Вісник Тернопільського державного технічного університету. 2006. Том 11. № 4

УДК 517.44:004

В. І. Волинець, канд. техн. наук
Вінницький торговельно-економічний інститут

АНАЛІЗ ТОЧНОСТІ РЕКУРЕНТНИХ МЕТОДІВ ОБЧИСЛЕННЯ ДИСКРЕТНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ ФУР'Є ТА ХАРТЛІ В АРИФМЕТИЦІ З ПЛАВАЮЧОЮ КОМОЮ

На основі статистичного методу проведено аналіз точності рекурентних методів обчислення звичайних і модифікованих дискретних перетворень Фур'є та Хартлі на стрибкових і ковзних інтервалах в арифметиці з плаваючою комою. Отримано аналітичні вирази для визначення середньоквадратичних значень похибок обчислення перетворень в залежності від розрядності даних, кількості ітерацій обчислення та середньоквадратичного значення вхідного сигналу, на підставі яких проведено порівняльний аналіз точності рекурентних методів обчислення.

Умовні позначення:

$\boldsymbol{F_{i+m}(k)}$, $\boldsymbol{F_i(k)}$ – звичайне ДПФ на $(i+m)$-му та i-му інтервалах відповідно;

$\boldsymbol{H_{i+m}(k)}$, $\boldsymbol{H_i(k)}$ – звичайне ДПХ на $(i+m)$-му та i-му інтервалах відповідно;

$\boldsymbol{X_{i+m}(k)}$, $\boldsymbol{X_i(k)}$ – модифіковане ДПФ або ДПХ на $(i+m)$-му та i-му інтервалах відповідно;

$\boldsymbol{i}$ – номер попереднього інтервалу вхідного сигналу ($i = 0, 1, 2, \ldots$);

$\boldsymbol{m}$ – зсув поточного інтервалу вхідного сигналу відносно попереднього інтервалу в межах від 1 до $N-1$;

$\boldsymbol{k}$ – номер значення перетворення ($k = \overline{0, N-1}$);

$\boldsymbol{N}$ – розмір перетворення;

$\boldsymbol{\Delta x_{n+i}}$ – різниця значень вхідного сигналу $x(N+n+i)$ та $x(n+i)$;

$\boldsymbol{W^{nk}}$ – базові функції ядра звичайного перетворення Фур'є ($W = \exp(-j2\pi/N)$, де $j=\sqrt{-1}$);

$\boldsymbol{cas(2\pi nk/N)}$ – базові функції ядра звичайного перетворення Хартлі ($\mathrm{cas}(X) = \cos(X) + \sin(X)$);

$\boldsymbol{\alpha((n+i)k)}$ – базові функції ядра модифікованого перетворення, які для модифікованого ДПФ визначаються як $W^{(n+i)k}$, а для модифікованого ДПХ – як $\mathrm{cas}(2\pi(n+i)k/N)$;

$\boldsymbol{Re\,X}$, $\boldsymbol{Im\,X}$ – дійсна та уявна частини значення X відповідно;

$\boldsymbol{Q(X)}$ – значення X з похибкою обчислення;

$\boldsymbol{E(X)}$ – абсолютна похибка обчислення значення X;

$\boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{\varepsilon_\partial}$, $\boldsymbol{\varepsilon_м}$ – відносна похибка операції додавання або множення, операції додавання та операції множення відповідно;

$\boldsymbol{\varepsilon_{\partial_{n,i+m}}}$, $\boldsymbol{\varepsilon_{м_{n,i+m}}}$ – відносна похибка n-ої операції додавання та множення на $i+m$-му інтервалі відповідно;

$\boldsymbol{t_1}$ – коефіцієнт, що визначає відсутність чи наявність похибок обчислення значень Δx_{n+i};

$\boldsymbol{t_2}$ – коефіцієнт, що визначає відсутність чи наявність похибок операцій множення при обчисленні виразів під знаками сум у виразах визначення ДПФ та ДПХ;

$\boldsymbol{p}$ – номер ітерації обчислення ДПФ та ДПХ;

$\boldsymbol{D[X]}$ – дисперсія значення X.

В основі динамічного спектрального аналізу, який проводиться на ковзних або стрибкових інтервалах вхідного сигналу, тобто коли черговий інтервал вхідного сигналу включає відповідно один або декілька нових відліків і така ж кількість початкових відліків вхідного сигналу відкидається, лежить використання рекурентних методів обчислення дискретних перетворень Фур'є (ДПФ) та Хартлі (ДПХ) [1, 2], арифметична складність яких значно нижча за складність прямих та швидких методів обчислення дискретних перетворень, оскільки рекурентні методи враховують результати обчислення на попередніх інтервалах вхідного сигналу.

Важливим критерієм вибору методу обчислення є точність обчислення, яку він забезпечує. В ряді робіт, зокрема, в [3 – 6], проведений аналіз точності прямих та швидких методів обчислення ДПФ та ДПХ в арифметиці з плаваючою комою. В основу аналізу покладений статистичний метод, при якому кожному джерелу елементарної похибки, що виникає внаслідок округлення або усікання результату операції додавання або множення, ставиться у відповідність генератор випадкової похибки з рівномірним законом розподілу та робиться припущення, що всі джерела елементарних похибок не корелюють між собою та з вхідним сигналом, який є білим шумом. В якості кількісної оцінки точності обчислення приймаються середньоквадратичне значення (СКЗ) похибки обчислення перетворення та відношення СКЗ похибки обчислення до СКЗ перетворення, яке фізично інтерпретується як відношення потужності шуму до потужності сигналу.

В даній роботі ставиться задача провести аналіз точності рекурентних методів обчислення звичайних і модифікованих ДПФ та ДПХ на стрибкових і ковзних інтервалах в арифметиці з плаваючою комою.

