Міністерство освіти і науки України
Західноукраїнський національний університет

А.М. Алілуйко, Н.В. Дзюбановська, І.В. Домбровський,
І.Я. Новосад, О.Ф. Лесик, В.М. Неміш,
С.А. Пласконь, М.І. Шинкарик

КОМПЛЕКСНІ ПРАКТИЧНІ ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

Тернопіль
Економічна думка
2021

УДК 51
ББК – 22.11я73
А – 50

Рецензенти: *Боднар Дмитро Ількович,* доктор фізико-математичних наук, професор кафедри економічної кібернетики та інформатики Західноукраїнського національного університету

Мартинюк Сергій Володимирович, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри інформатики та методики її викладання Тернопільського національного педагогічного університету ім. Володимира Гнатюка.

Розглянуто і рекомендовано до друку на засіданні кафедри прикладної математики (протокол № 1 від 23.08.2021 р.)

Алілуйко А.М.
А 50 Комплексні практичні індивідуальні завдання з вищої математики / Алілуйко А.М., Дзюбановська Н.В., Домбровський І.В., Новосад І.Я., Лесик О.Ф., Неміш В.М., Пласконь С.А., Шинкарик М.І. Тернопіль: ЗУНУ, 2021. 102 с.

Методична розробка для виконання комплексного практичного індивідуального завдання укладена відповідно до програми дисципліни «Вища математика» для студентів усіх спеціальностей ЗУНУ. Вона містить два комплексних практичних індивідуальних завдань, вказівки до їх виконання, взірці розв’язування задач, список рекомендованої літератури.

УДК 51
ББК – 22.11 я73
А – 50

ВСТУП

Зростаючі вимоги до економістів, як фахівців, здатних скласти економічний прогноз, прийняти оптимальне рішення у виборі правильної економічної політики, потребують глибокого вивчення математичних дисциплін. З метою якісного засвоєння курсу математики, ефективного її застосування в практичній діяльності, розроблено комплексні практичні індивідуальні завдання (КПІЗ). Вони включають:

- структуру залікових кредитів;
- варіанти завдань для виконання КПІЗ;
- критерії оцінювання КПІЗ;
- графік виконання та здачі КПІЗ;
- короткі теоретичні відомості;
- деякі економічні задачі і їх розв'язування;
- комплексне практичне індивідуальне завдання № 1;
- комплексне практичне індивідуальне завдання № 2;
- список рекомендованих джерел.

КПІЗ охоплюють всю програму курсу вищої математики (вищої та прикладної математики) вищих навчальних закладів для студентів усіх спеціальностей ЗУНУ. Студент виконує завдання КПІЗ №1 під час I семестру. Оформляє виконане завдання в зошиті з необхідними поясненнями, захищає його згідно графіка, як важливий компонент здачі заліку. Аналогічно виконується завдання КПІЗ №2 в другому семестрі. При розв'язуванні економічних задач важливо пояснити економічний зміст отриманих результатів. Блок економічних завдань створює можливість творчої співпраці студента і викладача, перспективу науково-пошукової роботи студента-економіста із застосуванням математичного апарату.

КПІЗ № 1 має на меті закріпити засвоєння студентами таких розділів курсу «Вищої математики»:

- ЛІНІЙНА АЛГЕБРА
- АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ
- ТЕОРІЯ ГРАНИЦЬ
- ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

КПІЗ № 2 охоплює такі розділи курсу «Вищої математики»:

- ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ
- ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ
- ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ
- РЯДИ

Завдання складається з 35 варіантів однотипних завдань. До типових прикладних задач дано взірці їх розв’язування. Студент може користуватися вказаною літературою, звертатися за консультацією до викладача.

Структура залікових кредитів дисципліни «Вища математика»
І заліковий кредит

ТЕМА	Кількість годин		
	Лекції	Практичні заняття	Самост. робота студентів
Змістовий модуль 1. Елементи лінійної і векторної алгебри та аналітичної геометрії			
Тема 1. Елементи теорії визначників	2	2	2
Тема 2. Матриці і задачі оптимального планування	2	2	2
Тема 3. Загальна теорія систем лінійних алгебраїчних рівнянь	2	2	2
Тема 4. Матричний аналіз в задачах економіки	2	2	3
Тема 5. Методи та моделі векторної алгебри	2	2	2
Тема 6. Методи та моделі аналітичної геометрії	2	2	3
Тема 7. Застосування ліній другого порядку в економічних дослідженнях.	2	2	2
Тема 8. Концептуальні аспекти математичного моделювання економіки. Оптимізаційні економіко-математичні моделі	2	2	2
Тема 9. Задачі лінійного програмування та методи їх розв’язування	2	2	3
Тема 10. Симплекс-метод розв’язування задач лінійного програмування	2	2	2
Змістовий модуль 2. Математичний аналіз функції однієї змінної			
Тема 11. Функції та їх застосування в економічній теорії.	2	2	2
Тема 12. Границі та їх застосування в економіці	2	2	2
Тема 13. Граничний аналіз економічних процесів	2	2	3
Тема 14. Дослідження функції	2	2	3
Тема 15. Застосування методів диференціального числення в економіці	2	4	3

II заліковий кредит

ТЕМА	Кількість годин		
	Лекції	Практичні заняття	Самост. робота студентів
Змістовий модуль 3. Функції багатьох змінних			
Тема 1. Основні поняття функції багатьох змінних та їх інтерпретації в економічній теорії	2	2	2
Тема 2. Диференційованість та екстремум функції багатьох змінних	2	3	3
Тема 3. Побудова емпіричних формул	2	3	3
Тема 4. Нелінійні оптимізаційні моделі економічних систем	2	3	4
Змістовий модуль 4. Інтегральне числення			
Тема 5. Невизначений інтеграл	2	2	3
Тема 6. Інтегрування раціональних дробів	2	2	2
Тема 7. Інтегрування тригонометричних та ірраціональних функцій	2	4	2
Тема 8. Визначений інтеграл та методи його обчислення	2	2	3
Тема 9-10. Економічні та геометричні застосування визначених інтегралів	4	2	3
Змістовий модуль 5. Диференціальні та різницеві рівняння. Ряди			
Тема 11. Диференціальні рівняння І-го порядку	2		3
Тема 12. Розв’язування диференціальних рівнянь І порядку	2	2	3
Тема 13. Лінійні диференціальні ІІ-го порядку з постійними коефіцієнтами.	2	2	3
Тема 14. Числові ряди та їх збіжність	2	2	3
Тема 15. Степеневі ряди. Застосування степеневих рядів для наближених обчислень	2	4	3
Тренінг			4
Разом	60	60	83

Варіанти завдань для виконання комплексного практичного індивідуального завдання

Для виконання комплексного практичного індивідуального завдання студент обирає варіант згідно свого номера в списку групи, виконує і захищає усі завдання відповідно до графіку.

При розв'язуванні задач врахувати, що параметр k задається викладачем.

Варіант	Терміни здачі КПІЗ (I семестр)	
	До виконання модуля 1	До виконання модуля 2
1	1.1, 2.1, 3.1, 4.1, 5.1, 6.1, 7.1, 8.1	9.1, 10.1, 11.1, 12.1, 13.1, 14.1, 15.1
2	1.2, 2.2, 3.2, 4.2, 5.2, 6.2, 7.2.а), 8.2	9.2, 10.2, 11.2, 12.2, 13.2, 14.2, 15.2
3	1.3, 2.3, 3.3, 4.3, 5.3, 6.3, 7.2.б), 8.3	9.3, 10.3, 11.3, 12.3, 13.3, 14.3, 15.3
4	1.4, 2.4, 3.4, 4.4, 5.4, 6.4, 7.3, 8.4	9.4, 10.4, 11.4, 12.4, 13.4, 14.4, 15.4
5	1.5, 2.5, 3.5, 4.5, 5.5, 6.5, 7.4, 8.5	9.5, 10.5, 11.5, 12.5, 13.5, 14.5, 15.5
6	1.6, 2.6, 3.6, 4.6, 5.6, 6.6, 7.5, 8.6	9.6, 10.6, 11.6, 12.6, 13.6, 14.6, 15.6
7	1.7, 2.7, 3.7, 4.7, 5.7, 6.7, 7.6, 8.7	9.7, 10.7, 11.7, 12.7, 13.7, 14.7, 15.7
8	1.8, 2.8, 3.8, 4.8, 5.8, 6.8, 7.7, 8.8	9.8, 10.8, 11.8, 12.8, 13.8, 14.8, 15.8
9	1.9, 2.9, 3.9, 4.9, 5.9, 6.9, 7.8, 8.9	9.9, 10.9, 11.9, 12.9, 13.9, 14.9, 15.9
10	1.10, 2.10, 3.10, 4.10, 5.10, 6.10, 7.9, 8.10	9.10, 10.10, 11.10, 12.10, 13.10, 14.10, 15.10
11	1.11, 2.11, 3.11, 4.11, 5.11, 6.11, 7.10, 8.11	9.11, 10.11.а), 10.11, 11.11, 12.11, 13.11, 14.11, 15.11
12	1.12, 2.12, 3.12, 4.12, 5.12, 6.12, 7.11, 8.12	9.12, 10.11.б), 10.12, 11.12, 12.12, 13.12, 14.12, 15.12
13	1.13, 2.13, 3.13, 4.13, 5.13, 6.13, 7.12, 8.13	9.13, 10.11 в), 10.13, 11.13, 12.13, 13.13, 14.13, 15.13
14	1.14, 2.14, 3.14, 4.14, 5.14, 6.14, 7.13, 8.14	9.14, 10.11 г), 10.14, 11.14, 12.14, 13.14, 14.14, 15.14
15	1.15, 2.15, 3.15, 4.15, 5.15, 6.15, 7.14, 8.15	9.15, 10.11.д), 10.15, 11.15, 12.15, 13.15, 14.15, 15.15
16	1.16, 2.16, 3.16, 4.16, 5.16, 6.16, 7.15, 8.16	9.16, 10.12.а), 10.16, 11.16, 12.16, 13.16, 14.16, 15.16 а)

17	1.17, 2.17, 3.17, 4.17, 5.17, 6.17, 7.1, 8.17	9.17, 10.12.б), 10.17, 11.17, 12.17, 13.17, 14.17, 15.16 б)
18	1.18, 2.18, 3.18, 4.18, 5.18, 6.18, 7.2.а), 8.18	9.18, 10.12 в), 10.18, 11.18, 12.18, 13.18, 14.18, 15.16 в)
19	1.19, 2.19, 3.19, 4.19, 5.19, 6.19, 7.2.б), 8.19	9.19, 10.12.г), 10.19, 11.19, 12.19, 13.19, 14.19, 15.17
20	1.20, 2.20, 3.20, 4.20, 5.20, 6.20, 7.3, 8.20	9.20, 10.12 д), 10.20, 11.20, 12.20, 13.20, 14.20, 15.18
21	1.21, 2.21, 3.21, 4.21, 5.21, 6.21, 7.4, 8.21	9.21, 10.13 а), 10.21, 11.21, 12.21, 13.21, 14.21, 15.19
22	1.22, 2.22, 3.22, 4.22, 5.22, 6.22, 7.5, 8.22	9.22, 10.13.б), 10.22, 11.22, 12.22, 13.22, 14.22, 15.20
23	1.23, 2.23, 3.23, 4.23, 5.23, 6.23, 7.6, 8.23	9.23, 10.13 в), 10.23, 11.23, 12.23, 13.23, 14.23, 15.21
24	1.24, 2.24, 3.24, 4.24, 5.24, 6.24, 7.7, 8.24	9.24, 10.13 г), 10.24, 11.24, 12.24, 13.24, 14.24, 15.1
25	1,25, 2.25, 3.25, 4.25, 5.25, 6.25, 7.8, 8.25	9.25, 10.13 д), 10.25, 11.25, 12.25, 13.25, 14.25, 15.2
26	1.26, 2.26, 3.26, 4.26, 5.26, 6.26, 7.9, 8.26	9.26, 10.14, 10.26, 11.26, 12.26, 13.26, 14.26, 15.3
27	1.27, 2.27, 3.27, 4.27, 5.27, 6.27, 7.10, 8.27	9.27, 10.15, 10.27, 11.27, 12.27, 13.1, 13.27, 14.4
28	1.28, 2.28, 3.28, 4.28, 5.28, 6.28, 7.11, 8.28	9.28, 10.1, 10.28, 11.28, 12.28, 13.2, 13.28, 14.28, 15.5
29	1.29, 2.29, 3.29, 4.29, 5.29, 6.29, 7.12, 7.29	9.29, 10.2, 10.29, 11.29, 12.29, 13.3, 13.29, 14.29, 15.6
30	1.30, 2.30, 3.30, 4.30, 5.30, 6.30, 7.13, 8.30	9.30, 10.3, 10.30, 11.30, 12.30, 13.4, 13.30, 14.30, 15.7
31	1.31, 2.31, 3.31, 4.31, 5.31, 6.1, 7.14, 8.31	9.32, 10.4, 10.31, 11.31, 12.31, 13.5, 13.31, 14.31, 15.8
32	1.32, 2.32, 3.32, 4.32, 5.32, 6.2, 7.15, 8.32	9.32, 10.5, 10.32, 11.32, 12.32, 32.6, 13.32, 14.9
33	1.33, 2.33, 3.33, 4.33, 5.33, 6.3, 7.1, 8.33	9.33, 10.6, 10.33, 11.33, 12.33, 13.7, 13.33, 14.33, 15.10
34	1.34, 2.34, 3.34, 4.34, 5.34, 6.4, 7.2.а), 8.34	9.34, 10.7, 10.34, 11.34, 12.34, 13.8, 13.34, 14.34, 15.11
35	1.35, 2.35, 3.35, 4.35,5.35, 6.5, 7.2.б), 8.35	9.35, 10.8, 10.35, 11.35, 12.35, 13.9, 13.35, 14.35, 15.12

