Збірник праць Інституту математики НАН України 2006, т. 3, № 1, 7–24

УДК 517.925.51

А.М. Алілуйко, О.Г. Мазко

Ін–т математики НАН України, Київ
E-mail: aliluyko@imath.kiev.ua, mazko@imath.kiev.ua

Стійкість та стабілізація диференціальних систем другого порядку *

Algebraic methods for stability analysis of linear second order differential systems are develop on the basis of matrix equations and inequalities. Stability conditions are formulated by means of solutions of the generalized spectral problem and in terms of matrix system coefficients. As a corollary the known technique of stability analysis of differential rotor models is develops in view of structure of matrix coefficients. The stabilization algorithm is offered for a class of differential second order systems.

Развиваются алгебраические методы исследования устойчивости линейных дифференциальных систем второго порядка на основе матричных уравнений и неравенств. Формулируются условия устойчивости с помощью решений обобщенной спектральной задачи и в терминах матричных коэффициентов системы. В качестве следствия развивается известная методика анализа устойчивости дифференциальных моделей роторных систем с учетом структуры матричных коэффициентов. Предлагается алгоритм стабилизации класса дифференциальных систем второго порядка.

0. Вступ. Математичними моделями різноманітних фізичних об'єктів є диференціальні системи рівнянь другого порядку, що подаються у вигляді

$$A(t)x + B(t)\dot{x} + C(t)\ddot{x} = f(u,t), \quad t \geq 0, \tag{1}$$

* Робота виконана при частковій підтримці НДР № 0105U001108

де $x \in R^n$ — вектор узагальнених координат, $u \in R^r$ — вектор керування, A, B і C — матриці розміру $n \times n$. В моделях механіки матриця C характеризує інерційні властивості системи, B — матриця дисипативних і гіроскопічних сил, A — матриця потенціальних та неконсервативних сил, а функція f описує вплив зовнішніх сил на динаміку системи.

До основних практичних задач стосовно системи (1) відносяться розробка критеріїв стійкості положення рівноваги та побудова систем стабілізації у вигляді зворотного зв'язку $u = -L_0(t)x - L_1(t)\dot{x}$ або динамічного регулятора типу $R_0(t)u + R_1(t)\dot{u} = g(x,t)$. При цьому замкнута система зводиться до аналогічного вигляду.

Задачам аналізу стійкості і синтезу стабілізуючих регуляторів для диференціальних систем другого порядку присвячена велика кількість робіт. При дослідженні умов стійкості систем (1) застосовуються методи функцій Ляпунова та їх матричні інтерпретації, в яких враховуються структура матричних коефіцієнтів A, B і C (див., наприклад, [1, 2, 3]).

В даній роботі розвиваються алгебраїчні методи дослідження стійкості лінійних диференціальних систем другого порядку на основі матричних рівнянь та нерівностей. Формулюються умови стійкості за допомогою розв'язків узагальненої спектральної задачі та в термінах матричних коефіцієнтів системи. Як наслідок, розвивається відома методика аналізу стійкості диференціальних моделей роторних систем із урахуванням структури матричних коефіцієнтів. Будується клас регуляторів, що стабілізують диференціальну систему другого порядку.

1. Узагальнена спектральна задача. Розглянемо автономну диференціальну систему другого порядку

$$Ax + B\dot{x} + C\ddot{x} = 0, \quad t \geq 0, \tag{2}$$

де незалежні від часу матричні коефіцієнти $A, B, C \in C^{n\times n}$ визначають регулярний квадратичний пучок $F(\lambda) = A + \lambda B + \lambda^2 C$.

Означення. Матриці $U \in C^{m\times m}$ і $T \in C^{m\times n}$ складають ліву власну пару (U, T) квадратичного пучка $F(\lambda)$, якщо виконуються співвідношення

$$TA + UTB + U^2TC = 0, \quad \operatorname{rank}[T, UT] = m. \tag{3}$$

Якщо при цьому m набуває максимально можливе значення, то власна пара (U, T) є максимальною.

Співвідношення (3) визначають узагальнену ліву спектральну задачу для квадратичного пучка $F(\lambda)$. Аналогічно формулюється узагальнена права спектральна задача. Відомо, що спектр матриці U в (3) є підмножиною спектра $\sigma(F)$ [4]. Зокрема, для максимальної власної пари (U, T) маємо $\sigma(U) = \sigma(F)$.

