УДК 330.11

Степан ПОПІНА, Олеся МАРТИНЮК, Галина СЕНІВ

ОПТИМІЗАЦІЯ ЗАПАСІВ ПРИ ВИПАДКОВОМУ ПОПИТІ НА РЕСУРС

Сформульовано завдання визначити оптимальний запас ресурсу. Розглянуто різні математичні моделі густини розподілу імовірності попиту. Використано критерій оптимальності – мінімізація математичного сподівання витрат на зберігання надлишку ресурсу та втрат від його дефіциту. Визначено оптимальні величини запасу ресурсу, коли попит на цей ресурс є неперервною випадковою величиною. Проаналізовані моделі, для яких ймовірність попиту на ресурс зменшується із зростанням цього попиту та зі зростаючими густинами розподілу ймовірностей попиту на ресурс.

Ключові слова: *оптимізація запасу, попит на ресурс, густина розподілу ймовірностей попиту.*

JEL: C1, C4, C5

Постановка проблеми. Різні види людської діяльності потребують запасів ресурсів. На рівні фірми запаси відносяться до числа об’єктів, які вимагають значимих капіталовкладень, і тому є одним із чинників, що визначають стратегію і тактику підприємства. Запаси завжди вважались елементом, який забезпечує безпеку системи розподілу, її гнучке функціонування.

Одним із стимулів до створення запасів є вартість їхнього негативного рівня (дефіцит). При наявності дефіциту існують три можливі види втрат перерахованих у порядку зростання їх негативного впливу: витрати у зв’язку з затримкою часу виконання замовлення; витрати, обумовлені втратою збуту, коли споживач купує в іншій фірмі; витрати у зв’язку з втратою замовника.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Проблему функціонування запасів розглядали автори в працях Букан Дж., Дудорин В. И., Жданов С. А., Завельский М. Г., Иваников Ю. П., Кузин Б. И., Федосеев В. В., Рыжиков Ю. И., Ляшенко О. та багатьох інших [1-13]. Аналіз задач управління запасами в математичному аспекті найбільш повно здійснено в роботі [10]. Проте в даних роботах розглядались моделі з дискретним розподілом імовірностей. Тому вважаємо за необхідне розглянути моделі, попит на ресурс яких є неперервною величиною.

Постановка мети і завдань. Метою даного дослідження є визначення оптимальних величин запасу ресурсу, якщо попит на цей ресурс є неперервною величиною. Вперше розглянуто різні математичні моделі густини розподілу імовірності попиту.

Виклад основного матеріалу. Розглянемо економічне формулювання проблеми. Нехай величина попиту r на певний вид ресурсу протягом деякого часу є неперервною випадковою величиною з відомою густиною розподілу ймовірностей $f(r)$. Якщо величина попиту менша від величини запасу s ресурсу, тобто $r < s$, тоді витрати, обумовлені зберіганням надлишку $s - r$ ресурсу, дорівнюють c_1 за одиницю. Для $r > s$ втрати через дефіцит одиниці ресурсу становитимуть c_2. Необхідно визначити оптимальну величину запасу ресурсу.

Як критерій оптимальності використовується математичне сподівання витрат на зберігання надлишку ресурсу та втрат від його дефіциту. Математично цей критерій можна записати так:

$$M(s)=c_1\int_0^s (s-r)f(r)dr + c_2\int_s^R (r-s)f(r)dr \to \min\ , \tag{1}$$

де *R* – найбільше значення попиту $0 \le r \le R$.

Проведемо розрахунок для конкретних видів густини розподілу ймовірностей. Нехай *f*(*r*) має вигляд:

$$f(r)=\frac{l+1}{lR}\left(1-\left(\frac{r}{R}\right)^l\right),\ \ 0\le r\le R,\ l\ge 0. \tag{2}$$

Така математична модель відображає ситуацію, коли ймовірність попиту на ресурс зменшується із зростанням цього попиту.