Варіант	Терміни здачі КПІЗ (ІІ семестр)	
	До виконання модуля 1	**До виконання модуля 2**
1	1.27; 2.18; 3.23; 4.1; 5.26; 6.1	9.24; 10.17; 11.22; 12.1; 13.23
2	1.28; 2.19; 3.24; 4.2; 5.27; 6.2	9.25; 10.18; 11.23; 12.2; 13.24
3	1.29; 2.20; 3.25; 4.3; 5.28; 6.3	9.26; 10.19; 11.24; 12.3; 13.25
4	1.30; 2.21; 3.26; 4.4; 5.29; 6.4	9.27; 10.20; 11.25; 12.4; 13.26
5	1.31; 2.22; 3.27; 4.5; 5.30; 6.5	9.28; 10.21; 11.26; 12.5; 13.27
6	1.32; 2.23; 3.28; 4.6; 5.31; 6.6	9.29; 10.22; 11.27; 12.6а; 13.28
7	1.33; 2.24; 3.29; 4.7; 5.32; 6.7	9.30; 10.23; 11.28; 12.6б; 13.29
8	1.34; 2.25; 3.30; 4.8; 5.33; 6.8	9.31; 10.24; 11.29; 12.6в; 13.30
9	1.35; 2.26; 3.31; 4.9; 5.34; 6.9	9.32, 10.25; 11.30; 12.7; 13.31
10	1.1; 2.27; 3.32; 4.10; 5.35; 6.10	9.33; 10.26; 11.31; 12.8а; 13.32
11	1.2; 2.28; 3.33; 4.11; 5.1; 6.11	9.34; 10.27; 11.32; 12.8б; 13.33
12	1.3; 2.29; 3.34; 4.4; 5.2; 6.12	9.35; 10.28; 11.33; 12.9; 13.34
13	1.4; 2.30; 3.35; 4.2; 5.3; 7.1	9.1; 10.29; 11.34; 12.10; 13.35
14	1.5; 2.31; 3.1; 4.3; 5.4; 7.2	9.2; 10.30; 11.35; 12.11; 13.1
15	1.6; 2.32; 3.2; 4.4; 5.5; 7.3	9.3; 10.31; 11.1; 12.12а; 13.2
16	1.7; 2.33; 3.3; 4.5; 5.6; 7.4	9.4; 10.32; 11.2; 12.12б; 13.3
17	1.8; 2.34; 3.4; 4.6; 5.7; 7.5	9.5; 10.33; 11.3; 12.12в; 13.4
18	1.9; 2.35; 3.5; 4.7; 5.8; 7.6	9.6; 10.34; 11.4; 12.12г, 13.5
19	1.10; 2.1; 3.6; 4.8; 5.9; 7.7	9.7; 10.35; 11.5; 12.13а; 13.6
20	1.11; 2.2; 3.7; 4.9; 5.10; 7.8	9.8; 10.1; 11.6; 12.13б; 13.7
21	1.12; 2.3; 3.8; 4.10; 5.11; 7.9	9.9; 10.2; 11.7; 12.14а; 13.8
22	1.13; 2.4; 3.9; 4.11; 5.12; 7.10	9.10; 10.3; 11.8; 12.14б; 13.9
23	1.14; 2.5; 3.10; 4.1; 5.13; 7.11	9.11; 10.4; 11.9; 12.15; 13.10
24	1.15; 2.6; 3.11; 4.2; 5.14; 7.12	9.12; 10.5; 11.10; 12.16; 13.11
25	1.16; 2.7; 3.12; 4.3; 5.15; 8.1	9.13; 10.6; 11.11; 12.17; 13.12
26	1.17; 2.8; 3.13; 4.4; 5.16; 8.2	9.14; 10.7; 11.12; 12.3; 13.18
27	1.18; 2.9; 3.14; 4.4; 5.17; 8.3	9.15; 10.8; 11.13; 12.4; 13.14
28	1.19; 2.10; 3.15; 4.5; 5.18; 8.4	9.16; 10.9; 11.14; 12.5; 13.15
29	1.20; 2.11; 3.16; 4.6; 5.19; 8.5	9.17; 10.10; 11.15; 12.6а; 13.16
30	1.21; 2.12; 3.17; 4.7; 5.20; 8.6	9.18; 10.11; 11.16; 12.7; 13.17
31	1.22; 2.13; 3.18; 4.8; 5.21; 8.7	9.19; 10.12; 11.17; 12.8а; 13.18
32	1.23; 2.14; 3.19; 4.9; 5.22; 8.8	9.20; 10.13; 11.18; 12.9; 13.19
33	1.24; 2.15; 3.20; 4.10; 5.23; 8.9	9.21; 10.14; 11.19; 12.10; 13.20
34	1.25; 2.16; 3.21; 4.11; 5.24; 8.10	9.22; 10.15; 11.20; 12.16; 13.21
35	1.26; 2.17; 3.22; 4.12; 5.25; 8.11	9.23; 10.16; 11.21; 12.17; 13.22

Комплексне практичне індивідуальне завдання № 1
з дисципліни "ВИЩА МАТЕМАТИКА"
І СЕМЕСТР

1. Обчислити визначники двома способами: а) за допомогою елементарних перетворень; б) розклавши за елементами рядка (стовпця).

1. $\begin{vmatrix} k & k+1 & k+1 & k-9 \\ 2 & 3 & 0 & k+2 \\ -k & k+2 & -k-1 & 9-k \\ -1 & 2 & k+4 & 1 \end{vmatrix}$;
2. $\begin{vmatrix} k+2 & 1 & 0 & k+3 \\ k-3 & k & 3 & 3-k \\ k+3 & k-2 & 4 & -k-3 \\ k-1 & 2 & k+2 & 1-k \end{vmatrix}$;

3. $\begin{vmatrix} k-2 & 4 & -k & k-1 \\ k & k+2 & 1 & 4 \\ -3 & 0 & -1 & k-2 \\ 2-k & -6 & k & 1-k \end{vmatrix}$;
4. $\begin{vmatrix} k+2 & k & 0 & k+2 \\ k & k+4 & -1 & 4 \\ 5-k & 0 & -3 & 5-k \\ k+3 & 3 & -k & k+3 \end{vmatrix}$;

5. $\begin{vmatrix} k-1 & 1 & k & k+2 \\ k-1 & 4 & k+1 & -3 \\ k+2 & -1 & -k & -k-2 \\ 5 & 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}$;
6. $\begin{vmatrix} k+2 & k-2 & k & 3 \\ k+1 & 4 & 0 & 1+k \\ 0 & 2-k & -k & -3 \\ k & 3+k & -1 & 2 \end{vmatrix}$;

7. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ k+1 & k+2 & k-2 & k+1 \\ -k-1 & 0 & 2-k & -1-k \\ k+1 & k & 1 & -1 \end{vmatrix}$;
8. $\begin{vmatrix} k+2 & k-1 & 3 & 0 \\ -2 & k+1 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 1 & 4 \\ -2-k & 1-k & -3 & k \end{vmatrix}$;

9. $\begin{vmatrix} k-1 & k+2 & 1 & k-2 \\ k & 3 & 0 & 4 \\ 1-k & -k-2 & k+1 & 2-k \\ -1 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$;
10. $\begin{vmatrix} k & 1 & k-7 & -k \\ 0 & 4 & 0 & -1 \\ k-1 & -1 & 7-k & k \\ 3 & k & k+1 & 1 \end{vmatrix}$;

11. $\begin{vmatrix} 1 & k+3 & 4 & 1 \\ k & k-2 & 0 & k+5 \\ 1 & k-1 & 4 & 3 \\ -1 & k & -4 & -1 \end{vmatrix}$;
12. $\begin{vmatrix} 1 & k+2 & k+3 & -1 \\ -k-2 & 0 & -1 & k+4 \\ k & 1 & k+3 & -2 \\ k+2 & 7 & 1 & -k-4 \end{vmatrix}$;

13. $\begin{vmatrix} k & k+1 & 1 & k-2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & -1 & k \\ -k & -k-1 & k-1 & 2-k \end{vmatrix}$;

14. $\begin{vmatrix} k+1 & 3 & 4 & -k-1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ -k-1 & -3 & 7 & k+1 \\ 4 & 1 & 4 & k \end{vmatrix}$;

15. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & k \\ -3 & k+1 & -2 & k-1 \\ -1 & -2 & 2 & k+1 \\ -1 & -1 & 1 & k+2 \end{vmatrix}$;

16. $\begin{vmatrix} -k & 1 & k+2 & 4-k \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ k-1 & k+1 & 3 & -1 \\ k & -1 & 1 & k-4 \end{vmatrix}$;

17. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & k+3 & -k \\ 4 & 3 & 2 & 0 \\ k+1 & k-1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & -k-3 & 4 \end{vmatrix}$;

18. $\begin{vmatrix} k+2 & -k-1 & 1 & -k-2 \\ -k+3 & 3 & -1 & -2 \\ -4 & 0 & 1 & k \\ -k-2 & k & -1 & k+2 \end{vmatrix}$;

19. $\begin{vmatrix} k+1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & k & 1 & 0 \\ -k-1 & 1 & -1 & 3 \\ -12-1 & -2 & -3 & k \end{vmatrix}$;

20. $\begin{vmatrix} 2 & -k-1 & -k & -k-1 \\ -1 & k+2 & -k-3 & 2 \\ -2 & k+1 & k+1 & k+1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$;

21. $\begin{vmatrix} k & 1 & k+2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & -2k \\ -k & k & -k-2 & -3 \\ -1 & k+1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$;

22. $\begin{vmatrix} k-1 & k & -5 & k+1 \\ k+6 & -1 & 2 & -6 \\ -k & k & 3 & 2 \\ 1-k & -k & 5 & 2 \end{vmatrix}$;

23. $\begin{vmatrix} k & -k & -k & 5 \\ k+6 & -4 & k-5 & k+1 \\ -k & k & 4 & -5 \\ 3 & -k-3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$;

24. $\begin{vmatrix} k & k+1 & k+2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ -k & k+2 & -k-2 & 0 \\ 4 & 4 & k & 1 \end{vmatrix}$;

25. $\begin{vmatrix} -1 & -2 & -3 & k \\ k+1 & k+2 & -k & -k \\ 1 & 2 & k+1 & -k \\ -1 & 0 & -2 & -3 \end{vmatrix}$;

