УДК 519.688: 517.443

РЕКУРЕНТНІ МЕТОДИ ОБЧИСЛЕННЯ МОДИФІКОВАНИХ ДИСКРЕТНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ ФУР'Є ТА ХАРТЛІ ДЛЯ ОКРЕМИХ РОЗМІРІВ ПЕРЕТВОРЕНЬ

В.І. Волинець, канд. техн. наук, доцент

Вінницький торговельно-економічний інститут КНТЕУ
e-mail: victvol@mail.ru

Отримані рекурентні вирази, що лежать в основі рекурентних методів обчислення модифікованих дискретних перетворень Фур'є та Хартлі на стрибкових та ковзних інтервалах для розмірів перетворень, кратних двом та чотирьом. Арифметична складність запропонованих рекурентних методів за кількістю операцій множення в 2-4 рази менша арифметичної складності рекурентних методів для довільних розмірів перетворень.

Вступ і постановка задачі. В основі динамічного спектрального аналізу, який проводиться на ковзних або стрибкових інтервалах вхідного сигналу, тобто коли черговий інтервал вхідного сигналу включає відповідно один або декілька нових відліків і така ж кількість початкових відліків вхідного сигналу відкидається, лежить використання рекурентних методів обчислення дискретних перетворень Фур'є (ДПФ) та Хартлі (ДПХ), ефективність яких значно вища за ефективність прямих та швидких методів обчислення дискретних перетворень, оскільки рекурентні методи враховують результати обчислення на попередніх інтервалах вхідного сигналу.

Рекурентні методи обчислення ДПФ та ДПХ базуються на рекурентних виразах, котрі описані в ряді робіт [1–7]. Зокрема, в роботах [4, 7] на основі загального підходу до розробки рекурентних методів отримані рекурентні вирази для обчислення звичайних [4] та модифікованих [7] ДПФ та ДПХ на ковзних та стрибкових інтервалах. Порівняльний аналіз арифметичної складності рекурентних методів обчислення звичайних та модифікованих ДПФ та ДПХ [7] показав, що рекурентні методи обчислення модифікованих ДПФ та ДПХ забезпечують виграш, котрий на ковзних інтервалах досягає 2 разів за кількістю операцій множення та додавання, внаслідок чого вони можуть бути використані в аналізаторах спектра для підвищення їх швидкодії або зменшення апаратурних витрат.

Однак аналіз рекурентних методів обчислення модифікованих ДПФ та ДПХ для окремих розмірів перетворень з метою виявлення можливостей зменшення їх арифметичної складності не проводився. Тому дана робота присвячена розв'язанню цієї задачі.

Рекурентні методи обчислення модифікованих ДПФ та ДПХ. Рекурентний вираз для обчислення модифікованих ДПФ та ДПХ на стрибкових інтервалах має такий вигляд [7]:

$$X_{i+m}(k) = X_i(k) + \sum_{n=0}^{m-1}[x(N+n+i) - x(n+i)] \cdot \alpha((n+i)k), \tag{1}$$

де $X_{i+m}(k)$ – значення перетворення на $(i+m)$- му інтервалі, де $i = 0, 1, 2, ...$ – номер попереднього інтервалу вхідного сигналу, m – зсув інтервалу вхідного сигналу відносно попереднього інтервалу в межах від 1 до $N-1$, $k = \overline{0, N/2-1}$ для ДПФ або $k = \overline{0, N-1}$ для ДПХ у випадку дійсного вхідного сигналу;

$x(N+n+i)$, $x(n+i)$ – значення вхідного сигналу, де N – розмір перетворення;

$\alpha((n+i)k)$ – значення базової функції ядра перетворення, яка для ДПФ визначаються як $\alpha((n+i)k) = \cos(2\pi(n+i)k/N) - j \cdot \sin(2\pi(n+i)k/N)$, де $j = \sqrt{-1}$, а для ДПХ як $\alpha((n+i)k) = \mathrm{cas}(2\pi(n+i)k/N) = \cos(2\pi(n+i)k/N) + \sin(2\pi(n+i)k/N)$.

