УДК 517.44: 004

Волинець* В.І., к.т.н., доцент

Аналіз точності рекурентних методів обчислення багатовимірних дискретних перетворень Фур'є та Хартлі в арифметиці з плаваючою комою

На основі статистичного методу проведено аналіз точності рекурентних методів обчислення звичайних і модифікованих багатовимірних дискретних перетворень Фур'є та Хартлі на стрибкових і ковзних інтервалах за всіма та одним виміром в арифметиці з плаваючою комою. Отримано аналітичні вирази для визначення точності обчислення перетворень в залежності від розрядності даних та кількості ітерацій обчислення, на підставі яких проведено порівняльний аналіз точності рекурентних методів обчислення.

Ключові слова: аналіз, точність, метод, обчислення.

V.I. Volynets*, Ph. D.

Exactness analysis of recurrent methods of calculation of multidimensional discrete Fourier and Hartley transforms in floating point arithmetic

On the basis of statistical method the exactness analysis of recurrent methods of calculation of ordinary and modified multidimensional discrete Fourier and Hartley transforms on skipping and sliding intervals on all and one measuring in floating point arithmetic is executed. Analytical expressions for determination of exactness of calculation of transforms depending on the bit capacity of data and amount of iterations of calculation are obtained, on the basis of which the comparative exactness analysis of recurrent methods of calculation is executed.

Key Words: analysis, exactness, method, calculation.

*E-mail: victvol@mail.ru
Статтю представив д.ф.-м.н. Ніколюк П.К.

В основі динамічного спектрального аналізу багатовимірних сигналів, який проводиться на ковзних або стрибкових інтервалах вхідного сигналу, тобто коли черговий фрагмент вхідного сигналу відрізняється від попереднього фрагменту відповідно на одну або декілька груп відліків за одним або всіма вимірами, лежить використання рекурентних методів обчислення багатовимірних дискретних перетворень Фур'є (ДПФ) та Хартлі (ДПХ) [1-3], арифметична складність яких значно нижча за складність прямих та швидких методів обчислення дискретних перетворень, оскільки рекурентні методи враховують результати обчислення на попередніх інтервалах вхідного сигналу.

Важливим критерієм вибору методу обчислення є точність обчислення, яку він забезпечує. У праці [4] проведений аналіз точності рекурентних методів обчислення одновимірних звичайних і модифікованих ДПФ і ДПХ в арифметиці з плаваючою комою, в основу якого покладений статистичний метод аналізу, при якому кожному джерелу елементарної похибки, що виникає внаслідок округлення або утинання результату операції додавання чи множення, ставиться у відповідність генератор випадкової похибки з рівномірним законом розподілу та робиться припущення, що всі джерела елементарних похибок не корелюють між собою та з вхідним сигналом, який є білим шумом. В якості кількісної оцінки точності обчислення приймаються середньоквадратичне значення (СКЗ) похибки обчислення перетворення та відношення СКЗ похибки обчислення до СКЗ перетворення, яке фізично інтерпретується через відношення потужності шуму до потужності сигналу.

У цій роботі ставиться завдання провести аналіз точності рекурентних методів обчислення звичайних і модифікованих багатовимірних ДПФ і ДПХ на стрибкових і ковзних інтервалах за всіма і одним виміром в арифметиці з плаваючою комою.

Рекурентні методи обчислення звичайних і модифікованих багатовимірних ДПФ на стрибкових інтервалах за всіма вимірами базуються на таких рекурентних виразах [3]:

$$F_1(k_1,k_2,\ldots,k_r)=\left[F_0(k_1,k_2,\ldots,k_r)+\Delta F_1(k_1,k_2,\ldots,k_r)\right]\cdot W^{-\sum_{i=1}^{r}\frac{m_i k_i}{N_i}}, \qquad (1)$$

$$F_1^{м}(k_1,k_2,\ldots,k_r)=F_0^{м}(k_1,k_2,\ldots,k_r)+\Delta F_1(k_1,k_2,\ldots,k_r)\cdot W^{\sum\limits_{i=1}^{r}\frac{M_i k_i}{N_i}}, \qquad (2)$$

де $F_1(k_1,k_2,\ldots,k_r)$, $F_1^{м}(k_1,k_2,\ldots,k_r)$ та $F_0(k_1,k_2,\ldots,k_r)$, $F_0^{м}(k_1,k_2,\ldots,k_r)$ – звичайне і модифіковане r-вимірне ДПФ r-вимірного вхідного сигналу $x(n_1,n_2,\ldots,n_r)$ розміром $\prod\limits_{i=1}^{r}N_i$ на черговому (першому) та попередньому (нульовому) інтервалах вхідного сигналу, зсунутих відносно один одного на m_i відліків за i-м виміром, де $i=\overline{1,r}$; M_i – зсув вхідного сигналу на попередньому інтервалі відносно початку координат за i-м виміром; $W=\exp(-j2\pi)$, де $j=\sqrt{-1}$;

$$\Delta F_1(k_1,k_2,\ldots,k_r)=\sum_{s=0}^{2^r-2}\sum_{n_1=a_1}^{b_1-1}\sum_{n_2=a_2}^{b_2-1}\ldots\sum_{n_r=a_r}^{b_r-1}\Delta x(n_1,n_2,\ldots,n_r)\cdot W^{\sum\limits_{i=1}^{r}\frac{n_i k_i}{N_i}},$$

де $a_i=m_i s_i$ та $b_i=m_i q_i+N_i s_i$, де s_i – $(r-i)$-й розряд двійкового представлення числа s, а $q_i=1-s_i$;

$$\Delta x(n_1,n_2,\ldots,n_r)=x(N_1q_1+n_1+M_1,N_2q_2+n_2+M_2,\ldots,N_rq_r+n_r+M_r)-x(n_1+M_1,n_2+M_2,\ldots,n_r+M_r).$$

Рекурентні методи обчислення звичайних і модифікованих багатовимірних ДПХ на стрибкових інтервалах за всіма вимірами базуються на таких рекурентних виразах [3]:

$$H_1(k_1,k_2,\ldots,k_r)=\left[H_0(k_1,k_2,\ldots,k_r)+\Delta H_1(k_1,k_2,\ldots,k_r)\right]\cdot\cos\left(2\pi\sum_{i=1}^{r}\frac{m_ik_i}{N_i}\right)-$$
$$-\left[H_0(-k_1,-k_2,\ldots,-k_r)+\Delta H_1(-k_1,-k_2,\ldots,-k_r)\right]\cdot\sin\left(2\pi\sum_{i=1}^{r}\frac{m_ik_i}{N_i}\right), \qquad (3)$$

$$H_1^{м}(k_1,k_2,\ldots,k_r)=H_0^{м}(k_1,k_2,\ldots,k_r)+\Delta H_1(k_1,k_2,\ldots,k_r)\cdot\cos\left(2\pi\sum_{i=1}^{r}\frac{M_ik_i}{N_i}\right)+$$
$$+\Delta H_1(-k_1,-k_2,\ldots,-k_r)\cdot\sin\left(2\pi\sum_{i=1}^{r}\frac{M_ik_i}{N_i}\right), \qquad (4)$$

де $H_1(k_1,k_2,\ldots,k_r)$, $H_1^{м}(k_1,k_2,\ldots,k_r)$ та $H_0(k_1,k_2,\ldots,k_r)$, $H_0^{м}(k_1,k_2,\ldots,k_r)$ – звичайне і модифіковане r-вимірне ДПХ r-вимірного вхідного сигналу $x(n_1,n_2,\ldots,n_r)$ на черговому та попередньому інтервалах вхідного сигналу;

$$\Delta H_1(k_1,k_2,\ldots,k_r)=\sum_{s=0}^{2^r-2}\sum_{n_1=a_1}^{b_1-1}\sum_{n_2=a_2}^{b_2-1}\ldots\sum_{n_r=a_r}^{b_r-1}\Delta x(n_1,n_2,\ldots,n_r)\cdot\mathrm{cas}\left(2\pi\sum_{i=1}^{r}\frac{n_ik_i}{N_i}\right),$$

де $\mathrm{cas}(X)=\cos(X)+\sin(X)$.

