовки даних з метою побудови інтервальної моделі застосувати спрощену схему кількісного представлення вхідних змінних на основі теорії нечітких множин у вигляді лінгвістичних змінних. Такий підхід може бути корисним для аудиторії дослідників-економістів, оскільки достатньо часто для представлення економічних чинників та показників дослід-

никам економічних процесів бракує достовірних статистичних даних.

Побудована інтервальна модель прогнозування генерованої електроенергії малою гідроелектростанцією може слугувати прикладом для моделювання технічних систем за умов малої вибірки даних із обмеженими за амплітудою похибками, чи із умовами обмеження на технічні характеристики систем.

Третій приклад застосування методів побудови інтервальних моделей проілюстровано на задачі із сфери медицини. На основі відомого способу, який розроблено під безпосереднім керівництвом автора, та технічних засобів виявлення зворотного гортанного нерва при проведенні хірургічних операцій на щитовидній залозі запропоновано метод та модель для візуалізації безпечної області хірургічного втручання. На основі реальних даних, отриманих під час проведення операцій на щитовидній залозі, побудовано інтервальну модель із гарантованими інтервальними оцінками параметрів, яка уможливила візуалізацію гортанного нерва і зменшення ризику його пошкодження.

Усі розглянуті приклади підтверджують змістовність розглянутих теоретичних засад та працездатність методів побудови моделей статичних систем за умов, коли їхні вихідні характеристики представлено у вигляді числових інтервалів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Айвазян С.А. Прикладная статистика / С. А. Айвазян, И. С. Енюков, Л. Д. Мешалкин. – М.: Финансы и статистика, 1983. – 471 с.
2. Алефельд Г. Введение в интервальные вычисления / Г. Алефельд, Ю. Херцбергер. – М. : Мир, 1987. – 360 с.
3. Архиреева И. Н. Формирование оптимальной регрессионной структуры по данным пассивного эксперимента / И. Н. Архиреева, В. П. Бородюк, Ф. Ю. Полванов // Заводская лаборатория. – 1987. – №10. – С. 71–74.
4. Бакан Г. М. Аппроксимация пересечения четкого и нечеткого множеств в методе размытых эллипсоидов / Г. М. Бакан, Н. Н. Куссуль // Кибернетика и вычислительная техника. – 1995. – Вып.105. – С. 18–27.
5. Бакан Г. М. Размытые эллипсоидальные множества в задачах нестохастического оценивания / Г. М. Бакан, Н. Н. Куссуль // Автоматика. – 1989. – №5. – С. 11–17.
6. Бакан Г. М. Размытый эллипсоидальный алгоритм фильтрации состояний статического объекта / Г. М. Бакан, Н. Н. Куссуль // Проблемы управления и информатики. – 1996. – №5. – С. 77–93.
7. Бакан Г. М. Теоретико–множественная идентификация линейных объектов в классе размытых эллипсоидальных множеств / Г. М. Бакан, Н. Н. Куссуль // Автоматика. – 1990. – №4. – С. 72–78.
8. Бакан Г. М. Алгоритм решения счетной системы линейных уравнений с использованием операции растяжения пространства / Г. М. Бакан, Е. А. Нижниченко // Кибернетика. – 1980. – № 5. – С. 42–48.
9. Барткова Л. М. Реалізація методики вивчення комплексного впливу господарської діяльності підприємств на соціо–екологічне середовище для АТП–16127 міста Тернополя / Л. М. Барткова, М. П. Дивак // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 1999. – Т. 4. – №4. – С. 166–170.
10. Бахвалов Н. С. Численные методы / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. – М. : Наука, 1987. – 589 с.
11. Беклемешев Д. В. Дополнительные главы линейной алгебры / Д. В. Беклемешев. – М. : Наука, Гл. ред. физ. – мат. литер., 1983 – 336 с.
12. Бородюк В. П. Статистическое описание промышленных объектов / В. П. Бородюк, Э. К. Лецкий. – М. : Энергия, 1971. – 110 с.
13. Бочков А. Ф. Один подход к выбору стационарных режимов технологических процессов в условиях неопределенности / А. Ф. Бочков, Т. В. Евтушенко. – Деп. в ВИНТИ, №2891–В88. – Москва, 1988. – 17 с.
14. Бочков А. Ф. Оценивание параметров модели для объектов с интервальной неопределенностью в выходных параметрах / А. Ф. Бочков, М. В. Милевский. – Деп. в ВИНТИ, №926–В88. – Москва, 1988. – 23 с.
15. Бочков А. Ф. Интервальный анализ как альтернатива регрессионному анализу / А. Ф. Бочков, А. П. Вошинин, Г. Р. Сотиров // Заводская лаборатория. – 1990. – №7. – С. 76 – 81.
16. Бродский В. З. Введение в факторное планирование эксперимента /

- В. З. Бродский. – М. : Наука, 1976. – 223 с.
17. Бродский В. З. Таблицы планов эксперимента / В. З. Бродский, Л. И. Бродский, Т. И. Голикова, Е. П. Никитина, Л. А. Панченко. – М. : Metallurgy, 1982. – 751 с.
 18. Бронштейн И. Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов / И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев. – 13-е изд. Исправленное. – М.: Наука, Гл. ред. физ. – мат. лит., 1986. – 544 с.
 19. Ватолин А. А. О задачах линейного программирования с интервальными коэффициентами // Журн. вычисл. математики и матем. физики. – 1984. – Т. 24. – С. 1629–1637.
 20. Вентцель Е. С. Теория вероятностей / Е. С. Вентцель. – М. : Наука, 1964. – 576 с.
 21. Воеводин В. В. Математические модели и методы в параллельных процессах / В. В. Воеводин. – М. : Наука, 1986. – 296 с.
 22. Волосов В. В. К построению параметрических семейств эллипсоидальных оценок и их оптимизации в задачах нестохастической идентификации параметров и состояния многомерных дискретных объектов управления // Проблемы управления и информатики. – 1996. – № 4. – С. 37–54.
 23. Волосов В. В. Об одном способе построения эллипсоидальных оценок в задачах нестохастической фильтрации и идентификации параметров управляемых систем // Автоматика. – 1991. – № 3. – С. 24–32.
 24. Волосов В. В. Робастные алгоритмы эллипсоидального оценивания состояния многомерных нестационарных непрерывных динамических систем // Проблемы управления и информатики. – 1999. – № 1. – С. 38–53.
 25. Волосов В. В. Исследование одного вида нестохастических алгоритмов идентификации с помощью прямого метода Ляпунова / В. В. Волосов, А. С. Калита, Е. А. Нижниченко // Автоматика. – 1989. – № 3. – С. 34–42.
 26. Волосов В. В. Исследование сходимости алгоритмов одного вида наблюдателей состояния дискретных динамических систем с использованием функций Ляпунова / В. В. Волосов, Е. А. Одинцова // Автоматика и телемеханика. – 1990. – № 12. – С. 41–51.
 27. Волосов В. В. К задаче восстановления вектора фазового состояния и идентификации параметров линейных стационарных динамических систем / В. В. Волосов, Е. А. Одинцова // Автоматика. – 1986. – № 6. – С. 22–29.
 28. Волосов В. В. Алгоритмы эллипсоидального оценивания матрицы параметров линейного дискретного динамического объекта управления / В. В. Волосов, С. А. Храмов, Е. А. Одинцова // Проблемы управления и информатики. – 1995. – № 1. – С. 63–77.
 29. Воцинин А. П. Оптимизация в условиях неопределенности / А. П. Воцинин, Г. Р. Сотиров. – М. : МЭИ – София: Техника, 1989. – 224 с.
 30. Воцинин А. П. Решение задач оптимизации по интервальным оценкам критерия // Заводская лаборатория. – 1987. – №7. – С. 68–71.
 31. Воцинин А. П. Планирование оптимального насыщенного эксперимента в задачах построения интервальных моделей / А. П. Воцинин, М. П. Дывак // Заводская лаборатория. – 1993. – №1. – С. 56–59.

32. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. – М.: Наука, 1967. – 575 с.
33. Горский В. Г. Планирование промышленных экспериментов / В. Г. Горский, Ю. П. Адлер, А. П. Талалай. – М. : Металлургия, 1987. – 112 с.
34. Грановский В. А. Методы обработки экспериментальных данных при измерениях / В. А. Грановский, Т. Н. Сирая. – Ленинград : Энергоатомиздат. Ленингр. отд-ние, 1990. – 288 с.
35. Гроп Д. Методы идентификации систем / Д. Гроп. – М.: Мир, 1979. – 302 с.
36. Дейвид Г. Порядковые статистики / Г. Дейвид. – М.: Наука, 1979. – 263 с.
37. Демиденко Е. З. Линейная и нелинейная регрессии / Е. З. Демиденко. – М. : Финансы и статистика, 1981. – 302 с.
38. Дивак М. П. Допустиме оцінювання області параметрів радіоелектронних кіл в класі еліпсоїдів // Теоретична електротехніка. – 2002. – Вып. № 56. – С. 113–122.
39. Дивак М. П. Використання властивостей інтервальних моделей у задачах послідовного планування оптимальних експериментів // Вісник НУ «Львівська політехніка». Електроенергетичні та електромеханічні системи. – 2001. – № 418. – С. 53–58.
40. Дивак М. П. Аналіз точності лінійної інтервальної моделі в задачах статичної ідентифікації // Вісн. ДУ «Львівська політехніка». Автоматика, вимірювання та керування. – 1999. – № 366. – С. 31–35.
41. Дивак М. П. Використання насиченого експерименту для оцінювання параметрів інтервальної моделі при аналізі інтервальних даних // Автоматика. Автоматизация. Электротехнические комплексы и системы. – 1999. – №2(5). – С. 33–36.
42. Дивак М. П. Властивості інтервальних моделей при інтервальній формі їх параметрів // Сб. науч. тр. международного науч.–учеб. центра информ. технологий и систем, науч. совет НАН Украины по пробл. «Кибернетика». Моделирование и управление состоянием эколого-экономических систем региона. – Киев, 2001. – С. 58–63.
43. Дивак М. П. Локалізація гарантованих оцінок параметрів технологічних процесів / М. П. Дивак, С. В. Волощук // Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах : Зб. наук. праць. – 2001. – Вип. 8. – С. 310–316.
44. Дивак М. П. Інтервальні методи компресії картографічної інформації // Тез. доп. міжн. наук. – техн. конф., присвяченої 150– річчю від дня народження видатного українського фізика і електротехніка І. Пулюя. – Тернопіль : ТПІ. – 1995. – С. 78–79.
45. Дивак М. П. Метод локалізації гарантованих оцінок в задачах параметричної ідентифікації // Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах. – 2000. – №4. – С.12–17.
46. Дивак М. П. Обчислювальні аспекти методів локалізації розв'язків задач параметричного оцінювання в умовах обмежених похибок // Відбір та обробка інформації. – 2002. – Вип. 16 (92). – С. 43–47 .
47. Дивак М. П. Оцінка точності параметрів радіоелектронних кіл методами аналізу інтервальних даних // Пр. Ін-ту електродинаміки НАНУ. Електро-