Рекурентний вираз для обчислення модифікованих ДПФ та ДПХ на ковзних інтервалах отримується з виразу (1) при $m = 1$ та відповідно $n = 0$.

З аналізу виразу (1) видно, що при його обчисленні можна досягти скорочення кількості операцій множення для окремих розмірів перетворень, враховуючи властивості базових функцій ядер перетворень.

Оскільки для парних значень N

$$\cos(2\pi(n+i)(N/2-k)/N)=\begin{cases}\cos(2\pi(n+i)k/N), & (n+i)=2l\\ -\cos(2\pi(n+i)k/N), & (n+i)=2l+1\end{cases},$$

$$\sin(2\pi(n+i)(N/2-k)/N)=\begin{cases}-\sin(2\pi(n+i)k/N), & (n+i)=2l\\ \sin(2\pi(n+i)k/N), & (n+i)=2l+1\end{cases},$$

де $l=0,1,2\ldots$, то рекурентний метод обчислення ДПФ на стрибкових інтервалах для парних значень N може базуватись на таких рекурентних виразах:

$$\left.\begin{aligned}&\operatorname{Re}X_{i+n+1}(k)=\operatorname{Re}X_{i+n}(k)+T_{1,(n+i)}(k)\\ &\operatorname{Im}X_{i+n+1}(k)=\operatorname{Im}X_{i+n}(k)+T_{2,(n+i)}(k)\\ &\operatorname{Re}X_{i+n+1}(N/2-k)=\operatorname{Re}X_{i+n}(N/2-k)+T_{3,(n+i)}(k)\\ &\operatorname{Im}X_{i+n+1}(N/2-k)=\operatorname{Im}X_{i+n}(N/2-k)+T_{4,(n+i)}(k)\end{aligned}\right\}, \qquad (2)$$

де Re та Im – дійсні та уявні частини значень ДПФ;

$T_{1,(n+i)}(k)=[x(N+n+i)-x(n+i)]\cdot\cos(2\pi(n+i)k/N)$;

$T_{2,(n+i)}(k)=[x(N+n+i)-x(n+i)]\cdot(-\sin(2\pi(n+i)k/N))$;

$T_{3,(n+i)}(k)=\begin{cases}T_{1,(n+i)}(k), & (n+i)=2l\\ -T_{1,(n+i)}(k), & (n+i)=2l+1\end{cases}$; $T_{4,(n+i)}(k)=\begin{cases}-T_{2,(n+i)}(k), & (n+i)=2l\\ T_{2,(n+i)}(k), & (n+i)=2l+1\end{cases}$;

$k=\overline{0,N/4}$; $n=\overline{0,m-1}$.

Оскільки для парних значень N

$$\operatorname{cas}(2\pi(n+i)(N/2+k)/N)=\begin{cases}\operatorname{cas}(2\pi(n+i)k/N), & (n+i)=2l\\ -\operatorname{cas}(2\pi(n+i)k/N), & (n+i)=2l+1\end{cases},$$

$$\operatorname{cas}(2\pi(n+i)(N/2-k)/N)=\begin{cases}\operatorname{cas}(2\pi(n+i)(N-k)/N), & (n+i)=2l\\ -\operatorname{cas}(2\pi(n+i)(N-k)/N), & (n+i)=2l+1\end{cases},$$

то рекурентний метод обчислення ДПХ на стрибкових інтервалах для парних значень N може базуватись на таких рекурентних виразах:

$$\left.\begin{aligned}&X_{i+n+1}(k)=X_{i+n}(k)+T_{1,(n+i)}(k)\\ &X_{i+n+1}(N-k)=X_{i+n}(N-k)+T_{2,(n+i)}(k)\\ &X_{i+n+1}(N/2+k)=X_{i+n}(N/2+k)+T_{3,(n+i)}(k)\\ &X_{i+n+1}(N/2-k)=X_{i+n}(N/2-k)+T_{4,(n+i)}(k)\end{aligned}\right\}, \qquad (3)$$