Подамо систему (2) у вигляді

$$\hat{A}y - \hat{B}\dot{y} = 0, \quad \hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -A & -B \end{bmatrix}, \ \hat{B} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}, \ y = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Спектр лінійного пучка $\hat{F}(\lambda) = \hat{A} - \lambda\hat{B}$ співпадає з $\sigma(F)$, а співвідношення (3) зводяться до вигляду

$$E\hat{A} - UE\hat{B} = 0, \quad \operatorname{rank} E = m, \quad E = [TB + UTC, T]. \quad (5)$$

При побудові власних пар пучків $F(\lambda)$ і $\hat{F}(\lambda)$ можна використовувати розв'язки алгебраїчної системи

$$\hat{A}Z\hat{B} = \hat{B}Z\hat{A}, \quad Z = Z\hat{B}Z. \quad (6)$$

Матриця Z в (6) має наступну структуру

$$Z = \begin{bmatrix} T_1B + T_2C & T_1 \\ -T_1A & T_2 \end{bmatrix},$$

де T_1 і T_2 знаходяться із матричної системи

$$\begin{aligned} AT_1B - BT_1A &= CT_2A - AT_2C, \\ AT_1C - CT_1A &= CT_2B - BT_2C, \\ T_1 &= T_1BT_1 + T_1CT_2 + T_2CT_1, \\ T_2 &= T_2CT_2 - T_1AT_1. \end{aligned}$$

Домножаючи перше рівняння в (6) зліва на Z, згідно з (5) маємо

$$E = Z, \quad U = Z\hat{A} = \begin{bmatrix} -T_1A & T_2C \\ -T_2A & -T_1A - T_2B \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix}.$$

У випадку, коли матриця C невироджена, можна покласти $T_1 = 0$ і $T_2 = C^{-1}$. Тоді

$$E = \hat{B}^{-1}, \quad U = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -C^{-1}A & -C^{-1}B \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 0 \\ C^{-1} \end{bmatrix}.$$

Для максимальних власних пар квадратичного пучка матриць за теоремою Ляпунова маємо наступний результат.

Теорема 1. *Нехай* (U,T) *— максимальна ліва власна пара квадратичного пучка матриць* $F(\lambda)$. *Тоді диференціальна система (2) асимптотично стійка в тому і лише в тому випадку, коли існують матриці* $X = X^* > 0$ *і* $Y = Y^* > 0$, *що задовольняють рівняння*

$$U^*X + XU = -Y. \tag{7}$$

При цьому функція Ляпунова визначається у вигляді

$$v(y) = y^*R^*XRy, \quad R = [TB + UTC, TC], \quad y = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}, \tag{8}$$

і на нетривіальних розв'язках системи задовольняє співвідношення

$$v(y) > 0, \quad \frac{dv(y)}{dt} = -y^*R^*YRy < 0.$$

Застосування теореми 1 (як критерія асимптотичної стійкості системи (2)) зводиться до знаходження максимальної власної пари квадратичного пучка матриць і розвязання рівняння Ляпунова (7).

2. Коефіцієнтні умови стійкості. Розглянемо диференціальну систему (2) з невиродженою матрицею C при старших похідних. За теоремою Ляпунова вона є стійкою тоді і тільки тоді, коли існують матриці $X_1 = X_1^* > 0$, $X_2 = X_2^* > 0$ і V, що задовольняють системі нерівностей

$$X = \begin{bmatrix} X_1 & V \\ V^* & X_2 \end{bmatrix} > 0, \quad -\hat{A}^*X\hat{B} - \hat{B}^*X\hat{A} = Y \geq 0, \tag{9}$$

де блочні матриці $\hat{A}$ і $\hat{B}$ визначені в (4), а матриця Y має наступну структуру

$$Y = \begin{bmatrix} A^*V^* + VA & -X_1 + A^*X_2C + VB \\ -X_1 + C^*X_2A + B^*V^* & B^*X_2C + C^*X_2B - VC - C^*V^* \end{bmatrix}.$$

Співвідношення (9) у випадку $Y > 0$ є критерієм асимптотичної стійкості системи (2).

Припустимо, що C є ермітовою додатно визначеною матрицею і покладемо

$$X_1 = \alpha(A + A^*) + \gamma VCV^*, \quad X_2 = (\alpha + \beta)C^{-1},$$

де α, β і γ — скалярні параметри. Тоді співвідношення (9) мають вигляд

$$\begin{bmatrix} \alpha(A + A^*) + \gamma VCV^* & V \\ V^* & (\alpha + \beta)C^{-1} \end{bmatrix} > 0, \tag{10}$$

$$\begin{bmatrix} A^*V^* + VA & \beta A^* - \alpha A - \gamma VCV^* + VB \\ \beta A - \alpha A^* - \gamma VCV^* + B^*V^* & (\alpha + \beta)(B + B^*) - VC - CV^* \end{bmatrix} \geq 0. \tag{11}$$

Лема 1. *Нехай існують матриця $V \in C^{n\times n}$ і скаляри $\alpha > 0$, $\beta > -\alpha$ і $\gamma > 1/(\alpha + \beta)$, що задовольняють матричну нерівність (11), і виконуються співвідношення*

$$A + A^* \geq 0, \quad C = C^* > 0, \quad \operatorname{rank}[A + A^*, V] = n. \tag{12}$$

Тоді диференціальна система (2) стійка за Ляпуновим. Якщо до того ж в (11) виконується строга нерівність, то система (2) асимптотично стійка.