- техніка'2001. – Київ: ІЕД НАНУ, 2001. – С. 29–33.
48. Дивак М. П. Планирование I_G – и I_E – оптимальних експериментов в задачах идентификации интервальных моделей // Проблемы управления и информатики. – 2001. – №2. – С. 42–49.
 49. Дивак М. П. Побудова інтервальної моделі для прогнозування кількості захворювань в системі екологічного контролю м. Тернопіль // Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах. – 2001. – №3.
 50. Дивак М. П. Послідовне планування експерименту при локалізації області параметрів інтервальної моделі // Доп. спільної українсько–польської школи–семінару «Актуальні проблеми теоретичної електротехніки: наука і дидактика». – Алушта, 2001. – С. 20–22.
 51. Дивак М. П. Розробка та аналіз інтервальних залежностей характеристик електротехнічного обладнання у випадку локалізації області коефіцієнтів еліпсоїдом // Пр. Ін–ту проблем моделювання в електротехніці.
 52. Дивак М. П. Проектування інтервальних моделей соціально–екологічних систем на основі нечітких даних / М. П. Дивак, Г. М. Гладій, С. В. Волощук // Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах: Зб. наук. праць. – 2002. – Вип. 9. – С. 130–135.
 53. Дивак М. П. Захворювання населення міста Тернополя та його залежність від соціологічних умов / М. П. Дивак, С. С. Дністрян, Р. Д. Когут, В. А. Кондратюк, О. Н. Литвинова // Матеріали конференції «Методичні основи викладання та наукові проблеми сьогодення». – Тернопіль : Укрмедкнига. – 1997. – С. 21–22.
 54. Дивак М. П. Ідентифікація інтервальної моделі технологічного процесу герметизації інтегральних схем // Вісник ДУ «Львівська політехніка». Радіоелектроніка та телекомунікації. – 2000. – № 387. – С. 375–380.
 55. Дивак М. П. Проблеми ідентифікації динамічних систем в умовах інтервальної невизначеності / М. П. Дивак, В. П. Кобернюк, Ю. П. Франко, І. Р. Пітух, В. П. Цимбалій // Вимірювання та обчислювальна техніка в технологічних процесах: Зб. наук. праць.– 2001. – Вип. 8 – С. 307–310.
 56. Патент України на корисну модель. Спосіб ідентифікації гортанного нерва з інших тканин хірургічної рани при проведенні хірургічних операцій на щитовидній залозі / Дивак М. П., Козак О. Л., Шідловський В. О. – №51174; зар. 12.07.2010; опубл. 12.07.2010, Бюл. №13.
 57. Дивак М. П. Алгоритм наближення області параметрів інтервальної моделі в задачах лінійної ідентифікації / М. П. Дивак, О. В. Крамар // Вісник Тернопільської академії народного господарства. – 2000. – №10. – С. 98–103.
 58. Дивак М. П. Ідентифікація параметрів моделі на основі аналізу інтервальних даних / М. П. Дивак, О. В. Крамар // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – Тернопіль. – 1999. – Т. 4. – №1. – С. 76–80.
 59. Дивак М. П. Активна ідентифікація параметрів інтервальних моделей методом локалізації з виділенням насиченого блоку експерименту / М. П. Дивак, В. І. Манжула // Вісник НУ «Львівська політехніка». Радіоелектроніка та телекомунікації. – Львів: НУ «Львівська політехніка». – 2002. – № 440. – С. 241–246.

60. Дивак М. П. Використання властивостей інтервальних похибок при моделюванні технологічних процесів / М. П. Дивак, І. Р. Пітух, Н. Г. Шклярєнко, Ю. П. Франко // Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах : Зб. наук. праць. – 2000. – Вип. 7. – С. 204–208.
61. Дивак М. П. Ідентифікація моделей об'єктів в умовах інтервальної невизначеності на основі методів аналізу інтервальних даних / М. П. Дивак, П. Г. Стахів // Пр. міжн. конф. з управління «АВТОМАТИКА–2000», Львів 11–15 вересня 2000: в 7–ми томах. – Львів : Держ. НДІ інформ. інфраструкт., 2000. – Т. 2. – С. 90–97.
62. Дивак М. П. Реалізація методу локалізації параметрів інтервальних моделей з виділенням насиченого блоку експерименту на паралельних обчислювальних графах. / М. П. Дивак, П. Г. Стахів // Електроніка и связь. – 2001. – №12. – С. 120–124.
63. Дивак М. П. Методи аналізу інтервальних даних стосовно оцінки технологічних процесів виготовлення інтегральних схем / М. П. Дивак, Ю. П. Франко // Матеріали третьої міжнародної конференції «Математичне моделювання в електротехніці, електроніці та електроенергетиці». – Львів, 1999. – С. 75.
64. Дивак М. П. Методи аналізу інтервальних даних стосовно оцінки технологічних процесів виготовлення інтегральних схем / М. П. Дивак, Ю. П. Франко // Теоретична електротехніка. – 2000. – Вып. 55. – С. 167–173.
65. Дивак М. П. Оцінювання області параметрів інтервальної моделі на основі блоку насиченого експерименту при аналізі інтервальних даних / М. П. Дивак, Ю. П. Франко // Матеріали п'ятої міжнародної конференції «Досвід розробки і застосування САПР в мікроелектроніці». – Львів, 1999. – С.188–189.
66. Дивак М. П. Інтервальне моделювання ефективності сільськогосподарського виробництва / М. П. Дивак, Ю. П. Франко, І. Р. Пітух, В. П. Цимбалій // Тези доповідей четвертої науково-технічної конференції. Прогресивні матеріали, технології та обладнання в машино- і приладобудуванні. – Тернопіль : ТДТУ, 2000. – С. 200.
67. Дивак М. П. Розрахунок функціональної придатності радіоелектронних кіл на основі методу аналізу інтервальних даних Тези доповідей четвертої науково-технічної конференції ТДТУ // Тези доповідей четвертої науково-технічної конференції. Прогресивні матеріали, технології та обладнання в машино – і приладобудуванні. – Тернопіль : ТДТУ, 2000. – С. 122.
68. Дивак М. П. Модифікація симплекс методу розв'язування задач лінійного програмування для побудови інтервальних моделей / М. П. Дивак, Н. П. Шклярєнко // Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах. – 2000. – №1. – С. 138–141.
69. Добронєц Б. С., Шайдуров В. В. Двусторонние численные методы / Б. С. Добронєц, В. В. Шайдуров. – Новосибирск : Наука, 1990. – 208 с.
70. Дрейпер Н. Прикладной регрессионный анализ: в 2–х кн. / Н. Дрейпер, Г. Смит. – М. : Финансы и статистика, 1986. – Кн. 1. – 355с. – Кн. 2. – 349 с.
71. Дугарова И. В. Обеспечение устойчивости системы с неопределенными

- параметрами / И. В. Дугарова, Е. М. Смагина // Автоматика и Телемеханика. – 1990. – №11. – С. 176–181.
72. Дывак М. П. Интервальные модели ошибок в прикладных задачах // Материалы Всесоюз. конф. «Актуальные проблемы прикладной математики». – Ч. 1. – Саратов: Государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, 1991. – С. 70–75.
73. Дывак М. П. Оптимальное планирование эксперимента в случае локализации области параметров интервальной модели // Кибернетика и вычислительная техника. – 2001. – Вып. 132. – С.39–47.
74. Ермаков С. М. Математическая теория оптимального эксперимента / С. М. Ермаков, А. А. Жиглявский. – М. : Наука, 1987. – 319 с.
75. Жуков А. А. Рекуррентное эллипсоидальное оценивание состояний дискретных систем / А. А. Жуков, В. Д. Фурасов // Развитие и применение метода функций Ляпунова / Под ред. В. М. Матросова. – Новосибирск : Наука, 1992. – С. 220–224.
76. Жуков А. А. Эллипсоидальная аппроксимация и оценивание состояний дискретных систем / А. А. Жуков, В. Д. Фурасов // Техн. кибернетика. – 1990. – № 2. – С. 121–129.
77. Закалик Л. І. Основи мікроелектроніки. Навчальний посібник / Л. І. Закалик, Р. А. Ткачук. – Тернопіль : ТДТУ ім. І. Пулюя, 1998. – 352 с.
78. Захаров А. В. Синтез систем управления при интервальной неопределённости параметров их математических моделей / А. В. Захаров, Ю. И. Шокин // Докл. АН СССР. – 1988. – Т. 299 – №2. – С. 292–295.
79. Зюзин В. С. Итерационный метод решения системы алгебраических сегментных уравнений первого порядка // Дифференциальные уравнения и теория функций. – Саратов: Изд-во Саратовского университета, 1989. – Вып. 8. – С. 72–82.
80. Зюзин В. С. Об одном способе отыскания двусторонних интервальных приближений решения системы линейных интервальных уравнений // Дифференциальные уравнения и теория функций. – Саратов : Изд-во Саратовского университета, 1987. – С. 28–32.
81. Ивахненко А. Г. Этапы оптимизации алгоритма прогнозирования случайных процессов с помощью комплексирования аналогов / А. Г. Ивахненко, Н.Н. Богаченко, Ли Тянь Мин // Проблемы управления и информатики. – 1997. – №4. – С. 111–118.
82. Ивахненко А. Г. Индуктивный метод самоорганизации сложных систем / А. Г. Ивахненко. – К. : Наукова думка, 1982. – 245 с.
83. Ивахненко А. Г. Регуляризация решающих функций в методе группового учета аргументов / А. Г. Ивахненко, Ю. В. Коппа // Автоматика. – 1970. – №2. – С. 19–23.
84. Ивахненко А. Г. Объективный выбор оптимальной кластеризации выборки данных при компенсации неробастных помех / А. Г. Ивахненко, С. А. Петухова, В. М. Юдин // Автоматика. –1993. – №3. – С.46–58.
85. Ивлев Р. С. Построение векторного управления многомерным интервально – заданным объектом / Р. С. Ивлев, С. П. Соколова // Вычислительные Те-