де $T_{1,(n+i)}(k)=[x(N+n+i)-x(n+i)]\cdot\operatorname{cas}(2\pi(n+i)k/N)$;

$T_{2,(n+i)}(k)=[x(N+n+i)-x(n+i)]\cdot\operatorname{cas}(2\pi(n+i)(N-k)/N)$;

$T_{3,(n+i)}(k)=\begin{cases}T_{1,(n+i)}(k), & (n+i)=2l\\ -T_{1,(n+i)}(k), & (n+i)=2l+1\end{cases}$; $T_{4,(n+i)}(k)=\begin{cases}T_{2,(n+i)}(k), & (n+i)=2l\\ -T_{2,(n+i)}(k), & (n+i)=2l+1\end{cases}$;

$k=\overline{0,N/4}$; $n=\overline{0,m-1}$.

Додаткового скорочення кількості операцій множення можна досягти для значень розмірів перетворень, кратних чотирьом. Оскільки для значень N, кратних чотирьом,

$$\cos(2\pi(n+i)(N/4-k)/N)=\begin{cases}\cos(2\pi(n+i)k/N), & (n+i)=4l\\ \sin(2\pi(n+i)k/N), & (n+i)=4l+1\\ -\cos(2\pi(n+i)k/N), & (n+i)=4l+2\\ -\sin(2\pi(n+i)k/N), & (n+i)=4l+3\end{cases},$$

$$\sin(2\pi(n+i)(N/4-k)/N)=\begin{cases}-\sin(2\pi(n+i)k/N), & (n+i)=4l\\ \cos(2\pi(n+i)k/N), & (n+i)=4l+1\\ \sin(2\pi(n+i)k/N), & (n+i)=4l+2\\ -\cos(2\pi(n+i)k/N), & (n+i)=4l+3\end{cases},$$

$$\cos(2\pi(n+i)(N/4+k)/N)=\begin{cases}\cos(2\pi(n+i)k/N), & (n+i)=4l\\ -\sin(2\pi(n+i)k/N), & (n+i)=4l+1\\ -\cos(2\pi(n+i)k/N), & (n+i)=4l+2\\ \sin(2\pi(n+i)k/N), & (n+i)=4l+3\end{cases},$$

$$\sin(2\pi(n+i)(N/4+k)/N)=\begin{cases}\sin(2\pi(n+i)k/N), & (n+i)=4l\\ \cos(2\pi(n+i)k/N), & (n+i)=4l+1\\ -\sin(2\pi(n+i)k/N), & (n+i)=4l+2\\ -\cos(2\pi(n+i)k/N), & (n+i)=4l+3\end{cases},$$

то рекурентний метод обчислення ДПФ на стрибкових інтервалах для значень N, кратних чотирьом, може базуватись на таких рекурентних виразах:

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{Re}X_{i+n+1}(k)&=\operatorname{Re}X_{i+n}(k)+T_{1,(n+i)}(k)\\
\operatorname{Im}X_{i+n+1}(k)&=\operatorname{Im}X_{i+n}(k)+T_{2,(n+i)}(k)\\
\operatorname{Re}X_{i+n+1}(N/2-k)&=\operatorname{Re}X_{i+n}(N/2-k)+T_{3,(n+i)}(k)\\
\operatorname{Im}X_{i+n+1}(N/2-k)&=\operatorname{Im}X_{i+n}(N/2-k)+T_{4,(n+i)}(k)\\
\operatorname{Re}X_{i+n+1}(N/4-k)&=\operatorname{Re}X_{i+n}(N/4-k)+T_{5,(n+i)}(k)\\
\operatorname{Im}X_{i+n+1}(N/4-k)&=\operatorname{Im}X_{i+n}(N/4-k)+T_{6,(n+i)}(k)\\
\operatorname{Re}X_{i+n+1}(N/4+k)&=\operatorname{Re}X_{i+n}(N/4+k)+T_{7,(n+i)}(k)\\
\operatorname{Im}X_{i+n+1}(N/4+k)&=\operatorname{Im}X_{i+n}(N/4+k)+T_{8,(n+i)}(k)
\end{aligned}\right\},\tag{4}$$