Доведення. Застосуємо відомий критерій додатної визначеності блочної матриці:

$$\begin{bmatrix} X_1 & V \\ V^* & X_2 \end{bmatrix} > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad X_2 > 0, \quad X_1 > VX_2^{-1}V^*. \tag{13}$$

Тоді матрична нерівність (10) зводиться до наступних умов

$$C > 0, \quad \alpha(A + A^*) + \gamma_1 VCV^* = L \begin{bmatrix} \alpha I & 0 \\ 0 & \gamma_1 C \end{bmatrix} L^* > 0,$$

де $\gamma_1 = \gamma - 1/(\alpha+\beta)$, $L = [A_1, V]$, A_1 — матриця з розкладу невід'ємно визначеної матриці $A + A^* = A_1A_1^*$. Рангове обмеження в (12) еквівалентне рівності $\operatorname{rank} L = n$, яка забезпечує виконання матричної нерівності (10). Зокрема, дане обмеження буде виконуватись, якщо $A + A^* > 0$ або V є невиродженою матрицею.

Отже, виконуються умови (9) і система (2) стійка. Якщо разом з (12) вимагати виконання строгої нерівності (11), то має місце асимптотична стійкість системи. При цьому матриці A і V повинні бути невиродженими.

Лема доведена.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови*

$$A + A^* \geq 0, \quad B + B^* > 0, \quad C = C^* > 0, \tag{14}$$

і для деякого $\xi > 0$

$$\Gamma_\xi = \xi^2 P + \xi R + Q \geq 0 \ (> 0), \tag{15}$$

де

$$P = -(A + A^*)(B + B^*)^{-1}(A + A^*),$$
$$R = 2(A + A^*)(B + B^*)^{-1}A + 2A^*(B + B^*)^{-1}(A + A^*),$$
$$Q = A^*C^{-1}B + B^*C^{-1}A - 4A^*(B + B^*)^{-1}A.$$

Тоді диференціальна система (2) стійка (асимптотично стійка).

Доведення. Покладемо в лемі 1 $V = \gamma^{-1}B^*C^{-1}$. Згідно з (14) B є невиродженою матрицею і виконуються умови (12).

Матрична нерівність (11) зводиться до вигляду

$$\begin{bmatrix} \gamma^{-1}(A^*C^{-1}B + B^*C^{-1}A) & \beta A^* - \alpha A \\ \beta A - \alpha A^* & (\alpha + \beta - \gamma^{-1})(B + B^*) \end{bmatrix} \geq 0.$$

Застосуємо до неї узагальнення критерію (13) у випадку невиродженого блока X_2:

$$\begin{bmatrix} X_1 & V \\ V^* & X_2 \end{bmatrix} \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad X_2 > 0, \quad X_1 \geq V X_2^{-1} V^*. \tag{16}$$

Отримаємо нерівність

$$\delta(A^*C^{-1}B + B^*C^{-1}A) \geq (\alpha A - \beta A^*)(B + B^*)^{-1}(\alpha A^* - \beta A),$$

де $\delta = \gamma^{-1}(\alpha + \beta - \gamma^{-1})$, $0 < \delta \leq (\alpha + \beta)^2/4$.

Візьмемо найбільше значення $\delta = (\alpha + \beta)^2/4$, яке досягається при $\gamma = 2/(\alpha + \beta)$, і перепишемо останню нерівність у вигляді

$$A^*C^{-1}B + B^*C^{-1}A \geq (\xi A - \eta A^*)(B + B^*)^{-1}(\xi A^* - \eta A),$$

де $\xi = 2\alpha/(\alpha + \beta) > 0$, $\eta = 2\beta/(\alpha + \beta)$. Враховуючи, що $\xi + \eta = 2$, приходимо до виразу (15).

Отже, згідно з лемою 1, система (2) при умовах (14) стійка (асимптотично стійка), якщо в (15) виконується нерівність $\geq$ ($>$).

Теорема доведена.

Зауважимо, що матричну нерівність $\Gamma_\xi > 0$ завжди можна задовольнити шляхом вибору параметра $\xi > 0$, якщо $Q > 0$.

Наслідок 1. *Якщо разом з (14) виконується одна із наступних умов*

$$A^*C^{-1}B + B^*C^{-1}A > (A^* - A)(B + B^*)^{-1}(A - A^*), \qquad (17)$$

$$A^*C^{-1}B + B^*C^{-1}A > 4A(B + B^*)^{-1}A^*, \qquad (18)$$

$$\lambda_{min}(Q) \leq 0, \quad \lambda_{min}(R) > 2\sqrt{\lambda_{min}(P)\,\lambda_{min}(Q)}, \qquad (19)$$

де $\lambda_{min}(\cdot)$ *— найменше власне значення ермітової матриці, то диференціальна система (2) асимптотично стійка.*

Останнє твердження з умовами (17) і (18) випливає із теореми 2 відповідно при $\xi = 1$ і $\xi = 2$. Матрична нерівність $\Gamma_\xi > 0$ при деякому $\xi > 0$ є наслідком умов (19), оскільки для довільного вектора $x \in C^n$ з нормою 1 виконується нерівність

$$x^*\Gamma_\xi x \geq \lambda_{min}(P)\,\xi^2 + \lambda_{min}(R)\,\xi + \lambda_{min}(Q),$$

де, згідно з (14), $\lambda_{min}(P) \leq 0$.