26. $\begin{vmatrix} k & k+1 & k+1 & -k-1 \\ 2 & -2 & 3 & k \\ -k & -k-1 & 4 & k+1 \\ -1 & 0 & 2 & k+2 \end{vmatrix}$;

27. $\begin{vmatrix} k+3 & k+2 & k+1 & k \\ 2+k & -k-1 & k & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \\ -k-3 & 5 & -k-1 & -k \end{vmatrix}$; 28. $\begin{vmatrix} -6 & -k-5 & -3 & -k-8 \\ -k-1 & -3 & -2 & -5 \\ 6 & k+5 & 5 & k+8 \\ k+1 & k-1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$;

29. $\begin{vmatrix} 1 & k & -1 & k-2 \\ -k & 5 & 3 & 4 \\ k+1 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & -k & k & 2-k \end{vmatrix}$; 30. $\begin{vmatrix} k+3 & k+1 & 1 & k+3 \\ k+1 & 0 & k & 1 \\ -k-3 & 3 & -1 & -k-3 \\ 2 & 1 & 0 & -k \end{vmatrix}$;

31. $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & 2+k \\ -k-1 & -k-2 & 1 & -1 \\ k & k+1 & k & 1 \\ k+1 & k+2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$; 32. $\begin{vmatrix} k+1 & 0 & k & -k \\ 4 & 3 & 2 & 1+k \\ 3 & 2 & 1 & 1-k \\ -k-1 & k & -k & k \end{vmatrix}$;

33. $\begin{vmatrix} k & -2 & -1 & -k \\ -k-1 & k+1 & k & k+1 \\ 2 & -k-3 & -2 & k+3 \\ k+1 & -k-1 & 5 & -k-1 \end{vmatrix}$; 34. $\begin{vmatrix} k+2 & 4 & -k-2 & 3 \\ k-2 & 0 & 2-k & k \\ k & 2 & -k & 0 \\ 4 & k-1 & 6 & 2 \end{vmatrix}$;

35. $\begin{vmatrix} -k & -k-1 & -1 & k+2 \\ 3 & -4 & -1 & k-2 \\ k & k+1 & k & -k-2 \\ -k-1 & 0 & 2 & -2 \end{vmatrix}$.

2. Розв’язати системи рівнянь трьома методами: а) за правилом Крамера; б) методом Гаусса; в) методом Жордана-Гаусса; г) матричним способом.

1. $\begin{cases} (k-4)x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \\ kx_1 + x_2 + 2x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x_1 + kx_2 - x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 2, \\ -x_1 + (k-1)x_2 + x_3 = -3. \end{cases}$

3. $\begin{cases} -3x_1 + (k+1)x_2 + x_3 = 10, \\ 2x_1 + kx_2 - x_3 = -7, \\ -x_1 - x_2 - x_3 = 2. \end{cases}$ 4. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + kx_3 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + (k+10)x_3 = 6, \\ -4x_1 + 2x_2 - x_3 = -12. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x_1 + (k+1)x_2 + x_3 = 4, \\ -3x_1 + kx_2 + x_3 = -1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$ 6. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -6, \\ 5x_1 + (k-2)x_2 + 2x_3 = -23, \\ 2x_1 + kx_2 + 4x_3 = -6. \end{cases}$

7. $\begin{cases} -x_1+(k-1)x_2+x_3=-4, \\ 2x_1+kx_2+2x_3=0, \\ x_1+x_2+x_3=0. \end{cases}$

8. $\begin{cases} -x_1-(k-2)x_2+2x_3=-5, \\ x_1+(k+1)x_2+x_3=2, \\ 3x_1-x_2+4x_3=5. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_1-kx_2+x_3=7, \\ 4x_1+3x_2+2x_3=24, \\ 2x_1-(k-1)x_2-3x_3=4. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1+(k-2)x_2+x_3=5, \\ x_1+kx_2+2x_3=6, \\ 3x_1+x_2+x_3=13. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-1, \\ -x_1+(k+2)x_2+4x_3=16, \\ 2x_1-kx_2-x_3=-11. \end{cases}$

12. $\begin{cases} 2x_1-(k+1)x_2+3x_3=9, \\ x_1-x_2-2x_3=8, \\ 3x_1+kx_2+x_3=17. \end{cases}$

13. $\begin{cases} kx_1-2x_2+x_3=11, \\ x_1+x_2+2x_3=2, \\ (k+2)x_1+3x_2+x_3=-9. \end{cases}$

14. $\begin{cases} (k+2)x_1-x_2-3x_3=-6, \\ kx_1-3x_2-2x_3=3, \\ x_1+x_2-4x_3=-15. \end{cases}$

15. $\begin{cases} (k+3)x_1+3x_2+2x_3=14, \\ (k+1)x_1+2x_2-8x_3=0, \\ x_1-x+3x_3=-1. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x_1-5x_2+3x_3=-32, \\ (k+2)x_1-3x_2+x_3=-16, \\ (k+3)x_1-x_2-2x_3=4. \end{cases}$

17. $\begin{cases} kx_1+4x_2+x_3=17, \\ (k+3)x_1-x_2+2x_3=-11, \\ 3x_1+2x_2+4x_3=-2. \end{cases}$

18. $\begin{cases} -x_1-(k+1)x_2-2x_3=-9, \\ 2x_1+(k+2)x_2-4x_3=2, \\ 3x_1-x_2+x_3=17. \end{cases}$

19. $\begin{cases} 2x_1-kx_2-x_3=9, \\ x_1+(k+6)x_2+2x_3=12, \\ 4x_1-x_2+3x_3=33. \end{cases}$

20. $\begin{cases} 3x_1+x_2-4x_3=17, \\ 5x_1+kx_2-x_3=34, \\ x_1-(k-4)x_2+3x_3=10. \end{cases}$

21. $\begin{cases} 6x_1-kx_2+2x_3=30, \\ 2x_1-(k+2)x_2+4x_3=0, \\ x_1+3x_2+x_3=3. \end{cases}$

22. $\begin{cases} x_1+x_2+5x_3=22, \\ 2x_1+kx_2+x_3=17, \\ -3x_1(k+3)x_2+2x_3=-15. \end{cases}$

23. $\begin{cases} 5x_1+(k+3)x_2-4x_3=-8, \\ -x_1+(k+1)x_2+x_3=1, \\ 2x_1+x_2+2x_3=-14. \end{cases}$

24. $\begin{cases} 2x_1+x_2+(k+1)x_3=7, \\ x_1-3x_2+kx_3=14, \\ 5x_1+x_2+x_3=22. \end{cases}$

25. $\begin{cases} 3x_1+4x_2+x_3=10, \\ -x_1+5x_2+kx_3=-16, \\ 2x_1+x_2+(k+1)x_3=10. \end{cases}$

26. $\begin{cases} x_1-3x_2+kx_3=4, \\ 4x_1+x_2-(k-2)x_3=29, \\ 3x_1+2x_2+(k+4)x_3=23. \end{cases}$

27. $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + kx_3 = 18, \\ 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 25, \\ x_1 + x_2 - (k-2)x_3 = 7. \end{cases}$

28. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + (k+4)x_3 = 18, \\ 7x_1 - x_2 + kx_3 = 16, \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -6. \end{cases}$

29. $\begin{cases} kx_1 + 3x_2 - 2x_3 = 13, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = -9, \\ (k+4)x_1 + x_2 + 3x_3 = 8. \end{cases}$

30. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ kx_1 + 2x_2 - 2x_3 = 2, \\ (k+1)x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 19. \end{cases}$

31. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 8, \\ (k+1)x_1 + x_2 - 3x_3 = 11, \\ kx_1 + 2x_2 + 5x_3 = -11. \end{cases}$

32. $\begin{cases} 2x_1 + (k+1)x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 - kx_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = -5. \end{cases}$

33. $\begin{cases} (k-2)x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, \\ (k+1)x_1 + x_2 - x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 10. \end{cases}$

34. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + kx_3 = 4, \\ x_1 + x_2 - (k-3)x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$

35. $\begin{cases} -4x_1 + (k+2)x_2 - x_3 = 17, \\ x_1 - kx_2 + x_3 = -5, \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$

3. Підприємство використовує сировину R_1, R_2, R_3 для виробництва проміжної продукції H_1, H_2, H_3. Воно використовує ці проміжні товари для виробництва товарів G_1, G_2, G_3. Норми витрат на виробництво цих товарів та проміжних товарів подано в таблицях.

1) Визначте кількість R_1, R_2, R_3, необхідну для виробництва $k+1$ одиниць G_1, $k+1$ одиниць G_2 і k одиниця G_3.

2) Скільки коштує сировина в 1) загалом, якщо ціна одиниці сировини R_1 становить 100 грн, а одиниці сировини R_2 і R_3 по 110 грн?

3) Скільки коштує одиниця товару G_2 при цінах, які визначені в 2)?

1.

	H_1	H_2	H_3
R_1	3	4	5
R_2	$k+1$	9	6
R_3	k	8	7

	G_1	G_2	G_2
H_1	k	$k+1$	3
H_2	4	5	6
H_3	7	8	10

2.

	H_1	H_2	H_3
R_1	3	$k+3$	5
R_2	2	9	6
R_3	k	8	7

	G_1	G_2	G_2
H_1	k	2	3
H_2	$k+2$	5	6
H_3	7	8	10

3.

	H_1	H_2	H_3
R_1	3	4	5
R_2	k	9	6
R_3	$k+1$	8	7

	G_1	G_2	G_2
H_1	$k+1$	k	3
H_2	4	5	6
H_3	7	8	10

4.

	H_1	H_2	H_3
R_1	$k+1$	4	5
R_2	$k+1$	9	6
R_3	k	8	7

	G_1	G_2	G_2
H_1	k	$k+1$	$k+2$
H_2	4	5	6
H_3	7	8	10

5.

	H_1	H_2	H_3
R_1	3	4	5
R_2	$k+1$	9	6
R_3	1	8	7

	G_1	G_2	G_2
H_1	k	$k+2$	3
H_2	4	5	6
H_3	7	8	$4k$

6.

	H_1	H_2	H_3
R_1	3	4	5
R_2	$k+1$	9	6
R_3	$k+1$	8	7

	G_1	G_2	G_2
H_1	1	$k+1$	3
H_2	4	5	6
H_3	7	8	$4k$

7.

	H_1	H_2	H_3
R_1	3	4	5
R_2	$k+1$	$4k$	6
R_3	1	8	7

	G_1	G_2	G_2
H_1	k	2	3
H_2	4	5	6
H_3	7	8	$4k$

8.

	H_1	H_2	H_3
R_1	3	4	5
R_2	2	$4k$	6
R_3	k	8	7

	G_1	G_2	G_2
H_1	k	$k+1$	3
H_2	4	5	6
H_3	7	8	9

9.

	H_1	H_2	H_3
R_1	3	$2k$	5
R_2	2	9	6
R_3	k	8	7

	G_1	G_2	G_2
H_1	k	$k+1$	3
H_2	4	5	6
H_3	7	8	$3k$

10.

	H_1	H_2	H_3
R_1	3	$2k$	5
R_2	$k+1$	9	6
R_3	k	8	7

	G_1	G_2	G_2
H_1	$k+1$	$k+1$	3
H_2	4	5	6
H_3	7	8	9

11.

	H_1	H_2	H_3
R_1	3	4	5
R_2	2	9	6
R_3	k	8	7

	G_1	G_2	G_2
H_1	$k+1$	3	3
H_2	4	5	6
H_3	7	8	10

12.

	H_1	H_2	H_3
R_1	$k+2$	$2k$	5
R_2	$k+1$	9	6
R_3	k	8	7

	G_1	G_2	G_2
H_1	k	$k+1$	3
H_2	4	5	6
H_3	7	8	8

13.

	H_1	H_2	H_3
R_1	3	$2k$	5
R_2	$k+1$	9	6
R_3	1	8	7

	G_1	G_2	G_2
H_1	k	$k+1$	3
H_2	4	5	6
H_3	7	8	9

14.

	H_1	H_2	H_3
R_1	3	$2k$	5
R_2	$k+1$	9	6
R_3	1	8	7

	G_1	G_2	G_2
H_1	k	$k+2$	3
H_2	4	5	6
H_3	7	8	10

15.