Рекурентні методи обчислення звичайних і модифікованих ДПФ та ДПХ на стрибкових інтервалах базуються на таких рекурентних виразах [2]:

$$F_{i+m}(k)=\left[F_i(k)+\sum_{n=0}^{m-1}\Delta x_{n+i}W^{nk}\right]\cdot W^{-mk}, \tag{1}$$

$$H_{i+m}(k)=\left[H_i(k)+\sum_{n=0}^{m-1}\Delta x_{n+i}\,cas\frac{2\pi nk}{N}\right]\cdot cos\frac{2\pi mk}{N}-$$
$$-\left[H_i(N-k)+\sum_{n=0}^{m-1}\Delta x_{n+i}\,cas\frac{2\pi n(N-k)}{N}\right]\cdot sin\frac{2\pi mk}{N}, \tag{2}$$

$$X_{i+m}(k)=X_i(k)+\sum_{n=0}^{m-1}\Delta x_{n+i}\alpha((n+i)k). \tag{3}$$

Рекурентні вирази для обчислення звичайних і модифікованих ДПФ та ДПХ на ковзних інтервалах отримуються з виразів (1) – (3) при $m=1$ та відповідно $n=0$.

Проведемо аналіз точності рекурентних методів обчислення звичайного ДПФ. Обчислення дійсної та уявної частин ДПФ за виразом (1) для дійсної послідовності $x(n)$ здійснюється за такими виразами:

$$Re\,F_{i+m}(k)=\left[Re\,F_i(k)+\sum_{n=0}^{m-1}\Delta x_{n+i}\,cos\frac{2\pi nk}{N}\right]\cdot cos\frac{2\pi mk}{N}-$$
$$-\left[Im\,F_i(k)+\sum_{n=0}^{m-1}\Delta x_{n+i}\left(-sin\frac{2\pi nk}{N}\right)\right]\cdot sin\frac{2\pi mk}{N}, \tag{4}$$

$$Im\,F_{i+m}(k)=\left[Re\,F_i(k)+\sum_{n=0}^{m-1}\Delta x_{n+i}\,cos\frac{2\pi nk}{N}\right]\cdot sin\frac{2\pi mk}{N}+$$
$$+\left[Im\,F_i(k)+\sum_{n=0}^{m-1}\Delta x_{n+i}\left(-sin\frac{2\pi nk}{N}\right)\right]\cdot cos\frac{2\pi mk}{N}. \tag{5}$$

Оскільки результат операції додавання та множення Z в арифметиці з плаваючою комою з врахуванням відносної похибки обчислення ε визначається як $Q(Z)=Z\cdot(1+\varepsilon)$, то враховуючи похибки обчислення у виразах (4) та (5), рекурентні вирази обчислення дійсних та уявних частин ДПФ з врахуванням похибок обчислення мають такий вигляд:

$$Q(Re\,F_{i+m}(k))=\left\{\left[Q(Re\,F_i(k))+Q\left(\sum_{n=0}^{m-1}\Delta x_{n+i}\,cos\frac{2\pi nk}{N}\right)\right]\cdot\left(1+\varepsilon_{\partial_{1,i+m}}\right)\cdot cos\frac{2\pi mk}{N}\cdot\left(1+\varepsilon_{\text{м}_{1,i+m}}\right)-\right.$$
$$\left.-\left[Q(Im\,F_i(k))+Q\left(\sum_{n=0}^{m-1}\Delta x_{n+i}\left(-sin\frac{2\pi nk}{N}\right)\right)\right]\cdot\left(1+\varepsilon_{\partial_{2,i+m}}\right)\cdot sin\frac{2\pi mk}{N}\cdot\left(1+\varepsilon_{\text{м}_{2,i+m}}\right)\right\}\cdot\left(1+\varepsilon_{\partial_{3,i+m}}\right), \tag{6}$$

$$Q(Im\,F_{i+m}(k))=\left\{\left[Q(Re\,F_i(k))+Q\left(\sum_{n=0}^{m-1}\Delta x_{n+i}\,cos\frac{2\pi nk}{N}\right)\right]\cdot\left(1+\varepsilon_{\partial_{4,i+m}}\right)\cdot sin\frac{2\pi mk}{N}\cdot\left(1+\varepsilon_{\text{м}_{3,i+m}}\right)+\right.$$
$$\left.+\left[Q(Im\,F_i(k))+Q\left(\sum_{n=0}^{m-1}\Delta x_{n+i}\left(-sin\frac{2\pi nk}{N}\right)\right)\right]\cdot\left(1+\varepsilon_{\partial_{5,i+m}}\right)\cdot cos\frac{2\pi mk}{N}\cdot\left(1+\varepsilon_{\text{м}_{4,i+m}}\right)\right\}\cdot\left(1+\varepsilon_{\partial_{6,i+m}}\right), \tag{7}$$

де

$$Q\left(\sum_{n=0}^{m-1} \Delta x_{n+i} \cos\frac{2\pi nk}{N}\right) = \sum_{n=0}^{m-1} \Delta x_{n+i} \cdot \left(1 + t_1 \varepsilon_{\text{д}_{n+7,i+m}}\right) \cdot \cos\frac{2\pi nk}{N} \cdot \left(1 + t_2 \varepsilon_{\text{м}_{n+4,i+m}}\right) \cdot \prod_{l=\begin{cases}1, n=0\\ n, n\neq 0\end{cases}}^{m-1} \left(1 + \varepsilon_{\text{д}_{m+l+6,i+m}}\right),$$

$$Q\left(\sum_{n=0}^{m-1} \Delta x_{n+i} \left(-\sin\frac{2\pi nk}{N}\right)\right) = \sum_{n=0}^{m-1} \Delta x_{n+i} \cdot \left(1 + t_1 \varepsilon_{\text{д}_{2m+n+6,i+m}}\right) \cdot \left(-\sin\frac{2\pi nk}{N}\right) \cdot \left(1 + t_2 \varepsilon_{\text{м}_{m+n+4,i+m}}\right) \times$$

$$\times \prod_{l=\begin{cases}1, n=0\\ n, n\neq 0\end{cases}}^{m-1} \left(1 + \varepsilon_{\text{д}_{3m+l+5,i+m}}\right),$$

де $t_1 = \begin{cases} 0, i+m < N \\ 1, i+m \geq N \end{cases}$, $t_2 = \begin{cases} 0, m = 1 \\ 1, m \neq 1 \end{cases}$.