3. Роторні системи. Вільні коливання широкого класу роторних систем описуються диференціальними рівняннями типу

$$\begin{bmatrix} K & S \\ -S & K \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} D & G \\ -G & D \end{bmatrix} \dot{y} + \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \ddot{y} = 0, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \qquad (20)$$

де $M = M^T > 0$ — матриця мас, $D = D^T \geq 0$, — матриця демпфування, $G = G^T \geq 0$ — гіроскопічна матриця, $K = K^T > 0$ — матриця жорсткості, $S = S^T \geq 0$ — циркуляторна матриця, $y \in R^{2n}$ — вектор узагальнених координат (див., наприклад, [3]). Дійсна вектор-функція $y(t)$ є розв'язком системи (20) тоді і тільки тоді, коли комплексна вектор-функція $x(t) = y_1(t) - iy_2(t)$ задовольняє диференціальну систему

$$(K + iS)x + (D + iG)\dot{x} + M\ddot{x} = 0, \quad x \in C^n. \qquad (21)$$

При дослідженні системи (21) будемо враховувати наступні співвідношення

$$D = D_0 + D_1, \quad G = \omega G_0, \quad S = \omega D_0,$$

де D_0 і D_1 — складові внутрішнього та зовнішнього демпфувань, ω — кутова швидкість обертання ротора. Одна з важливих задач полягає у знаходженні критичної кутової швидкості ω_c такої, що при $0 \leq \omega < \omega_c$ система (21) асимптотично стійка, а при $\omega = \omega_c$ дана властивість системи втрачається.

Враховуючи припущення, перепишемо умови (14) і (15) теореми 2 у вигляді

$$K \geq 0, \quad D > 0, \quad M > 0, \tag{22}$$

$$\Gamma_\xi(\omega) = \omega^2 P_\xi + \omega R_\xi + Q_\xi > 0, \tag{23}$$

де

$$P_\xi = D_0 M^{-1} G_0 + G_0 M^{-1} D_0 - 2 D_0 D^{-1} D_0,$$

$$R_\xi = i \left[D M^{-1} D_0 - D_0 M^{-1} D + K M^{-1} G_0 - G_0 M^{-1} K + \right.$$

$$\left. + 2(\xi - 1)(K D^{-1} D_0 - D_0 D^{-1} K) \right],$$

$$Q_\xi = K M^{-1} D + D M^{-1} K - 2(\xi - 1)^2 K D^{-1} K.$$

Співвідношення (22), (23) і теорема 2 дають можливість обчислювати критичне значення ω_c. Якшо $Q_\xi > 0$, то ω_c є найменше дійсне додатне власне значення квадратичного пучка $\Gamma_\xi(\omega)$ з ермітовими матричними коеффіцієнтами.

Приклад 1. Найпростіша модель роторної системи має вигляд

$$(k + i\,\omega\, p)\, x + (d + i\,\omega\, g)\, \dot{x} + m\, \ddot{x} = 0, \tag{24}$$

де x описує зміщення центра маси m в площині, перпендикулярній невогомому стержню з коефіцієнтом пружності $k > 0$, ω — кутова швидкість обертання ротора, що породжує гіроскопічну силу ωg, p і q — відповідно внутрішнє та зовнішнє демпфування, $d = p + q > 0$. Ця модель описує так званий ротор Лаваля.

Достатні умови асимптотичної стійкості системи (24) згідно з (22) і (23) мають вигляд

$$p\,(g\,d - p\,m)\,\omega^2 + k\,d^2 > (\xi - 1)^2 m\,k^2, \quad \xi > 0.$$

Отже, критичне значення ω_c задовольняє умову

$$\omega_c^2 = \frac{k\,[d^2 - (\xi-1)^2 m\,k]}{p\,(p\,m - g\,d)} > 0.$$

Якщо параметр ξ належить інтервалу

$$\max\left\{0, 1 - \frac{d}{\sqrt{m\,k}}\right\} \le \xi \le 1 + \frac{d}{\sqrt{m\,k}},$$

то у випадку $p\,m \le g\,d$ система асимптотично стійка при довільній кутовій швидкості ω. Найбільш слабкі обмеження на коефіцієнти системи у наведених умовах асимптотичної стійкості відповідають значенню параметра $\xi = 1$.