	H_1	H_2	H_3
R_1	3	4	5
R_2	$k+1$	8	6
R_3	k	9	7

	G_1	G_2	G_3
H_1	k	$k+1$	3
H_2	4	5	6
H_3	7	9	8

16.

	H_1	H_2	H_3
R_1	$k+2$	4	5
R_2	$k+1$	9	6
R_3	k	8	7

	G_1	G_2	G_2
H_1	1	$k+1$	3
H_2	4	5	6
H_3	7	8	9

17.

	H_1	H_2	H_3
R_1	$k+2$	4	5
R_2	$k+1$	8	6
R_3	k	7	7

	G_1	G_2	G_2
H_1	k	$k+1$	3
H_2	4	5	6
H_3	7	8	10

18.

	H_1	H_2	H_3
R_1	2	4	5
R_2	$k+2$	9	6
R_3	k	8	7

	G_1	G_2	G_2
H_1	k	$k+2$	3
H_2	4	5	6
H_3	7	8	9

19.

	H_1	H_2	H_3
R_1	3	4	5
R_2	$k+1$	8	6
R_3	k	9	7

	G_1	G_2	G_2
H_1	k	$k+2$	3
H_2	4	5	6
H_3	7	8	10

20.

	H_1	H_2	H_3
R_1	$k+2$	$2k$	5
R_2	$k+1$	9	6
R_3	k	8	7

	G_1	G_2	G_2
H_1	k	$2k$	3
H_2	4	5	6
H_3	7	8	10

21.

	H_1	H_2	H_3
R_1	3	$2k$	5
R_2	$k+1$	9	6
R_3	1	8	7

	G_1	G_2	G_2
H_1	k	$k+1$	3
H_2	4	5	6
H_3	7	8	9

22.

	H_1	H_2	H_3
R_1	3	4	5
R_2	2	9	$3k$
R_3	k	8	7

	G_1	G_2	G_2
H_1	1	$k+1$	3
H_2	4	5	6
H_3	7	8	10

23.

	H_1	H_2	H_3
R_1	3	4	5
R_2	$k+1$	9	6
R_3	k	8	7

	G_1	G_2	G_2
H_1	1	$k+1$	3
H_2	4	5	$3k$
H_3	7	8	9

24.

	H_1	H_2	H_3
R_1	3	4	5
R_2	$k+1$	9	$3k$
R_3	k	8	7

	G_1	G_2	G_2
H_1	k	2	3
H_2	4	5	6
H_3	7	8	10

25.

	H_1	H_2	H_3
R_1	3	4	5
R_2	2	9	6
R_3	k	8	7

	G_1	G_2	G_2
H_1	k	$k+1$	3
H_2	4	$3k$	6
H_3	7	8	9

26.

	H_1	H_2	H_3
R_1	3	4	$3k$
R_2	$k+1$	9	6
R_3	k	8	7

	G_1	G_2	G_2
H_1	k	2	3
H_2	4	5	6
H_3	7	8	10

27.

	H_1	H_2	H_3
R_1	3	4	5
R_2	$k+1$	8	$3k$
R_3	k	9	7

	G_1	G_2	G_2
H_1	1	$k+1$	3
H_2	4	5	6
H_3	7	8	$3k$

28.

	H_1	H_2	H_3
R_1	3	4	5
R_2	$k+1$	9	$3k$
R_3	k	8	7

	G_1	G_2	G_2
H_1	k	2	3
H_2	4	5	6
H_3	7	8	$3k$

29.

	H_1	H_2	H_3
R_1	3	4	5
R_2	2	9	$3k$
R_3	k	8	7

	G_1	G_2	G_2
H_1	k	$k+1$	3
H_2	4	5	$3k$
H_3	7	8	10

30.

	H_1	H_2	H_3
R_1	3	4	5
R_2	$k+1$	9	7
R_3	1	8	6

	G_1	G_2	G_2
H_1	k	$k+1$	3
H_2	4	5	6
H_3	7	8	9

31.

	H_1	H_2	H_3
R_1	3	4	5
R_2	$k+1$	9	6
R_2	k	8	7

	G_1	G_2	G_2
H_1	k	$k+1$	3
H_2	4	5	7
H_3	7	$3k$	10

32.

	H_1	H_2	H_3
R_1	3	4	5
R_2	2	9	$3k$
R_3	k	8	7

	G_1	G_2	G_2
H_1	k	$k+1$	3
H_2	4	5	6
H_3	7	8	9

33.

	H_1	H_2	H_3
R_1	$k+2$	4	5
R_2	2	9	6
R_3	k	8	7

	G_1	G_2	G_2
H_1	k	$k+1$	3
H_2	4	5	6
H_3	7	8	9

34.

	H_1	H_2	H_3
R_1	3	4	5
R_2	2	9	6
R_3	k	8	7

	G_1	G_2	G_2
H_1	k	$k+1$	$k+2$
H_2	4	5	6
H_3	7	8	10

35.

	H_1	H_2	H_3
R_1	3	4	5
R_2	2	9	6
R_3	k	8	7

	G_1	G_2	G_2
H_1	k	$k+1$	$k+2$
H_2	4	5	6
H_3	7	8	10

4. Для виготовлення чотирьох видів продукції P_1, P_2, P_3, P_4 використовують три види сировини S_1, S_2, і S_3. Визначити кількість одиниць продукції P_1, P_2, P_3, P_4, яку можна виготовити, якщо при цьому вся сировина буде повністю використана. Вказати базовий розв'язок.

Запаси сировини та норми витрат на одиницю продукції наведені в таблицях:

1.

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	**60**	**2**	**2**	**1**	**3**
S_2	**80**	**1**	**3**	**2**	**1**
S_3	**100**	**3**	**1**	**3**	***k***

2.

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	**50**	**1**	**1**	**2**	**1**
S_2	**80**	**3**	**2**	**2**	**3**
S_3	**100**	**1**	**3**	**4**	***k***

3.

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	**67**	**1**	**1**	**3**	***k***
S_2	**82**	**2**	**3**	**1**	**3**
S_3	**74**	**2**	**1**	**3**	**1**

4.

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	**130**	**2**	**3**	**3**	**1**
S_2	**85**	**1**	**2**	**2**	**3**
S_3	**115**	**3**	**1**	**3**	***k***

5.

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	**105**	**1**	**2**	**1**	**3**
S_2	**100**	**3**	**1**	**2**	***k***
S_3	**170**	**2**	**3**	**2**	**1**

6.

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	**110**	**1**	**4**	**2**	**1**
S_2	**80**	**2**	**1**	**3**	**2**
S_3	**94**	**3**	**2**	**2**	***k***

7.

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	**80**	**2**	**3**	**2**	***k***
S_2	**80**	**1**	**4**	**2**	**3**
S_3	**120**	**3**	**2**	**4**	**2**

8.

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	**80**	**3**	**2**	**2**	**3**
S_2	**89**	**2**	**1**	**4**	**1**
S_3	**107**	**1**	**3**	**4**	***k***

9.

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	**100**	**1**	**3**	**2**	***k***
S_2	**90**	**3**	**1**	**1**	**3**
S_3	**110**	**2**	**2**	**3**	**2**

10.

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	**87**	**2**	**1**	**3**	**1**
S_2	**91**	**3**	**2**	**2**	***k***
S_3	**55**	**1**	**1**	**2**	**2**

11.

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	**90**	**1**	**2**	**4**	**2**
S_2	**82**	**3**	**2**	**2**	**1**
S_3	**72**	**1**	**4**	**1**	***k***

12.

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	**65**	**1**	**3**	**1**	**2**
S_2	**98**	**2**	**1**	**3**	**1**
S_3	**110**	**3**	**1**	**2**	***k***

13.

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	**105**	**1**	**4**	**2**	**1**
S_2	**125**	**3**	**2**	**4**	***k***
S_3	**80**	**2**	**1**	**3**	**1**

14.

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	**135**	**2**	**3**	**2**	**1**
S_2	**150**	**3**	**2**	**2**	**3**
S_3	**105**	**1**	**1**	**4**	***k***

15.

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	**79**	**1**	**3**	**2**	**1**
S_2	**73**	**3**	**1**	**2**	***k***
S_3	**100**	**3**	**2**	**4**	**2**

16.

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	**76**	**1**	**2**	**3**	**1**
S_2	**68**	**3**	**2**	**1**	***k***
S_3	**107**	**2**	**4**	**3**	**2**

17.

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	**61**	**1**	**1**	**3**	**2**
S_2	**88**	**2**	**3**	**2**	**1**
S_3	**71**	**3**	**1**	**2**	***k***

18.

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	**75**	**1**	**3**	**2**	***k***
S_2	**90**	**2**	**1**	**4**	**3**
S_3	**81**	**3**	**2**	**2**	**3**

19.

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	***P_2***	***P_3***	***P_4***
S_1	***65***	***1***	***1***	***2***	***3***
S_2	***90***	***2***	***1***	***3***	***2***
S_3	***140***	***2***	***3***	***4***	***k***

20.

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	***P_2***	***P_3***	***P_4***
S_1	***72***	***2***	***3***	***1***	***3***
S_2	***50***	***1***	***1***	***2***	***k***
S_3	***106***	***3***	***2***	***3***	***1***

21.

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	***P_2***	***P_3***	***P_4***
S_1	***80***	***1***	***2***	***2***	***3***
S_2	***70***	***2***	***1***	***1***	***k***
S_3	***115***	***2***	***2***	***3***	***2***

22.

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	***P_2***	***P_3***	***P_4***
S_1	***70***	***2***	***2***	***1***	***3***
S_2	***131***	***1***	***4***	***3***	***k***
S_3	***94***	***3***	***2***	***2***	***1***

23.

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	***P_2***	***P_3***	***P_4***
S_1	***110***	***1***	***2***	***1***	***1***
S_2	***150***	***3***	***2***	***1***	***k***
S_3	***230***	***2***	***4***	***3***	***2***

24.

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	***P_2***	***P_3***	***P_4***
S_1	***90***	***2***	***1***	***2***	***k***
S_2	***140***	***1***	***3***	***4***	***2***
S_3	***114***	***3***	***2***	***2***	***1***

25.

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	***P_2***	***P_3***	***P_4***
S_1	***60***	***1***	***2***	***1***	***3***
S_2	***108***	***2***	***4***	***1***	***1***
S_3	***140***	***3***	***2***	***3***	***k***

26.

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	78	1	2	2	1
S_2	96	2	2	3	2
S_3	134	3	4	1	k

27.

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	76	2	2	1	k
S_2	107	1	4	2	2
S_3	97	3	2	2	1

28.

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	67	1	2	2	1
S_2	81	3	2	2	k
S_3	124	2	4	3	1

29.

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	56	1	2	3	k
S_2	62	2	4	1	3
S_3	66	3	2	2	3

30.

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	90	2	1	2	k
S_2	134	3	2	2	4
S_3	136	1	3	2	2

31.

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	77	1	3	2	4
S_2	109	2	1	4	2
S_3	117	3	3	2	k

32.

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	70	1	3	2	2
S_2	90	2	1	4	k
S_3	80	2	3	2	4

33.

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	**108**	**2**	**2**	**3**	***k***
S_2	**90**	**1**	**4**	**1**	**2**
S_3	**102**	**3**	**2**	**2**	**3**

34.

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	**98**	**1**	**3**	**2**	**2**
S_2	**116**	**2**	**1**	**4**	**3**
S_3	**98**	**3**	**3**	**2**	***k***

35.

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	**72**	**1**	**3**	**2**	***k***
S_2	**67**	**2**	**1**	**1**	**3**
S_3	**100**	**3**	**1**	**2**	**4**

5. Задані координати вершин *A*, *B*, *C* трикутника *ABC*. Знайти: а) рівняння висоти *AD*; б) довжину висоти *AD*; в) рівняння медіани *CE*; г) значення кута *B*; д) площу трикутника *ABC*. Зробити малюнок.