- хнологии. – 1999. – Т. 4 – С. 3–13.
86. Калман Р. Идентификация систем с шумами // Успехи матем. наук. – 1985 – 40. – Вып. 4. – С. 27–41.
87. Калман Р. Очерки по математической теории систем / Р. Калман, П. Фалб, М. Арбиб. – Москва : Мир, 1971. – с. 400.
88. Калмыков С. А. Методы интервального анализа / С. А. Калмыков, Ю. И. Шокин, З. Х. Юлдашев. – Новосибирск: Наука, 1986. – 222с.
89. Калмыков С. А. Об интервально–аналитическом методе второго порядка для обыкновенных дифференциальных уравнений / С. А. Калмыков, Ю. И. Шокин, З. Х. Юлдашев // Изв. Акад. наук. УзССР. Сер. физ. – мат. наук. – 1976. – №3. – С. 28–30.
90. Канторович Л. В. О некоторых новых подходах к вычислительным методам и обработке наблюдений // Сиб. математ. журнал. – 1962. – Т. 3 – №5. – С. 701–709.
91. Киселев О. Н. Эллипсоидальное оценивание по обобщенному критерию / О. Н. Киселев, Б. Т. Поляк // Автоматика и телемеханика. – 1991. – № 9. – С. 133–145.
92. Коппа Ю. В. Сравнение прогнозирующих свойств моделей регрессионного типа и МГУА / Ю. В. Коппа, В. С. Степашко // Сб. науч. тр. международного науч.–учеб. центра информ. технологий и систем, науч. совет НАН Украины по пробл. «Кибернетика». Моделирование и управление состоянием эколого–экономических систем региона. – Киев, 2001. – С. 69 – 76.
93. Корноушенко Е. К. Интервальные покоординатные оценки для множества достижимых состояний линейной стационарной системы // Автоматика и Телемеханика. – 1980. – Ч.1. – №5. – С. 12–22.
94. Красовский Н. Н. Теория управления движением / Н. Н. Красовский. – М. : Наука, 1968. – 475 с.
95. Кривошейкин А. В. Точность параметров и настройка аналоговых радиопередающих цепей / А. В. Кривошейкин. – М.: Радио и связь, 1983. – 136 с.
96. Крищук В. М. Інтервальні методи оптимізації допусків / В. М. Крищук, Г. М. Шило, М. П. Гапоненко // Вісн. НУ «Львівська політехніка». Комп'ютерні системи проектування : Теорія і практика. – 1999.– № 373. – С. 196–201.
97. Кротов Г. И. Интерактивное моделирование сложных объектов на основе алгоритмов МГУА / Г. И. Кротов, Ю. В. Коппа, В. С. Степашко // Кибернетика и вычисл. техника. – 1994. – С. 55–61.
98. Кузнецов В. П. Интервальные статистические модели / В. П. Кузнецов. – М. : Радио и связь, 1991. – 352 с.
99. Кунцевич В. М. О работах в теории управления в институтах НАН Украины в последние годы // Проблемы управления и информатики. – 1998. – №6. – С. 5–14.
100. Кунцевич В. М. Инвариантные и стационарные множества нелинейных дискретных систем при ограниченных шумах / В. М. Кунцевич, Б. Н. Пшеничный // Проблемы управления и информатики. – 1996. – №1–2. – С. 35–45.

101. Кунцевич В. М. Активная идентификация и управление при ограниченных шумах / В. М. Кунцевич, А. В. Кунцевич // Пр. міжн. конф. з управління «АВТОМАТИКА–2000» Львів 11–15 вересня 2000 : в 7–ми томах. – Львів : Держ. НДІ інформ. інфраструкт., 2000. – Т. 1. – С. 7–13.
102. Кунцевич В. М. Об оптимальном и адаптивном управлении динамическими объектами в условиях неопределенности / В. М. Кунцевич, М. М. Лычак // Автоматика и телемеханика. – 1979. – №1. – С. 79–88.
103. Кунцевич В. М. Получение гарантированных оценок в задачах параметрической идентификации / В. М. Кунцевич, М. М. Лычак // Автоматика. – 1982. – №4. – С. 49–59.
104. Кунцевич В. М. Синтез оптимальных и адаптивных систем управления / В. М. Кунцевич, М. М. Лычак. – Киев : Наук. думка, 1985. – 248 с.
105. Кунцевич В. М. Управление в условиях неопределенности (синтез адаптивных систем управления) / В. М. Кунцевич, М. М. Лычак // Автоматика. – 1987. – №5. – С. 16–26.
106. Кунцевич В. М. Активная идентификация параметров линейного статического объекта (игровая задача планирования эксперимента) / В. М. Кунцевич, М. М. Лычак, А. С. Никитенко // Автоматика и телемеханика. – 1987. – №9. – С. 68–73.
107. Куржанский А. Б. Задача идентификации – теория гарантированных оценок // Автоматика и телемеханика. – 1991. – №4. – С. 3–26.
108. Куржанский А. Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности / А. Б. Куржанский. – М. : Наука, 1977. – 392 с.
109. Куссуль Н. Н. Исследование сходимости размытого алгоритма наблюдения для многомерных динамических систем // Проблемы управления и информатики. – 1996. – №4. – С. 54–61.
110. Куссуль Н. Н. Нечеткий эллипсоидальный наблюдатель состояния пониженного порядка // Проблемы управления и информатики. – 2000. – №5. – С. 44–51.
111. Лакеев А. В. О множестве решений линейного уравнения с интервально заданными оператором и правой частью / А. В. Лакеев, С. И. Носков // Сиб. математ. журнал. – 1994. – Т. 35 – №5. – С. 1074–1084.
112. Леган Э. Проверка статистических гипотез / Э. Леган. – М.: Наука, 1979. – 258 с.
113. Лецкий Э. К. Планирование испытаний технических объектов // Сб. тр. Вопросы кибернетики. Планирование и автоматизация эксперимента в научных исследованиях. – М., 1982. – С. 62–76.
114. Линник Ю. В. Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений / Ю. В. Линник. – М. : Физ. мат. изд., 1962. – 187 с.
115. Лисенков А. Н. О методах идентификации и управления в условиях неопределенности // Межд. конф. по интерв. и стох. методам в науке и технике. ИНТЕРВАЛ – 92 : Сб. тр. – Москва, 1992. – Т. 1. – С. 92–96.
116. Литвин І. С. Інформаційно – картографічна система контролю екологічної ситуації / І. С. Литвин, М. П. Дивак, Г. М. Гладій // Тези доповідей І Української конференції з автоматичного керування «Автоматика 94». – Київ, 1994.
117. Лоусон Ч. Численное решение задач метода наименьших квадратов /

- Ч. Лоусон, Р. Хентон. – М. : Наука, 1986. – 246 с.
118. Лычак М. М. Идентификация и оценивание состояния объектов управления на основе множественного подхода // Проблемы управления и информатики. – 1999. – №5. – С. 34–41.
 119. Лычак М. М. Идентификация и оценивание состояния объектов управления на основе множественного подхода // Проблемы управления и информатики. – 1999. – №5. – С. 34–42.
 120. Лычак М. М. Множественная модель неопределенного процесса и ее использование для обработки результатов измерений // Проблемы управления и информатики. – 1996. – №1–2. – С. 184–192.
 121. Лычак М. М. Множественная фильтрация // Проблемы управления и информатики. – 1996. – №5. – С. 63–77.
 122. Лычак М. М. О решении задачи структурной параметрической идентификации в условиях неопределенности // Автоматика. – 1990. – №6. – С. 72–77.
 123. Лычак М. М. Синтез дискретных адаптивных систем управления на основе теоретико– множественных моделей неопределенности : дис. докт. физ.– мат. наук : 01.05.04 / Лычак Михаил Михайлович. – К., 1995. – 241 с.
 124. Лычак М. М. Расчет электронных устройств технических систем управления с использованием множественного подхода / М. М. Лычак, В. П. Евтушок // Проблемы управления и информатики. – 2000. – №1. – С. 105–112.
 125. Манусов В. З. Интервальный анализ в задачах расчета токов короткого замыкания / В. З. Манусов, С. М. Моисеев, С. Д. Перков // Техническая электродинамика. – 1987. – №5. – С. 13–18.
 126. Марков С. М. Некоторые задачи интерполяции, идентификации и оценивания для интервальных данных // Межд. конф. по интерв. и стох. методам в науке и технике. ИНТЕРВАЛ – 92 : Сб. тр. – Москва, 1992. – Т.1. – С. 103.
 127. Математическая энциклопедия. Том 2. – Москва : Советская Энциклопедия, 1979. – 552 с.
 128. Математический энциклопедический словарь. – Москва: Наука, 1995. – 552 с.
 129. Меньшиков Г. Г. Интервальные вычисления: упущенные возможности и попытки наверстать // Процессы управления и устойчивость : Тр. XXIX научн. конф. 4–11 апреля 1998 года, Санкт-Петербург, СПбГУ, Факультет прикладной математики и процессов управления. – Санкт–Петербург : СПбГУ, 1998. – С. 440–447.
 130. Мессарович М. Общая теория систем : Математические основы / М. Мессарович, Я. Такахара. – М. : Мир, 1978. – 312 с.
 131. Михайлов А. В. Точность радиоэлектронных устройств / А. В. Михайлов, С. К. Савин. – М., 1976. – 214 с.
 132. Михайлов А. В. Эксплуатационные допуски и надежность в радиоэлектронной аппаратуре / А. В. Михайлов. – М., 1970. – 216 с.
 133. Молчанов И. Н. Введение в алгоритмы параллельных вычислений / И. Н. Молчанов. – К. : Наукова думка, 1990. – 128 с.
 134. Морланг А. А. Исследование режима трехузловой схемы электрической сети методами интервального анализа / Информационно – оперативный материал (Интервальный анализ) / А. А. Морланг, Л. А. Авдеев, В. Г. Кол-

- могоров. – Красноярск, 1990. – С. 21–25. – (Препр. / Вычисл. центр. СО АН СССР; 17).
135. Недашковський М. А. Збалансовані обчислення для задач лінійної алгебри в комп'ютерних мережах // Вісн. Тернопільської акад. нар. господ. – 2000. – №10. – С. 9–14.
 136. Неклепаев Б. Н. Электрическая часть электростанций и подстанций / Б. Н. Неклепаев. – М. : Наука, 1986. – 640 с.
 137. Орлов А. И. Интервальная статистика // Межд. конф. по интерв. и стох. методам в науке и технике. ИНТЕРВАЛ. – 92 : Сб. тр. – Москва, 1992. – Т. 1. – С. 122–125.
 138. Орлов А. И. О развитии реалистической статистики // Статистические методы оценивания и проверки гипотез: Сб. тр. – Пермь : ПГУ, 1990. – С. 89–99.
 139. Орлов А. И. Устойчивость в социально – экономических моделях / А. И. Орлов. – М.: Наука, 1979. – 296 с.
 140. Орлов А. И. Часто ли распределение результатов наблюдений является нормальным? // Заводская лаборатория. – 1992. – №1. – С. 67–74.
 141. Палюх В. В. Гарантированная оценка оперативных значений диагностических параметров химического производства / Информационно – оперативный материал (Интервальный анализ) / В. В. Палюх. – Красноярск, 1990. – С. 26–29. – (Препр. / Вычисл. центр. СО АН СССР; 17).
 142. Пархомиць С. М. Регресійний аналіз і прогнозування собівартості виробництва продукції тваринництва у Західній Україні з використанням комп'ютерної техніки / С. М. Пархомиць, М. П. Дивак, С. В. Волощук // Регіональні аспекти розвитку і розміщення продуктивних сил України: Зб. наук. пр. каф. УТР і РПС Тернопільської акад. нар. господ. – 2001. – Вип. 5. – С. 71–78.
 143. Покотило В. Г. Новый метод квазиоптимальной аппроксимации пересечения эллипсоидов / В. Г. Покотило. – Киев, 1990. – 18 с. – (Препр./ АН УССР, Ин-т кибернетики им. В.М.Глушкова; 90–13).
 144. Потемкин В. Г. Система MathLAB: Справ. пособие / В. Г. Потемкин. – М.: Диалог–МИФИ, 1997. – 350 с.
 145. Потемкин В. Г. Система инженерных и научных расчетов MathLAB 5.x: в 2-х т. – М.: Диалог–МИФИ, 1999. – Т. 1. – 366 с, Т. 2. – 304 с.
 146. Радіотехніка: Енциклопедичний навчальний довідник: Навч. Посібник / За ред. Мазора Ю. Л., Мачуського Є. А., Правди В. І. – К. : Вища шк., 1999. – 838 с.
 147. Райбман Н. С. Построение моделей производства / Н. С. Райбман, В. М. Чадеев. – Л. : Энергия, 1975. – 375 с.
 148. Сейдж А. Идентификация систем / А. Сейдж, Дж. Мелс. – М. : Наука, 1976. – 495 с.
 149. Сеньо П. С. Інтервальні моделі в медико-екологічному прогнозуванні / П. С. Сеньо, М. П. Дивак, Г. М. Гладій, П. С. Венгерський // Вісн. Львівського державного університету. Задачі та методи прикладної математики. – 1995. – Вип. 41. – С. 105–108.
 150. Степанюк В. В. Методи математичного програмування / В. В. Степанюк. –