Приклад 2. Розглянемо роторну систему (21) з матричними коефіцієнтами

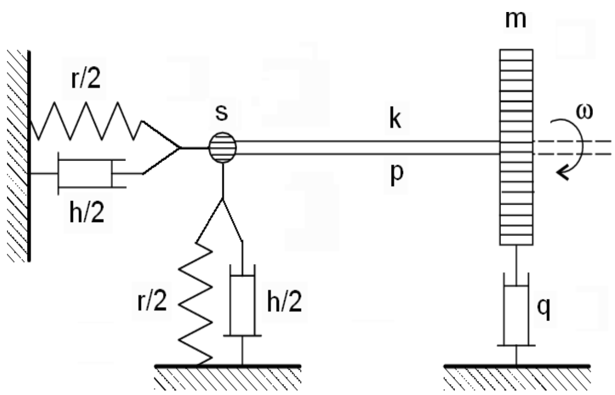

Рис. 1: Ротор Лаваля.

$$M = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} d & -p \\ -p & p+h \end{bmatrix},$$
$$K = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k+r \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} \omega\,p & -\omega\,p \\ -\omega\,p & \omega\,p \end{bmatrix}, \tag{25}$$

де x_1 і x_2 характеризують зміщення центрів відповідно головної маси m і додаткової маси s, h і r — відповідно демпфування та коефіцієнт пружності на опорах. Значення інших параметрів таке ж саме, як і в прикладі 1, причому, гіроскопічні сили не враховуються (G=0). Ця модель ротора схематично зображена на рис. 1.

Для встановлення достатніх умов асимптотичної стійкості системи скористаємось теоремою 2 та її наслідком. Умови (22) і (23) зводяться до вигляду

$$d\,h + p\,q > 0, \quad a_0\,\omega^2 + a_1(\xi) > 0, \quad b_0(\xi)\,\omega^2 + b_1(\xi) > 0, \tag{26}$$

де

$$a_0 = -m\,s\,p^2(h+q),$$
$$a_1(\xi) = k\,(d\,h + p\,q)(m\,p + d\,s) - (\xi-1)^2\,m\,s\,k^2(h+q),$$
$$b_0(\xi) = p^2\,[2\,p\,s\,m\,h\,q^2 + 2\,p\,q\,s\,m\,h^2 + 2\,m\,s\,q^2h^2 - 4\,q\,s\,r\,h\,m^2 - 4\,s\,r\,m^2h^2 -$$
$$-d\,m^2h^3 - p\,s^2q^3 - h\,s^2q^3 - p\,h\,q^2s^2 - p\,q\,m^2h^2 +$$
$$+4(\xi-1)\,s\,m\,q\,r\,(s\,q - m\,h) + 4(\xi-1)^2\,m^2s^2r^2],$$
$$b_1(\xi) = (d\,h + p\,q)(2\,p\,k\,s\,m\,r\,q + 2\,p\,m^2k\,r\,h + 2\,q\,k^2s\,m\,h +$$
$$+4\,d\,k\,s\,m\,r\,h - p^2m^2r^2 - q^2k^2s^2 - m^2k^2h^2) -$$
$$-4(\xi-1)^2\,m\,s\,k\,r\,(s\,k\,q^2 + s\,r\,d^2 + m\,k\,h^2 + m\,r\,p^2).$$

Умови (26) описують область асимптотичної стійкості в просторі параметрів системи (20), (25). Вони дають можливість аналітично оцінити критичну кутову швидкість обертання ротора ω_c.

Чисельні розрахунки проводились при наступних значеннях коефіцієнтів

$$(a):\ \ m=1,\ \ s=0.1,\ \ p=1,\ \ q=5,\ \ h=10,\ \ k=100,\ \ r=400;$$

$$(b):\ \ m=0.5,\ \ s=0.1,\ \ p=1,\ \ q=5,\ \ h=10,\ \ k=10,\ \ r=50.$$

На рисунках 2 і 3 зображена відповідна залежність від параметра ξ найменшої кутової швидкості ω, при якій порушуються умови (26). У випадку (a) її максимальне значення $\omega_{max} = 40.06$ досягається в околі точки $\xi = 1$. При цьому $\omega_{max} = 0.44\,\omega_c$, де $\omega_c = 92$ — відоме значення критичної кутової швидкості [3]. Випадок (b) демонструє той факт, що максимальне значення ω_{max} може досягатись при $\xi \neq 1$. Це означає, що умови стійкості, представлені теоремою 2, узагальнюють і посилюють аналогічний результат роботи [3].

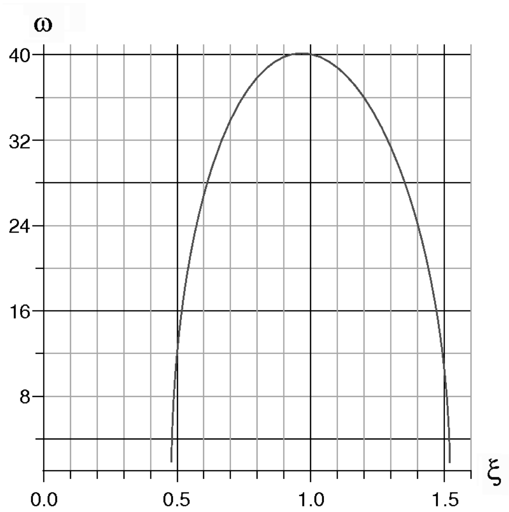

Рис. 2: Залежність ω від ξ у випадку (a).