Оскільки результат обчислення значення X з врахуванням абсолютної похибки обчислення $E(X)$ визначається як $Q(X) = X + E(X)$, то на підставі виразів (6) та (7) можна отримати рекурентні вирази для визначення похибок обчислення дійсної та уявної частин ДПФ, які без врахування похибок обчислення вищих порядків мають такий вигляд:

$$E\left(Re\,F_{i+m}(k)\right) = Re\,F_{i+m}(k) \cdot \varepsilon_{\text{д}_{3,i+m}} + \left[Re\,F_i(k) + \sum_{n=0}^{m-1} \Delta x_{n+i} \cos\frac{2\pi nk}{N}\right] \cdot \cos\frac{2\pi mk}{N} \cdot \left(\varepsilon_{\text{д}_{1,i+m}} + \varepsilon_{\text{м}_{1,i+m}}\right) -$$

$$- \left[Im\,F_i(k) + \sum_{n=0}^{m-1} \Delta x_{n+i} \left(-\sin\frac{2\pi nk}{N}\right)\right] \cdot \sin\frac{2\pi mk}{N} \cdot \left(\varepsilon_{\text{д}_{2,i+m}} + \varepsilon_{\text{м}_{2,i+m}}\right) +$$

$$+ \left[E\left(Re\,F_i(k)\right) + E\left(\sum_{n=0}^{m-1} \Delta x_{n+i} \cos\frac{2\pi nk}{N}\right)\right] \cdot \cos\frac{2\pi mk}{N} -$$

$$- \left[E\left(Im\,F_i(k)\right) + E\left(\sum_{n=0}^{m-1} \Delta x_{n+i} \left(-\sin\frac{2\pi nk}{N}\right)\right)\right] \cdot \sin\frac{2\pi mk}{N}, \qquad (8)$$

$$E\left(Im\,F_{i+m}(k)\right) = Im\,F_{i+m}(k) \cdot \varepsilon_{\text{д}_{6,i+m}} + \left[Re\,F_i(k) + \sum_{n=0}^{m-1} \Delta x_{n+i} \cos\frac{2\pi nk}{N}\right] \cdot \sin\frac{2\pi mk}{N} \cdot \left(\varepsilon_{\text{д}_{4,i+m}} + \varepsilon_{\text{м}_{3,i+m}}\right) +$$

$$+ \left[Im\,F_i(k) + \sum_{n=0}^{m-1} \Delta x_{n+i} \left(-\sin\frac{2\pi nk}{N}\right)\right] \cdot \cos\frac{2\pi mk}{N} \cdot \left(\varepsilon_{\text{д}_{5,i+m}} + \varepsilon_{\text{м}_{4,i+m}}\right) +$$

$$+ \left[E\left(Re\,F_i(k)\right) + E\left(\sum_{n=0}^{m-1} \Delta x_{n+i} \cos\frac{2\pi nk}{N}\right)\right] \cdot \sin\frac{2\pi mk}{N} +$$

$$+ \left[E\left(Im\,F_i(k)\right) + E\left(\sum_{n=0}^{m-1} \Delta x_{n+i} \left(-\sin\frac{2\pi nk}{N}\right)\right)\right] \cdot \cos\frac{2\pi mk}{N}, \qquad (9)$$

де

$$E\left(\sum_{n=0}^{m-1} \Delta x_{n+i} \cos\frac{2\pi nk}{N}\right) = \sum_{n=0}^{m-1} \Delta x_{n+i} \cos\frac{2\pi nk}{N} \left(t_1 \varepsilon_{\text{д}_{n+7,i+m}} + t_2 \varepsilon_{\text{м}_{n+4,i+m}}\right) + \sum_{l=1}^{m-1} \varepsilon_{\text{д}_{m+l+6,i+m}} \sum_{n=0}^{l} \Delta x_{n+i} \cos\frac{2\pi nk}{N},$$

$$E\left(\sum_{n=0}^{m-1} \Delta x_{n+i} \left(-\sin\frac{2\pi nk}{N}\right)\right) = \sum_{n=0}^{m-1} \Delta x_{n+i} \left(-\sin\frac{2\pi nk}{N}\right) \left(t_1 \varepsilon_{\text{д}_{2m+n+6,i+m}} + t_2 \varepsilon_{\text{м}_{m+n+4,i+m}}\right) +$$

$$+ \sum_{l=1}^{m-1} \varepsilon_{\text{д}_{3m+l+5,i+m}} \sum_{n=0}^{l} \Delta x_{n+i} \left(-\sin\frac{2\pi nk}{N}\right).$$

Враховуючи припущення, покладені в основу методу статистичного аналізу, що вхідний сигнал є білим шумом і відповідно значення перетворення також є білим шумом, математичне очікування похибок обчислення за виразами (8) та (9) має нульове значення, внаслідок чого СКЗ похибок обчислення визначається значеннями дисперсій похибок обчислення, котрі отримуються на підставі виразів (8) та (9) і мають такий вигляд:

$$D\left[E\left(Re\,F_{i+m}(k)\right)\right]=D\left[Re\,F_{i+m}(k)\right]\cdot D[\varepsilon_{\partial}]+\left[D\left[Re\,F_i(k)\right]+D\left[\sum_{n=0}^{m-1}\Delta x_{n+i}\cos\frac{2\pi nk}{N}\right]\right]\cdot\left(\cos\frac{2\pi mk}{N}\right)^2\times$$