де $T_{1,(n+i)}(k)=[x(N+n+i)-x(n+i)]\cdot\cos(2\pi(n+i)k/N)$;

$T_{2,(n+i)}(k)=[x(N+n+i)-x(n+i)]\cdot(-\sin(2\pi(n+i)k/N))$;

$T_{3,(n+i)}(k)=\begin{cases}T_{1,(n+i)}(k), & (n+i)=2l\\ -T_{1,(n+i)}(k), & (n+i)=2l+1\end{cases}$; $T_{4,(n+i)}(k)=\begin{cases}-T_{2,(n+i)}(k), & (n+i)=2l\\ T_{2,(n+i)}(k), & (n+i)=2l+1\end{cases}$;

$T_{5,(n+i)}(k)=\begin{cases}T_{1,(n+i)}(k), & (n+i)=4l\\ T_{2,(n+i)}(k), & (n+i)=4l+1\\ -T_{1,(n+i)}(k), & (n+i)=4l+2\\ -T_{2,(n+i)}(k), & (n+i)=4l+3\end{cases}$; $T_{6,(n+i)}(k)=\begin{cases}-T_{2,(n+i)}(k), & (n+i)=4l\\ T_{1,(n+i)}(k), & (n+i)=4l+1\\ T_{2,(n+i)}(k), & (n+i)=4l+2\\ -T_{1,(n+i)}(k), & (n+i)=4l+3\end{cases}$;

$T_{7,(n+i)}(k)=\begin{cases}T_{1,(n+i)}(k), & (n+i)=4l\\ -T_{2,(n+i)}(k), & (n+i)=4l+1\\ -T_{1,(n+i)}(k), & (n+i)=4l+2\\ T_{2,(n+i)}(k), & (n+i)=4l+3\end{cases}$; $T_{8,(n+i)}(k)=\begin{cases}T_{2,(n+i)}(k), & (n+i)=4l\\ T_{1,(n+i)}(k), & (n+i)=4l+1\\ -T_{2,(n+i)}(k), & (n+i)=4l+2\\ -T_{1,(n+i)}(k), & (n+i)=4l+3\end{cases}$;

$k=\overline{0,\,]N/8[}$ ($]N/8[$ – ціла частина значення $N/8$); $n=\overline{0,m-1}$.

Оскільки для значень N, кратних чотирьом,

$$\mathrm{cas}(2\pi(n+i)(N/4+k)/N)=\begin{cases}\mathrm{cas}(2\pi(n+i)k/N), & (n+i)=4l\\ \mathrm{cas}(2\pi(n+i)(N-k)/N), & (n+i)=4l+1\\ -\mathrm{cas}(2\pi(n+i)k/N), & (n+i)=4l+2\\ -\mathrm{cas}(2\pi(n+i)(N-k)/N), & (n+i)=4l+3\end{cases},$$

$$\mathrm{cas}(2\pi(n+i)(3N/4-k)/N)=\begin{cases}\mathrm{cas}(2\pi(n+i)(N-k)/N), & (n+i)=4l\\ -\mathrm{cas}(2\pi(n+i)k/N), & (n+i)=4l+1\\ -\mathrm{cas}(2\pi(n+i)(N-k)/N), & (n+i)=4l+2\\ \mathrm{cas}(2\pi(n+i)k/N), & (n+i)=4l+3\end{cases},$$

$$\mathrm{cas}(2\pi(n+i)(3N/4+k)/N)=\begin{cases}\mathrm{cas}(2\pi(n+i)k/N), & (n+i)=4l\\ -\mathrm{cas}(2\pi(n+i)(N-k)/N), & (n+i)=4l+1\\ -\mathrm{cas}(2\pi(n+i)k/N), & (n+i)=4l+2\\ \mathrm{cas}(2\pi(n+i)(N-k)/N), & (n+i)=4l+3\end{cases},$$

$$\mathrm{cas}(2\pi(n+i)(N/4-k)/N)=\begin{cases}\mathrm{cas}(2\pi(n+i)(N-k)/N), & (n+i)=4l\\ \mathrm{cas}(2\pi(n+i)k/N), & (n+i)=4l+1\\ -\mathrm{cas}(2\pi(n+i)(N-k)/N), & (n+i)=4l+2\\ -\mathrm{cas}(2\pi(n+i)k/N), & (n+i)=4l+3\end{cases},$$