Рекурентні вирази для обчислення звичайних і модифікованих багатовимірних ДПФ і ДПХ на стрибкових інтервалах за одним виміром отримують з виразів (1) – (4) для $m_i=0$ та $M_i=0$ у коефіцієнтах W, cos та sin для $i=\overline{1,r-1}$. Рекурентні вирази для обчислення звичайних і модифікованих багатовимірних ДПФ і ДПХ на ковзних інтервалах отримують з виразів (1) – (4) для $m_i=1$, де $i=\overline{1,r}$.

Проведемо аналіз точності рекурентних методів обчислення звичайного багатовимірного ДПФ. Обчислення дійсної (Re) та уявної (Im) частин ДПФ за виразом (1) для дійсної послідовності $x(n_1,n_2,\ldots,n_r)$ здійснюється за такими виразами:

$$\operatorname{Re}F_1(k_1,k_2,\ldots,k_r)=\left[\operatorname{Re}F_0(k_1,k_2,\ldots,k_r)+\operatorname{Re}\Delta F_1(k_1,k_2,\ldots,k_r)\right]\cdot\cos\left(2\pi\sum_{i=1}^{r}\frac{m_ik_i}{N_i}\right)-$$
$$-\left[\operatorname{Im}F_0(k_1,k_2,\ldots,k_r)+\operatorname{Im}\Delta F_1(k_1,k_2,\ldots,k_r)\right]\cdot\sin\left(2\pi\sum_{i=1}^{r}\frac{m_ik_i}{N_i}\right), \tag{5}$$

$$\operatorname{Im}F_1(k_1,k_2,\ldots,k_r)=\left[\operatorname{Re}F_0(k_1,k_2,\ldots,k_r)+\operatorname{Re}\Delta F_1(k_1,k_2,\ldots,k_r)\right]\cdot\sin\left(2\pi\sum_{i=1}^{r}\frac{m_ik_i}{N_i}\right)+$$
$$+\left[\operatorname{Im}F_0(k_1,k_2,\ldots,k_r)+\operatorname{Im}\Delta F_1(k_1,k_2,\ldots,k_r)\right]\cdot\cos\left(2\pi\sum_{i=1}^{r}\frac{m_ik_i}{N_i}\right), \tag{6}$$

де

$$\operatorname{Re}\Delta F_1(k_1,k_2,\ldots,k_r)=\sum_{s=0}^{2^r-2}\sum_{n_1=a_1}^{b_1-1}\sum_{n_2=a_2}^{b_2-1}\ldots\sum_{n_r=a_r}^{b_r-1}\Delta x(n_1,n_2,\ldots,n_r)\cdot\cos\left(2\pi\sum_{i=1}^{r}\frac{n_ik_i}{N_i}\right),$$
$$\operatorname{Im}\Delta F_1(k_1,k_2,\ldots,k_r)=\sum_{s=0}^{2^r-2}\sum_{n_1=a_1}^{b_1-1}\sum_{n_2=a_2}^{b_2-1}\ldots\sum_{n_r=a_r}^{b_r-1}\Delta x(n_1,n_2,\ldots,n_r)\cdot\left(-\sin\left(2\pi\sum_{i=1}^{r}\frac{n_ik_i}{N_i}\right)\right).$$

Оскільки результат X операції додавання та множення в арифметиці з плаваючою комою з врахуванням відносної похибки обчислення ε визначається як $Q(X)=X\cdot(1+\varepsilon)$, то, враховуючи похибки обчислення операцій додавання ($\varepsilon_д$) та множення ($\varepsilon_м$) у виразах (5) та (6), рекурентні вирази дійсних та уявних частин ДПФ з врахуванням похибок обчислення є такі:

$$Q(\operatorname{Re}F_1(k_1,k_2,\ldots,k_r))=\Big\{\left[Q(\operatorname{Re}F_0(k_1,k_2,\ldots,k_r))+Q(\operatorname{Re}\Delta F_1(k_1,k_2,\ldots,k_r))\right]\cdot(1+\varepsilon_{д1})\times$$
$$\times\cos\left(2\pi\sum_{i=1}^{r}\frac{m_ik_i}{N_i}\right)\cdot(1+\varepsilon_{м1})-\left[Q(\operatorname{Im}F_0(k_1,k_2,\ldots,k_r))+Q(\operatorname{Im}\Delta F_1(k_1,k_2,\ldots,k_r))\right]\cdot(1+\varepsilon_{д2})\times$$
$$\times\sin\left(2\pi\sum_{i=1}^{r}\frac{m_ik_i}{N_i}\right)\cdot(1+\varepsilon_{м2})\Big\}\cdot(1+\varepsilon_{д3}), \tag{7}$$

$$Q(\operatorname{Im}F_1(k_1,k_2,\ldots,k_r))=\Big\{\left[Q(\operatorname{Re}F_0(k_1,k_2,\ldots,k_r))+Q(\operatorname{Re}\Delta F_1(k_1,k_2,\ldots,k_r))\right]\cdot(1+\varepsilon_{д1})\times$$
$$\times\sin\left(2\pi\sum_{i=1}^{r}\frac{m_ik_i}{N_i}\right)\cdot(1+\varepsilon_{м3})+\left[Q(\operatorname{Im}F_0(k_1,k_2,\ldots,k_r))+Q(\operatorname{Im}\Delta F_1(k_1,k_2,\ldots,k_r))\right]\cdot(1+\varepsilon_{д2})\times$$
$$\times\cos\left(2\pi\sum_{i=1}^{r}\frac{m_ik_i}{N_i}\right)\cdot(1+\varepsilon_{м4})\Big\}\cdot(1+\varepsilon_{д4}), \tag{8}$$

де

$$Q(\operatorname{Re}\Delta F_1(k_1,k_2,\ldots,k_r))=\sum_{s=0}^{2^r-2}\left[\sum_{n_1=a_1}^{b_1-1}\sum_{n_2=a_2}^{b_2-1}\ldots\sum_{n_r=a_r}^{b_r-1}\Delta x(n_1,n_2,\ldots,n_r)\cdot\left(1+t_1\varepsilon_{д5_{s,n_1,n_2,\ldots,n_r}}\right)\times\right.$$
$$\left.\times\cos\left(2\pi\sum_{i=1}^{r}\frac{n_ik_i}{N_i}\right)\cdot\left(1+t_2\varepsilon_{м5_{s,n_1,n_2,\ldots,n_r}}\right)\cdot\prod_{l=\begin{cases}1, n_i=a_i \text{ для } i=\overline{1,r}\\ \sum_{i=1}^{r}(n_i-a_i)\prod_{j=i+1}^{r}(b_j-a_j), \text{інакше}\end{cases}}^{\prod_{i=1}^{r}(b_i-a_i)-1}\left(1+\varepsilon_{д6_l}\right)\right]\prod_{l=\begin{cases}1, s=0\\ s, \text{інакше}\end{cases}}^{2^r-2}\left(1+t_3\varepsilon_{д7_l}\right),$$

$$Q\left(\operatorname{Im}\Delta F_1\left(k_1,k_2,\ldots,k_r\right)\right)=\sum_{s=0}^{2^r-2}\left[\sum_{n_1=a_1}^{b_1-1}\sum_{n_2=a_2}^{b_2-1}\ldots\sum_{n_r=a_r}^{b_r-1}\Delta x\left(n_1,n_2,\ldots,n_r\right)\cdot\left(1+t_1\varepsilon_{\partial 5_{s,n_1,n_2,\ldots,n_r}}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left(-\sin\left(2\pi\sum_{i=1}^{r}\frac{n_ik_i}{N_i}\right)\right)\cdot\left(1+t_2\varepsilon_{м6_{s,n_1,n_2,\ldots,n_r}}\right)\cdot\prod_{l=\begin{cases}1,n_i=a_i\ \text{для}\ i=\overline{1,r}\\ \sum_{i=1}^{r}(n_i-a_i)\prod_{j=i+1}^{r}(b_j-a_j),\text{інакше}\end{cases}}^{\prod_{i=1}^{r}(b_i-a_i)-1}\left(1+\varepsilon_{\partial 8_l}\right)\right]\prod_{l=\begin{cases}1,s=0\\ s,\text{інакше}\end{cases}}^{2^r-2}\left(1+t_3\varepsilon_{\partial 9_l}\right),$$