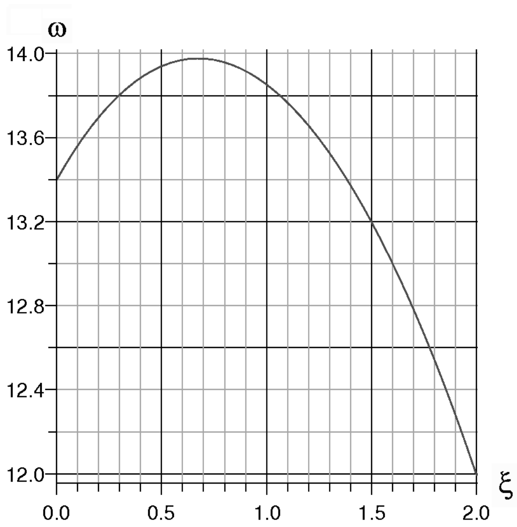

Рис. 3: Залежність ω від ξ у випадку (b).

Слід відмітити, що побудовані в параграфі 2 коефіцієнтні умови стійкості системи (2) можна застосовувати для більш складних фізичних моделей типу (1), коли елементи матриць $A(t)$, $B(t)$ і $C(t)$ є неперервними функціями часу $t \geq 0$.

4. Побудова стабілізуючого керування. В задачах стабілізації та розподілу спектра лінійних систем застосовуються методи, що зводяться до розв'язування лінійних матричних нерівностей (див., наприклад, [5, 6, 7]). Розвинемо аналогічну методику стабілізації диференціальних систем другого порядку.

Нехай модель керованої системи має вигляд

$$Ax + B\dot{x} + C\ddot{x} = Fu, \tag{27}$$

де x — n-вектор стану системи, u — l-вектор керування, A, B, C і F — відомі матриці відповідних розмірів. Задача стабілізації системи полягає в тому, щоб знайти матричні коефіцієнти L_0 і L_1 зворотного зв'язку

$$u = -L_0 x - L_1 \dot{x}, \tag{28}$$

що забезпечує асимптотичну стійкість замкнутій системі

$$(A + FL_0)x + (B + FL_1)\dot{x} + C\ddot{x} = 0.$$

Перепишемо систему (27) у вигляді

$$E\dot{y} = My + Ru, \quad u = -Ly, \quad y = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}, \tag{29}$$

де

$$E = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}, \; M = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -A & -B \end{bmatrix}, \; R = \begin{bmatrix} 0 \\ F \end{bmatrix}, \; L = [L_0, L_1].$$

Будемо вважати, що матриця C невироджена, а матриця F має повний ранг $l \leq n$. За теоремою Ляпунова система (29) асимптотично стійка тоді і тільки тоді, коли для деякої матриці $X = X^* > 0$ виконується нерівність

$$-(M - RL)XE^* - EX(M - RL)^* > 0.$$

Побудуємо матрицю зворотного зв'язку у вигляді

$$L = \tau \Psi R^* E^{-1^*} X^{-1}. \tag{30}$$

Для знаходження матриць Ψ, X і скаляра τ маємо нерівність

$$MXE^* + EXM^* < \tau R(\Psi + \Psi^*)R^*. \qquad (31)$$

Останню нерівність можна задовольнити шляхом вибору параметрів X, Ψ і τ лише тоді, коли сумісна система співвідношень

$$R^{\perp *} Y R^{\perp} < 0, \quad MXE^* + EXM^* = Y. \qquad (32)$$

де $R^{\perp}$ — ортогональне доповнення матриці R, тобто матриця розмірів $2n \times (2n - m)$, що задовольняє умови

$$R^* R^{\perp} = 0, \quad \det T \neq 0, \quad T = [R, R^{\perp}].$$

Дійсно, помноживши нерівність (31) зліва і справа відповідно на T^* і T, отримаємо еквівалентну нерівність у блочному вигляді

$$\begin{bmatrix} -R^*YR + \tau R^*R(\Psi + \Psi^*)R^*R & -R^*YR^{\perp} \\ -R^{\perp *}YR & -R^{\perp *}YR^{\perp} \end{bmatrix} > 0. \qquad (33)$$

Другий діагональний блок повинен бути додатно визначеним, тобто необхідна нерівність (32). Навпаки, якщо виконується нерівність (32), то, згідно з (13), блочна нерівність (33) зводиться до вигляду

$$\Phi(\tau) = \tau R^*R(\Psi + \Psi^*)R^*R - R^*YR + R^*YR^{\perp}(R^{\perp *}YR^{\perp})^{-1}R^{\perp *}YR > 0.$$

Якщо, наприклад, $\Psi + \Psi^* > 0$, то останнє співвідношення виконується при $\tau > \lambda_{max}(\Phi)$, де $\lambda_{max}(\Phi)$ — максимальне власне значення лінійного пучка матриць $\Phi(\lambda)$.