$$\times\left(D[\varepsilon_{\partial}]+D[\varepsilon_{м}]\right)+\left[D\left[Im\,F_i(k)\right]+D\left[\sum_{n=0}^{m-1}\Delta x_{n+i}\left(-\sin\frac{2\pi nk}{N}\right)\right]\right]\cdot\left(\sin\frac{2\pi mk}{N}\right)^2\cdot\left(D[\varepsilon_{\partial}]+D[\varepsilon_{м}]\right)+$$

$$+\left[D\left[E\left(Re\,F_i(k)\right)\right]+D\left[E\left(\sum_{n=0}^{m-1}\Delta x_{n+i}\cos\frac{2\pi nk}{N}\right)\right]\right]\cdot\left(\cos\frac{2\pi mk}{N}\right)^2+$$

$$+\left[D\left[E\left(Im\,F_i(k)\right)\right]+D\left[E\left(\sum_{n=0}^{m-1}\Delta x_{n+i}\left(-\sin\frac{2\pi nk}{N}\right)\right)\right]\right]\cdot\left(\sin\frac{2\pi mk}{N}\right)^2, \qquad (10)$$

$$D\left[E\left(Im\,F_{i+m}(k)\right)\right]=D\left[Im\,F_{i+m}(k)\right]\cdot D[\varepsilon_{\partial}]+\left[D\left[Re\,F_i(k)\right]+D\left[\sum_{n=0}^{m-1}\Delta x_{n+i}\cos\frac{2\pi nk}{N}\right]\right]\cdot\left(\sin\frac{2\pi mk}{N}\right)^2\times$$

$$\times\left(D[\varepsilon_{\partial}]+D[\varepsilon_{м}]\right)+\left[D\left[Im\,F_i(k)\right]+D\left[\sum_{n=0}^{m-1}\Delta x_{n+i}\left(-\sin\frac{2\pi nk}{N}\right)\right]\right]\cdot\left(\cos\frac{2\pi mk}{N}\right)^2\cdot\left(D[\varepsilon_{\partial}]+D[\varepsilon_{м}]\right)+$$

$$+\left[D\left[E\left(Re\,F_i(k)\right)\right]+D\left[E\left(\sum_{n=0}^{m-1}\Delta x_{n+i}\cos\frac{2\pi nk}{N}\right)\right]\right]\cdot\left(\sin\frac{2\pi mk}{N}\right)^2+$$

$$+\left[D\left[E\left(Im\,F_i(k)\right)\right]+D\left[E\left(\sum_{n=0}^{m-1}\Delta x_{n+i}\left(-\sin\frac{2\pi nk}{N}\right)\right)\right]\right]\cdot\left(\cos\frac{2\pi mk}{N}\right)^2, \qquad (11)$$

де

$$D\left[E\left(\sum_{n=0}^{m-1}\Delta x_{n+i}\cos\frac{2\pi nk}{N}\right)\right]=D[\Delta x]\cdot\left[\left(t_1D[\varepsilon_{\partial}]+t_2D[\varepsilon_{м}]\right)\sum_{n=0}^{m-1}\left(\cos\frac{2\pi nk}{N}\right)^2+\right.$$

$$\left.+D[\varepsilon_{\partial}]\sum_{l=1}^{m-1}\sum_{n=0}^{l}\left(\cos\frac{2\pi nk}{N}\right)^2\right],$$

$$D\left[E\left(\sum_{n=0}^{m-1}\Delta x_{n+i}\left(-\sin\frac{2\pi nk}{N}\right)\right)\right]=D[\Delta x]\cdot\left[\left(t_1D[\varepsilon_{\partial}]+t_2D[\varepsilon_{м}]\right)\sum_{n=0}^{m-1}\left(-\sin\frac{2\pi nk}{N}\right)^2+\right.$$

$$\left.+D[\varepsilon_{\partial}]\sum_{l=1}^{m-1}\sum_{n=0}^{l}\left(-\sin\frac{2\pi nk}{N}\right)^2\right].$$

На підставі виразів (10) та (11) рекурентний вираз для визначення дисперсії похибок обчислення ДПФ визначається як

$$D\left[E\left(F_{i+m}(k)\right)\right]=D\left[E\left(Re\,F_{i+m}(k)\right)\right]+D\left[E\left(Im\,F_{i+m}(k)\right)\right]=D\left[F_{i+m}(k)\right]\cdot\left(2D[\varepsilon_{\partial}]+D[\varepsilon_{м}]\right)+$$

$$+D[\Delta x]\cdot\left(m\cdot\left(t_1D[\varepsilon_{\partial}]+t_2D[\varepsilon_{м}]\right)+\frac{m^2+m-2}{2}\cdot D[\varepsilon_{\partial}]\right)+D\left[E\left(F_i(k)\right)\right]. \qquad (12)$$

Ітераційний вираз для визначення дисперсії похибок обчислення ДПФ в залежності від номера ітерації p отримується на підставі рекурентного виразу (12) з урахуванням того, що для $i=0$ $E\left(F_0(k)\right)=0$, та має такий вигляд:

$$D\left[E\left(F_{pm}(k)\right)\right]=\left(2D[\varepsilon_{\partial}]+D[\varepsilon_{м}]\right)\sum_{l=1}^{p}D\left[F_{lm}(k)\right]+$$

$$+p\cdot D[\Delta x]\cdot\left(m\cdot\left(t_1D[\varepsilon_{\partial}]+t_2D[\varepsilon_{м}]\right)+\frac{m^2+m-2}{2}\cdot D[\varepsilon_{\partial}]\right). \qquad (13)$$

Враховуючи, що $D\left[F_{lm}(k)\right]=\begin{cases} lm\cdot D[x(n)], l\le N/m \\ N\cdot D[x(n)], l>N/m\end{cases}$ та $D[\Delta x]=\begin{cases} D[x(n)], l\le N/m \\ 2D[x(n)], l>N/m\end{cases}$