де

$$t_1=\begin{cases}0,M_i+m_i<N_i\\ 1,\text{інакше}\end{cases},\ t_2=\begin{cases}0,(m_i=1)\wedge(s=0)\\ 1,\text{інакше}\end{cases}\ \text{для}\ i=\overline{1,r};\ t_3=\begin{cases}0,m_i=0\\ 1,\text{інакше}\end{cases}\ \text{для}\ i=\overline{1,r-1}.$$

Беручи до уваги, що результат обчислення значення X з врахуванням абсолютної похибки обчислення $E(X)$ визначається як $Q(X)=X+E(X)$, на підставі (7) та (8) можна отримати рекурентні вирази для визначення похибок обчислення дійсної та уявної частин ДПФ, які без врахування похибок обчислення вищих порядків мають такий вигляд:

$$E\left(\operatorname{Re}F_1\left(k_1,k_2,\ldots,k_r\right)\right)=\operatorname{Re}F_1\left(k_1,k_2,\ldots,k_r\right)\cdot\varepsilon_{ä_3}+\left[\operatorname{Re}F_0\left(k_1,k_2,\ldots,k_r\right)+\operatorname{Re}\Delta F_1\left(k_1,k_2,\ldots,k_r\right)\right]\times$$
$$\times\cos\left(2\pi\sum_{i=1}^{r}\frac{m_ik_i}{N_i}\right)\cdot\left(\varepsilon_{ä_1}+\varepsilon_{i_1}\right)-\left[\operatorname{Im}F_0\left(k_1,k_2,\ldots,k_r\right)+\operatorname{Im}\Delta F_1\left(k_1,k_2,\ldots,k_r\right)\right]\cdot\sin\left(2\pi\sum_{i=1}^{r}\frac{m_ik_i}{N_i}\right)\times$$
$$\times\left(\varepsilon_{ä_2}+\varepsilon_{i_2}\right)+\left[E\left(\operatorname{Re}F_0\left(k_1,k_2,\ldots,k_r\right)\right)+E\left(\operatorname{Re}\Delta F_1\left(k_1,k_2,\ldots,k_r\right)\right)\right]\cdot\cos\left(2\pi\sum_{i=1}^{r}\frac{m_ik_i}{N_i}\right)-$$
$$-\left[E\left(\operatorname{Im}F_0\left(k_1,k_2,\ldots,k_r\right)\right)+E\left(\operatorname{Im}\Delta F_1\left(k_1,k_2,\ldots,k_r\right)\right)\right]\cdot\sin\left(2\pi\sum_{i=1}^{r}\frac{m_ik_i}{N_i}\right),\tag{9}$$

$$E\left(\operatorname{Im}F_1\left(k_1,k_2,\ldots,k_r\right)\right)=\operatorname{Im}F_1\left(k_1,k_2,\ldots,k_r\right)\cdot\varepsilon_{ä_4}+\left[\operatorname{Re}F_0\left(k_1,k_2,\ldots,k_r\right)+\operatorname{Re}\Delta F_1\left(k_1,k_2,\ldots,k_r\right)\right]\times$$
$$\times\sin\left(2\pi\sum_{i=1}^{r}\frac{m_ik_i}{N_i}\right)\cdot\left(\varepsilon_{ä_1}+\varepsilon_{i_3}\right)+\left[\operatorname{Im}F_0\left(k_1,k_2,\ldots,k_r\right)+\operatorname{Im}\Delta F_1\left(k_1,k_2,\ldots,k_r\right)\right]\cdot\cos\left(2\pi\sum_{i=1}^{r}\frac{m_ik_i}{N_i}\right)\times$$
$$\times\left(\varepsilon_{ä_2}+\varepsilon_{i_4}\right)+\left[E\left(\operatorname{Re}F_0\left(k_1,k_2,\ldots,k_r\right)\right)+E\left(\operatorname{Re}\Delta F_1\left(k_1,k_2,\ldots,k_r\right)\right)\right]\cdot\sin\left(2\pi\sum_{i=1}^{r}\frac{m_ik_i}{N_i}\right)+$$
$$+\left[E\left(\operatorname{Im}F_0\left(k_1,k_2,\ldots,k_r\right)\right)+E\left(\operatorname{Im}\Delta F_1\left(k_1,k_2,\ldots,k_r\right)\right)\right]\cdot\cos\left(2\pi\sum_{i=1}^{r}\frac{m_ik_i}{N_i}\right),\tag{10}$$

де

$$E\left(\operatorname{Re}\Delta F_1\left(k_1,k_2,\ldots,k_r\right)\right)=\sum_{s=0}^{2^r-2}\sum_{n_1=a_1}^{b_1-1}\sum_{n_2=a_2}^{b_2-1}\ldots\sum_{n_r=a_r}^{b_r-1}\Delta x\left(n_1,n_2,\ldots,n_r\right)\cdot\cos\left(2\pi\sum_{i=1}^{r}\frac{n_ik_i}{N_i}\right)\times$$
$$\times\left(t_1\varepsilon_{\partial 5_{s,n_1,n_2,\ldots,n_r}}+t_2\varepsilon_{м5_{s,n_1,n_2,\ldots,n_r}}+\sum_{l=\begin{cases}1,n_i=a_i\ \text{для}\ i=\overline{1,r}\\ \sum_{i=1}^{r}(n_i-a_i)\prod_{j=i+1}^{r}(b_j-a_j),\text{інакше}\end{cases}}^{\prod_{i=1}^{r}(b_i-a_i)-1}\varepsilon_{\partial 6_l}+t_3\cdot\sum_{l=\begin{cases}1,s=0\\ s,\text{інакше}\end{cases}}^{2^r-2}\varepsilon_{\partial 7_l}\right),$$

$$E\left(\operatorname{Im}\Delta F_1\left(k_1,k_2,\ldots,k_r\right)\right)=\sum_{s=0}^{2^r-2}\sum_{n_1=a_1}^{b_1-1}\sum_{n_2=a_2}^{b_2-1}\ldots\sum_{n_r=a_r}^{b_r-1}\Delta x\left(n_1,n_2,\ldots,n_r\right)\cdot\left(-\sin\left(2\pi\sum_{i=1}^{r}\frac{n_ik_i}{N_i}\right)\right)\times$$

$$\times\left(t_1\varepsilon_{\partial 5_{s,n_1,n_2,\ldots,n_r}}+t_2\varepsilon_{м6_{s,n_1,n_2,\ldots,n_r}}+\sum_{l=\begin{cases}1, n_i=a_i\ для\ i=\overline{1,r}\\ \sum_{i=1}^{r}(n_i-a_i)\prod_{j=i+1}^{r}(b_j-a_j), інакше\end{cases}}^{\prod_{i=1}^{r}(b_i-a_i)-1}\varepsilon_{\partial 8_l}+t_3\cdot\sum_{l=\begin{cases}1, s=0\\ s, інакше\end{cases}}^{2^r-2}\varepsilon_{\partial 9_l}\right).$$