Якщо $l < n$, то, використовуючи блочну структуру матриць E, M і F, покладемо

$$R^{\perp} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & F^{\perp} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} P & V \\ V^* & Q \end{bmatrix},$$

де $F^{\perp}$ — ортогональне доповнення матриці F. Тоді матриця Y в (32) має вигляд

$$Y = \begin{bmatrix} V + V^* & QC^* - PA^* - VB^* \\ CQ - AP - BV^* & -AVC^* - CV^*A^* - BQC^* - CQB^* \end{bmatrix}$$

і при побудові матриці (30) необхідно знайти лише другу блочну стрічку оберненої матриці в формулі Фробеніуса

$$X^{-1} = \begin{bmatrix} P^{-1} + P^{-1}V\Delta^{-1}V^*P^{-1} & -P^{-1}V\Delta^{-1} \\ -\Delta^{-1}V^*P^{-1} & \Delta^{-1} \end{bmatrix},$$

де $\Delta = Q - V^*P^{-1}V$. Знову застосуємо критерій (13) до матриці $-R^{\perp *}YR^{\perp}$ і у випадку $l < n$ сформулюємо наступний результат.

Теорема 3. *Нехай виконується система матричних нерівностей*

$$\Psi + \Psi^* > 0, \quad V + V^* < 0, \quad P = P^* > 0, \quad \Delta > 0, \tag{34}$$

$$\begin{gathered} F^{\perp *}\left[BQC^* + CQB^* + AVC^* + CV^*A^* + \right.\\ \left. + (AP - CQ + BV^*)(V + V^*)^{-1}(PA^* - QC^* + VB^*)\right] F^{\perp} > 0. \end{gathered} \tag{35}$$

Тоді керування (28) з матрицями коефіцієнтів

$$L_0 = -L_1V^*P^{-1}, \quad L_1 = \tau\Psi F^* C^{-1*}\Delta^{-1}, \quad \tau > \lambda_{max}(\Phi), \tag{36}$$

забезпечує асимптотичну стійкість системі (27).

Згідно з теоремою 3 можна побудувати наступний алгоритм стабілізації системи (27):

1) вибрати довільні матриці Ψ, V і P, що задовольняють умови (34);
2) обчислити матрицю ортогонального доповнення $F^{\perp}$;
3) знайти матрицю $Q > V^*P^{-1}V$, що задовольняє нерівність (35);
4) обчислити максимальне власне значення пучка $\lambda_{max}(\Phi)$;
5) обчислити матриці зворотного зв'язку (36).

Зауваження 1. Якщо $l = n$, то можна покласти $R^{\perp} = [I, 0]^T$. Тоді $R^{\perp *}YR^{\perp} = -V - V^*$ і твердження теореми 3 виконується, якщо з неї виключити нерівність (35). В цьому випадку спрощується також наведений алгоритм: виключається п. 2), а в п. 3) достатньо лише вибрати матрицю $Q > V^*P^{-1}V$.

Зауваження 2. Побудований алгоритм керування гарантує асимптотичну стійкість замкнутій системі, якщо параметр $\tau > \lambda_{max}(\Phi)$. Якщо зафіксувати значення всіх інших параметрів, то існує таке $\tau_0 \le \lambda_{max}(\Phi)$, що при $\tau = \tau_0$ система втрачає стійкість, а при $\tau > \tau_0$ є асимптотично стійкою.

Зауваження 3. Запропонований алгоритм стабілізації може бути застосований до деякого класу нестаціонарних моделей керованих систем типу (27).

Приклад 3. Розглянемо керовану роторну систему, що описується у вигляді (27) з матричними коефіцієнтами (див. приклад 2)

$$A = \begin{bmatrix} k + ip\omega & -k - ip\omega \\ -k - ip\omega & k + r + ip\omega \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} d & -p \\ -p & p + h \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}.$$

У випадку (а) система без керування ($u \equiv 0$) з кутовою швидкістю обертання $\omega = 100$ має спектр

$$\{-66.131+46.1i, -44.0177-45.6058i, -6.0460+9.4055i, 0.1955-9.8996i\}$$

і є нестійкою. Встановимо можливість стабілізувати систему за допомогою керування, що впливає лише на рух приєднаної маси s. Для цього покладемо

$$F = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad F^{\perp} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad l = 1 < n = 2.$$

Скористаємося наведеним вище алгоритмом стабілізації. Систему матричних нерівностей (34)-(35) задовольняють наступні значення параметрів:

$$\Psi = 1, \quad V = \begin{bmatrix} -2.07423 & 1.238 \\ -1.66407 & -1.16964 \end{bmatrix},$$

$$P = \begin{bmatrix} 0.66732 & 0.31731 \\ 0.31731 & 0.27749 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 50.75747 & 0.034 \\ 0.034 & 111.66241 \end{bmatrix}.$$