- К. : Вища шк., 1977. – 272 с.
151. Степашко В. С. Алгоритмы МГУА как основа автоматизации процесса моделирования сложных объектов на основе процесса моделирования по экспериментальным данным // Автоматика. – 1988. – № 4. – С. 44–45.
 152. Степашко В. С. Конечная селекционная процедура получения результата полного перебора // Автоматика. – 1981. – № 3. – С. 76–79.
 153. Степашко В. С. О задаче структуризации знаний в области моделирования по эмпирическим данным // Кибернетика и вычисл. техника. – 1991. – Вып. 92. – С. 80–83.
 154. Степашко В. С. Исследование свойств комбинаторно– селекционного (многоэтапного) алгоритма МГУА / В. С. Степашко, Ю. В. Костенко // Сб. науч. тр. международного науч.–учеб. центра информ. технологий и систем, науч. совет НАН Украины по пробл. «Кибернетика». Моделирование и управление состоянием эколого–экономических систем региона. – Киев, 2001. – С. 96–100.
 155. Стоян Ю. Г. Математическая модель оптимизационной задачи размещения правильных многоугольников с учетом погрешностей исходных данных / Ю. Г. Стоян, Т. Е. Романова, Ю. А. Сысоева // Доп. НАН України. –1998. – №5 – С. 104–111.
 156. Стоян Ю. Г. Оптимизационная задача размещения правильных интервальных многоугольников / Ю. Г. Стоян, Т. Е. Романова, Ю. А. Сысоева // Доп. НАН України. –1998 – №9 – С. 114–120.
 157. Успенский А. Б. Вычислительные аспекты метода наименьших квадратов при анализе и планировании регрессионных экспериментов / А. Б. Успенский, В. В. Федоров. – М. : МГУ, 1975. – 168 с.
 158. Федоров В. В. Теория оптимального эксперимента / В. В. Федоров. – М. : Наука, 1971. – 312 с.
 159. Хартман К. Планирование эксперимента в исследовании технологических процессов / К. Хартман, Э. К. Лецкий, В. Шефер. – М.: Мир, 1977. – 552 с.
 160. Химельблау Д. Прикладное нелинейное программирование / Д. Химельблау. – М. : Мир, 1975. – 534 с.
 161. Хлебалин Н. А. Синтез интервальных регуляторов в задаче модального управления // Аналитические методы синтеза регуляторов. – Саратов: Саратовский политехн. ин-т., 1988. – С. 26–30.
 162. Хлебалин Н. А. Интервальный вариант метода модального управления / Н. А. Хлебалин, Ю. И. Шокин // Докл. акад. наук. – 1991. – Т. 316, №4. – С. 846–850.
 163. Цыпкин Я. З. Адаптация и обучение в автоматических системах / Я. З. Цыпкин. – М. : Наука, 1968. – 400 с.
 164. Цыпкин Я. З. Основы информационной теории идентификации / Я. З. Цыпкин. – М. : Наука. Гл. ред физ.–мат. лит., 1984. – 320 с.
 165. Черноусько Ф. Л. Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод эллипсоидов / Ф. Л. Черноусько. – М. : Наука, 1988. – 320 с.
 166. Черноусько Ф. Л. Оптимальные гарантированные оценки неопределенностей с помощью эллипсоидов // Изв. АН СССР. Техн. киберн. – 1980. –

№3. – С. 3–11.

167. Чунихин А. А. Выбор электрических аппаратов для промышленных установок. / А. А. Чунихин, Е. Г. Акимов, Ю. С. Коробова, В. П. Соколов, А. В. Савельев. – М. : МЭИ, 1990. – 155 с.
168. Шайдуров В. В. Решение интервальной алгебраической задачи о допусках / В. В. Шайдуров, С. П. Шарый. – Красноярск, 1988. – 27 с. – (Препр./ ВЦ СО АН СССР; 5).
169. Шарая И.А. О максимальной внутренней оценке множеств решений интервальных линейных систем // Вычислительные технологии. – 1998. – Т. 3 – №2. – С. 55–66.
170. Шарый С. П. Анализ чувствительности интервальных линейных статических систем // Труды XI международной Байкальской школы–семинара «Методы оптимизации и их приложения», Иркутск, Байкал, 5–12 июля 1998 г., секция 4. – Иркутск ИСЭМ, 1998. – С. 187–190.
171. Шарый С. П. Алгебраический подход во «внешней задаче» для интервальных линейных систем // Вычислительные Технологии. – 1998. – Т. 3, №2. – С. 67–114.
172. Шарый С. П. Алгебраический подход к анализу линейных статических систем с интервальной неопределённостью // Известия РАН. Теория и системы управл. – 1997. – №3. – С. 51–61.
173. Шарый С. П. Внешнее оценивание обобщенных множеств решений интервальных линейных систем // Вычислительные Технологии. – 1999. – Т. 4, №4. – С. 82–110.
174. Шарый С. П. Интервальные алгебраические задачи и их численное решение // Дис. доктора физ. –математ. наук / С. П. Шарый. – Новосибирск : Ин–т вычисл. Технологий СО РАН, 2000. – 322 с.
175. Шарый С. П. Интервальный анализ : прошлое, настоящее и будущее // Наука в Сибири. – 1997. – №41 (2127). – С. 3.
176. Шарый С. П. Линейные статические системы с интервальной неопределённостью: эффективные алгоритмы для решения задач управления и стабилизации / С. П. Шарый. – Красноярск. : 1994. – 13 с. – (Препр. / ВЦ СО РАН; №7).
177. Шарый С. П. Новый подход к анализу статических систем с интервальной определённостью в данных // Вычислительные Технологии. – 1997. – Т. 2 – №1. – С. 84–102.
178. Шарый С. П. О разрешимости линейной задачи о допусках // Interval Computations.– 1991. – №1. – С. 92–97.
179. Шокин Ю. И. Интервальный анализ / Ю. И. Шокин. – Новосибирск : Наука, 1981. – 116 с.
180. Эйкхофф П. Основы идентификации систем управления / П. Эйкхофф. – М. : Мир, 1975. – 684 с.
181. Яковлев А. Г. Интервальные вычисления – предмет исследований и полезный инструмент // Интервальные вычисления. – 1991. – №1. – С. 10–26.
182. Яковлев А. Г. Машинная арифметика мультиинтервалов // Вопросы Кибернетики (Научный Совет по компл. проблеме "Кибернетика" АН СССР). –

1986. – Вып. 125. – С. 66–81.
183. Якубович В. А. Рекуррентные конечно сходящиеся алгоритмы решения систем неравенств // Докл. АН СССР. Математ., физ. – 1966. – №6. – С. 1308–1311.
184. Alefeld G. über die Verbesserung von Schranken für die Lösung bei linearen Gleichungssystemen / G. Alefeld, J. Herzberger // *Angewandte Informatik*. – 1971. – В. 13. – P. 107–112.
185. Aubin J.-P. *Viability Theory* / J.-P. Aubin. – Boston: Birkhauser, 1991. – 533 p.
186. Aubin J.-P. *Set-Valued Analysis* / J.-P. Aubin, H. Frankowska. – Boston : Birkhauser, 1990. – 461 pp.
187. Babichev A. B. UniCalc, a novel approach to solving systems of algebraic equations / A. B. Babichev, O. B. Kadyrova, T. P. Kashevarova, A. J. Leshchenko, A. L. Semenov // *Interval Computations*. – 1993. – №2. – P. 29–47.
188. Bartkowa L. Badanie i regulacja kompleksowego wpływu gospodarczej działalności przedsiębiorstw na środowisko socjoekologiczne / L. Bartkowa, G. Hladij, M. Dyvak, P. Kogut // V krajowa konf. «Modelowanie cybernetyczne systemow biologicznych». – Krakow: 2000. – P. 139–141.
189. Bäumann M. Numerical experience with methods for solving an interval linear system // *Freiburger Intervall-Berichte*. – 1984. – №7. – P. 61–66.
190. Burgeimer P. Controllability and interval mathematics / *Mathematical Modelling and Scientific Computations* / Andreev A. S., Dimov I. T., Markov S. M., Ullrich Ch., eds. – Sofia : Bulgarian Academy of Sciences, 1991. – P. 1–13.
191. Caprani O. Experiments with interval methods for nonlinear systems / O. Caprani, K. Madsen // *Freiburger Intervall-Berichte*. – 1981. – №7. – P. 1–13.
192. Coxson G. E. Computing exact bounds on elements of an inverse interval matrix is NP-hard // *Reliable Computing*. – 1999. – Vol. 5. – P. 137–142.
193. Design of experiments and data analysis: New trends and results / E. K. Letzky, A. P. Voshinin, N. P. Dyvak, S. J. Simoff, A. I. Orlov, V. G. Gorsky, E. P. Nikitina, V. N. Nosov / Edited by E.K. Letzky. – Moscow. : ANTAL., 1993. – 192 p.
194. Extended interval arithmetics: new results and applications / N. S. Dimitrova, S. M. Markov, E. D. Popova, L. Atanassova, J. Herzberger, eds. // *Computer Arithmetic and Enclosure Methods* – Amsterdam: Eisevier, 1992. – P. 225–232.
195. Dobronets B. S. On some two-sided methods for solving systems of ordinary differential equations // *Interval Computations*. – 1992. – №1(3). – P. 6–21.
196. Dyvak M. The full combination algorithm modification in the task of technological process interval modelling / M. Dyvak, Yu. Franko, I. Pituh, S. Voloshchuk // *Proc. of the sixth international conf. «The Experience of Designing and Application of CAD System in Microelectronics»*. – Lviv, 2001. – P. 314.
197. Dyvak M. The experimental design in tasks of interval models identification / M. Dyvak, G. Hladiy, V. Vitsentiy // *Proc. of the international workshop «Intelligent Data Acquisition and Advanced Computing Systems: Technology and Applications»*. – Foros, 2001. – P. 224–227.
198. Dyvak M. The localization method for active identification of the interval model / M. Dyvak, S. Voloshchuk, V. Manzhula // *Proc. of international conf.*