Враховуючи припущення, покладені в основу статистичного методу аналізу, що вхідний сигнал є білим шумом і відповідно значення перетворення також є білим шумом, математичне очікування похибок обчислення має нульове значення, внаслідок чого СКЗ похибок обчислення визначаються значеннями дисперсій похибок обчислення (D), котрі отримуємо на підставі (9) та (10):

$$\begin{aligned}
D\left[E\left(\operatorname{Re}F_1\left(k_1,k_2,\ldots,k_r\right)\right)\right]&=D\left[\operatorname{Re}F_1\left(k_1,k_2,\ldots,k_r\right)\right]\cdot D\left[\varepsilon_\partial\right]+\\
&+\left(D\left[\operatorname{Re}F_0\left(k_1,k_2,\ldots,k_r\right)\right]+D\left[\operatorname{Re}\Delta F_1\left(k_1,k_2,\ldots,k_r\right)\right]\right)\cdot\cos^2\left(2\pi\sum_{i=1}^{r}\frac{m_ik_i}{N_i}\right)\cdot\left(D\left[\varepsilon_ä\right]+D\left[\varepsilon_i\right]\right)+\\
&+\left(D\left[\operatorname{Im}F_0\left(k_1,k_2,\ldots,k_r\right)\right]+D\left[\operatorname{Im}\Delta F_1\left(k_1,k_2,\ldots,k_r\right)\right]\right)\cdot\sin^2\left(2\pi\sum_{i=1}^{r}\frac{m_ik_i}{N_i}\right)\cdot\left(D\left[\varepsilon_ä\right]+D\left[\varepsilon_i\right]\right)+\\
&+\left(D\left[E\left(\operatorname{Re}F_0\left(k_1,k_2,\ldots,k_r\right)\right)\right]+D\left[E\left(\operatorname{Re}\Delta F_1\left(k_1,k_2,\ldots,k_r\right)\right)\right]\right)\cdot\cos^2\left(2\pi\sum_{i=1}^{r}\frac{m_ik_i}{N_i}\right)+\\
&+\left(D\left[E\left(\operatorname{Im}F_0\left(k_1,k_2,\ldots,k_r\right)\right)\right]+D\left[E\left(\operatorname{Im}\Delta F_1\left(k_1,k_2,\ldots,k_r\right)\right)\right]\right)\cdot\sin^2\left(2\pi\sum_{i=1}^{r}\frac{m_ik_i}{N_i}\right),
\end{aligned}\tag{11}$$

$$\begin{aligned}
D\left[E\left(\operatorname{Im}F_1\left(k_1,k_2,\ldots,k_r\right)\right)\right]&=D\left[\operatorname{Im}F_1\left(k_1,k_2,\ldots,k_r\right)\right]\cdot D\left[\varepsilon_\partial\right]+\\
&+\left(D\left[\operatorname{Re}F_0\left(k_1,k_2,\ldots,k_r\right)\right]+D\left[\operatorname{Re}\Delta F_1\left(k_1,k_2,\ldots,k_r\right)\right]\right)\cdot\sin^2\left(2\pi\sum_{i=1}^{r}\frac{m_ik_i}{N_i}\right)\cdot\left(D\left[\varepsilon_ä\right]+D\left[\varepsilon_i\right]\right)+\\
&+\left(D\left[\operatorname{Im}F_0\left(k_1,k_2,\ldots,k_r\right)\right]+D\left[\operatorname{Im}\Delta F_1\left(k_1,k_2,\ldots,k_r\right)\right]\right)\cdot\cos^2\left(2\pi\sum_{i=1}^{r}\frac{m_ik_i}{N_i}\right)\cdot\left(D\left[\varepsilon_ä\right]+D\left[\varepsilon_i\right]\right)+\\
&+\left(D\left[E\left(\operatorname{Re}F_0\left(k_1,k_2,\ldots,k_r\right)\right)\right]+D\left[E\left(\operatorname{Re}\Delta F_1\left(k_1,k_2,\ldots,k_r\right)\right)\right]\right)\cdot\sin^2\left(2\pi\sum_{i=1}^{r}\frac{m_ik_i}{N_i}\right)+\\
&+\left(D\left[E\left(\operatorname{Im}F_0\left(k_1,k_2,\ldots,k_r\right)\right)\right]+D\left[E\left(\operatorname{Im}\Delta F_1\left(k_1,k_2,\ldots,k_r\right)\right)\right]\right)\cdot\cos^2\left(2\pi\sum_{i=1}^{r}\frac{m_ik_i}{N_i}\right),
\end{aligned}\tag{12}$$

де

$$D\left[E\left(\operatorname{Re}\Delta F_1\left(k_1,k_2,\ldots,k_r\right)\right)\right]=\sum_{s=0}^{2^r-2}\sum_{n_1=a_1}^{b_1-1}\sum_{n_2=a_2}^{b_2-1}\ldots\sum_{n_r=a_r}^{b_r-1}D\left[\Delta x\left(n_1,n_2,\ldots,n_r\right)\right]\times$$

$$\times\cos^2\left(2\pi\sum_{i=1}^{r}\frac{n_ik_i}{N_i}\right)\cdot\left(t_1D\left[\varepsilon_\partial\right]+t_2D\left[\varepsilon_м\right]+\sum_{l=\begin{cases}1, n_i=a_i\ для\ i=\overline{1,r}\\ \sum_{i=1}^{r}(n_i-a_i)\prod_{j=i+1}^{r}(b_j-a_j), інакше\end{cases}}^{\prod_{i=1}^{r}(b_i-a_i)-1}D\left[\varepsilon_\partial\right]+t_3\cdot\sum_{l=\begin{cases}1, s=0\\ s, інакше\end{cases}}^{2^r-2}D\left[\varepsilon_\partial\right]\right),$$

$$D\left[E\left(\operatorname{Im}\Delta F_1\left(k_1,k_2,\ldots,k_r\right)\right)\right]=\sum_{s=0}^{2^r-2}\sum_{n_1=a_1}^{b_1-1}\sum_{n_2=a_2}^{b_2-1}\ldots\sum_{n_r=a_r}^{b_r-1}D\left[\Delta x\left(n_1,n_2,\ldots,n_r\right)\right]\times$$

$$\times\sin^2\left(2\pi\sum_{i=1}^{r}\frac{n_ik_i}{N_i}\right)\cdot\left(t_1D\left[\varepsilon_{д}\right]+t_2D\left[\varepsilon_{м}\right]+\sum_{l=\begin{cases}1,n_i=a_i\ \text{для}\ i=\overline{1,r}\\ \sum_{i=1}^{r}\left(n_i-a_i\right)\prod_{j=i+1}^{r}\left(b_j-a_j\right),\text{інакше}\end{cases}}^{\prod_{i=1}^{r}(b_i-a_i)-1}D\left[\varepsilon_{д}\right]+t_3\cdot\sum_{l=\begin{cases}1,s=0\\ s,\text{інакше}\end{cases}}^{2^r-2}D\left[\varepsilon_{д}\right]\right).$$