1. $A(k+5;\ k+2)$; $B(k+3;\ k+7)$; $C(k+2;\ k+3)$.
2. $A(k+9;\ k+2)$; $B(k+3;\ k+3)$; $C(k+6;\ k+1)$.
3. $A(k+1;\ k+7)$; $B(k+2;\ k)$; $C(k+2;\ k+1)$.
4. $A(k+3;\ k+2)$; $B(k+3;\ k+4)$; $C(k+1;\ k+3)$.
5. $A(k+5;\ k+1)$; $B(k;\ k+3)$; $C(k+1;\ k+4)$.
6. $A(k+3;\ k+3)$; $B(k+1;\ k+1)$; $C(k+2;\ k+5)$.
7. $A(k+1;\ k+1)$, $\mathrm{B}(k+2;\ k+5)$, $\mathrm{C}(k+4;\ k+4)$.
8. $A(k+1;\ k+ 2)$; $B(k+5;\ k+3)$; $C(k+6;\ k+4)$.
9. $A(k+2;\ k+2)$; $B(k+3;\ k+5)$; $C(k+4;\ k+1)$.
10. $A(k;\ k)$; $B(k+2;\ k+2)$; $C(k+4;\ k+4)$.
11. $A(k+2;\ k)$; $B(k+4;\ k+5)$; $C(k+5;\ k+3)$.
12. $A(k+1;\ k)$; $B(k+7;\ k+3)$; $C(k+4;\ k+4)$.
13. $A(k+5;\ k)$; $B(k+1;\ k+2)$; $C(k+4;\ k+5)$.
14. $A(k+3;\ k+ 3)$; $B(k;\ k+6)$; $C(k+6;\ k+6)$.
15. $A(k+2;\ k+2)$; $B(k+3;\ k+4)$; $C(k;\ k+6)$.
16. $A(k+1;\ k)$; $B(k+4;\ k+6)$; $C(k+2;\ k+2)$.
17. $A(k+3;\ k)$; $B(2+k;\ k+3)$; $C(k+1;\ k+3)$.
18. $A(k;\ k+2)$; $B(k+4;\ k+8)$; $C(k+4;\ k)$.
19. $A(k+1;\ k+1)$; $B(k+4;\ k+4)$; $C(k+3;\ k+3)$.
20. $A(k+6;\ k+2)$; $B(k+2;\ k+5)$; $C(k+3;\ k+1)$.
21. $A(k+1;\ k+1)$; $B(k+1;\ k+2)$; $\mathrm{C}(k+5;\ k+4)$.

22. $A(k+2; k+4)$; $B(k+4; k+2)$; $C(k; k+8)$.
23. $A(k+4; k+2)$; $B(k+1; k+6)$; $C(k+1; k+5)$.
24. $A(k+3; k+8)$; $B(k+6; k\ 0)$; $C(k+4; k+2)$.
25. $A(k+2; k+3)$; $B(k+1; k+6)$; $C(k; k+1)$.
26. $A(k+7; k+3)$; $B(k+5; k+2)$; $C(k+8; k+1)$.
27. $A(k+7; k+4)$; $B(k+3; k+7)$; $C(k+2; k+5)$.
28. $A(k+1; k+2)$; $B(k+7; k+2)$; $C(k+4; k+5)$.
29. $A(k+8; k+4)$; $B(k+4; k+1)$; $C(k+7; k+3)$.
30. $A(k; k+1)$; $B(k+1; k+2)$; $C(k+3; k+4)$.
31. $A(k+6; k+5)$; $B(k+2; k+3)$; $C(k; k+1)$.
32. $A(k+6; k+5)$; $B(k; k)$; $C(k+9; k+4)$.
33. $A(k+9; k+2)$; $B(k+3; k+3)$; $C(k+6; k+1)$.
34. $A(k+5; k+2)$; $B(k+3; k+6)$; $C(k+1; k+1)$.
35. $A(k; k+1)$; $B(k+2; k+7)$, $C(k+4; k+4)$.

6. Розв’яжіть задачі:

1. Еліпс проходить через точку $M(\sqrt{8};\ \frac{3}{\sqrt{2}})$ і має ексцентриситет $e = \frac{4}{\sqrt{7}}$. Скласти рівняння еліпса. Зробити малюнок.

2. Скласти рівняння гіперболи, яка проходить через т. $M\ (8\sqrt{2};6)$, якщо асимптоти гіперболи задані рівняннями $y = \pm\frac{3}{4}x$.

3. Скласти рівняння гіперболи, вершини і фокуси якої знаходяться у відповідних фокусах і вершинах еліпса $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{5} = 1$.

4. Скласти рівняння геометричного місця точок, відстань яких від заданої точки $A(0; 2)$ в два рази менша відстані до прямої $y = 8$.

5. Скласти рівняння гіперболи, якщо її ексцентриситет дорівнює 3 і фокуси співпадають з фокусами еліпса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

6. Скласти найпростіше рівняння параболи, якщо відомо, що її фокус знаходиться в точці перетину прямої $8x - 5y - 2 = 0$ з віссю Ox.

7. Еліпс, симетричний відносно осей координат, проходить через точки $M(2\sqrt{3};\sqrt{6})$ і $A(6;\ 0)$. Написати його рівняння, знайти ексцентриситет і відстань від точки M до фокусів.

8. Знайти координати центра і радіус кола $x^2 + y^2 + 6x - y + 37/4 = 0$. Зробити малюнок.

9. Дано еліпс $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{16} = 1$. Скласти рівняння гіперболи, вершини якої містяться в фокусах, а фокуси – у вершинах даного еліпса.

10. Знайти траєкторію точки M, яка під час руху залишається вдвічі ближчою до точки $A(-1; 0)$, ніж до прямої $x = -3$.

11. Знайти координати центра і радіус кола $x^2+y^2-4x+2y-76=0$. Зробити малюнок.

12. Скласти канонічне рівняння еліпса, який проходить через точки $M\,(5/2; \sqrt{6}/4)$ і $N\,(-2;\ \sqrt{15}/5)$. Зробити малюнок.

13. Точка $M\,(6;\ -2)$ лежить на гіперболі, рівняння асимптот якої $y = \pm\frac{2}{3}x$. Скласти рівняння гіперболи. Зробити малюнок.

14. Скласти рівняння геометричного місця точок, однаково віддалених від початку координат і прямої $y = 5$.

15. Знайти координати центра і радіус кола $x^2+y^2+10x-4y+29 = 0$.

16. Скласти рівняння лінії, для кожної точки якої сума відстаней від точок $F_1(2; 0)$ і $F_2\,(-2; 0)$ дорівнює $2\sqrt{5}$.

17. Написати рівняння прямих, які проходять через точку $M(-5; 2)$ і паралельні асимптотам гіперболи $9x^2 - 4y^2 = 36$.

18. На гіперболі $x^2 - 4y^2 = 16$ взята т. M з ординатою, яка дорівнює 1. Знайти відстань від неї до фокусів.

19. Задана рівностороння гіпербола $x^2 - y^2 = 8$. Знайти рівняння еліпса,фокуси якого знаходяться у фокусах гіперболи, якщо відомо, що еліпс проходить через точку $A(4; 6)$.

20. Скласти рівняння гіперболи, яка проходить через точку $M(8\sqrt{2}; 6)$, якщо асимптоти гіперболи задані рівняннями $y = \pm\frac{3}{4}x$.

21. Знайти координати центра і радіус кола $x^2+y^2-4x+2y-76 = 0$. Зробити малюнок.

22. Побудувати коло $2x^2 + 2y^2 - 8x + 5y - 4 = 0$.

23. Скласти канонічне рівняння еліпса, який проходить через точки $M\,(-5; -4)$ і $N\left(5\sqrt{0{,}5}; 2\sqrt{6}\right)$.

24. Ексцентриситет гіперболи дорівнює $\frac{\sqrt{17}}{3}$. Скласти рівняння гіперболи, яка проходить через точку $A\left(3\sqrt{2};2\sqrt{2}\right)$.

25. Скласти рівняння прямих, які проходять через фокуси гіперболи $7x^2 - 5y^2 = 35$ і утворюють з віссю OX кут 60^0. Зробити малюнок.

26. Знайти ексцентриситет еліпса, якщо його осі відносяться як 13 : 5.

27. Еліпс проходить через точку $M(1;\ 1)$ і має ексцентриситет $\varepsilon = 0{,}6$. Скласти рівняння еліпса.

28. Побудувати коло $x^2 + y^2 - 2\sqrt{2}\,x - 2y - 6 = 0$.

29. Скласти рівняння і знайти довжину спільної хорди параболи $y^2 = 36x$ і кола $(x + 12)^2 + y^2 = 400$.

30. Скласти рівняння кола, яке проходить через точки $A(2;\ 2)$, $B(-4;\ 2)$, якщо його центр лежить на прямій $y + x + 2 = 0$.

7. Розв'яжіть задачі економічного змісту:

1. Транспортні витрати на перевезення одиниці вантажу y залізничним і автомобільним транспортом на відстань x знаходять за формулами:

$$y = \frac{1}{2}x + 10 \quad \text{і} \quad y = x + 5,$$

де x вимірюється десятками кілометрів. Визначити, коли транспортні витрати на перевезення автотранспортом менші від витрат на перевезення залізничним транспортом і коли рентабельнішим буде залізничний транспорт.

2. Знайти точки рівноваги та області прибутків і збитків компанії, що виготовляє щомісяця x виробів вартістю p гривень кожен, а сума загальних щомісячних витрат $y_в$ має таку закономірність:

а) $p = 4,\ y_в = 2{,}8x + 600$; б) $p = 7,\ y_в = 1000 + 5x$.

3. Вартість обладнання авторемонтної майстерні 480000 гривень, а річна амортизація – 25000 гривень. Виразити вартість обладнання залежно від часу (x років) роботи майстерні, якщо амортизаційне відрахування залишається постійною величиною.

4. Витрати при перевезенні вантажу трьома видами транспорту відповідно обчислюють за формулами:

$$y_1 = 150 + 50x, \quad y_2 = 250 + 25x, \quad y_3 = 350 + 25x,$$

де x – відстань у сотнях кілометрів, y_1, y_2, y_3 – вартість перевезення у гривнях. Графічно визначити, на які відстані і яким видом транспорту перевозити вантаж економніше:

а) при використанні всіх видів транспорту;

б) при використанні другого і третього видів транспорту;

в) при використанні першого і третього видів транспорту.

5. Із пункту A в пункти B, C, D, E вантаж можна доставити трьома видами транспорту: водним, залізничним і автомобільним. Витрати при перевезенні вантажу відповідно обчислюють за формулами:

$$y_в = 25 + 25x, \quad y_з = 50 + 25x, \quad y_a = 75 + \frac{8}{3}x,$$

де x – відстань у сотнях кілометрів, y – вартість перевезення вантажу в гривнях. Обчислити графічно, яким видом транспорту економніше доставити вантаж у пункти A, B, C, D, E, якщо відстані від пункту A до цих пунктів відповідно дорівнюють 200, 300, 500 і 900 км.

6. Повні витрати з перевезення вантажу залізничним і автомобільним транспортом подаються відповідно залежностями:

$$y_1 = a_1 x + b_1 \text{ і } y_2 = a_2 x + b_2,$$

де x – відстань в км, на яку здійснюється перевезення; y – транспортні витрати. Знаючи, що $0 < a_1 < a_2$ і $0 < b_2 < b_1$ встановити, яким видом транспорту і на яку відстань дешевше перевозити вантаж.

7. Початкова врожайність деякої зернової культури на малопридатних для землеробства землях становила 12 ц/га. Завдяки застосуванню інтенсивної технології передбачається щорічне її зростання на 2 ц/га. Записати закон зміни врожайності y як функції часу x. Обчислити її значення для п’ятого року застосування зазначеної технології ($x = 5$).

8. Повні витрати на виготовлення 5 умовних одиниць деякої продукції становлять 5,5 млн. грн., а для виготовлення 10 таких одиниць – 9 млн. грн. Знайти функцію витрат виробництва, вважаючи її лінійною. Визначити витрати на виготовлення 7 умовних одиниць продукції.

9. Монополіст, знаючи з маркетингових досліджень функцію попиту на свій товар $Q = 10 - 0{,}6p$, вирішує скільки йому виробляти товару. Допоможіть монополісту:

а) розрахувати кількість товару при ціні $p_1 = 5$ грош. од., $p_2 = 6$ грош. од.