вираз (13) приймає такий вигляд:

$$D\left[E\left(F_{pm}(k)\right)\right]=\begin{cases}\left[m\dfrac{p^2+p}{2}\left(2D[\varepsilon_{\partial}]+D[\varepsilon_{м}]\right)+\right.\\ \left.+p\cdot\left(m\cdot t_2D[\varepsilon_{м}]+\dfrac{m^2+m-2}{2}\cdot D[\varepsilon_{\partial}]\right)\right]\cdot D[x(n)],\ p\le\dfrac{N}{m}\\ \left[N\cdot\left(p-\dfrac{N}{2m}+\dfrac{1}{2}\right)\cdot\left(2D[\varepsilon_{\partial}]+D[\varepsilon_{м}]\right)+2\left(p-\dfrac{N}{m}\right)m\cdot D[\varepsilon_{\partial}]+\right.\\ \left.+\left(2p-\dfrac{N}{m}\right)\cdot\left(m\cdot t_2D[\varepsilon_{м}]+\dfrac{m^2+m-2}{2}\cdot D[\varepsilon_{\partial}]\right)\right]\cdot D[x(n)],\ p>\dfrac{N}{m}\end{cases}\tag{14}$$

Ітераційний вираз для визначення похибок обчислення ДПФ на ковзних інтервалах отримується з виразу (14) при $m=1$.

В основу аналізу точності рекурентних методів обчислення звичайного ДПХ покладений аналіз точності обчислення значень $H_{i+m}(k)$ за виразом (2) та значень $H_{i+m}(N-k)$, котрі на підставі виразу (2) визначаються як

$$H_{i+m}(N-k)=\left[H_i(k)+\sum_{n=0}^{m-1}\Delta x_{n+i}\,cas\frac{2\pi nk}{N}\right]\cdot sin\frac{2\pi mk}{N}+$$
$$+\left[H_i(N-k)+\sum_{n=0}^{m-1}\Delta x_{n+i}\,cas\frac{2\pi n(N-k)}{N}\right]\cdot cos\frac{2\pi mk}{N}.\tag{15}$$

Оскільки вирази (2) та (15) обчислення ДПХ фактично відрізняються від виразів (4) та (5) обчислення дійсної та уявної частин ДПФ лише значеннями базових функцій ядер перетворень під знаками сум, то для аналізу точності обчислення ДПХ можуть бути використані вирази, подібні до виразів (6) – (11), в яких замість значень дійсних та уявних частин ДПФ використовуються відповідно значення $H(k)$ та $H(N-k)$ ДПХ, а замість значень $cos\frac{2\pi nk}{N}$ та $\left(-sin\frac{2\pi nk}{N}\right)$ під знаками сум використовуються відповідно значення $cas\frac{2\pi nk}{N}$ та $cas\frac{2\pi n(N-k)}{N}$. В результаті рекурентний та ітераційний вирази для визначення суми дисперсій похибок обчислення значень ДПХ визначається так:

$$D\left[E\left(H_{i+m}(k)\right)\right]+D\left[E\left(H_{i+m}(N-k)\right)\right]=\left(D\left[H_{i+m}(k)\right]+D\left[H_{i+m}(N-k)\right]\right)\cdot\left(2D[\varepsilon_{\partial}]+D[\varepsilon_{м}]\right)+$$
$$+2D[\Delta x]\cdot\left(m\cdot\left(t_1D[\varepsilon_{\partial}]+t_2D[\varepsilon_{м}]\right)+\frac{m^2+m-2}{2}\cdot D[\varepsilon_{\partial}]\right)+\left(D\left[E\left(H_i(k)\right)\right]+D\left[E\left(H_i(N-k)\right)\right]\right),\tag{16}$$

$$D\left[E\left(H_{pm}(k)\right)\right]+D\left[E\left(H_{pm}(N-k)\right)\right]=\left(2D[\varepsilon_{\partial}]+D[\varepsilon_{м}]\right)\sum_{l=1}^{p}\left(D\left[H_{lm}(k)\right]+D\left[H_{lm}(N-k)\right]\right)+$$
$$+2p\cdot D[\Delta x]\cdot\left(m\cdot\left(t_1D[\varepsilon_{\partial}]+t_2D[\varepsilon_{м}]\right)+\frac{m^2+m-2}{2}\cdot D[\varepsilon_{\partial}]\right).\tag{17}$$

Враховуючи, що $D\left[H_{lm}(k)\right]+D\left[H_{lm}(N-k)\right]=\begin{cases}2lm\cdot D[x(n)],l\le N/m\\ 2N\cdot D[x(n)],l>N/m\end{cases}$ та вище визначене значення $D[\Delta x]$, сума дисперсій похибок обчислення значень ДПХ буде вдвічі вища за значення дисперсії похибки обчислення ДПФ за виразом (14), тобто середнє значення дисперсії похибки обчислення одного значення ДПХ співпадає з дисперсією похибки обчислення ДПФ за виразом (14).

Аналіз точності рекурентних методів обчислення модифікованого ДПФ здійснюється на підставі аналізу обчислення дійсної та уявної частин ДПФ за виразом (3), котрі для дійсної послідовності $x(n)$ мають такий вигляд:

$$Re\,F_{i+m}(k)=Re\,F_i(k)+\sum_{n=0}^{m-1}\Delta x_{n+i}\cos\frac{2\pi(n+i)k}{N},\tag{18}$$

$$Im\,F_{i+m}(k)=Im\,F_i(k)+\sum_{n=0}^{m-1}\Delta x_{n+i}\left(-\sin\frac{2\pi(n+i)k}{N}\right).\tag{19}$$

Рекурентні вирази обчислення дійсних та уявних частин ДПФ з врахуванням похибок обчислення виразів (18) та (19) мають такий вигляд:

$$Q(Re\,F_{i+m}(k))=\left[Q(Re\,F_i(k))+Q\left(\sum_{n=0}^{m-1}\Delta x_{n+i}\cos\frac{2\pi(n+i)k}{N}\right)\right]\cdot\left(1+\varepsilon_{\partial_{1,i+m}}\right),\tag{20}$$

$$Q(Im\,F_{i+m}(k))=\left[Q(Im\,F_i(k))+Q\left(\sum_{n=0}^{m-1}\Delta x_{n+i}\left(-\sin\frac{2\pi(n+i)k}{N}\right)\right)\right]\cdot\left(1+\varepsilon_{\partial_{2,i+m}}\right),\tag{21}$$