Ґрунтуючись на (11) та (12), отримуємо рекурентний вираз дисперсії похибок обчислення ДПФ, який має такий вигляд:

$$D\left[E\left(F_1\left(k_1,k_2,\ldots,k_r\right)\right)\right]=D\left[E\left(\operatorname{Re}F_1\left(k_1,k_2,\ldots,k_r\right)\right)\right]+D\left[E\left(\operatorname{Im}F_1\left(k_1,k_2,\ldots,k_r\right)\right)\right]=$$
$$=\left(2D\left[\varepsilon_{\ddot{a}}\right]+D\left[\varepsilon_{i}\right]\right)\cdot D\left[F_1\left(k_1,k_2,\ldots,k_r\right)\right]+D\left[E\left(\Delta F_1\left(k_1,k_2,\ldots,k_r\right)\right)\right]+D\left[E\left(F_0\left(k_1,k_2,\ldots,k_r\right)\right)\right],\qquad(13)$$

де

$$D\left[E\left(\Delta F_1\left(k_1,k_2,\ldots,k_r\right)\right)\right]=D\left[\Delta x\left(n_1,n_2,\ldots,n_r\right)\right]\cdot\left[\left(\prod_{i=1}^{r}N_i-\prod_{i=1}^{r}\left(N_i-m_i\right)\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left(\left(t_1+t_3\left(2^{2r-1}-2^{r-1}\right)+\frac{1}{2}\right)D\left[\varepsilon_{\ddot{a}}\right]+t_2D\left[\varepsilon_{i}\right]\right)+\frac{1}{2}D\left[\varepsilon_{\ddot{a}}\right]\sum_{s=0}^{2^r-2}\left(\prod_{i=1}^{r}\left(b_i-a_i\right)\right)^2\right]=D\left[\Delta x\left(n_1,n_2,\ldots,n_r\right)\right]\cdot K_1 .$$

Дисперсію похибок обчислення ДПФ в залежності від номера ітерації обчислення p визначаємо на підставі рекурентного виразу (13) з урахуванням того, що $E\left(F_0\left(k_1,k_2,\ldots,k_r\right)\right)=0$ для $M_i=0$, де $i=\overline{1,r}$:

$$D\left[E\left(F_p\left(k_1,k_2,\ldots,k_r\right)\right)\right]=\left(2D\left[\varepsilon_{\ddot{a}}\right]+D\left[\varepsilon_{i}\right]\right)\sum_{l=1}^{p}D\left[F_l\left(k_1,k_2,\ldots,k_r\right)\right]+\sum_{l=1}^{p}D\left[E\left(\Delta F_l\left(k_1,k_2,\ldots,k_r\right)\right)\right].\qquad(14)$$

Враховуючи, що для $l>N_i/m_i$, де $i=\overline{1,r}$,

$$D\left[F_l\left(k_1,k_2,\ldots,k_r\right)\right]=D\left[x\left(n_1,n_2,\ldots,n_r\right)\right]\prod_{i=1}^{r}N_i ,$$
$$D\left[\Delta x\left(n_1,n_2,\ldots,n_r\right)\right]=2D\left[x\left(n_1,n_2,\ldots,n_r\right)\right],$$

вираз (14) приймає такий вигляд:

$$D\left[E\left(F_p\left(k_1,k_2,\ldots,k_r\right)\right)\right]=p\left[\left(2D\left[\varepsilon_{д}\right]+D\left[\varepsilon_{м}\right]\right)\prod_{i=1}^{r}N_i+2K_1\right]\cdot D\left[x\left(n_1,n_2,\ldots,n_r\right)\right].\qquad(15)$$

В основу аналізу точності рекурентних методів обчислення звичайного багатовимірного ДПХ покладений аналіз точності обчислення значень $H_1\left(k_1,k_2,\ldots,k_r\right)$ та $H_1\left(-k_1,-k_2,\ldots,-k_r\right)$ згідно з (3). Оскільки вирази обчислення значень $H_1\left(k_1,k_2,\ldots,k_r\right)$ та $H_1\left(-k_1,-k_2,\ldots,-k_r\right)$ ДПХ мають однакову структуру з виразами (5) та (6) обчислення дійсної та уявної частин ДПФ, то для аналізу точності обчислення ДПХ можуть бути використані вирази, подібні до виразів (7) – (12), в яких замість значень $\operatorname{Re}F_1\left(k_1,k_2,\ldots,k_r\right)$ та $\operatorname{Im}F_1\left(k_1,k_2,\ldots,k_r\right)$ ДПФ використовуються відповідно значення $H_1\left(k_1,k_2,\ldots,k_r\right)$ та $H_1\left(-k_1,-k_2,\ldots,-k_r\right)$ ДПХ, замість значень $\operatorname{Re}F_0\left(k_1,k_2,\ldots,k_r\right)$ та $\operatorname{Im}F_0\left(k_1,k_2,\ldots,k_r\right)$ ДПФ – відповідно значення $H_0\left(k_1,k_2,\ldots,k_r\right)$ та $H_0\left(-k_1,-k_2,\ldots,-k_r\right)$ ДПХ, замість значень $\operatorname{Re}\Delta F_1\left(k_1,k_2,\ldots,k_r\right)$ та $\operatorname{Im}\Delta F_1\left(k_1,k_2,\ldots,k_r\right)$ – відповідно значення $\Delta H_1\left(k_1,k_2,\ldots,k_r\right)$ та $\Delta H_1\left(-k_1,-k_2,\ldots,-k_r\right)$, а замість значень

$\cos\left(2\pi\sum_{i=1}^{r}\frac{n_i k_i}{N_i}\right)$ та $\left(-\sin\left(2\pi\sum_{i=1}^{r}\frac{n_i k_i}{N_i}\right)\right)$ – відповідно значення $\mathrm{cas}\left(2\pi\sum_{i=1}^{r}\frac{n_i k_i}{N_i}\right)$ та $\mathrm{cas}\left(-2\pi\sum_{i=1}^{r}\frac{n_i k_i}{N_i}\right)$. В результаті рекурентний та ітераційний вирази суми дисперсій похибок обчислення значень ДПХ можна записати так:

$$\begin{aligned}
&D\big[E\big(H_1(k_1,k_2,\ldots,k_r)\big)\big]+D\big[E\big(H_1(-k_1,-k_2,\ldots,-k_r)\big)\big]=\big(D\big[H_1(k_1,k_2,\ldots,k_r)\big]+D\big[H_1(-k_1,-k_2,\ldots,-k_r)\big]\big)\times\\
&\times\big(2D[\varepsilon_{ä}]+D[\varepsilon_{i}]\big)+\big(D\big[E\big(\Delta H_1(k_1,k_2,\ldots,k_r)\big)\big]+D\big[E\big(\Delta H_1(-k_1,-k_2,\ldots,-k_r)\big)\big]\big)+\\
&+\big(D\big[E\big(H_0(k_1,k_2,\ldots,k_r)\big)\big]+D\big[E\big(H_0(-k_1,-k_2,\ldots,-k_r)\big)\big]\big),
\end{aligned}\tag{16}$$

$$\begin{aligned}
&D\big[E\big(H_p(k_1,k_2,\ldots,k_r)\big)\big]+D\big[E\big(H_p(-k_1,-k_2,\ldots,-k_r)\big)\big]=\\
&=\big(2D[\varepsilon_{ä}]+D[\varepsilon_{i}]\big)\sum_{l=1}^{p}\big(D\big[H_l(k_1,k_2,\ldots,k_r)\big]+D\big[H_l(-k_1,-k_2,\ldots,-k_r)\big]\big)+\\
&+\sum_{l=1}^{p}\big(D\big[E\big(\Delta H_l(k_1,k_2,\ldots,k_r)\big)\big]+D\big[E\big(\Delta H_l(-k_1,-k_2,\ldots,-k_r)\big)\big]\big).
\end{aligned}\tag{17}$$

Беручи до уваги, що для $l > N_i/m_i$, де $i=\overline{1,r}$,

$$\begin{aligned}
D\big[H_l(k_1,k_2,\ldots,k_r)\big]+D\big[H_l(-k_1,-k_2,\ldots,-k_r)\big]&=2D\big[F_l(k_1,k_2,\ldots,k_r)\big],\\
D\big[E\big(\Delta H_l(k_1,k_2,\ldots,k_r)\big)\big]+D\big[E\big(\Delta H_l(-k_1,-k_2,\ldots,-k_r)\big)\big]&=2D\big[E\big(\Delta F_l(k_1,k_2,\ldots,k_r)\big)\big],
\end{aligned}$$

сума дисперсій похибок обчислення значень ДПХ буде вдвічі більша за значення дисперсії похибки обчислення ДПФ за виразом (15), тобто середнє значення дисперсії похибки обчислення одного значення ДПХ співпадає з дисперсією похибки обчислення значення ДПФ.