б) розрахувати ціну товару, якщо він хоче виробити товару у кількості $Q_1 = 5{,}8$ млн. шт., $Q_2 = 7$ млн. шт.

Задачу зобразіть графічно.

10. Попит (Q) та пропозиція (S) на товар залежно від ціни (p) на ринку задаються формулами:

$$Q = 500 - 10p; \quad S = 50 + 5p.$$

Показати графічно лінії попиту та пропозиції і знайти рівноважну ціну, тобто ціну, при якій попит і пропозиція врівноважуються.

11. Земля рухається по еліпсу, в одному з фокусів якого знаходиться Сонце. Найменша відстань від Землі до Сонця дорівнює $\approx 147{,}5$ мільйона кілометрів, а найбільша – $\approx 152{,}5$ мільйона кілометрів. Знайти більшу піввісь і ексцентриситет орбіти Землі.

12. Верхня дуга залізничного мосту має вигляд параболи. Написати рівняння параболи, якщо відстань між кінцями мосту дорівнює 32 метри, а найбільша висота дуги – 8 метрів.

13. Знайти точки рівноваги та області прибутків і збитків заводу, що виготовляє щомісяця x виробів вартістю 10 гривень кожен, а сума загальних щомісячних витрат $y_в$ має таку закономірність: $y_в = 80 - 4x + 0{,}1x^2$.

14. Витрати палива для судна на підводних крилах зростають пропорційно квадрату швидкості судна. Знайти аналітичну залежність між витратами m і швидкістю V судна, враховуючи, що при $V = 40$ км/год витрачається 20 л палива за годину, а також визначити витрати палива за годину при швидкості 60 км/год.

15. Бригада, яка складається з x робітників-ремонтників і бригадира, виконуючи певне замовлення, щомісяця одержувала загалом 3000 грн. заробітної плати. Подати заробітну плату члена бригади виразом, коли відомо, що вона в усіх однакова і 50 грн. з належної кожному суми становлять різні відрахування.

8. Графічним методом розв'язати задачу лінійного програмування при умові, що $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.

1. $z = 2x_1 + 4x_2 - 5 \quad (extr)$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1 + x_2 \ge 2 \\ x_2 \le 5 \end{cases}$$

2. $z = -3x_1 + x_2 + 3 \quad (extr)$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le 0 \\ 2x_1 + x_2 \ge 2 \\ 4x_1 + 5x_2 \le 20 \end{cases}$$

3. $z = 3x_1 - x_2 + 10 \quad (extr)$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \le 6 \\ x_1 + x_2 \ge 1 \\ 4x_1 + 5x_2 \le 20 \end{cases}$$

4. $z = x_1 + 3x_2 - 8 \quad (extr)$

$$\begin{cases} -3x_1 + 5x_2 \le 15 \\ 2x_1 + x_2 \ge 2 \\ x_1 - 4x_2 \le 4 \end{cases}$$

5. $z = -3x_1 - 2x_2 + 5 \quad (extr)$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 5 \\ 2x_1 - x_2 \ge 4 \\ x_2 \le 3 \end{cases}$$

6. $z = 2x_1 + 2x_2 - 4 \quad (extr)$

$$\begin{cases} -5x_1 + x_2 \le 5 \\ 7x_1 + 6x_2 \ge 42 \\ x_1 - 2x_2 \le 2 \end{cases}$$

7. $z = -3x_1 - 2x_2 + 3 \quad (extr)$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le 4 \\ x_1 + x_2 \ge 2 \\ x_2 \le 3 \end{cases}$$

8. $z = -x_1 - 3x_2 + 12 \quad (extr)$

$$\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 \le 30 \\ x_1 + 2x_2 \ge 2 \\ -2x_1 + x_2 \le 2 \end{cases}$$

9. $z = -2x_1 + 2x_2 - 7 \quad (extr)$

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \le 12 \\ 5x_1 + 2x_2 \ge 10 \\ -x_1 + x_2 \ge 2 \end{cases}$$

10. $z = 2x_1 + 3x_2 - 4 \quad (extr)$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \le 6 \\ 3x_1 + 4x_2 \ge 12 \\ -2x_1 + x_2 \le 10 \end{cases}$$

11. $z = 4x_1 + x_2 - 6 \quad (extr)$

$$\begin{cases} -2x_1 + 5x_2 \le 10 \\ 3x_1 - 2x_2 \ge 6 \\ x_1 \ge 3 \end{cases}$$

12. $z = 4x_1 + 2x_2 + 5 \quad (extr)$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \le 12 \\ 3x_1 - 2x_2 \le 6 \\ x_2 \le 2 \end{cases}$$

13. $z = -2x_1 + 4x_2 - 11 \quad (extr)$

$$\begin{cases} -7x_1 + 4x_2 \le 28 \\ -x_1 + 2x_2 \ge 4 \\ 9x_1 + 5x_2 \le 45 \end{cases}$$

14. $z = x_1 - 3x_2 + 9 \quad (extr)$

$$\begin{cases} 7x_1 + 5x_2 \ge 35 \\ -7x_1 + 2x_2 \le 14 \\ 3x_1 + x_2 \ge 9 \end{cases}$$

$15.\ z=-4x_1+2x_2-7 \quad (extr)$

$$\begin{cases} 3x_1-5x_2 \le 15 \\ -x_1+2x_2 \le 4 \\ x_1 \le 7 \end{cases}$$

$16.\ z=-2x_1+2x_2+3 \quad (extr)$

$$\begin{cases} 9x_1+4x_2 \le 36 \\ -x_1+2x_2 \ge 2 \\ x_1 \ge 1 \end{cases}$$

$17.\ z=-3x_1-x_2-1 \quad (extr)$

$$\begin{cases} 5x_1+3x_2 \le 15 \\ 2x_1+x_2 \ge 2 \\ -x_1+2x_2 \ge 2 \end{cases}$$

$18.\ z=-4x_1+4x_2+5 \quad (extr)$

$$\begin{cases} -5x_1+3x_2 \le 15 \\ 2x_1+x_2 \ge 2 \\ -x_1+3x_2 \ge 3 \end{cases}$$

$19.\ z=-x_1-3x_2+10 \quad (extr)$

$$\begin{cases} 3x_1-4x_2 \le 12 \\ -x_1+2x_2 \le 2 \\ x_2 \le 3 \end{cases}$$

$20.\ z=3x_1-2x_2+4 \quad (extr)$

$$\begin{cases} 3x_1-4x_2 \le 12 \\ 5x_1+2x_2 \ge 10 \\ x_1 \le 6 \end{cases}$$

$21.\ z=-x_1-x_2+13 \quad (extr)$

$$\begin{cases} x_1-4x_2 \le 4 \\ x_1-2x_2 \ge 2 \\ x_1+x_2 \le 6 \end{cases}$$

$22.\ z=4x_1+3x_2-7 \quad (extr)$

$$\begin{cases} 2x_1-x_2 \ge 2 \\ 3x_1+2x_2 \ge 6 \\ x_2 \le 5 \end{cases}$$

$23.\ z=3x_1-x_2+5 \quad (extr)$

$$\begin{cases} -4x_1+3x_2 \le 12 \\ x_1+3x_2 \ge 3 \\ 7x_1+5x_2 \le 35 \end{cases}$$

$24.\ z=-4x_1+2x_2-5 \quad (extr)$

$$\begin{cases} 3x_1-4x_2 \le 12 \\ 5x_1+2x_2 \ge 10 \\ 2x_1+3x_2 \le 12 \end{cases}$$

$25.\ z=-2x_1+4x_2-7 \quad (extr)$

$$\begin{cases} 5x_1+3x_2 \le 15 \\ 6x_1+x_2 \ge 6 \\ x_1+3x_2 \le 3 \end{cases}$$

$26.\ z=-x_1-4x_2+15 \quad (extr)$

$$\begin{cases} -3x_1+2x_2 \le 6 \\ x_1+x_2 \ge 2 \\ 5x_1+4x_2 \le 20 \end{cases}$$

$27.\ z=-3x_1+3x_2-4 \quad (extr)$

$$\begin{cases} 7x_1+3x_2 \le 21 \\ x_1-x_2 \le 1 \\ -4x_1+x_2 \le 4 \end{cases}$$

$28.\ z=x_1+4x_2-9 \quad (extr)$

$$\begin{cases} -2x_1+3x_2 \le 6 \\ 3x_1+5x_2 \ge 15 \\ x_1 \le 4 \end{cases}$$

29. $z=-6x_1+x_2+4 \quad (extr)$

$$\begin{cases} 5x_1-3x_2\le 15 \\ 2x_1+x_2\ge 4 \\ -2x_1+5x_2\le 10 \end{cases}$$

30. $z=-x_1+2x_2-5 \quad (extr)$

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2\le 6 \\ 4x_1+x_2\ge 4 \\ 2x_1-5x_2\le 10 \end{cases}$$

31. $z=-x_1-3x_2+5 \quad (extr)$

$$\begin{cases} -3x_1+5x_2\le 15 \\ 2x_1+x_2\ge 2 \\ x_1\le 4 \end{cases}$$

32. $z=-3x_1+3x_2-4 \quad (extr)$

$$\begin{cases} 7x_1+8x_2\le 56 \\ 6x_1-x_2\ge 6 \\ 2x_1-3x_2\le 6 \end{cases}$$

33. $z=4x_1-x_2+12 \quad (extr)$

$$\begin{cases} x_1-5x_2\le 5 \\ 3x_1-x_2\ge 6 \\ 2x_1+x_2\ge 6 \end{cases}$$

34. $z=2x_1+5x_2-7 \quad (extr)$

$$\begin{cases} 2x_1+x_2\le 6 \\ -x_1+7x_2\ge 7 \\ 7x_1+x_2\ge 7 \end{cases}$$

35. $z=x_1+2x_2-10 \quad (extr)$

$$\begin{cases} -4x_1+7x_2\le 28 \\ -2x_1+7x_2\ge 14 \\ 2x_1+x_2\ge 4 \end{cases}$$

9. Знайти границі функції:

1. а) $\lim\limits_{x\to-(k+1)}\dfrac{x^2+x(k-4)-5(k+1)}{x^2+(k-1)x-2(k+1)}$; б) $\lim\limits_{x\to k+10}\dfrac{\sqrt{x-k+15}-5}{\sqrt{x-k+26}-6}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(k+2)x^2+(k+4)x-6k}{(k+1)x^2-9k}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\frac{x}{5}}{x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x}{1+5x}\right)^x$.

2. а) $\lim\limits_{x\to-(k+2)}\dfrac{x^2+kx-2(k+2)}{x^2+(1+k)x-k-2}$; б) $\lim\limits_{x\to k+1}\dfrac{\sqrt{x-k+24}-5}{\sqrt{x-k+48}-7}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{kx^5+(k+4)x^4+7k}{(k+3)x^6+kx^4+2}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{\sin 3x}$; д) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+5}{n-1}\right)^{-2n}$.

3. а) $\lim\limits_{x\to-(k+3)}\dfrac{x^2+(2+k)x-k-3}{x^2+(k-1)x-4(k+3)}$; б) $\lim\limits_{x\to k+2}\dfrac{\sqrt{x-k+2}-2}{\sqrt{x-k+14}-4}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(k+2)x^2-(k+5)x+4k}{(k+7)x^6+k}$; г) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{tg\ 3(x-\pi)}{\sin\ 2(\pi-x)}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+8}{x-2}\right)^x$.

4. а) $\lim\limits_{x\to2k+1}\dfrac{x^2-2kx-2k-1}{x^2+(1-2k)x-2(2k+1)}$; б) $\lim\limits_{x\to k+3}\dfrac{\sqrt{x-k+22}-5}{\sqrt{x-k+46}-7}$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(k+2)x^3-3k}{(k+5)x^3+(k+2)x^2+5k}$; г) $\lim\limits_{x\to0}\sin3x\cdot ctg5x$;

д) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{\frac{3}{\cos x}}$.