де

$$Q\left(\sum_{n=0}^{m-1}\Delta x_{n+i}\cos\frac{2\pi(n+i)k}{N}\right)=\sum_{n=0}^{m-1}\Delta x_{n+i}\cdot\left(1+t_1\varepsilon_{\partial_{n+3,i+m}}\right)\cdot\cos\frac{2\pi(n+i)k}{N}\cdot\left(1+\varepsilon_{\text{м}_{n+1,i+m}}\right)\times$$
$$\times\prod_{l=\begin{cases}1,n=0\\n,n\neq0\end{cases}}^{m-1}\left(1+\varepsilon_{\partial_{m+l+2,i+m}}\right),$$

$$Q\left(\sum_{n=0}^{m-1}\Delta x_{n+i}\left(-\sin\frac{2\pi(n+i)k}{N}\right)\right)=\sum_{n=0}^{m-1}\Delta x_{n+i}\cdot\left(1+t_1\varepsilon_{\partial_{2m+n+2,i+m}}\right)\cdot\left(-\sin\frac{2\pi(n+i)k}{N}\right)\cdot\left(1+\varepsilon_{\text{м}_{m+n,i+m}}\right)\times$$
$$\times\prod_{l=\begin{cases}1,n=0\\n,n\neq0\end{cases}}^{m-1}\left(1+\varepsilon_{\partial_{3m+l+1,i+m}}\right).$$

На підставі виразів (20) та (21) можна отримати рекурентні вирази для визначення похибок обчислення дійсної та уявної частин ДПФ, які без врахування похибок обчислення вищих порядків мають такий вигляд:

$$E(Re\,F_{i+m}(k))=Re\,F_{i+m}(k)\cdot\varepsilon_{\partial_{1,i+m}}+E(Re\,F_i(k))+E\left(\sum_{n=0}^{m-1}\Delta x_{n+i}\cos\frac{2\pi(n+i)k}{N}\right),\tag{22}$$

$$E(Im\,F_{i+m}(k))=Im\,F_{i+m}(k)\cdot\varepsilon_{\partial_{2,i+m}}+E(Im\,F_i(k))+E\left(\sum_{n=0}^{m-1}\Delta x_{n+i}\left(-\sin\frac{2\pi(n+i)k}{N}\right)\right),\tag{23}$$

де

$$E\left(\sum_{n=0}^{m-1}\Delta x_{n+i}\cos\frac{2\pi(n+i)k}{N}\right)=\sum_{n=0}^{m-1}\Delta x_{n+i}\cos\frac{2\pi(n+i)k}{N}\left(t_1\varepsilon_{\partial_{n+3,i+m}}+\varepsilon_{\text{м}_{n+1,i+m}}\right)+$$
$$+\sum_{l=1}^{m-1}\varepsilon_{\partial_{m+l+2,i+m}}\sum_{n=0}^{l}\Delta x_{n+i}\cos\frac{2\pi(n+i)k}{N},$$

$$E\left(\sum_{n=0}^{m-1}\Delta x_{n+i}\left(-\sin\frac{2\pi(n+i)k}{N}\right)\right)=\sum_{n=0}^{m-1}\Delta x_{n+i}\left(-\sin\frac{2\pi(n+i)k}{N}\right)\left(t_1\varepsilon_{\partial_{2m+n+2,i+m}}+\varepsilon_{\text{м}_{m+n,i+m}}\right)+$$
$$+\sum_{l=1}^{m-1}\varepsilon_{\partial_{3m+l+1,i+m}}\sum_{n=0}^{l}\Delta x_{n+i}\left(-\sin\frac{2\pi(n+i)k}{N}\right).$$

На підставі виразів (22) та (23) можна отримати рекурентні вирази для визначення дисперсій похибок обчислення дійсної та уявної частин ДПФ, котрі мають такий вигляд:

$$D[E(Re\,F_{i+m}(k))]=D[Re\,F_{i+m}(k)]\cdot D[\varepsilon_\partial]+D[E(Re\,F_i(k))]+D\left[E\left(\sum_{n=0}^{m-1}\Delta x_{n+i}\cos\frac{2\pi nk}{N}\right)\right],\tag{24}$$

$$D[E(Im\,F_{i+m}(k))]=D[Im\,F_{i+m}(k)]\cdot D[\varepsilon_\partial]+D[E(Im\,F_i(k))]+D\left[E\left(\sum_{n=0}^{m-1}\Delta x_{n+i}\left(-\sin\frac{2\pi nk}{N}\right)\right)\right],\tag{25}$$

де

$$D\left[E\left(\sum_{n=0}^{m-1}\Delta x_{n+i}\,cos\frac{2\pi(n+i)k}{N}\right)\right]=D[\Delta x]\cdot\left[\left(t_1D[\varepsilon_\partial]+D[\varepsilon_м]\right)\sum_{n=0}^{m-1}\left(cos\frac{2\pi(n+i)k}{N}\right)^2+\right.$$

$$\left.+D[\varepsilon_\partial]\sum_{l=1}^{m-1}\sum_{n=0}^{l}\left(cos\frac{2\pi(n+i)k}{N}\right)^2\right],$$

$$D\left[E\left(\sum_{n=0}^{m-1}\Delta x_{n+i}\left(-sin\frac{2\pi(n+i)k}{N}\right)\right)\right]=D[\Delta x]\cdot\left[t_1\left(D[\varepsilon_\partial]+D[\varepsilon_м]\right)\sum_{n=0}^{m-1}\left(-sin\frac{2\pi(n+i)k}{N}\right)^2+\right.$$

$$\left.+D[\varepsilon_\partial]\sum_{l=1}^{m-1}\sum_{n=0}^{l}\left(-sin\frac{2\pi(n+i)k}{N}\right)^2\right].$$