- «Modern problem of telecommunication, computer science and engineeris training». – Lviv, 2002. – P. 43–44.
199. Dyvak M. P. Interval model identification of hermetic sealing technological process the integrated circuits // Proc. of international conf. «Modern problem of telecommunication, computer science and engineeris training». – Lviv : 2000. – P. 37–38.
 200. Dyvak M. Algorithm of technological process interval modeling / M. Dyvak, Yu. Franko, I. Pituh, V. Tsymbaliy // Proc. of international conf. «Modern problem of telecommunication, computer science and engineeris training». – Lviv: 2000. – P. 31.
 201. Dyvak M. Application interval methods in static identification of the medical and ecological conditions of on average industrial city / M. Dyvak, G. Hladiy // Ref. IV krajowa konf. «Modelowanie Systemow Biologicznych». – Krakow : 1995. – P. 95–99.
 202. Dyvak M. The geographic information systems for control of medical and ecological conditions of on average industrial city / M. Dyvak, G. Hladiy, S. Dnistrian // Materialy 8 krajowa konf. Naukowa «Uniwersalnosc cybernetyki». – T.1. – Krakow : 1996. – P. 3–4.
 203. Dyvak M. Identification Socio – Ecological System and Design of Interval Model on the Basis Fuzzy – Data / M. Dyvak, G. Hladiy, D. Zhang // Abstracts 2nd IMACS International Multiconference CESA'98 «Computational engineering in systems applications». – Tunisia : 1998. – P. 234.
 204. Filippov A. F. Ellipsoidal estimates for a solution of a system of differential equatuations // Interval Computations. – 1992. – №2(4). – P. 6–17.
 205. Garloff J. Block methods for the solution of linear equations // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. – 1990. – Vol. 11. – P. 89–106.
 206. Garulli A. Robustness in identification and control / A. Garulli, A. Teci, A. Vicino // Lect. notes in control and inform. sci. – 1999. – 245. – 413 p.
 207. Golubcova T. D. Some applications of interval regression analysis in biometrics / T. D. Golubcova, A. P. Voschinin // International conference on interval and computer–algebraic methods in science and engineering «Interval'94» – St. Petersburg, 1994. – P. 96 – 98.
 208. Gorskii V.G. Selecting the «best» equation for response surface / V. G. Gorskii, E. A. Katsman, V. M. Klebanova, A. A. Grigor'ev // Industrial laboratory. – 1986. – Vol 52. – №12. – P. 1122–1125.
 209. Hadjihassan S. Quality improvement via optimization of tolerance intervals during the design stage / Hadjihassan S., Walter E., Pronzato L. // Applications of Interval Computatons / Kearfott R. B., Kreinovich V., eds. – Dordrecht : Kluwer, 1996. – P. 91–131.
 210. Hansen E. Bounding the solution of interval linear equations // SIAM Journal on Numerical Analysis. – 1992. – Vol. 29, №5. – P. 1493–1503.
 211. Hansen E. Interval forms of Newton's method // Computing. – 1978. – №20. – P. 153–163.
 212. Hansen E. R. Global optimization using interval analysis — the multidimensional case // Numerische Mathematik. – 1980. – Vol. 34, №3. –

- P. 247–270.
213. Hansen E. R. Global optimization using interval analysis — the one-dimensional case // *Journal of Optimization Theory and Applications*. – 1979. – Vol. 29. – P. 331–344.
 214. Hansen E. R. Interval form of Newton's method // *Computing*. 1978. – Vol. 4. – №3. – P.187–201.
 215. Hansen E.R. On linear algebraic equations with interval coefficients // *Topics in Interval Analysis* / Hansen E., eds. – Oxford: Clarendon Press, 1969. – P. 35–46.
 216. Hartfiel D.J. Concerning the solution set of $Ax = b$ where $P < A < Q$ and $p < b < q$ // *Numerische Mathematik*. – 1980. – Vol. 35. – №3. – P. 355–359.
 217. Heindl G. Solving linear interval systems is NP-hard even if we exclude overflow and underflow / Heindl G., Kreinovich V., Lakeyev A.// *Reliable Computing*. – 1998. – Vol. 4. – P. 383–388.
 218. Herzberger J. Note on a bounding technique for polynomial functions // *SIAM J. Appl. Math.* – 1978. – № 34. – P. 685–686.
 219. Jansson C. Calculation of exact bounds for the solution sets of linear interval systems // *Linear Algebra and its Applications*. – 1997. – Vol. 251. – P. 321–340.
 220. Jansson C. An NP-hardness result for nonlinear systems // *Reliable Computing*. – 1998. – Vol. 4. – P. 345–350.
 221. Jerrell M. E. Applications of interval computations to regional economic input-output models // *Applications of Interval Computations*; Kearfott R. B. and Kreinovich V., eds. – Dordrecht : Kluwer, 1996. – P. 133–143.
 222. Karmarkar N. A new polynomial-time algorithm for linear programming // *Combinatorica*. – 1984. – Vol. 4. – P. 373–395.
 223. Kearfott R. B. Preconditioners for the interval Gauss–Seidel method // *SIAM Jourf on Numerical Analysis*. – 1990. – Vol. 27, №3. – P. 804–822.
 224. Kearfott R. B. *Rigorous Global Search : Continuous Problems* / R. B. Kearfott. – Dordrecht: Kluwer, 1996. – 263 p.
 225. Klatte P., Ullrich ch. Complex sector arithmetic // *Computing*. – 1980. – Vol. 24. – P. 139–148.
 226. Kolev L.V. *Interval Methods for Circuit Analysis* / L. V. Kolev. – Singapore : World Scientific, 1993. – 320 p.
 227. Krawchczyk R. Interval extensions and interval iterations // *Computing*. – 1980. – №24. – P. 119–129.
 228. Krawczyk R. Newton–Algorithmen zur Bestimmung von Nullstellen mit Fellerschranken // *Computing*. – 1969. – Vol. 4. – P. 187–201.
 229. Kreinovich V. Approximate linear algebra is intractable / V. Kreinovich, A.V. Lakeyev, S. I. Noskov // *Linear Algebra and its Applications*. – 1996. – Vol. 232. – P. 45–54.
 230. Kreinovich V. Optimal solution of interval linear systems is intractable (NP-hard) / V. Kreinovich, A.V. Lakeyev, S. I. Noskov // *Interval Computations*. – 1993. – №1. – P. 6–14.
 231. Kuntzevich V.M. Guaranteed estimates, adaptation and robustness in control systems / V. M. Kuntzevich, M. M. Lychak. – Berlin, Heidelberg, New-York, London, Paris, Tokyo : Sringer, 1992. – 209 p.

232. Kupriyanova L. Inner estimation of the united solution set of interval linear algebraic system // *Reliable Computing*. – 1995. – Vol. 1. – №1. – P. 15–31.
233. Kurzhanski A. Ellipsoidal calculus for estimation and control / A. Kurzhanski, I. Valyi. – Boston, Basel, Berlin: Laxenburg IIASA, 1997. – 321 p.
234. Lakeyev A.V. On the computational complexity of the solution of linear systems with moduli // *Reliable Computing*. – 1996. – Vol. 2 – №2. – P. 125–131.
235. Litvin I.S. Some particular aspects of using interval methods in the automated monitoring systems / I. S. Litvin, M. P. Dyvak, G. M. Gladiy // *International conference on interval and computer–algebraic methods in science and engineering «Interval’94»*– St. Petersburg, 1994. – P. 169.
236. Madsen K. A parallel method for linear interval equations / K. Madsen, O. Toft // *Interval Computations*. – 1994. – №3. – P. 81–105.
237. Markov S. M. Extended interval arithmetic involving infinite intervals // *Mathematica Balcanica. New Series*. – 1992. – Vol. 6 – Fase. 3. – P. 269–304.
238. Mayer G. Enclosing the solutions of systems of linear equations by interval iterative processes // *Computing Supplement*. – 1988. – Vol. 6. – P. 47–58.
239. Mayer G. A necessary and sufficient criterion to guarantee feasibility of the interval Gaussian algorithm for a class of matrices / G. Mayer, L. Pieper // *Applications of Mathematics*. –1993. – Vol. 38, №3. – P. 205–220.
240. Mayer G. On the applicability of the interval Gaussian algorithm / G. Mayer, J. Rohn // *Reliable Computing*. – 1998. – Vol. 4, №3. – P. 205–222.
241. Milanese M. Bounded approaches to system identification / M. Milanese, J. Norton, H. Piet–Lahanier, E. Walter. – New–York, London : Plenum Press, 1996. – 357 p.
242. Moore R. E. Automatic error analysis in digital computation // *Technical Report LMSD–48421, Lockheed Missiles and Space Division*. – Sunnyvale, 1959.
243. Moore R. E. *Interval Analysis*. – Englewood Cliffs : Prentice Hall, 1966. – 145 p.
244. Moore R. E. *Methods and Applications of Interval Analysis*. – SIAM, Philadelphia, 1979 – 190 p.
245. Moore R.E., Jones S.T. Safe starting regions for iterative methods // *SIAM Journal on Numerical Analysis*. – 1977. – Vol. 14. – P. 1051–1065.
246. Mysovskikh V.I., Kovshov A.M. On symbolic computations in groups which arising from the analysis electronic circuits // *International conference on interval and computer–algebraic methods in science and engineering «Interval’94»* – St. Petersburg, 1994. – P. 181–182.
247. Neumaier A. A simple derivation of Hansen–Bliet–Rohn–Ning–Kearfott enclosure linear interval equations // *Reliable Computing*. – 1999. – Vol. 5, №2.– P. 131–136.
248. Neumaier A. *Interval methods for systems of equations*. – Cambridge : Cambridge University Press, 1990.
249. Neumaier A. On Shary's algebraic approach for linear interval equations // *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*. – 2000. – Vol. 21. – P. 1156–1162.
250. Neumaier A. Overestimation in linear interval equations // *SIAM Journal on Numerical Analysis*. – 1987. – Vol. 24. – P. 207–214.