5. а) $\lim\limits_{x\to2k+3}\dfrac{x^2-2x(1+k)-2k-3}{x^2+(1-2k)x-4(2k+3)}$; б) $\lim\limits_{x\to k+4}\dfrac{\sqrt{x-k+5}-3}{\sqrt{x-k+12}-4}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{kx^2+(k+5)x+k+1}{(k+3)x^5-k-4}$; г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2ctg\ 2x^2}{\cos\ 3x}$; д) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{5n}\right)^n$.

6. а) $\lim\limits_{x\to2k-1}\dfrac{x^2+2(1-k)x-2k+1}{x^2+(3-2k)x-2(2k-1)}$; б) $\lim\limits_{x\to k+5}\dfrac{\sqrt{x-k+44}-7}{\sqrt{x-k+20}-5}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(k+3)x^2+(k+1)x-k+3}{(k+5)x^2+(k+10)x}$; г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tg\ 2x^2}{\sin\ 3x^2}$; д) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+2}\right)^n$.

7. а) $\lim\limits_{x\to2k}\dfrac{x^2+x(3-2k)-6k}{x^2+2(1-k)x-4k}$; б) $\lim\limits_{x\to k+7}\dfrac{\sqrt{x-k+29}-6}{\sqrt{x-k+42}-7}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(k+1)x^2-(k+2)x}{(k+2)x^2-(k+2)x+4k}$; г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x}{arc\sin\ 6x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-1}{3x+1}\right)^{3x}$.

8. а) $\lim\limits_{x\to k+5}\dfrac{x^2-(k+6)x+k+5}{x^2-(k-1)x-6(k+5)}$; б) $\lim\limits_{x\to k+8}\dfrac{\sqrt{x-k+17}-5}{\sqrt{x-k+41}-7}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(k+7)x^3-kx^2+k-2}{(k+5)x^3+(k+1)x^2+9k}$; г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{arc\,tg3x}{5x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-5}{x}\right)^{x/2}$.

9. а) $\lim\limits_{x\to k+6}\dfrac{x^2-(4+k)x-2(k+6)}{x^2-(3+k)x-3(k+6)}$; б) $\lim\limits_{n\to k+10}\dfrac{\sqrt{x-k+15}-5}{\sqrt{x-k+26}-6}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(k+2)x^3-(k+3)x+k}{2k+(k+4)x^3}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin\ \pi x}{\sin\ 5\pi x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-2}{5x+1}\right)^{5x}$.

10. а) $\lim\limits_{x\to k+4}\dfrac{x^2-(10+k)x+6(k+4)}{x^2-x(3+k)-k-4}$; б) $\lim\limits_{x\to k+11}\dfrac{\sqrt{x-k+38}-7}{\sqrt{x-k+14}-5}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2k-(k+7)x^2}{k+(k+1)x-(k+2)x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{arc\ tg\ 4x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x-2}\right)^{3x}$.

11. а) $\lim\limits_{x\to k+5}\dfrac{x^2-x(4+k)-k-5}{x^2-(2+k)x-3(k+5)}$; б) $\lim\limits_{x\to k+12}\dfrac{\sqrt{x-k+24}-6}{\sqrt{x-k+13}-5}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(k+5)x^2+3k}{4k+(k+1)x-(k+4)x^3}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\ 6x}{tg\ 3x}$; д) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+3}{n-6}\right)^{2n}$.

12. а) $\lim\limits_{x\to k+6}\dfrac{x^2-(5+k)x-k-6}{x^2+(3-k)x-9(k+6)}$; б) $\lim\limits_{x\to k+1}\dfrac{\sqrt{x-k+3}-2}{\sqrt{x-k+80}-9}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(k+6)x^4+kx+2k}{(k+2)x^2+kx^5}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\ 5x}{8x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{2x+3}$.

13. а) $\lim\limits_{x\to k+1}\dfrac{x^2-(2+k)x+k+1}{x^2+(7-k)x-8(k+1)}$; б) $\lim\limits_{x\to k+2}\dfrac{\sqrt{x-k+14}-4}{\sqrt{x-k+34}-6}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(k+4)x^2+(k+2)x}{(k+3)x+10k}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg3x}{tg2x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x+5}\right)^{-5x}$.

14. а) $\lim\limits_{x\to k+2}\dfrac{x^2-(1+k)x-k-2}{x^2+(5-k)x-7(k+2)}$; б) $\lim\limits_{x\to k+3}\dfrac{\sqrt{x-k+6}-3}{\sqrt{x-k+46}-7}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(k+2)x^4+(k+3)x^3+2k}{kx^4+(k+1)x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0} tg\ 2x\ ctg\ 3x$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{\ln\ (1+x)}$.

15. а) $\lim\limits_{x\to k+3}\dfrac{x^2-(2+k)x-k-3}{x^2+(3-k)x-6(k+3)}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(k+7)x^2-(k+2)x+5k}{(k+3)x^3+(k+1)x}-k$;

в) $\lim\limits_{x\to k+4}\dfrac{\sqrt{x-k+12}-4}{\sqrt{x-k+21}-5}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\ 3x}{\sin\ 2x}$; д) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-5}{2n+6}\right)^{n+4}$.

16. а) $\lim\limits_{x\to k+4}\dfrac{x^2-(3+k)x-k-4}{x^2+(1-k)x-5(k+4)}$; б) $\lim\limits_{x\to k+5}\dfrac{\sqrt{x-k+44}-7}{\sqrt{x-k+31}-6}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-(k+2)x+3k}{(k+1)x^5+k}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5tg\ 2x}{\sin\ 2x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+1}{3x-2}\right)^{3x+4}$.

17. а) $\lim\limits_{x\to k}\dfrac{x^2-(2+k)x+2k}{x^2+(3-k)x-3k}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(k+1)x^4-(k+2)x^2+3k}{(k+2)x^3-(k+3)x^2-2k}$;

в) $\lim\limits_{x\to k+6}\dfrac{\sqrt{x-k+10}-4}{\sqrt{x-k+43}-7}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg\ 7x}{3x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x+3}{5x-7}\right)^{2x+1}$.

18. а) $\lim\limits_{x\to k+1}\dfrac{x^2+(2-k)x-3(k+1)}{x^2-kx-k-1}$; б) $\lim\limits_{x\to k+7}\dfrac{\sqrt{x-k+29}-6}{\sqrt{x-k+9}-4}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(k+3)x^2-(k+2)x+k}{(k+4)x^2+(k+5)x+3k}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ctg\ 2x}{ctg\ 4x}$; д) $\left(\dfrac{n+4}{n-1}\right)^{2n-5}$.

19. а) $\lim\limits_{x\to -k}\dfrac{x^2+(k+2)x+2k}{x^2+(k-1)x-k}$; б) $\lim\limits_{x\to k+8}\dfrac{\sqrt{x-k+17}-5}{\sqrt{x-k+41}-7}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(k+4)x^5+(k+7)x+2k}{(k+1)x^7-(k+3)x^5}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos\ 2x-1}{3x^2}$; д) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-1}{2n+1}\right)^{3n}$.

20. а) $\lim\limits_{x\to k+1}\dfrac{x^2-kx-k-1}{x^2+(1-k)x-2(k+1)}$; б) $\lim\limits_{x\to k+9}\dfrac{\sqrt{x-k+7}-4}{\sqrt{x-k+16}-5}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(k+7)x^3+(k+2)x-k}{(k+4)x^4+kx+1}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\sin\ 3x\cdot ctg\ 2x$; д) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+3}{n-6}\right)^{2n-4}$.

21. а) $\lim\limits_{x\to k+2}\dfrac{x^2+(1-k)x-3(k+2)}{x^2-(4+k)x+2(k+2)}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(k+8)x^3+(k+2)x-3k}{(k+2)x^4+(k+9)x+k}$;

в) $\lim\limits_{x\to k+10}\dfrac{\sqrt{x-k+26}-6}{\sqrt{x-k+39}-7}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\ 5x-\sin\ 3x}{\sin\ x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{2+x}\right)^{5x}$.

22. а) $\lim\limits_{x\to k+3}\dfrac{x^2-(2+k)x-k-3}{x^2-(6+k)x+3(k+3)}$; б) $\lim\limits_{x\to k+11}\dfrac{\sqrt{x-k+53}-8}{\sqrt{x-k+14}-5}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(k+3)x^3+(k+2)x}{(k+9)x^3+8k}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\sin 9x\cdot ctg\,5x$; д) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-5}{2n+6}\right)^{n+4}$.

23. а) $\lim\limits_{x\to k+4}\dfrac{x^2-(2+k)x-2(k+4)}{x^2+(1-k)x-5(k+4)}$; б) $\lim\limits_{x\to k+12}\dfrac{\sqrt{x-k+37}-7}{\sqrt{x-k+52}-8}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(k+5)x^3-(k+1)x^2+4k}{(k+7)x^4-(k+8)x^2+16k}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x+\sin 2x}{6x}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{10}{x}}$.

24. а) $\lim\limits_{x\to k+2}\dfrac{x^2+(1-k)x-3(k+2)}{x^2-(1+k)x-k-2}$; б) $\lim\limits_{x\to k+13}\dfrac{\sqrt{x-k+23}-6}{\sqrt{x-k+12}-5}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(k+3)x^2-(k+2)x+2k}{3k+(k+3)x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\,6x}{5x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+1}{3x-1}\right)^{5x+4}$.

25. а) $\lim\limits_{x\to k+3}\dfrac{x^2-(2+k)x-k-3}{x^2+(1-k)x-4(k+3)}$; б) $\lim\limits_{x\to k+14}\dfrac{\sqrt{x-k+35}-7}{\sqrt{x-k+22}-6}$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(k+3)x^2-(k+6)x}{2k+(k+5)x-2k}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^{2x}$.

26. а) $\lim\limits_{x\to -(k+1)}\dfrac{x^2+(k-1)x-2(k+1)}{x^2+(k-4)x-5(k+1)}$; б) $\lim\limits_{x\to k+1}\dfrac{\sqrt{x-k+80}-9}{\sqrt{x-k+3}-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(k+4)x^3+(k+3)x^2+(k+2)x+2k}{(k+2)x^4+(k+1)x^2-2k}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}(1-4x)^{\frac{1-x}{x}}$.

27. а) $\lim\limits_{x\to -(k+2)}\dfrac{x^2+(1+k)x-k-2}{x^2+kx-2(k+2)}$; б) $\lim\limits_{x\to k+2}\dfrac{\sqrt{x-k+62}-8}{\sqrt{x-k+23}-5}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(k+5)x^3-(k+1)x^2}{2k+(k+7)x^3}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-2}{5x+1}\right)^{3x}$.

28. а) $\lim\limits_{x\to -(k+3)}\dfrac{x^2+(k-1)x-4(k+3)}{x^2+(2+k)x-k-3}$; б) $\lim\limits_{x\to k+3}\dfrac{\sqrt{x-k+78}-9}{\sqrt{x-k+33}-6}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(k+3)x^6+(k+2)x-k-5}{(k+2)x+x^3-(k+1)x^5}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 2x}$; д) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-3}{n}\right)^{\frac{n}{2}}$.

29. а) $\lim\limits_{x\to 2k+1}\dfrac{x^2+(1-2k)x-2(2k+1)}{x^2-2kx-2k-1}$; б) $\lim\limits_{x\to k+4}\dfrac{\sqrt{x-k+12}-4}{\sqrt{x-k+60}-8}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(k+9)x-7k}{3k+(k+7)x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^2}{1-\cos 4x}$; д) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^{3n}$.

30. а) $\lim\limits_{x\to 2k+3}\dfrac{x^2+(1-2k)x-4(2k+3)}{x^2-2(1+k)x-2k-3}$; б) $\lim\limits_{x\to k+5}\dfrac{\sqrt{x-k+4}-3}{\sqrt{x-k+76}-9}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(k+1)x^2-(k+2)x-2k}{(k+3)x^2+(k+4)x+1}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\sin 4x\ ctg\ 2x$; д) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{4}{x}}$.

31. а) $\lim\limits_{x\to 2к-1}\dfrac{x^2+(3-2k)x-4k+2}{x^2+2(1-k)x-2k+1}$; б) $\lim\limits_{x\to k+6}\dfrac{\sqrt{x-k+19}-5}{\sqrt{x-k+43}-7}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(k+6)x^4+(k+2)x}{(k+1)x^2+(k+5)x-3k}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\ 2x}{\sin\ x}$; д) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n+1}{5n-2}\right)^{5n+1}$.