Підставивши вираз (2) у формулу (1), одержимо:

$$M(s)=\frac{l+1}{lR}\left(c_1\int_0^s (s-r)\left(1-\left(\frac{r}{R}\right)^l\right)dr + c_2\int_s^R (r-s)\left(1-\left(\frac{r}{R}\right)^l\right)dr\right).$$

Після обчислення інтегралів матимемо:

$$M(s)=\frac{l+1}{lR}\left(c_1\left(\frac{s^2}{2}-\frac{s^{l+2}}{R^l(l+1)(l+2)}\right)+c_2\left(\frac{R^2+s^2}{2}-Rs-\frac{R^{l+2}-s^{l+2}}{R^l(l+2)}+\frac{R^{l+1}s-s^{l+2}}{R^l(l+1)}\right)\right).$$

Дослідимо функцію *M*(*s*) на мінімум:

$$M'(s)=\frac{l+1}{lR}\left(c_1\left(s-\frac{s^{l+1}}{R^l(l+1)}\right)+c_2\left(s-R-\frac{s^{l+1}}{R^l}+\frac{R}{(l+1)}-\frac{l+2}{l+1}\cdot\frac{s^{l+1}}{R^l}\right)\right).$$

Із умови рівності нулю першої похідної ($M'(s)=0$) одержимо:

$$\frac{c_2+c_1}{lR}\left(s-\frac{s^{l+1}}{R^l(l+1)}\right)-\frac{1}{l+1}c_2R=0. \tag{3}$$

Розв'язок цього рівняння визначає оптимальний рівень s_0 запасу ресурсу. Проаналізуємо формулу (3) для *l* = 1 і *l* = 0.

У випадку *l* = 1 з рівняння (3) отримаємо:

$$(c_1+c_2)s^2-2R(c_2+c_1)s+R^2c_2=0.$$

Його розв'язок:

$$s_0=\frac{2R(c_1+c_2)-\sqrt{D}}{2(c_1+c_2)},\text{де } D=4R^2c_1(c_1+2c_2).$$

Після спрощення отримаємо $s_0=R\left(1-\sqrt{\frac{c_1}{c_1+c_2}}\right)$.

Нехай

$$f(r)=\frac{l+1}{R}\left(1-\frac{r}{R}\right)^l,\ \ 0\le r\le R,\ \ l\ge 0. \tag{4}$$

Реалізація формули (1) дає такий результат:

$$M(s)=\frac{\left(c_2+c_1\right)^R}{l+2}\left(1-\frac{s}{R}\right)^{l+2}+c_1 s-c_1\frac{R}{l+2}.$$

Для величини s_0 одержимо:

$$s_0=R\left(1-\left(\frac{c_1}{c_1+c_2}\right)^{\frac{1}{l+1}}\right). \tag{5}$$

Якщо l = 0, то маємо рівномірний розподіл ймовірностей. Тоді:

$$s_0=\frac{c_2 R}{c_1+c_2}. \tag{6}$$

Зобразимо залежність (5) графічно.

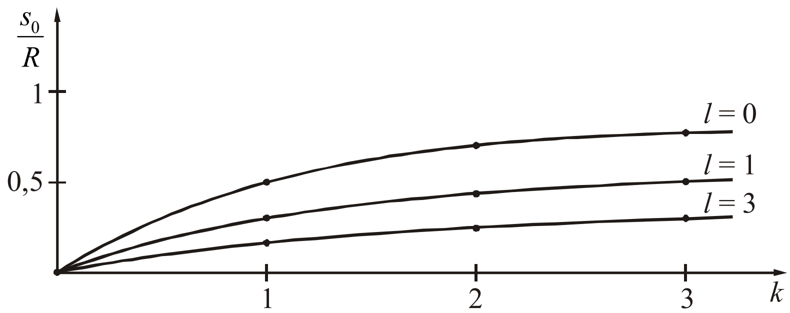

Рис. 1. ***Залежність оптимального запасу ресурсу від параметра*** $k=\frac{c_2}{c_1}$

при різних значеннях l

Із графіка видно: якщо збільшується *k,* величина $\frac{s_0}{R}$ зростає.

Проведемо дослідження математичних моделей із зростаючими густинами розподілу ймовірностей попиту на ресурс. Нехай $f(r)=\frac{l+1}{R}\left(\frac{r}{R}\right)^l$, $0\le r\le R$, $l\ge 0$.

Застосування математичного критерію, а саме формули (1), дає такий результат:

$$M(s)=\frac{l+1}{R}\left(c_1\frac{s^{l+2}}{R^l}\cdot\frac{1}{(l+1)(l+2)}+c_2\left(\frac{1}{R^l(l+2)}\left(R^{l+2}-s^{l+2}\right)-\frac{R}{l+1}\left(s-\frac{s^{l+2}}{R^{l+1}}\right)\right)\right).$$

Із умови $M'(s)=0$ визначаємо оптимальне значення s_0 запасу ресурсу.

$$s_0=R\left(\frac{c_2}{c_1+c_2}\right)^{\frac{1}{l+1}}. \tag{7}$$

При l = 0 матимемо формулу (6). Неважко переконатись, що $M''(s_0)>0$, тобто достатня умова мінімуму, виконується. Формула (7) графічно зображується таким чином (рис. 2).