251. Neumaier A. Rigorous sensitivity analysis for parameter-dependent systems of equations // *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. – 1989. – Vol. 144. – P. 16–25.
252. Neumaier A. Tolerance analysis with interval arithmetic // *Freiburger Interval-Berichte*. – 1986. – №86/9. – P. 5–19.
253. Nickel K. Die Auflösbarkeit linearer Kreisscheiben- und Intervall-Gleichungssysteme // *Linear Algebra and its Applications*. – 1982. – Vol. 44. – P. 19–40.
254. Nickel K. Die Überschätzung des Wertebereiches einer Funktion in der Intervallrechnung mit Anwendungen auf lineare Gleichungssysteme // *Computing*. – 1977. – Vol. 44. – P. 15–36.
255. Nickel K. Using interval methods for the numerical solution of ODE's // *ZAMM*. – 1986. – B. 66, №11. – P. 513–523.
256. Ning S., Kearfott R.B. A comparison of some methods for solving linear interval equations // *SIAM Journal on Numerical Analysis*. – 1997. – Vol. 34, №4. – P. 1289–1305.
257. Oettli W. On the solution set of a linear system with inaccurate coefficients // *SIAM Journal on Numerical Analysis*. – 1965. – Vol. 2, №1. – P. 115–118.
258. Oettli W., Prager W. Compatibility of approximate solution of linear equations with given error bounds for coefficients and right-hand sides // *Numerische Mathematik*. – 1964. – Vol. 6. – P. 405–409.
259. Orlov A.I. Interval statistics // *Interval computations*. – 1992. – №1. – P. 44–52.
260. Orlov A.I. On the influence of observation errors on the properties of statistical procedures // *Jornal of Soviet Mathematics*. – 1991. – Vol. 56. – № 3.
261. Popova E.D. Algebraic solutions to a class of interval equations // *Journal of Universal Computer Science*. – 1998. – Vol. 4, №1. – P. 48–67.
262. Popova E.D. Generalized interval distributive relations and their applications // *Workshop on Applications of Interval Analysis to Systems and Control*. – Girona: Universität de Girona, 1999. – P. 13–23.
263. Ratschek H. Centered forms // *SIAM J. Num. Anal.* – 1980. – №17. – P. 656–662.
264. Ratschek H. Gleichheit von produkt und formalprodukt bei intervallpolynomen // *Computing*. – 1972. – №10. – P. 245–254.
265. Ratschek H. Inclusion functions and global optimization // *Mathematical Programming*. – 1985. – Vol. 33. – P. 300–317.
266. Ratschek H., Sauer W. Linear interval equations // *Computing*. 1982. – Vol. 28, №2. – P. 105–115.
267. Ratz D., Csendes T. On the selection of subdivision directions in interval band and-bound methods for global optimization // *Journal of Global Optimization*. – 1995. Vol. 7. – P. 183–207.
268. Rex G., Rohn J. Sufficient conditions for regularity and singularity of interval matrices // *SIAM Journal on Numerical Analysis*. – 1999. – Vol. 20. – P. 437–445.
269. Rohn J. A Farkas-type theorem for linear interval equations // *Computing*. – 1989. – Vol. 43. – P. 93–95.
270. Rohn J. A two-sequence method for linear interval equations // *Computing*. – 1989. – Vol. 41, №1–2. – P. 137–140.

271. Rohn J. Cheap and tight bounds: the recent result by E. Hansen can be made more efficient // *Interval Computations*. – 1993. – №4. – P. 13–21.
272. Rohn J. Duality in interval linear programming // *Interval Mathematics 1980*; Nickel K., ed. – New York : Academic Press, 1980. – P. 521–529.
273. Rohn J. Input–output model with interval data // *Econometrica*. – 1980. – Vol. 48. – P. 767–769.
274. Rohn J. NP–hardness results for linear algebraic problems with interval data // *Topics in Validated Numerics*; Herzberger J., ed. – Amsterdam : North – Holland, 1994. – P. 463–471.
275. Rohn J. On singular matrices contained in an interval matrix // *Ekonomicko-Matematicky Obzor*. – 1989. – Vol. 25, №3. – P. 320–322.
276. Rohn J. Systems of linear interval equations // *Linear Algebra and its Applications*. – 1989. – Vol. 126. – P. 39–78.
277. Rohn J., Kreinovich V. Computing exact componentwise bounds on solutions of linear system is NP–hard // *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*. – 1995. – Vol. 16. – P. 415–420.
278. Rohn J., Kreslová J. Linear interval inequalities // *Linear and Multilinear Algebra*. – 1994. – Vol. 38. – P. 41–43.
279. Rump S. M. Solution of linear and nonlinear algebraic problems with sharp guaranteed bounds // *Computing Supplement*. – 1984. – Vol. 5. – P. 147–168.
280. Schweppe F. C. Recursive state estimation: unknown but bounded error and system inputs // *IEEE Trans. Automat. Control*. – 1968. – AC–13. – № 1. – P. 22–28.
281. Sharaya I.A. On maximal inner estimation of the solution sets of linear systems with interval parameters // *Reliable Computing*. – 2001. – Vol. 7, №5. – P. 409–424.
282. Shary S. P. A new approach to the analysis of static systems under interval uncertainty // *Scientific Computing and Validated Numerics* ; Alefeld G., Frommer A. and Lang B., eds. – Berlin : Akademie Verlag, 1996. – P. 118–132.
283. Shary S. P. Controllable solution sets to interval static systems // *Applied Mathematics and Computation*. – 1997. – Vol. 86, №2–3. – P. 185–196.
284. Shary S. P. Interval Gauss–Seidel method for generalized solution sets to interval linear systems // *Reliable Computing*. – 2001. – Vol. 7, №2. – P. 141–155.
285. Shary S. P. Linear static systems under interval uncertainty: Algorithms to solve control and stabilization problems // *Extended Abstracts of APIC'95, International Workshop on Applications of Interval Computations, El Paso, TX, 1995*. – P. 181–184.
286. Shary S. P. On optimal solution of interval linear equations // *SIAM Journal on Numerical Analysis*. – 1995. – Vol. 32, №2. – P. 610–630.
287. Shary S. P. Solving the tolerance problem for interval linear systems // *Interval computations*. – 1994. – №2. – P. 6–26.
288. Shiryaev V. I., Velkova I. S., Pelzwerger S. B. Control of the social-economic process under uncertain conditions // *International conference on interval and computer–algebraic methods in science and engineering «Interval'94»*– St. Petersburg, 1994. – P. 218–219.
289. Smagina Ye. M. A new approach to the modal regulator synthesis for interval

- plant with scalar input // *Reliable Computing*. – 1997. – Vol. 3. – P.401–410.
290. Walter E. Piet– Lohanier H. Estimation of parameter bounds from bounded – error data // *Proc. 12-th IMACS world congress*. – Paris, 1988.
291. Walter E., Pronzato L. Identification of parametric model from experimental data. – London, Berlin, Heidelberg, New York, Paris, Tokyo : Springer, 1997. – 413 p.
292. Yakovlev A. G. Classification approach to programming of localizational (interval) computations // *Interval Computations*. – 1992. – №1(3). – P. 61–84.
293. Dyvak M., Kozak O., Pukas A. Interval Model for Identification of Laryngeal Nerves//*PRZEGLĄD ELEKTROTECHNICZNY (Electrical Review)*, ISSN 0033–2097, R. 86 NR 1 / 2010. – P.139–140.

Додаток А

Таблиці $M(I_D)$ -, $M(I_A)$ -, $M(I_E)$ -оптимальних планів

Для $M(I_D)$ -оптимальних планів частоти повинні бути розподілені в точках спектру рівномірно. Якщо кількість точок спостережень не кратна загальній кількості спостережень, то усі спостереження розподіляються якомога рівномірно і цей розподіл не впливає на значення $M(I_D)$ -критерія. Однак залежно від прийнятого розподілу частот змінюватимуться значення $M(I_E)$ - та $M(I_A)$ -критеріїв.

Тому додатково до матриць $M(I_D)$ -оптимальних планів додано оптимальні за $M(I_E)$ - та $M(I_A)$ -критеріями частоти, тобто ті, що при заданому $M(I_D)$ -оптимальним планом спектру забезпечують мінімальні значення $M(I_E)$ - та $M(I_A)$ -критеріїв. В додатку розподіл частот (N_1, N_2, \dots, N_m) для забезпечення найменшого значення $M(I_E)$ -критерія, відмічено символом «*», а розподіл частот для забезпечення найменшого значення $M(I_A)$ -критерія, відмічений символом «**».

Наприклад, план №21 є оптимальним за $M(I_D)$ -критерієм і його спектр зосереджений у 10-ти точках. При кількості спостережень $N=15$ і розподілі: $N_1=1, N_2=1, N_3=2, N_4=2, N_5=1, N_6=1, N_7=1, N_8=2, N_9=2, N_{10}=2$, для заданого плану №21 спектру забезпечуватиметься найменше значення $M(I_E)$ -критерія. За цих же умов найменше значення $M(I_A)$ -критерія, досягатиме при такому розподілі: $N_1=1, N_2=1, N_3=1, N_4=1, N_5=1, N_6=2, N_7=2, N_8=2, N_9=2, N_{10}=2$.

Слід зауважити, що в таблицях характеристик планів наведено найменші значення для $M(I_E)$ - та $M(I_A)$ -критеріїв.

А.1. Характеристики оптимальних планів локалізаційного експерименту

Таблиця А.1.

Характеристики оптимальних планів локалізаційного експерименту на кулі

№ плану	n	m	N	$M(I_D(X_D))$	$e^{(M(I_D))}$	$M(I_A(X_A))$	$e^{(M(I_A))}$	$M(I_E(X_E))$	$e^{(M(I_E))}$	Тип моделі	Особливості плану
1	2	2	2	16	1	32	1	8	1	II	$M(I_A)$, $M(I_D)$, $M(I_E)$ -оптим.
1	2	2	3	8	1	24	1	6	1	II	$M(I_A)$, $M(I_D)$, $M(I_E)$ -оптим.
1	2	2	4	4	1	16	1	4	1	II	$M(I_A)$, $M(I_D)$, $M(I_E)$ -оптим.
1	2	2	6	1,44	1	9,6	1	2,4	1	II	$M(I_A)$, $M(I_D)$, $M(I_E)$ -оптим.
1	2	2	10	0,327	1	4,571	1	1,143	1	II	$M(I_A)$, $M(I_D)$, $M(I_E)$ -оптим.
2	3	3	3	64	1	96	1	12	1	II	$M(I_A)$, $M(I_D)$, $M(I_E)$ -оптим.
2	3	3	5	16	1	64	1	8	1	II	$M(I_A)$, $M(I_D)$, $M(I_E)$ -оптим.
2	3	3	7	4,8	1	41,6	1	5,2	1	II	$M(I_A)$, $M(I_D)$, $M(I_E)$ -оптим.
2	3	3	9	1,728	1	28,8	1	3,6	1	II	$M(I_A)$, $M(I_D)$, $M(I_E)$ -оптим.
2	3	3	12	0,512	1	19,2	1	2,4	1	II	$M(I_A)$, $M(I_D)$, $M(I_E)$ -оптим.
3	4	4	4	256	1	256	1	16	1	II	$M(I_A)$, $M(I_D)$, $M(I_E)$ -оптим.
3	4	4	6	64	1	192	1	12	1	II	$M(I_A)$, $M(I_D)$, $M(I_E)$ -оптим.
3	4	4	8	16	1	128	1	8	1	II	$M(I_A)$, $M(I_D)$, $M(I_E)$ -оптим.
3	4	4	10	5,76	1	102,4	1	6,4	1	II	$M(I_A)$, $M(I_D)$, $M(I_E)$ -оптим.
3	4	4	16	0,41	1	51,2	1	3,2	1	II	$M(I_A)$, $M(I_D)$, $M(I_E)$ -оптим.
4	5	5	5	1024	1	640	1	20	1	II	$M(I_A)$, $M(I_D)$, $M(I_E)$ -оптим.
4	5	5	8	128	1	448	1	14	1	II	$M(I_A)$, $M(I_D)$, $M(I_E)$ -оптим.
4	5	5	10	32	1	320	1	10	1	II	$M(I_A)$, $M(I_D)$, $M(I_E)$ -оптим.