Якщо $\tau = \lambda_{max}(\Phi) + 10^{-6}$, де $\lambda_{max}(\Phi) = 18748$, то коефіцієнти зворотного зв'язку набувають вигляд

$$L_0 = \begin{bmatrix} -1.8665.6 & 32545.8 \end{bmatrix}, \quad L_1 = \begin{bmatrix} 302.73844 & 2226.75121 \end{bmatrix}.$$

При цьому замкнута система має спектр

$$\{-22362.6 + 0.044i, -13.698 + 9.16i, -5.7332 + 0.231i, -1.4807 - 9.435i\}$$

і є асимптотично стійкою. Система втрачає стійкість при $\tau = \tau_0 = 62.05461$ (див. зауваження 2).

На рисунках 4 і 5 зображені процеси зміни модулів $|x_1(t)|$, $|x_2(t)|$, $|\dot{x}_1(t)|$ і $|\dot{x}_2(t)|$ на інтервалі часу [0,2] відповідно для нестійкої розімкнутої та стабілізованої замкнутої роторної системи.

Задача стабілізації системи суттєво спрощується, якщо покласти (див. зауваження 1)

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad l = n = 2.$$

В цьому випадку керування може впливати на рух як маси ротора m, так і приєднаної маси s.

Рис. 4: Перехідні процеси розімкнутої роторної системи з початковими умовами $x_1(0) = 2$, $x_2(0) = 1$, $\dot{x}_1(0) = 1$, $\dot{x}_2(0) = 2$.

Рис. 5: Перехідні процеси замкнутої роторної системи з початковими умовами $x_1(0) = 2$, $x_2(0) = 1$, $\dot{x}_1(0) = 1$, $\dot{x}_2(0) = 2$.

Приклад 4. Розглянемо систему керування (27) з матричними коефіцієнтами

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

В даному випадку $l = 1 < n = 2$. Відповідна система (2) без керування має спектр

$$\{-0.299,\ 1.192,\ -0.485 \pm 0.641i\}$$

і є нестійкою. Для її стабілізації скористаємось наведеним алгоритмом і знайдемо матричні коефіцієнти зворотного зв'язку (36). В результаті отримаємо матриці

$$V = \begin{bmatrix} -1.291 & -0.779 \\ -0.829 & -2.518 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 4.413 & 1.024 \\ 1.024 & 3.648 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 6.6 & 3.466 \\ 3.466 & 4.54 \end{bmatrix},$$

що задовольняють умови (34)–(35), причому,

$$\Psi = 0.5, \quad F^{\perp} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda_{max}(\Phi) = 211.838.$$

Матриці зворотного зв'язку, отримані при $\tau = 211.839$, мають вигляд

$$L_0 = \begin{bmatrix} 0.505 & -7.495 \end{bmatrix}, \quad L_1 = \begin{bmatrix} 2.761 & -11.562 \end{bmatrix}.$$

Відповідна замкнута система має спектр

$$\{-0.828 \pm 0.475i,\ \ -0.333 \pm 1.015i\}$$

і є асимптотично стійкою.

Література

[1] *Seyranian A.P., Mailybaev A.A.* Multiparameter Stability Theory with Mechanical Applications. — New Jersey, London ...: World Scientific, 2003. — Series A, Vol. 13.

[2] *Tisseur F., Meerbergen K.* The Quadratic Eigenvalue Problem. // SIAM Review.— 2001.— **43**, № 2.— P. 235–286.

[3] *Kliem W., Pommer C., Stoustrup J.* Stability of rotor systems: A complex modelling approach. // Z. angew. Math. Phys.— 1998.— **49**.— P. 644–655.

[4] *Мазко А.Г.* Локализация спектра и устойчивость динамических систем // Праці Ін-ту математики НАН України. — Київ: Ін-т математики НАН України, 1999. — **28**. — 216 с.

[5] *Мейлахс А.М.* О синтезе устойчивых систем автоматического регулирования при параметрических возмущениях // Автомат. и телемех.— 1978.— № 10. — С. 5–16.

[6] *Мазко А.Г.* Управление спектральными и оптимальными свойствами линейных систем // Динамика и устойчивость механических систем. — Киев: Ин-т математики АН УССР, 1980. — С. 128–133.

[7] *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Робастная устойчивость и управление. — М.: Наука, 2002. — 303 с.

Розвиваються алгебраїчні методи дослідження стійкості лінійних диференціальних систем другого порядку на основі матричних рівнянь та нерівностей. Формулюються умови стійкості за допомогою розв'язків узагальненої спектральної задачі та в термінах матричних коефіцієнтів системи. Як наслідок, розвивається відома методика аналізу стійкості диференціальних моделей роторних систем із урахуванням структури матричних коефіцієнтів. Пропонується алгоритм стабілізації класу диференціальних систем другого порядку.