На підставі виразів (24) та (25) рекурентний вираз для визначення дисперсії похибок обчислення ДПФ визначається як

$$D[E(F_{i+m}(k))]=D[E(Re\,F_{i+m}(k))]+D[E(Im\,F_{i+m}(k))]=D[F_{i+m}(k)]\cdot D[\varepsilon_\partial]+$$

$$+D[\Delta x]\cdot\left(m\cdot\left(t_1D[\varepsilon_\partial]+D[\varepsilon_м]\right)+\frac{m^2+m-2}{2}\cdot D[\varepsilon_\partial]\right)+D[E(F_i(k))]. \qquad (26)$$

Ітераційний вираз для визначення дисперсії похибок обчислення ДПФ в залежності від номера ітерації p отримується на підставі рекурентного виразу (26) з урахуванням того, що для $i=0$ $E(F_0(k))=0$, та має такий вигляд:

$$D[E(F_{pm}(k))]=D[\varepsilon_\partial]\sum_{l=1}^{p}D[F_{lm}(k)]+p\cdot D[\Delta x]\cdot\left(m\cdot\left(t_1D[\varepsilon_\partial]+D[\varepsilon_м]\right)+\frac{m^2+m-2}{2}\cdot D[\varepsilon_\partial]\right). \qquad (27)$$

Враховуючи вище визначені значення $D[F_{lm}(k)]$ та $D[\Delta x]$, вираз (27) приймає такий вигляд:

$$D[E(F_{pm}(k))]=\begin{cases}\left[m\dfrac{p^2+p}{2}D[\varepsilon_\partial]+p\cdot\left(m\cdot D[\varepsilon_м]+\dfrac{m^2+m-2}{2}\cdot D[\varepsilon_\partial]\right)\right]\cdot D[x(n)],\ p\le\dfrac{N}{m}\\ \left[N\cdot\left(p-\dfrac{N}{2m}+\dfrac{1}{2}\right)\cdot D[\varepsilon_\partial]+2\left(p-\dfrac{N}{m}\right)m\cdot D[\varepsilon_\partial]+\right.\\ \left.+\left(2p-\dfrac{N}{m}\right)\cdot\left(m\cdot D[\varepsilon_м]+\dfrac{m^2+m-2}{2}\cdot D[\varepsilon_\partial]\right)\right]\cdot D[x(n)],\ p>\dfrac{N}{m}\end{cases} \qquad (28)$$

Ітераційний вираз для визначення похибок обчислення ДПФ на ковзних інтервалах отримується з виразу (28) при $m=1$.

В основу аналізу точності рекурентних методів обчислення модифікованого ДПХ покладений аналіз точності обчислення значень $H_{i+m}(k)$та $H_{i+m}(N-k)$ за виразом (3). Оскільки вирази обчислення значень $H_{i+m}(k)$ та $H_{i+m}(N-k)$ ДПХ фактично відрізняються від виразів (18) та (19) обчислення дійсної та уявної частин ДПФ лише значеннями базових функцій ядер перетворень під знаками сум, то для аналізу точності обчислення ДПХ можуть бути використані вирази, подібні до виразів (20) – (25), в яких замість значень дійсних та уявних частин ДПФ використовуються відповідно значення $H(k)$ та $H(N-k)$ ДПХ, а замість значень $cos\frac{2\pi(n+i)k}{N}$ та $\left(-sin\frac{2\pi(n+i)k}{N}\right)$ під знаками сум використовуються відповідно значення $cas\frac{2\pi(n+i)k}{N}$ та $cas\frac{2\pi(n+i)(N-k)}{N}$. В результаті рекурентний та ітераційний вирази для визначення суми дисперсій похибок обчислення значень ДПХ визначається так:

$$D[E(H_{i+m}(k))]+D[E(H_{i+m}(N-k))]=\left(D[H_{i+m}(k)]+D[H_{i+m}(N-k)]\right)\cdot D[\varepsilon_\partial]+$$

$$+2D[\Delta x]\cdot\left(m\cdot\left(t_1D[\varepsilon_\partial]+D[\varepsilon_м]\right)+\frac{m^2+m-2}{2}\cdot D[\varepsilon_\partial]\right)+\left(D[E(H_i(k))]+D[E(H_i(N-k))]\right), \quad (29)$$

$$D[E(H_{pm}(k))]+D[E(H_{pm}(N-k))]=D[\varepsilon_\partial]\sum_{l=1}^{p}\left(D[H_{lm}(k)]+D[H_{lm}(N-k)]\right)+$$
$$+2p\cdot D[\Delta x]\cdot\left(m\cdot\left(t_1D[\varepsilon_\partial]+D[\varepsilon_м]\right)+\frac{m^2+m-2}{2}\cdot D[\varepsilon_\partial]\right). \quad (30)$$

Враховуючи вище визначені значення $D[H_{lm}(k)]+D[H_{lm}(N-k)]$ та $D[\Delta x]$, сума дисперсій похибок обчислення значень ДПХ буде вдвічі вища за значення дисперсії похибки обчислення ДПФ за виразом (28), тобто середнє значення дисперсії похибки обчислення одного значення ДПХ співпадає з дисперсією похибки обчислення ДПФ за виразом (28).