№ плану	n	m	N	$M(I_D(X_D))$	$e^{(M(I_D))}$	$M(I_A(X_A))$	$e^{(M(I_A))}$	$M(I_E(X_E))$	$e^{(M(I_E))}$	Тип моделі	Особливості плану
4	5	5	15	2,488	1	192	1	6	1	II	$M(I_A)$, $M(I_D)$, $M(I_E)$ -оптим.
4	5	5	20	0,328	1	128	1	4	1	II	$M(I_A)$, $M(I_D)$, $M(I_E)$ -оптим.
5	6	6	6	4096	1	1536	1	24	1	II	$M(I_A)$, $M(I_D)$, $M(I_E)$ -оптим.
5	6	6	9	512	1	1152	1	18	1	II	$M(I_A)$, $M(I_D)$, $M(I_E)$ -оптим.
5	6	6	12	64	1	768	1	12	1	II	$M(I_A)$, $M(I_D)$, $M(I_E)$ -оптим.
5	6	6	18	2,986	1	460,8	1	7,2	1	II	$M(I_A)$, $M(I_D)$, $M(I_E)$ -оптим.
5	6	6	24	0,262	1	307,2	1	4,8	1	II	$M(I_A)$, $M(I_D)$, $M(I_E)$ -оптим.
6	7	7	7	16384	1	3584	1	28	1	II	$M(I_A)$, $M(I_D)$, $M(I_E)$ -оптим.
6	7	7	10	2048	1	2816	1	22	1	II	$M(I_A)$, $M(I_D)$, $M(I_E)$ -оптим.
6	7	7	14	128	1	1792	1	14	1	II	$M(I_A)$, $M(I_D)$, $M(I_E)$ -оптим.
6	7	7	18	16,589	1	1382,4	1	10,8	1	II	$M(I_A)$, $M(I_D)$, $M(I_E)$ -оптим.
6	7	7	21	3,583	1	1075,2	1	8,4	1	II	$M(I_A)$, $M(I_D)$, $M(I_E)$ -оптим.
7	8	8	8	65536	1	8192	1	32	1	II	$M(I_A)$, $M(I_D)$, $M(I_E)$ -оптим.
7	8	8	12	4096	1	6144	1	24	1	II	$M(I_A)$, $M(I_D)$, $M(I_E)$ -оптим.
7	8	8	16	256	1	4096	1	16	1	II	$M(I_A)$, $M(I_D)$, $M(I_E)$ -оптим.
7	8	8	20	33,18	1	3276,8	1	12,8	1	II	$M(I_A)$, $M(I_D)$, $M(I_E)$ -оптим.
7	8	8	24	4,3	1	2457,6	1	9,6	1	II	$M(I_A)$, $M(I_D)$, $M(I_E)$ -оптим.
8	9	9	9	262144	1	18432	1	36	1	II	$M(I_A)$, $M(I_D)$, $M(I_E)$ -оптим.
8	9	9	14	8192	1	13312	1	26	1	II	$M(I_A)$, $M(I_D)$, $M(I_E)$ -оптим.
8	9	9	18	512	1	9216	1	18	1	II	$M(I_A)$, $M(I_D)$, $M(I_E)$ -оптим.

№ плану	n	m	N	$M(I_D(X_D))$	$e^{(M(I_D))}$	$M(I_A(X_A))$	$e^{(M(I_A))}$	$M(I_E(X_E))$	$e^{(M(I_E))}$	Тип моделі	Особливості плану
8	9	9	24	23,888	1	6758,4	1	13,2	1	II	$M(I_A)$, $M(I_D)$, $M(I_E)$ -оптим.
8	9	9	27	5,16	1	5529,6	1	10,8	1	II	$M(I_A)$, $M(I_D)$, $M(I_E)$ -оптим.
9	10	10	10	1048576	1	40960	1	40	1	II	$M(I_A)$, $M(I_D)$, $M(I_E)$ -оптим.
9	10	10	17	8192	1	26624	1	26	1	II	$M(I_A)$, $M(I_D)$, $M(I_E)$ -оптим.
9	10	10	22	368,64	1	18841,6	1	18,4	1	II	$M(I_A)$, $M(I_D)$, $M(I_E)$ -оптим.
9	10	10	25	79,626	1	16384	1	16	1	II	$M(I_A)$, $M(I_D)$, $M(I_E)$ -оптим.
9	10	10	30	6,192	1	12288	1	12	1	II	$M(I_A)$, $M(I_D)$, $M(I_E)$ -оптим.
10	1	2	3	2	1	6	1	5,889	-	I, III	$M(I_A)$, $M(I_D)$ -оптим.
10	1	2	6	0,36	1	2,4	1	2,2	-	I, III	$M(I_A)$, $M(I_D)$ -оптим.
10	1	2	9	0,114	1	1,371	1	1,228	-	I, III	$M(I_A)$, $M(I_D)$ -оптим.
10	1	2	12	0,046	1	0,857	1	0,755	-	I, III	$M(I_A)$, $M(I_D)$ -оптим.

Таблиця А.2.

Характеристики оптимальних планів локалізаційного експерименту на кубі

№ плану	n	m	N	$M(I_D(X_D))$	$e^{(M(I_D))}$	$M(I_A(X_A))$	$e^{(M(I_A))}$	$M(I_E(X_E))$	$e^{(M(I_E))}$	Тип моделі	Особливості плану
11	2	2	2	4	1	8	-	4	-	II	$M(I_D)$ -оптим.
11	2	2	3	2	1	6	-	3	-	II	$M(I_D)$ -оптим.
11	2	2	4	1	1	4	-	2	-	II	$M(I_D)$ -оптим.
11	2	2	6	0,36	1	2,4	-	1,2	-	II	$M(I_D)$ -оптим.
11	2	2	10	0,082	1	1,143	-	0,5714	-	II	$M(I_D)$ -оптим.
12	3	3	3	4	1	24	-	12	-	II	$M(I_D)$ -оптим.
12	3	3	5	1	1	16	-	7,556	-	II	$M(I_D)$ -оптим.
12	3	3	7	0,3	1	10,4	-	4,822	-	II	$M(I_D)$ -оптим.
12	3	3	9	0,108	1	7,2	-	3,3	-	II	$M(I_D)$ -оптим.
12	3	3	12	0,032	1	4,8	-	2,16	-	II	$M(I_D)$ -оптим.
13	4	4	4	1	1	32	-	4	-	II	$M(I_D)$ -оптим.
13	4	4	6	0,25	1	24	-	3	-	II	$M(I_D)$ -оптим.
13	4	4	8	$6,25 \cdot 10^{-2}$	1	16	-	2	-	II	$M(I_D)$ -оптим.
13	4	4	10	$2,25 \cdot 10^{-2}$	1	12,8	-	1,6	-	II	$M(I_D)$ -оптим.
13	4	4	16	$1,6 \cdot 10^{-3}$	1	6,4	-	0,8	-	II	$M(I_D)$ -оптим.
14	5	5	5	0,444	1	71,111	-	4,889	-	II	$M(I_D)$ -оптим.
14	5	5	8	0,056	1	49,778	-	3,482	-	II	$M(I_D)$ -оптим.
14	5	5	10	$1,389 \cdot 10^{-2}$	1	35,556	-	2,42	-	II	$M(I_D)$ -оптим.
14	5	5	15	$1,08 \cdot 10^{-3}$	1	21,333	-	1,444	-	II	$M(I_D)$ -оптим.
14	5	5	20	$1,422 \cdot 10^{-4}$	1	14,222	-	0,96	-	II	$M(I_D)$ -оптим.

№ плану	n	m	N	$M(I_D(X_D))$	$e^{(M(I_D))}$	$M(I_A(X_A))$	$e^{(M(I_A))}$	$M(I_E(X_E))$	$e^{(M(I_E))}$	Тип моделі	Особливості плану
15	6	6	6	0,16	1	153,6	-	5,6	-	II	$M(I_D)$ -оптим.
15	6	6	9	0,002	1	115,2	-	4,178	-	II	$M(I_D)$ -оптим.
15	6	6	12	$2,5 \cdot 10^{-3}$	1	76,8	-	2,756	-	II	$M(I_D)$ -оптим.
15	6	6	18	$1,166 \cdot 10^{-4}$	1	46,08	-	1,64	-	II	$M(I_D)$ -оптим.
15	6	6	24	$1,024 \cdot 10^{-5}$	1	30,72	-	1,088	-	II	$M(I_D)$ -оптим.
16	7	7	7	$4,938 \cdot 10^{-2}$	1	327,11	-	6,667	-	II	$M(I_D)$ -оптим.
16	7	7	10	$6,173 \cdot 10^{-3}$	1	256	-	5,235	-	II	$M(I_D)$ -оптим.
16	7	7	14	$3,858 \cdot 10^{-4}$	1	163,556	-	3,247	-	II	$M(I_D)$ -оптим.
16	7	7	18	$5,0 \cdot 10^{-5}$	1	125,63	-	2,510	-	II	$M(I_D)$ -оптим.
16	7	7	21	$1,08 \cdot 10^{-5}$	1	98,133	-	1,922	-	II	$M(I_D)$ -оптим.
17	8	8	8	$3,906 \cdot 10^{-3}$	1	512	-	4	-	II	$M(I_D)$ -оптим.
17	8	8	12	$2,441 \cdot 10^{-4}$	1	384	-	3	-	II	$M(I_D)$ -оптим.
17	8	8	16	$1,526 \cdot 10^{-5}$	1	256	-	2	-	II	$M(I_D)$ -оптим.
17	8	8	20	$1,978 \cdot 10^{-6}$	1	204,8	-	1,6	-	II	$M(I_D)$ -оптим.
17	8	8	24	$2,563 \cdot 10^{-7}$	1	153,6	-	1,2	-	II	$M(I_D)$ -оптим.
18	9	9	9	$1,276 \cdot 10^{-3}$	1	1175,51	-	5,470	-	II	$M(I_D)$ -оптим.
18	9	9	14	$3,986 \cdot 10^{-5}$	1	851,592	-	3,706	-	II	$M(I_D)$ -оптим.
18	9	9	18	$2,491 \cdot 10^{-6}$	1	587,755	-	2,686	-	II	$M(I_D)$ -оптим.
18	9	9	24	$1,162 \cdot 10^{-7}$	1	434,155	-	1,904	-	II	$M(I_D)$ -оптим.
18	9	9	27	$2,511 \cdot 10^{-8}$	1	352,653	-	1,597	-	II	$M(I_D)$ -оптим.
19	2	4	4	1	1	32	1	4	1	III	$M(I_A)$, $M(I_D)$, $M(I_E)$ -оптим.