Аналіз точності рекурентних методів обчислення модифікованого багатовимірного ДПФ здійснюється на підставі аналізу обчислення дійсної та уявної частин ДПФ згідно з (2), котрі для дійсної послідовності $x(n_1,n_2,\ldots,n_r)$ є такі:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\,F_1^{i}(k_1,k_2,\ldots,k_r)&=\mathrm{Re}\,F_0^{i}(k_1,k_2,\ldots,k_r)+\mathrm{Re}\,\Delta F_1(k_1,k_2,\ldots,k_r)\cdot\cos\left(2\pi\sum_{i=1}^{r}\frac{M_i k_i}{N_i}\right)+\\
&+\mathrm{Im}\,\Delta F_1(k_1,k_2,\ldots,k_r)\cdot\sin\left(2\pi\sum_{i=1}^{r}\frac{M_i k_i}{N_i}\right),
\end{aligned}\tag{18}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}\,F_1^{i}(k_1,k_2,\ldots,k_r)&=\mathrm{Im}\,F_0^{i}(k_1,k_2,\ldots,k_r)+\mathrm{Im}\,\Delta F_1(k_1,k_2,\ldots,k_r)\cdot\cos\left(2\pi\sum_{i=1}^{r}\frac{M_i k_i}{N_i}\right)-\\
&-\mathrm{Re}\,\Delta F_1(k_1,k_2,\ldots,k_r)\cdot\sin\left(2\pi\sum_{i=1}^{r}\frac{M_i k_i}{N_i}\right).
\end{aligned}\tag{19}$$

Рекурентні вирази знаходження дійсних та уявних частин ДПФ з врахуванням похибок обчислення виразів (18) та (19) мають такий вигляд:

$$\begin{aligned}
Q\big(\mathrm{Re}\,F_1^{i}(k_1,k_2,\ldots,k_r)\big)&=\Bigg\{Q\big(\mathrm{Re}\,F_0^{i}(k_1,k_2,\ldots,k_r)\big)+\Bigg[Q\big(\mathrm{Re}\,\Delta F_1(k_1,k_2,\ldots,k_r)\big)\cdot\cos\left(2\pi\sum_{i=1}^{r}\frac{M_i k_i}{N_i}\right)\cdot\big(1+\varepsilon_{i\,1}\big)+\\
&+Q\big(\mathrm{Im}\,\Delta F_1(k_1,k_2,\ldots,k_r)\big)\cdot\sin\left(2\pi\sum_{i=1}^{r}\frac{M_i k_i}{N_i}\right)\cdot\big(1+\varepsilon_{i\,2}\big)\Bigg]\cdot\big(1+\varepsilon_{ä1}\big)\Bigg\}\cdot\big(1+\varepsilon_{ä2}\big),
\end{aligned}\tag{20}$$

$$Q\big(\mathrm{Im}\,F_1^{i}(k_1,k_2,\ldots,k_r)\big)=\Bigg\{Q\big(\mathrm{Im}\,F_0^{i}(k_1,k_2,\ldots,k_r)\big)+\Bigg[Q\big(\mathrm{Im}\,\Delta F_1(k_1,k_2,\ldots,k_r)\big)\cdot\cos\left(2\pi\sum_{i=1}^{r}\frac{M_i k_i}{N_i}\right)\cdot\big(1+\varepsilon_{i\,3}\big)-$$

$$-Q\left(\operatorname{Re}\Delta F_1\left(k_1,k_2,K,k_r\right)\right)\cdot\sin\left(2\pi\sum_{i=1}^{r}\frac{M_ik_i}{N_i}\right)\cdot\left(1+\varepsilon_{i\,4}\right)\Bigr]\cdot\left(1+\varepsilon_{ä3}\right)\Bigr\}\cdot\left(1+\varepsilon_{ä4}\right). \tag{21}$$

На підставі (20) та (21) можна отримати рекурентні вирази похибок обчислення дійсної та уявної частин ДПФ, які без врахування похибок обчислення вищих порядків є такі:

$$\begin{aligned}E\left(\operatorname{Re}F_1^{i}\left(k_1,k_2,K,k_r\right)\right)&=\operatorname{Re}F_1^{i}\left(k_1,k_2,K,k_r\right)\cdot\varepsilon_{ä2}+\operatorname{Re}\Delta F_1\left(k_1,k_2,K,k_r\right)\cdot\cos\left(2\pi\sum_{i=1}^{r}\frac{M_ik_i}{N_i}\right)\cdot\left(\varepsilon_{i\,1}+\varepsilon_{ä1}\right)+\\&+\operatorname{Im}\Delta F_1\left(k_1,k_2,K,k_r\right)\cdot\sin\left(2\pi\sum_{i=1}^{r}\frac{M_ik_i}{N_i}\right)\cdot\left(\varepsilon_{i\,2}+\varepsilon_{ä1}\right)+E\left(\operatorname{Re}F_0^{i}\left(k_1,k_2,K,k_r\right)\right)+\\&+E\left(\operatorname{Re}\Delta F_1\left(k_1,k_2,K,k_r\right)\right)\cdot\cos\left(2\pi\sum_{i=1}^{r}\frac{M_ik_i}{N_i}\right)+E\left(\operatorname{Im}\Delta F_1\left(k_1,k_2,K,k_r\right)\right)\cdot\sin\left(2\pi\sum_{i=1}^{r}\frac{M_ik_i}{N_i}\right),\end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}E\left(\operatorname{Im}F_1^{i}\left(k_1,k_2,K,k_r\right)\right)&=\operatorname{Im}F_1^{i}\left(k_1,k_2,K,k_r\right)\cdot\varepsilon_{ä4}+\operatorname{Im}\Delta F_1\left(k_1,k_2,K,k_r\right)\cdot\cos\left(2\pi\sum_{i=1}^{r}\frac{M_ik_i}{N_i}\right)\cdot\left(\varepsilon_{i\,3}+\varepsilon_{ä3}\right)-\\&-\operatorname{Re}\Delta F_1\left(k_1,k_2,K,k_r\right)\cdot\sin\left(2\pi\sum_{i=1}^{r}\frac{M_ik_i}{N_i}\right)\cdot\left(\varepsilon_{i\,4}+\varepsilon_{ä3}\right)+E\left(\operatorname{Im}F_0^{i}\left(k_1,k_2,K,k_r\right)\right)+\\&+E\left(\operatorname{Im}\Delta F_1\left(k_1,k_2,K,k_r\right)\right)\cdot\cos\left(2\pi\sum_{i=1}^{r}\frac{M_ik_i}{N_i}\right)-E\left(\operatorname{Re}\Delta F_1\left(k_1,k_2,K,k_r\right)\right)\cdot\sin\left(2\pi\sum_{i=1}^{r}\frac{M_ik_i}{N_i}\right).\end{aligned} \tag{23}$$