то рекурентний метод обчислення ДПХ на стрибкових інтервалах для значень N, кратних чотирьом, може базуватись на таких рекурентних виразах:

$$\left.\begin{aligned}X_{i+n+1}(k)&=X_{i+n}(k)+T_{1,(n+i)}(k)\\ X_{i+n+1}(N-k)&=X_{i+n}(N-k)+T_{2,(n+i)}(k)\\ X_{i+n+1}(N/2+k)&=X_{i+n}(N/2+k)+T_{3,(n+i)}(k)\\ X_{i+n+1}(N/2-k)&=X_{i+n}(N/2-k)+T_{4,(n+i)}(k)\\ X_{i+n+1}(N/4+k)&=X_{i+n}(N/4+k)+T_{5,(n+i)}(k)\\ X_{i+n+1}(3N/4-k)&=X_{i+n}(3N/4-k)+T_{6,(n+i)}(k)\\ X_{i+n+1}(3N/4+k)&=X_{i+n}(3N/4+k)+T_{7,(n+i)}(k)\\ X_{i+n+1}(N/4-k)&=X_{i+n}(N/4-k)+T_{8,(n+i)}(k)\end{aligned}\right\},\qquad(5)$$

де $T_{1,(n+i)}(k)=[x(N+n+i)-x(n+i)]\cdot\mathrm{cas}(2\pi(n+i)k/N)$;

$T_{2,(n+i)}(k)=[x(N+n+i)-x(n+i)]\cdot\mathrm{cas}(2\pi(n+i)(N-k)/N)$;

$$T_{3,(n+i)}(k)=\begin{cases}T_{1,(n+i)}(k), & (n+i)=2l\\ -T_{1,(n+i)}(k), & (n+i)=2l+1\end{cases};\quad T_{4,(n+i)}(k)=\begin{cases}T_{2,(n+i)}(k), & (n+i)=2l\\ -T_{2,(n+i)}(k), & (n+i)=2l+1\end{cases};$$

$$T_{5,(n+i)}(k)=\begin{cases}T_{1,(n+i)}(k), & (n+i)=4l\\ T_{2,(n+i)}(k), & (n+i)=4l+1\\ -T_{1,(n+i)}(k), & (n+i)=4l+2\\ -T_{2,(n+i)}(k), & (n+i)=4l+3\end{cases};\quad T_{6,(n+i)}(k)=\begin{cases}T_{2,(n+i)}(k), & (n+i)=4l\\ -T_{1,(n+i)}(k), & (n+i)=4l+1\\ -T_{2,(n+i)}(k), & (n+i)=4l+2\\ T_{1,(n+i)}(k), & (n+i)=4l+3\end{cases};$$

$$T_{7,(n+i)}(k)=\begin{cases}T_{1,(n+i)}(k), & (n+i)=4l\\ -T_{2,(n+i)}(k), & (n+i)=4l+1\\ -T_{1,(n+i)}(k), & (n+i)=4l+2\\ T_{2,(n+i)}(k), & (n+i)=4l+3\end{cases};\quad T_{8,(n+i)}(k)=\begin{cases}T_{2,(n+i)}(k), & (n+i)=4l\\ T_{1,(n+i)}(k), & (n+i)=4l+1\\ -T_{2,(n+i)}(k), & (n+i)=4l+2\\ -T_{1,(n+i)}(k), & (n+i)=4l+3\end{cases};$$

$k = \overline{0,]N/8[}$; $n = \overline{0, m-1}$.