№ плану	n	m	N	$M(I_D(X_D))$	$e^{(M(I_D))}$	$M(I_A(X_A))$	$e^{(M(I_A))}$	$M(I_E(X_E))$	$e^{(M(I_E))}$	Тип моделі	Особливості плану
19	2	4	8	$6,25 \cdot 10^{-2}$	1	16	1	2	1	III	$M(I_A)$, $M(I_D)$, $M(I_E)$ -оптим.
19	2	4	16	$1,6 \cdot 10^{-3}$	1	6,4	1	0,8	1	III	$M(I_A)$, $M(I_D)$, $M(I_E)$ -оптим
20	3	7	7	$8,46 \cdot 10^{-2}$	1	346,664	0,984	8,587	-	III	$M(I_D)$ -оптим.
20	3	7	14	$6,61 \cdot 10^{-4}$	1	173,332	0,984	4,118	-	III	$M(I_D)$ -оптим.
20	3	7	21	$1,851 \cdot 10^{-5}$	1	103,99	0,984	2,418	-	III	$M(I_D)$ -оптим.
21	3	7	7	$8,47 \cdot 10^{-2}$	0,999	341,071	1	10,4566	-	III	$M(I_A)$ -оптим
21	3	7	14	$6,62 \cdot 10^{-4}$	0,999	170,536	1	4,943	-	III	$M(I_A)$ -оптим
21	3	7	28	$1,084 \cdot 10^{-6}$	0,999	68.214	1	1886	-	III	$M(I_A)$ -оптим
22	2	5	5	35,768	1	264,896	0,97	31,828	0,693	IV	$M(I_D)$ -оптим.
22	2	5	10	1,118	1	132,448	0,86	15,065	0,651	IV	$M(I_D)$ -оптим.
22	2	5	20	$1,14 \cdot 10^{-2}$	1	52,979	0,892	5,755	0,614	IV	$M(I_D)$ -оптим.
23	2	5	5	37,486	0,954	257,052	1	24,918	0,884	IV	$M(I_A)$ -оптим
24	2	5	15	0,155	0,56	60,392	1	6,127	0,902	IV	$M(I_A)$ -оптим
25	2	5	5	51,079	0,7	271,167	0,94	22,045	1	IV	$M(I_E)$ -оптим
25	2	5	10	1,596	0,7	135,583	0,839	9,813	1	IV	$M(I_E)$ -оптим
26	2	5	20	$1,63 \cdot 10^{-2}$	0,669	54,232	0,872	3,538	1	IV	$M(I_E)$ -оптим
27	1	3	3	16	1	48	-	20	-	IV, V	$M(I_D)$ -оптим.
27	1	3	4	8	1	32	-	13,333	-	IV, V	$M(I_D)$ -оптим.
27	1	3	6	2	1	24	-	9,556	-	IV, V	$M(I_D)$ -оптим.
27	1	3	10	0,288	1	11,2	-	4,4	-	IV, V	$M(I_D)$ -оптим.
27	1	3	15	$4,665 \cdot 10^{-2}$	1	6,857	-	2,603	-	IV, V	$M(I_D)$ -оптим.

№ плану	n	m	N	$M(I_D(X_D))$	$e^{(M(I_D))}$	$M(I_A(X_A))$	$e^{(M(I_A))}$	$M(I_E(X_E))$	$e^{(M(I_E))}$	Тип моделі	Особливості плану
28	2	6	6	15,34	1	539,81	-	30,760	-	V	$M(I_D)$ -оптим.
28	2	6	9	1,918	1	321,76	-	18,540	-	V	$M(I_D)$ -оптим.
28	2	6	12	0,240	1	269,9	-	14,608	-	V	$M(I_D)$ -оптим.
28	2	6	15	$5,177 \cdot 10^{-2}$	1	182,68	-	10,039	-	V	$M(I_D)$ -оптим.
28	2	6	18	$1,118 \cdot 10^{-2}$	1	161,94	-	8,534	-	V	$M(I_D)$ -оптим.
29	3	10	10	0,646	1	8004,91	-	36,249	-	V	$M(I_D)$ -оптим.
29	3	10	15	$2,018 \cdot 10^{-2}$	1	5120,72	-	20,952	-	V	$M(I_D)$ -оптим.
29	3	10	20	$6,308 \cdot 10^{-4}$	1	4002,45	-	16,979	-	V	$M(I_D)$ -оптим.
29	3	10	25	$4,905 \cdot 10^{-5}$	1	2848,78	-	11,383	-	V	$M(I_D)$ -оптим.
29	3	10	30	$3,814 \cdot 10^{-6}$	1	2401,47	-	9,844	-	V	$M(I_D)$ -оптим.
30	4	15	15	$7,278 \cdot 10^{-4}$	1	279687	-	55,805	-	V	$M(I_D)$ -оптим.
30	4	15	20	$2,275 \cdot 10^{-5}$	1	243634	-	43,149	-	V	$M(I_D)$ -оптим.
30	4	15	25	$7,108 \cdot 10^{-7}$	1	225189	-	32,016	-	V	$M(I_D)$ -оптим.
30	4	15	30	$2,221 \cdot 10^{-8}$	1	139844	-	25,75	-	V	$M(I_D)$ -оптим.
30	4	15	40	$1,343 \cdot 10^{-10}$	1	98327	-	17,184	-	V	$M(I_D)$ -оптим.
30	4	15	45	$1,044 \cdot 10^{-11}$	1	83906	-	14,805	-	V	$M(I_D)$ -оптим.

А.2. Транспоновані матриці оптимальних планів локалізаційного експерименту

1.	2.	3.	4.		
Ортогональна (2*2)	Ортогональна (3*3)	Ортогональна (4*4)	Ортогональна (5*5)		
5.	6.	7.	8.		
Ортогональна (6*6)	Ортогональна (7*7)	Ортогональна (8*8)	Ортогональна (9*9)		
9.	10.				
Ортогональна (10*10)	-1	1			
11.	12.	13.	14.		
1 1	1 1 1	1 1 -1	1 1 1 -1 1 -1		
1 -1	1 1 -1	-1 1 -1	-1 1 1 1 -1 1		
	-1 1 -1	-1 -1 -1	1 1 -1 1 -1 -1		
		1 -1 -1	-1 1 -1 -1 -1 1		
			-1 1 -1 -1 -1		
15.	16.				
1 1 1 1 1 1	1 1 1 -1 -1 1 -1				
-1 -1 -1 -1 1 1	1 1 1 1 1 1 1				
-1 -1 -1 1 1 -1	1 -1 -1 -1 -1 1 1				
-1 1 1 -1 1 -1	1 -1 -1 -1 1 1 -1				
-1 -1 1 1 -1 1	1 -1 1 1 -1 1 -1				
-1 1 -1 1 -1 1	1 1 -1 1 -1 -1 -1				
<hr/>					
* 1 1 1	2 2	2 N=9	1 -1 1 -1 1 -1 1		
<hr/>					
* 1 1 1	1 1	2 2	2 N= 10		
<hr/>					
* 3 2 2	2 3 3	3 N= 18			

17.

1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	-1
-1	1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1	1	1	-1	-1	1	-1	-1
-1	1	1	-1	1	1	1	1	1	1	1	-1	1	1	1	1	1
-1	1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1
1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	1
1	1	-1	1	1	-1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	1	1
1	1	1	-1	1	-1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	-1	1
1	1	1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	1

18.

-1	1	1	1	-1	-1	1	-1	1
----	---	---	---	----	----	---	----	---

N= 14 * 2 1 1 1 1 2 2 2 2

N= 24 * 3 2 2 2 3 3 3 3 3

19.

1	-1	-1	1	0,999	-0,533	-1	-1	0,999	1	-1
-1	1	-1	1	0,999	0,999	-1	-1	0,533	-1	1
				0,533	-0,999	1	-1	-0,999	1	1

20.

21.

1	-0,528	-1	-1	1	1	-1	1	1	-1	-1	0,386
1	1	-1	-1	-0,528	-1	1	1	-0,227	0,227	-1	-0,386
0,528	-1	1	-1	-1	1	1					

22.

23.

1	-0,215	-1	0,985	0,25	1	0,362	-1	-0,539	-0,032
1	1	0,218	-1	-0,25	-0,55	1	0,36	-1	-0,069

24.

25.

1	-0,162	-1	-0,833	0,044
0,833	1	0,163	-1	-0,044

26.

1	-1	0,162	-0,044	0,833
0,162	0,833	1	-0,044	-1

27.

	1	-1	0	
* 1	1	1	2	N=4
* 3	3	3	4	N=10
** 1	1	1	2	N=4
** 3	3	3	4	N=10

28.

	1	-1	-1	0,4	1	-0,099	
	1	1	-1	-1	-0,4	0,099	
* 1	1	1	1	2	2	2	N=9
* 2	2	2	2	3	3	3	N=15
** 1	1	1	1	2	2	2	N=9
** 2	2	2	2	3	3	3	N=15

29.

	1	1	1	-1	0,3	-1	-1	-0,2	-0,2	1	
	-1	1	1	1	-1	0,3	-1	1	-0,2	0,2	
	-1	-1	1	-1	1	1	-0,3	0,2	-1	0,2	
* 1	1	1	2	2	1	1	1	2	2	2	N=15
* 2	2	2	3	3	2	2	2	3	3	3	N=25
** 1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	N=15
** 2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	N=25

30.

	1	-1	-1	-0,25	1	0	0	1	-1	1	-1	1	-1	-0,5	1
	-1	1	-1	1	1	-0,25	-1	1	1	-0,25	-0,25	-1	-1	1	1
	0	-1	1	0,25	1	-1	1	-1	1	1	0	-1	-1	-1	0,5
	-1	-1	-1	-0,25	-1	-1	1	-0,5	1	0	1	1	0	1	1

Примітка:

* - розподіл частот для забезпечення найменшого значення $M(I_E)$ - критерія (N1,N2,...,Nm).**- розподіл частот для забезпечення найменшого значення $M(I_A)$ - критерія (N1,N2,...,Nm).

Наукове видання

Дивак Микола Петрович

**ЗАДАЧІ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ
СТАТИЧНИХ СИСТЕМ З ІНТЕРВАЛЬНИМИ ДАНИМИ**

Монографія

Редактор: *І. Калачик*
Комп'ютерне макетування: *В. Шпак*
Дизайн обкладинки: *М. Одобецька*

Підписано до друку 25.08.2011 р.
Формат 60x84/16. Папір офсетний.
Друк офсетний. Зам. № 2-1537
Умов.-друк. арк. 13,21. Обл.-вид. арк 14,10.
Тираж 300 прим.

Видавництво Тернопільського національного
економічного університету «Економічна думка»
46000, Тернопіль, вул. Львівська, 3, тел. 47-58-72
E-mail: edition@tane.edu.ua

*Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до державного реєстру видавців ДК № 3467 від 23.04.2009 р.*

Віддруковано ФО-П Шпак В. Б.
Свідоцтво платника податку: Серія Е № 897220
Свідоцтво про державну реєстрацію В02 № 924434 від 11.12.2006 р.
м. Тернопіль, вул. Просвіти, 6.
тел. 8 097 299 38 99, 422-388
E-mail: tooums@ukr.net