Використовуючи вирази (14) та (28), можна визначити СКЗ похибок обчислення звичайних та модифікованих ДПФ та ДПХ на стрибкових і ковзних інтервалах та їхні відношення до СКЗ вхідного сигналу з урахуванням значень дисперсій відносних похибок операцій множення й додавання $D[\varepsilon_м]$ та $D[\varepsilon_\partial]$, котрі для $(b+1)$- розрядних чисел мають такі значення [3]: $2^{-2b}/3$ – для випадку округлення прямого, оберненого й доповняльного коду та усікання доповняльного коду; $4\cdot 2^{-2b}/3$ – для випадку усікання прямого й оберненого коду. Прийнявши $D[\varepsilon_м]=D[\varepsilon_\partial]=D[\varepsilon]$, вирази (14) та (28) приймають відповідно такий вигляд:

$$D[E(F_{pm}(k))]=\begin{cases}\left[3m\dfrac{p^2+p}{2}+p\cdot\left(t_2m+\dfrac{m^2+m}{2}-1\right)\right]\cdot D[\varepsilon]\cdot D[x(n)], p\le\dfrac{N}{m}\\ \left[3N\cdot\left(p-\dfrac{N}{2m}+\dfrac{1}{2}\right)+2\left(p-\dfrac{N}{m}\right)m+\right.\\ \left.+\left(2p-\dfrac{N}{m}\right)\cdot\left(t_2m+\dfrac{m^2+m}{2}-1\right)\right]\cdot D[\varepsilon]\cdot D[x(n)], p>\dfrac{N}{m}\end{cases} \quad (31)$$

$$D[E(F_{pm}(k))]=\begin{cases}\left[m\dfrac{p^2+p}{2}+p\cdot\left(\dfrac{m^2+3m}{2}-1\right)\right]\cdot D[\varepsilon]\cdot D[x(n)], p\le\dfrac{N}{m}\\ \left[N\cdot\left(p-\dfrac{N}{2m}+\dfrac{1}{2}\right)+2\left(p-\dfrac{N}{m}\right)m+\right.\\ \left.+\left(2p-\dfrac{N}{m}\right)\cdot\left(\dfrac{m^2+3m-2}{2}\right)\right]\cdot D[\varepsilon]\cdot D[x(n)], p>\dfrac{N}{m}\end{cases} \quad (32)$$

Для проведення порівняльного аналізу точності рекурентних методів обчислення ДПФ та ДПХ визначимо дисперсії похибок обчислення на підставі виразів (31) та (32) для $p>>N/m$, в результаті чого отримаємо відповідно такі вирази:

$$D[E(F_{pm}(k))]=\left(3N+m^2+3m+2t_2m-2\right)p\cdot D[\varepsilon]\cdot D[x(n)] \quad (33)$$

$$D[E(F_{pm}(k))]=\left(N+m^2+5m-2\right)p\cdot D[\varepsilon]\cdot D[x(n)] \quad (34)$$

Відношення дисперсії похибки обчислення за виразом (33) до дисперсії похибки обчислення за виразом (34) визначається як $\dfrac{3N+m^2+3m+2t_2m-2}{N+m^2+5m-2}$ і при $N>>m$ його значення дорівнює трьом, а при $m\to N$ – одному.

Відношення дисперсії похибки обчислення на ковзних інтервалах до дисперсії похибки обчислення на стрибкових інтервалах за виразом (33) визначається як $\dfrac{3N+2}{(3N-2)/m+m+5}$ і при $N>>m$ його значення дорівнює одному, а при $m\to N$ –

трьом.

Відношення дисперсії похибки обчислення на ковзних інтервалах до дисперсії похибки обчислення на стрибкових інтервалах за виразом (34) визначається як $\dfrac{N+4}{(N-2)/m+m+5}$ і при $N >> m$ та $m \to N$ його значення дорівнює одному.

Висновки

В результаті аналізу точності рекурентних методів обчислення ДПФ та ДПХ в арифметиці з плаваючою комою можна зробити такі основні висновки:

1. Точність рекурентних методів обчислення ДПФ та ДПХ збігається.

2. Точність рекурентних методів обчислення модифікованих ДПФ та ДПХ втричі вища за точність обчислення звичайних ДПФ та ДПХ при $N >> m$ (відповідно $p >> m$) та збігається при $m \to N$.

3. Точність рекурентних методів обчислення модифікованих ДПФ та ДПХ на стрибкових інтервалах збігається з точністю обчислення на ковзних інтервалах.

4. Точність рекурентних методів обчислення звичайних ДПФ та ДПХ на стрибкових інтервалах збігається з точністю обчислення на ковзних інтервалах при $N >> m$ та втричі нижча при $m \to N$.

Отримані результати можуть бути використані при апаратурній та програмній реалізації ДПФ та ДПХ на основі рекурентних методів обчислення для визначення розрядності даних в залежності від необхідної точності та кількості ітерацій обчислення.

On the basis of statistical method the analysis of exactness of recurrent methods of calculation of ordinary and modified discrete Fourier and Hartley transforms on skipping and sliding intervals in floating point arithmetic is executed. Analytical expressions for determination of root-mean-squares value of errors of calculation of transforms depending on the bit capacity of data, amount of iterations of calculation and root-mean-square value of input signal are obtained, on the basis of which the comparative analysis of exactness of recurrent methods of calculation is executed.

Література

1. Рекуррентные алгоритмы вычисления дискретных преобразований и энергетического спектра / Волынец В.И.; Винницкий политехнический институт. – Винница, 1988. – 14 с. – Рус. – Деп. в УкрНИИНТИ 18.11.88; № 2898 – Ук88.
2. Волинець В.І. Рекурентні методи обчислення модифікованих дискретних перетворень Фур'є та Хартлі // Вісник ВПІ. – 2003. – № 1. – С. 77-80.
3. Оппенгейм А.В., Шафер Р.В. Цифровая обработка сигналов. – М.: Связь, 1979. – 416 с.
4. Бовбель Е.И., Зайцева Е.М., Микулович В.И. Ошибки цифровых систем, основанных на вычислении дискретного преобразования Фурье // Зарубежная радиоэлектроника. – 1981. – № 5. – С. 3-25.
5. Zakhor A., Oppengejm A. Quantization errors in the computation of the discrete Hartley transform // IEEE Trans. on ASSP. – 1987. – V. 35, № 11. – P. 1592-1602.
6. Шихов Н.Б. Дискретное преобразование Хартли для систем автоматизации эксперимента. – Минск: 1987. – 62 с. (Препр. / АН БССР, Ин-т техн. кибернетики: № 28).