Рекурентні вирази для обчислення модифікованих ДПФ та ДПХ на ковзних інтервалах для парних та кратних чотирьом значень N отримуються з виразів (2) – (5) при $m = 1$ та відповідно $n = 0$.

Арифметична складність рекурентних методів обчислення модифікованих ДПФ та ДПХ на стрибкових та ковзних інтервалах для різних розмірів перетворень представлена в таблиці. Порівняльний аналіз арифметичної складності рекурентних методів для розмірів перетворень, кратних двом та чотирьом, з арифметичною складністю рекурентних методів для довільних розмірів перетворень показав, що вони забезпечують виграш за кількістю операцій множення відповідно у $N/(N/2+2)$ та $N/(]N/8[\cdot 2+2)$ рази, що для $N \to \infty$ складає 2-4 рази, маючи практично однакову арифметичну складність за кількістю операцій додавання.

Арифметична складність рекурентних методів обчислення модифікованих ДПФ та ДПХ

Розмір перетворення N	Інтервал вхідного сигналу	Кількість операцій	
		множення	додавання
Довільний (вираз (1))	Стрибковий	Nm	$(N+1)m$
	Ковзний	N	$N+1$
Кратний двом (вирази (2) – (3))	Стрибковий	$(N/2+2)m$	$(N+5)m$
	Ковзний	$N/2+2$	$N+5$
Кратний чотирьом (вирази (4) – (5))	Стрибковий	$(]N/8[\cdot 2+2)m$	$(]N/8[\cdot 8+9)m$
	Ковзний	$]N/8[\cdot 2+2$	$]N/8[\cdot 8+9$

Висновки. В результаті аналізу рекурентних виразів, що лежать в основі рекурентних методів обчислення модифікованих дискретних перетворень Фур'є та Хартлі на стрибкових та ковзних інтервалах для довільних розмірів перетворень, з врахуванням властивостей базових функцій ядер перетворень в даній роботі отримані рекурентні вирази рекурентних методів обчислення модифікованих дискретних перетворень Фур'є та Хартлі на стрибкових та ковзних інтервалах для розмірів перетворень, кратних двом та чотирьом. Порівняльний аналіз арифметичної складності рекурентних методів для розмірів перетворень, кратних двом та чотирьом, з арифметичною складністю рекурентних методів для довільних розмірів перетворень показав, що вони забезпечують виграш за кількістю операцій множення в 2-4 рази, маючи практично однакову арифметичну складність за кількістю операцій додавання. Отримані результати можуть бути використані в аналізаторах спектра для підвищення їх швидкодії.

Список літератури

1. *Белецкий А.Я.* Рекуррентный алгоритм дискретного преобразования Фурье // Электронное моделирование. – 1987. – № 2. – С. 94–95.
2. *Иваненко В.Г.* Рекуррентное вычисление дискретного преобразования Фурье. – М.: Препринт МИФИ № 014-87. – 1987. – 16 с.
3. *Бернанди А., Брейсуэлл Р.Н.* Обновление спектральной функции действительного сигнала методом Хартли // ТИИЭР. – 1987. – Т. 75. – № 7. – С. 111–112.
4. *Волынец В.И.* Рекуррентные алгоритмы вычисления дискретных преобразований и энергетического спектра // Винницкий политехнический институт. – Винница. – 1988. – 14 с. – Деп. в УкрНИИНТИ 18.11.88, № 2898-Ук88.
5. *Лейтес Р.Д., Соболев В.Н.* Цифровое моделирование систем синтетической полифонии. – М.: Связь, 1969. – 128 с.
6. *Плотников В.Н., Белинский А.В., Суханов В.А., Жигулевцев Ю.Н.* Цифровые анализаторы спектра. – М.: Радио и связь, 1990. – 184 с.
7. *Волинець В.І.* Рекурентні методи обчислення модифікованих дискретних перетворень Фур'є та Хартлі // Вісник ВПІ. – 2003. – № 1. – С. 77–80.