З врахуванням (22) та (23) отримуємо рекурентні вирази дисперсій похибок обчислення дійсної та уявної частин ДПФ:

$$\begin{aligned}D\left[E\left(\operatorname{Re}F_1^{i}\left(k_1,k_2,K,k_r\right)\right)\right]&=D\left[\operatorname{Re}F_1^{i}\left(k_1,k_2,K,k_r\right)\right]\cdot D\left[\varepsilon_{ä}\right]+\Biggl[D\left[\operatorname{Re}\Delta F_1\left(k_1,k_2,K,k_r\right)\right]\cdot\cos^2\left(2\pi\sum_{i=1}^{r}\frac{M_ik_i}{N_i}\right)+\\&+D\left[\operatorname{Im}\Delta F_1\left(k_1,k_2,K,k_r\right)\right]\cdot\sin^2\left(2\pi\sum_{i=1}^{r}\frac{M_ik_i}{N_i}\right)\Biggr]\cdot\left(D\left[\varepsilon_{i}\right]+D\left[\varepsilon_{ä}\right]\right)+D\left[E\left(\operatorname{Re}F_0^{i}\left(k_1,k_2,K,k_r\right)\right)\right]+\\&+D\left[E\left(\operatorname{Re}\Delta F_1\left(k_1,k_2,K,k_r\right)\right)\right]\cdot\cos^2\left(2\pi\sum_{i=1}^{r}\frac{M_ik_i}{N_i}\right)+D\left[E\left(\operatorname{Im}\Delta F_1\left(k_1,k_2,K,k_r\right)\right)\right]\cdot\sin^2\left(2\pi\sum_{i=1}^{r}\frac{M_ik_i}{N_i}\right),\end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned}D\left[E\left(\operatorname{Im}F_1^{i}\left(k_1,k_2,K,k_r\right)\right)\right]&=D\left[\operatorname{Im}F_1^{i}\left(k_1,k_2,K,k_r\right)\right]\cdot D\left[\varepsilon_{ä}\right]+\Biggl[D\left[\operatorname{Im}\Delta F_1\left(k_1,k_2,K,k_r\right)\right]\cdot\cos^2\left(2\pi\sum_{i=1}^{r}\frac{M_ik_i}{N_i}\right)+\\&+D\left[\operatorname{Re}\Delta F_1\left(k_1,k_2,K,k_r\right)\right]\cdot\sin^2\left(2\pi\sum_{i=1}^{r}\frac{M_ik_i}{N_i}\right)\Biggr]\cdot\left(D\left[\varepsilon_{i}\right]+D\left[\varepsilon_{ä}\right]\right)+D\left[E\left(\operatorname{Im}F_0^{i}\left(k_1,k_2,K,k_r\right)\right)\right]+\\&+D\left[E\left(\operatorname{Im}\Delta F_1\left(k_1,k_2,K,k_r\right)\right)\right]\cdot\cos^2\left(2\pi\sum_{i=1}^{r}\frac{M_ik_i}{N_i}\right)+D\left[E\left(\operatorname{Re}\Delta F_1\left(k_1,k_2,K,k_r\right)\right)\right]\cdot\sin^2\left(2\pi\sum_{i=1}^{r}\frac{M_ik_i}{N_i}\right).\end{aligned} \tag{25}$$

Базуючись на (24) та (25), рекурентний вираз дисперсії похибок обчислення ДПФ записується так:

$$\begin{aligned}D\left[E\left(F_1^{м}\left(k_1,k_2,K,k_r\right)\right)\right]&=D\left[E\left(\operatorname{Re}F_1^{м}\left(k_1,k_2,K,k_r\right)\right)\right]+D\left[E\left(\operatorname{Im}F_1^{м}\left(k_1,k_2,K,k_r\right)\right)\right]=\\&=D\left[F_1^{м}\left(k_1,k_2,K,k_r\right)\right]\cdot D\left[\varepsilon_{д}\right]+D\left[\Delta F_1\left(k_1,k_2,K,k_r\right)\right]\cdot\left(D\left[\varepsilon_{м}\right]+D\left[\varepsilon_{д}\right]\right)+\\&+D\left[E\left(\Delta F_1\left(k_1,k_2,K,k_r\right)\right)\right]+D\left[E\left(F_0^{м}\left(k_1,k_2,K,k_r\right)\right)\right].\end{aligned} \tag{26}$$

Ітераційний вираз дисперсії похибок обчислення ДПФ в залежності від номера ітерації p отримуємо на підставі рекурентного виразу (26) з урахуванням того, що

$E\left(F_0^{м}\left(k_1,k_2,\ldots,k_r\right)\right)=0$ для $M_i=0$, де $i=\overline{1,r}$:

$$D\left[E\left(F_p^{м}\left(k_1,k_2,\ldots,k_r\right)\right)\right]=D[\varepsilon_д]\sum_{l=1}^{p}D\left[F_l^{м}\left(k_1,k_2,\ldots,k_r\right)\right]+\left(D[\varepsilon_д]+D[\varepsilon_м]\right)\times$$
$$\times\sum_{l=1}^{p}D\left[\Delta F_l\left(k_1,k_2,\ldots,k_r\right)\right]+\sum_{l=1}^{p}D\left[E\left(\Delta F_l\left(k_1,k_2,\ldots,k_r\right)\right)\right]. \quad (27)$$

Враховуючи вище визначені значення $D\left[F_l\left(k_1,k_2,\ldots,k_r\right)\right]$ та $D\left[\Delta x\left(n_1,n_2,\ldots,n_r\right)\right]$, а також те, що для $l>N_i/m_i$, де $i=\overline{1,r}$,

$$D\left[\Delta F_l\left(k_1,k_2,\ldots,k_r\right)\right]=2\left(\prod_{i=1}^{r}N_i-\prod_{i=1}^{r}\left(N_i-m_i\right)\right)D\left[x\left(n_1,n_2,\ldots,n_r\right)\right],$$

вираз (27) приймає такий вигляд:

$$D\left[E\left(F_p^{м}\left(k_1,k_2,\ldots,k_r\right)\right)\right]=p\left[D[\varepsilon_д]\prod_{i=1}^{r}N_i+2\left(\prod_{i=1}^{r}N_i-\prod_{i=1}^{r}\left(N_i-m_i\right)\right)\cdot\left(D[\varepsilon_д]+D[\varepsilon_м]\right)+2K_1\right]\times$$
$$\times D\left[x\left(n_1,n_2,\ldots,n_r\right)\right]. \quad (28)$$

Для аналізу точності рекурентних методів обчислення модифікованого ДПХ за виразом (4) можуть бути використані вирази, подібні до виразів (20) – (25), з заміною дійсних та уявних частин ДПФ відповідними значеннями ДПХ, в результаті чого рекурентний та ітераційний вирази суми дисперсій похибок обчислення значень ДПХ можна записати так:

$$\begin{aligned}&D\left[E\left(H_1^{м}\left(k_1,k_2,\ldots,k_r\right)\right)\right]+D\left[E\left(H_1^{м}\left(-k_1,-k_2,\ldots,-k_r\right)\right)\right]=\\&=\left(D\left[H_1^{м}\left(k_1,k_2,\ldots,k_r\right)\right]+D\left[H_1^{м}\left(-k_1,-k_2,\ldots,-k_r\right)\right]\right)\cdot D[\varepsilon_д]+\\&+\left(D\left[\Delta H_1\left(k_1,k_2,\ldots,k_r\right)\right]+D\left[\Delta H_1\left(-k_1,-k_2,\ldots,-k_r\right)\right]\right)\cdot\left(D[\varepsilon_м]+D[\varepsilon_д]\right)+\\&+D\left[E\left(\Delta H_1\left(k_1,k_2,\ldots,k_r\right)\right)\right]+D\left[E\left(\Delta H_1\left(-k_1,-k_2,\ldots,-k_r\right)\right)\right]+\\&+D\left[E\left(H_0^{м}\left(k_1,k_2,\ldots,k_r\right)\right)\right]+D\left[E\left(H_0^{м}\left(-k_1,-k_2,\ldots,-k_r\right)\right)\right],\end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned}&D\left[E\left(H_p^{м}\left(k_1,k_2,\ldots,k_r\right)\right)\right]+D\left[E\left(H_p^{м}\left(-k_1,-k_2,\ldots,-k_r\right)\right)\right]=\\&=D[\varepsilon_д]\sum_{l=1}^{p}\left(D\left[H_l^{м}\left(k_1,k_2,\ldots,k_r\right)\right]+D\left[H_l^{м}\left(-k_1,-k_2,\ldots,-k_r\right)\right]\right)+\\&+\left(D[\varepsilon_м]+D[\varepsilon_д]\right)\sum_{l=1}^{p}\left(D\left[\Delta H_l\left(k_1,k_2,\ldots,k_r\right)\right]+D\left[\Delta H_l\left(-k_1,-k_2,\ldots,-k_r\right)\right]\right)+\\&+\sum_{l=1}^{p}\left(D\left[E\left(\Delta H_l\left(k_1,k_2,\ldots,k_r\right)\right)\right]+D\left[E\left(\Delta H_l\left(-k_1,-k_2,\ldots,-k_r\right)\right)\right]\right).\end{aligned} \quad (30)$$

Беручи до уваги, що для $l>N_i/m_i$, де $i=\overline{1,r}$,

$$\begin{aligned}D\left[H_l^{м}\left(k_1,k_2,\ldots,k_r\right)\right]+D\left[H_l^{м}\left(-k_1,-k_2,\ldots,-k_r\right)\right]&=2D\left[F_l^{м}\left(k_1,k_2,\ldots,k_r\right)\right],\\D\left[\Delta H_l\left(k_1,k_2,\ldots,k_r\right)\right]+D\left[\Delta H_l\left(-k_1,-k_2,\ldots,-k_r\right)\right]&=2D\left[\Delta F_l\left(k_1,k_2,\ldots,k_r\right)\right],\\D\left[E\left(\Delta H_l\left(k_1,k_2,\ldots,k_r\right)\right)\right]+D\left[E\left(\Delta H_l\left(-k_1,-k_2,\ldots,-k_r\right)\right)\right]&=2D\left[E\left(\Delta F_l\left(k_1,k_2,\ldots,k_r\right)\right)\right],\end{aligned}$$

сума дисперсій похибок обчислення значень ДПХ буде вдвічі більша за значення дисперсії похибки обчислення ДПФ за виразом (28), тобто середнє значення дисперсії похибки обчислення одного значення ДПХ співпадає з дисперсією похибки обчислення значення ДПФ.

Використовуючи (15) та (28), можна визначити СКЗ похибок обчислення звичайних та модифікованих багатовимірних ДПФ і ДПХ на стрибкових і ковзних інтервалах за всіма і одним виміром, а також їхні відношення до СКЗ вхідного сигналу з урахуванням значень дисперсій відносних похибок операцій множення й додавання $D[\varepsilon_м]$ та $D[\varepsilon_д]$, котрі для $(b+1)$-розрядних чисел мають такі значення [4]: $2^{-2b}/3$ – для випадку округлення прямого, оберненого й доповняльного коду та утинання доповняльного коду; $4\cdot 2^{-2b}/3$ – для випадку утинання прямого й оберненого коду.

Прийнявши $D[\varepsilon_м]=D[\varepsilon_д]=D[\varepsilon]$, вирази (15) та (28) можна записати так:

$$D\left[E\left(F_p\left(k_1,k_2,\ldots,k_r\right)\right)\right]=p\left[3\prod_{i=1}^{r}N_i+2K_2\right]\cdot D[\varepsilon]\cdot D\left[x\left(n_1,n_2,\ldots,n_r\right)\right], \quad (31)$$

$$D\left[E\left(F_p^i\left(k_1,k_2,\ldots,k_r\right)\right)\right]=p\left[\prod_{i=1}^{r}N_i+4\left(\prod_{i=1}^{r}N_i-\prod_{i=1}^{r}\left(N_i-m_i\right)\right)+2K_2\right]\cdot D[\varepsilon]\cdot D\left[x\left(n_1,n_2,\ldots,n_r\right)\right], \quad (32)$$

де

$$K_2=\left(\prod_{i=1}^{r}N_i-\prod_{i=1}^{r}\left(N_i-m_i\right)\right)\cdot\left(t_1+t_3\left(2^{2r-1}-2^{r-1}\right)+t_2+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\sum_{s=0}^{2^r-2}\left(\prod_{i=1}^{r}\left(b_i-a_i\right)\right)^2.$$

Для проведення порівняльного аналізу точності рекурентних методів обчислення багатовимірних ДПФ і ДПХ визначимо дисперсії похибок обчислення на підставі (31) та (32) для $r>2$ та $N_i >> m_i$, прийнявши $N_i=N$ та $m_i=m$ для $i=\overline{1,r}$, в результаті чого отримуємо:

$$D\left[E\left(F_p\left(k_1,k_2,\ldots,k_r\right)\right)\right]=D\left[E\left(F_p^i\left(k_1,k_2,\ldots,k_r\right)\right)\right]\approx pkm^2N^{2(r-1)}\cdot D[\varepsilon]\cdot D\left[x\left(n_1,n_2,\ldots,n_r\right)\right], \quad (33)$$

де $k=r$ та $k=1$ при обчисленні на інтервалах за всіма вимірами та одним виміром відповідно.

Враховуючи значення дисперсії вихідного сигналу, точність рекурентних методів обчислення багатовимірних ДПФ і ДПХ визначається через $pkm^2N^{r-2}\cdot D[\varepsilon]$ і для $p=N$ та $k=m=1$ складає $N^{r-1}\cdot D[\varepsilon]$, в той час як точність прямих методів обчислення багатовимірних ДПФ і ДПХ складає $N^r\cdot D[\varepsilon]/2$.

Таким чином, на підставі проведеного аналізу точності рекурентних методів обчислення ДПФ і ДПХ можна зробити такі висновки:

1. Точність рекурентних методів обчислення багатовимірних ДПФ збігається з точністю рекурентних методів обчислення багатовимірних ДПХ.
2. Точність рекурентних методів обчислення звичайних багатовимірних ДПФ і ДПХ збігається з точністю рекурентних методів обчислення модифікованих багатовимірних ДПФ і ДПХ.
3. Точність рекурентних методів обчислення багатовимірних ДПФ і ДПХ на ковзних інтервалах в $N/2$ рази вища за точність прямих методів обчислення багатовимірних ДПФ і ДПХ.
4. Точність рекурентних методів обчислення багатовимірних ДПФ і ДПХ на ковзних інтервалах в m разів вища за точність рекурентних методів обчислення багатовимірних ДПФ і ДПХ на стрибкових інтервалах.

Список використаних джерел

1. *Ярославский Л.П.* Цифровая обработка сигналов в оптике и голографии: Введение в цифровую оптику. – М.: Радио и связь, 1987. – 296 с.
2. Цифровые анализаторы спектра / *В.Н. Плотников, А.В. Белинский, В.А. Суханов, Ю.Н. Жигулевцев.* – М.: Радио и связь, 1990. – 184 с.
3. *Волинець В.І.* Рекурентні методи обчислення багатовимірних дискретних перетворень Фур'є та Хартлі // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2003. – № 4. – С. 69-74.
4. *Волинець В.І.* Аналіз точності рекурентних методів обчислення дискретних перетворень Фур'є та Хартлі в арифметиці з плаваючою комою // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2006. – **Т. 11**, № 4. – С. 151-160.

Надійшла до редколегії 05.03.08