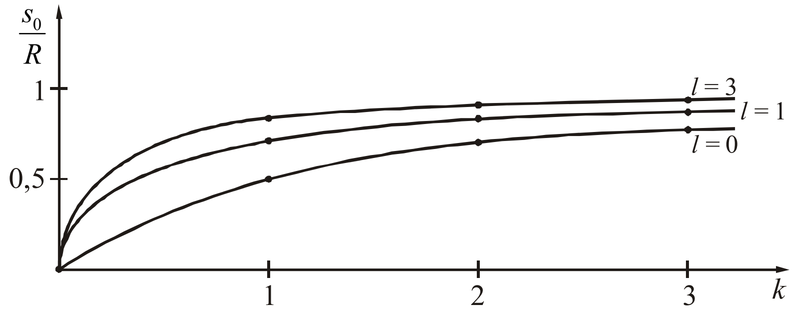

Рис. 2. ***Залежність оптимального запасу ресурсу від параметра*** $k = \frac{c_2}{c_1}$ ***при різних значеннях l***

Припустимо, що $f(r) = \frac{l+1}{(l+2)R}\left(1+\left(\frac{r}{R}\right)^l\right)$, $0 \le r \le R$, $l \ge 0$. Тоді

$$M(s) = \frac{l+1}{(l+2)R}\left(c_1\left(\frac{s^2}{2} + \frac{1}{(l+1)(l+2)}\cdot\frac{s^{l+2}}{R^l}\right) + c_2\left(\frac{l+4}{2(l+2)}R^2 + \frac{s^2}{2} - \frac{l+2}{l+1}Rs + \frac{1}{(l+1)(l+2)}\frac{s^{l+2}}{R^l}\right)\right).$$

Для обчислення оптимальної величини s_0 одержимо таке рівняння:

$$(c_1 + c_2)s^{l+1} + (c_1 + c_2)R^l s - \frac{l+2}{l+1}c_2 R^{l+1} = 0.$$

При l = 0 матимемо вираз (6). Для l = 1 одержимо квадратне рівняння:

$$2(c_1 + c_2)s^2 + 2(c_1 + c_2)Rs - 3c_2R^2 = 0.$$

Його розв'язок $\frac{s_0}{R} = \frac{-c_1 - c_2 + \sqrt{(c_1 + c_2)(c_1 + 7c_2)}}{2(c_1 + c_2)}$.

Здійснимо розрахунки для функції $f(r)$ виду:

$$f(r) = k\left(b - \frac{a}{R^2}(r - r_0)^2\right),\ 0 \le r \le R,\ 0 \le r_o \le R,\ a \ne 0,\ b > 0.$$

Визначимо параметр k із умови нормування $\int_0^R f(r)dr = 1$. Одержимо:

$$k = \frac{3R^2}{3bR^2 - a\left(R^2 - 3r_0R + 3r_0^2\right)}.$$

Зрозуміло, має виконуватись умова $3bR^2 - a\left(R^2 - 3r_0R + 3r_0^2\right) > 0$. Вона завжди виконуватиметься при a < 0. Для a > 0 одержимо таке співвідношення:

$$\begin{cases} bR^2 > ar_0^2, \\ bR^2 > a\left(R - r_0\right)^2. \end{cases}$$

Функція $f(r)$ при $r = r_0$ набуває найбільшого значення $f_{max} = kb$ для $a > 0$. При $a < 0$ матимемо $f_{min} = kb$. Одержимо такий результат перевірки критерію, обчисленого за формулою (1):

$$\frac{M(s)}{k} = c_1\left(\frac{bs^2}{2} - \frac{ar_0^3}{3R^2}s - \frac{a}{12R^2}(s-r_0)^4 + \frac{a}{12R^2}r_0^4\right) +$$

$$+c_2\left(\frac{bs^2}{2} - \frac{a}{12R^2}(s-r_0)^4 + \frac{as}{3R^2}(R-r_0)^3 - bRs + \frac{bR^2}{2} - \frac{a}{3R}(R-r_0)^3 + \frac{a}{12R^2}(R-r_0)^4\right).$$

Із умови $M'(s) = 0$ одержимо таке рівняння для визначення величини s_0 запасу ресурсу:

$$(c_1+c_2)a(s-r_0)^3 - 3R^2(c_1+c_2)bs - c_2a(R-r_0)^3 + 3R^3c_2b = 0.$$

Розглянемо математичні моделі для необмеженого попиту. Густину розподілу ймовірностей $f(r)$ виберемо у такому вигляді: $f(r) = \dfrac{(l-1)a^{l-1}}{(r+a)^l}$, $l \geq 3$, $a > 0$, $r \geq 0$.

Вираз для $M(s)$ у цьому випадку матиме вигляд:

$$M(s) = c_1\int_0^s (s-r)f(r)dr + c_2\int_s^\infty (r-s)f(r)dr. \quad (8)$$

Після підстановки конкретної функції $f(r)$ та інтегрування одержимо:

$$M(s) = c_1\left(s - \frac{3a^{l-1}}{(l+2)(s+a)^{l-2}} + \frac{a(2l-3)}{(l-2)}\right) + c_2\frac{a^{l-1}}{(l-2)(s+a)^{l-2}}.$$

Оптимальне значення запасу ресурсу в цьому випадку визначається за формулою:

$$s_0 = \left(\left(\frac{c_1+c_2}{c_1}\right)^{\frac{1}{l}} - 1\right)a. \quad (9)$$

Графік залежності (9) матиме такий вигляд (рис. 3):

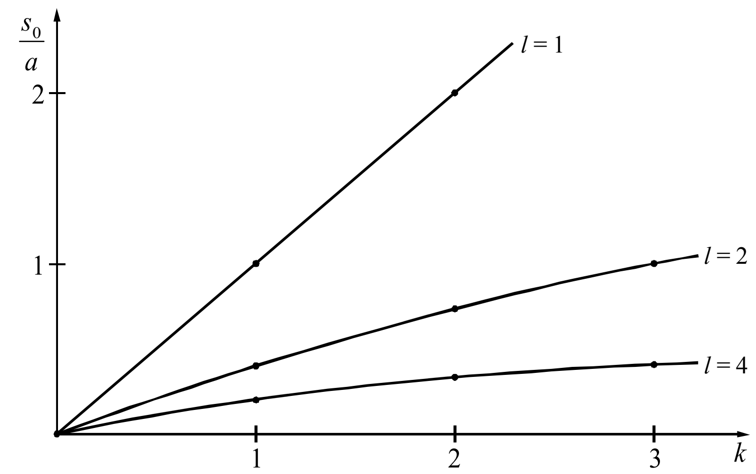

Рис. 3. ***Залежність оптимального запасу ресурсу від параметра*** $k = \dfrac{c_2}{c_1}$

Нехай $f(r)=\frac{r}{a^2}e^{-\frac{r}{a}}$, $a > 0$, $r \geq 0$. Обчислимо $M(s)$ за формулою (8):

$$M(s)=c_1\left(s+se^{-\frac{s}{a}}-2a+2ae^{-\frac{s}{a}}\right)+c_2\left(se^{-\frac{s}{a}}+2ae^{-\frac{s}{a}}\right),$$

Обчислюємо першу похідну $M'(s)$:

$$M'(s)=c_1-\frac{c_1 s}{a}e^{-\frac{s}{a}}-c_1e^{-\frac{s}{a}}-c_2e^{-\frac{s}{a}}-\frac{c_2 s}{a}e^{-\frac{s}{a}}.$$

Із умови $M'(s)=0$ одержимо таке рівняння для обчислення величини s_0:

$$c_1a-e^{-\frac{s}{a}}\left(s+a\right)\left(c_1+c_2\right)=0.$$

Розглянемо практичне застосування одержаних результатів.

Нехай статистичний розподіл попиту на ресурс в інтервальному записі має такий вигляд:

$r_i - r_{i+1}$	0–2	2–4	4–6	6–8	8–10
n_i	14	3	1	1	1

Для математичного моделювання цього розподілу використаємо формулу (4). Приймемо R = 10. Параметр l визначаємо точковим методом із умови, що математичне сподівання дорівнює середньому вибірковому ($M(r)=\overline{r}$). Для цього статистичного розподілу $\overline{r}=2,2.$ Визначивши математичне сподівання $M(r)$ розподілу ймовірностей (4), одержимо $M(r)=\frac{R}{l+2.}$ Для параметра l маємо l = 2,54. Оптимальне значення s_0 запасу ресурсу визначаємо за формулою (5). Вважаємо, що $c_2 = 2c_1$. Таким чином, запас ресурсу s_0 = 2,67.

У подальших дослідженнях розглядатимуться задачі за іншими критеріями оптимальності.

Література

1. *Букан Дж. Научное управление запасами / Дж. Букан. – М. : Наука, 1967. – 420 с.*
2. *Дудорин В. И. Моделирование в задачах управления производством / В. И. Дудорин. – М. : Статистика, 1980. – 232 с.*
3. *Жданов С. А. Экономические модели и методы в управлении / С. А. Жданов. – М. : Дело и сервис, 1998. – 302 с.*
4. *Завельский М. Г. Оптимальное планирование на предприятии / М. Г. Завельский. – М. : Наука, 1970. – 396 с.*
5. *Иваников Ю. П. Математические модели в экономике / Ю. П. Иваников. –М. : Наука, 1979. – 303 с.*
6. *Экономико-математические модели в организации и планировании промышленного предприятия / Под ред. проф. Б. И. Кузина. – Л. : Изд-во Ленинградского университета, 1982. – 336 с.*

7. Экономико-математические методы и прикладные модели / Под ред. В. В. Федосеева. – М. : ЮНИТИ, 1999. – 535 с.
8. Попіна С. Ю. Економіко-математичний аналіз задач оптимального управління запасами / С. Ю. Попіна // Економічний аналіз. – Вип. 4. – 2009. – С. 291–293.
9. Рыжиков Ю. И. Управление запасами / Ю. И. Рыжиков. – М. : Наука, 1969. – 343 с.
10. Сытник В. Ф. Математические модели в планировании и управлении предприятиями / В. Ф. Сытник, Е. А. Карагодова. – К. : Вища школа, 1985. – 214 с.
11. Федосеев В. В. Экономико-математические методы и модели в маркетинге / В. В. Федосеев. – М. : Финстатинформ, 1996. – 305 с.
12. Ляшенко О. Інтегрований підхід до моделювання оптимального управління запасами підприємств / О. Ляшенко, Н. Зорій // Вісник ТАНГ. Економіко-математичне моделювання. – 2001. – № 1(9). – С. 3–8.
13. Ляшенко О. Моделювання управління безпечним поповненням матеріальними запасами підприємств з урахуванням сезонних коливань попиту на продукцію / О. Ляшенко // Вісник ТАНГ. – 2002. – № 7/3. – С. 58–63.

References

1. Bukon D. Scientific inventory management / D. Bukon. – M. : Nauka, 1967. – 420 p.
2. Dudorin V. I. Modeling in production management problems / V. I. Dudorin. – M. : Statistika, 1980. – 232 p.
3. Zhdanov S. A. Economic models and methods in management / S. A. Zhdanov. – M. : Deloiservis, 1998. – 302 p.
4. Zavelsky M. G. Optimal planning of the enterprise / M. G. Zavelsky. – M. : Nauka, 1970. – 396 p.
5. Ivanikov Y. P. Mathematical models in economics / Y. P. Ivanikov. – M. : Nauka, 1979. – 303 p.
6. Economic-mathematical models in the organization and planning of industrial enterprises (Under the editorship of professor Kuzin B. I.) – L. : Leningrad University Publishing, 1982. – 336 p.
7. Economic-mathematical methods and applied models (Under the editorship of Fedoseev V. V.) – M. : UNITY, 1999. – 535 p.
8. Popina S. Y. Economic and mathematical analysis of problems of optimal inventory management. Economic Analysis: Collection of articles. 4th issue. – Ternopil, TNEU, 2009. – P. 291–293.
9. Ryzhykov Y. I. Inventory management. – M. : Nauka, 1969. – 343 p.
10. Sytnik V. F. Mathematical models in the planning and management of enterprises / V. F. Sytnik, E. A. Karagodova. – K. : Vyscha Shkola, 1985. – 214 p.
11. Fedoseev V. V. Economic-mathematical methods and models in marketing / V. V. Fedoseev. – M.: Finstatinform, 1996. – 305 p.

Редакція отримала матеріал 23 травня 2014 р.