32. а) $\lim\limits_{x\to 2k}\dfrac{x^2+2(1-k)x-4k}{x^2+(3-2k)x-6k}$; б) $\lim\limits_{x\to k+7}\dfrac{\sqrt{x-k+2}-3}{\sqrt{x-k+74}-9}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(k+2)x^3+(k+3)x^5}{(k+7)x^3-(k+1)x+5k}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\ 2x}{10x}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2\sin x)^{\frac{5}{\sin x}}$.

33. а) $\lim\limits_{x\to k+6}\dfrac{x^2-(3+k)x-3(k+6)}{x^2-(4+k)x-2(k+6)}$; б) $\lim\limits_{x\to k+8}\dfrac{\sqrt{x-k+56}-8}{\sqrt{x-k+28}-6}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(k+3)x^2-(k+5)x+10k}{k-kx+(k+7)x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2ctg\ 3x^2-3}{\cos\ 2x}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{8+x}{x}}$.

34. а) $\lim\limits_{x\to k+5}\dfrac{x^2+(1-k)x-6(k+5)}{x^2-(3+k)x-2(k+5)}$; б) $\lim\limits_{x\to k+9}\dfrac{\sqrt{x-k+72}-9}{\sqrt{x-k+7}-4}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{kx^2-(k+2)x-3k}{5k+(k+1)x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ tg\ 3x}{1-\cos\ 6x}$; д) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4n+1}{4n-1}\right)^{-3n}$.

35. а) $\lim\limits_{x\to k+4}\dfrac{x^2-(k+3)x-k-4}{x^2+(2-k)x-6(k+4)}$; б) $\lim\limits_{x\to k+10}\dfrac{\sqrt{x-k+15}-5}{\sqrt{x-k+71}-9}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(k+1)x^3+(k+5)x-2k}{2k+(k+1)x^2-(k+3)x^4}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{tg\,5x}$; д) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+5}{n-2}\right)^{3n+1}$.

10. Розв’яжіть задачі економічного змісту:

1. У банк на терміновий внесок під 10% річних вкладена сума 10 тис. грн. Яку суму отримає клієнт через 5 років?

2. У страховій компанії були куплені чотири акції вартістю 100 грн., кожна з яких дає 20% приросту річних. Яку суму отримає клієнт через 3 роки?

3. За п’ять років обсяг продукції повинен зрости на 100%. Яким повинен бути середній темп зростання щорічно?

4. В ощадну касу зроблено внесок на 10 років у сумі 100000 грн. Яку суму виплатить ощадна каса після закінчення цього терміну при процентній ставці 3%?

5. Обладнання вартістю 10 тис. гривень внаслідок експлуатації втрачає кожного року 20% своєї вартості. Знайти:

а) вираз для вартості цього обладнання через t років;

б) кількість років його доцільного використання, якщо при вартості 3000 гривень обладнання використовувати недоцільно.

6. Обчислити кінцеву суму для початкової суми $K_0 = 100000$ грн., вкладеної під складні проценти із $p = 6\%$, що нараховуються неперервно протягом 3 років.

7. Яким повинен бути середній темп випуску синтетичної смоли і пластмас за 5 років, якщо загальний обсяг випуску повинен зрости на 35%?

8. Населення міста зростає щорічно на 3% порівняно з попереднім роком. Через скільки років населення цього міста збільшиться у 1,5 рази?

9. Ділянка лісу містить $1{,}44 \cdot 10^5$ м^3 деревини. Обчислити, на скільки кубометрів збільшиться кількість деревини за 15 років, якщо середній щорічний приріст деревини становить 2,8%.

10. Сума $K_0 = 1000$ гривень вкладена під складні проценти з $p = 6\%$ річних терміном на 3 роки. Обчислити кінцеву суму, якщо проценти нараховуються в кінці кожного місяця.

11. Кожного року батьки вносять P гривень на свій рахунок накопичення із щорічним прибутковим зростанням рахунку на R відсотків. Обчислити суму коштів, накопичених за n років.

а) $P = 600$, $R = 2\%$, $n = 12$; б) $P = 500$, $R = 2\%$, $n = 12$;

в) $P = 300$, $R = 3\%$, $n = 18$; г) $P = 200$, $R = 3\%$, $n = 18$;

д) $P=100$; $R=5\%$, $n=24$.

12. Батьки бажають відкрити рахунок на ім'я сина у страховій компанії “ОРАНТА”, яка сплачує R щорічних прибуткових відсотків. Його умова – сплачувати на початку кожного року P гривень протягом n років починаючи з наступного року. Яку суму коштів він повинен внести на рахунок ренти?

а) $P=500$, $R=3\%$, $n=6$; б) $P=800$, $R=3\%$, $n=8$;

в) $P=1000$, $R=5\%$, $n=10$; г) $P=600$, $R=5\%$, $n=12$;

д) $P=700$, $R=8\%$, $n=15$.

13. На час навчання студент університету отримав з фонду навчання в борг A гривень, Цей кредит йому надано із R % щорічного зростання і умовою щорічного повернення боргу в кінці кожного року після закінчення університету протягом n років. Скільки коштів повинен повертати студент кожного року після закінчення університету?

а) $A=8000$, $R=8\%$, $n=5$; б) $A=9000$, $R=8\%$, $n=8$;

в) $A=10000$, $R=5\%$, $n=10$; г) $A=11000$, $R=5\%$; $n=12$;

д) $A=12000$, $R=3\%$, $n=15$.

14. Нехай межа інфляції становить 12% за рік. Визначте, на скільки зменшиться початкова сума вкладу через 3 роки.

15. Попит і пропозиція задані лінійними функціями $Q(p)=10-2p$ і $S(p)=4+p$. Визначте рівноважну ціну. Дослідіть графічно вид павутинної моделі ринку.

11. Знайти похідні функцій:

1. а) $y=2ktg\sqrt{x}-kx^3$; б) $y=\ln\dfrac{k+3x}{k-2x}$; в) $y=(kx^4-3x+4)^{k+2}$;

г) $y=arctg\dfrac{k}{x}$; д) $y=e^{2x}\cos\dfrac{2x}{3k}$.

2. а) $y=arc\sin e^{3xk}$; б) $y=\ln\dfrac{ktgx+1}{tgx-2}$; в) $y=x^{2k}e^{x^3}$;

г) $y=(x^5-kx^3+3)^{k+3}$; д) $y=\sin\dfrac{x}{k}e^{kx^2}$.

3. а) $y=tgx\cdot\cos 3kx$; б) $y=\ln\dfrac{k+x^2}{x^{2k}-1}$; в) $y=(x^6-kx^4+3x+5)^{2k}$;

г) $y=\dfrac{1}{x}arctgkx^5$; д) $y=\sin\sqrt[3]{x+2k}$.

4. а) $y=\dfrac{\cos^2 x}{k+\cos x}$; б) $y=(kx^5-4x^2+3)^{3k}$; в) $y=\sqrt{x+k}\cdot tg\,2kx$;

г) $y=arctg\,\dfrac{5x+2}{k+3}$; д) $y=3^{kx}\cdot\ln\dfrac{4x+k}{4x-k}$.

5. а) $y=(2+kx)tg\,2x$; б) $y=arctg\dfrac{x+2k}{3x-k}$; в) $y=\ln\dfrac{x^2+3kx}{x+k}$;

г) $y=(kx^4-2kx^3+5)^3$; д) $y=e^{2x}(\sin kx+2k\cos x)$.

6. а) $y=e^{2kx}\cos\sqrt[k]{x}$; б) $y=\ln\dfrac{2+k\sin x}{1-\sin 3x}$; в) $y=(x+k)^2 3^{kx}$;

г) $y=arctg\dfrac{3x+k}{2x-1}$; д) $y=x^3\sin^{2k}3x$.

7. а) $y=\ln(1+5kx)^2$; б) $y=\dfrac{\cos\,3x}{k^2+2kx^2}$; в) $y=3x\,tg\,(2kx-3)$;

г) $y=\dfrac{x}{3k}arctg\sqrt{x+k}$; д) $y=\sin(2x+k)\cos kx^2$.

8. а) $y=x^{2k}\cos\sqrt[3]{kx}$; б) $y=(kx^4-3x+7)^{2x}$; в) $y=\ln tg\,\dfrac{2kx}{3}$;

г) $y=4^{kx}\sin\dfrac{x+k}{2^{kx}}$; д) $y=\arcsin(3x^2+k)$.

9. а) $y=\ln^{2k}(1-2x)$; б) $y=x^5 ctg\;3kx$; в) $y=\dfrac{x-e^{2kx}}{kx+e^{2x}}$;

г) $y=\sin(2x^k)\cos(k-x^2)$; д) $y=tg\dfrac{2x}{k}arc\,ctg(3kx+1)$.

10. а) $y=\dfrac{\cos x}{1-\sin kx}$; б) $y=\ln\sqrt[5]{5kx-1}$; в) $y=arctg\sqrt{kx-1}$;

г) $y=tg\dfrac{2x+k}{x^2-2}$; д) $y=\ln\sin(kx^2-4)$.

11. а) $y=5^x\ln 3kx$; б) $y=\ln 2kx\cdot e^{2\sin x}$; в) $y=tg^{3k}x$;

$y=arctg\;(k-3x^2)$; д) $y=xe^{2k\,tgx^4}$.

12. а) $y=e^{k\sin 2x}\sqrt{\cos kx}$; б) $y=\dfrac{e^{kx}}{(x+1)^3}$; в) $y=\ln\sqrt{(x+4k)^3}$;

г) $y=2x\,arctg\,(3x+x^k)$; д) $y=(x^2+1)^{3k}\cdot 4^{2x}$.

13. а) $y = x^6 \cos 5kx$; б) $y = arctg\,(5 - x^k)$; в) $y = \ln\left(1 - \frac{k}{x}\right)$;

г) $y = e^{x^2+1}\left(x^{3k} + 2^x\right)$; д) $y = \sin\left(\frac{x-2k}{kx^2-1}\right)$.

14. а) $y = \sin 2x\sqrt{4-3kx^2}$; б) $y = xtg\,5kx + 3^{kx}$; в) $y = \ln\sqrt{x^{3k}-1}$;

г) $y = arctg\frac{k}{2x+3}$; д) $y = \frac{2x-2}{3x+k}\cos\frac{x-k}{2}$.

15. а) $y = \sin\frac{x}{2k} - \cos\frac{kx}{2}$; б) $y = \ln\frac{x+5}{\sqrt[k]{x^2+1}}$; в) $y = \sqrt{x}\cdot\sin\,5kx$;

г) $y = arctg\,\ln(2x+1)$; д) $y = \sin^3(x+2k) + \sin^2(3kx)$.

16. а) $y = \frac{\cos 3x}{x^{2k}}$; б) $y = \sin\frac{2x-1}{kx+3}e^{-3x}$; в) $y = \arcsin(2kx^3)$;

г) $y = arctg\,\left(3x + \sqrt[k]{2x+4}\right)$; д) $y = x\ln(1 + \sqrt[k]{x})$.

17. а) $y = 2k\,tg\sqrt{x} - \sqrt{x}$; б) $y = \ln\sqrt[3]{(k-3x)^2}$; в) $y = arc\sin(3-kx)$;

г) $y = \cos\frac{x^5}{5k}$; д) $y = arctg\sqrt{kx+1}$.

18. а) $y = \frac{x - e^{2kx}}{e^{2x}}$; б) $y = x^5 ctg\,3kx$; в) $y = \ln^2(1-2kx)$;

г) $y = \sqrt{arctg\left(3\sqrt{x} + x^2\right)}$; д) $y = \sin^k(x+3)$.

19. а) $y = (x^4 - 2kx^2 + 3)^{k+1}$; б) $y = \ln\sqrt{1 - \sin\frac{x}{k+1}}$; в) $y = x\arccos\frac{x}{2k}$;

г) $y = arctg\left(e^{kx}\right) + arcctg\left(e^{-kx}\right)$; д) $y = \left(\frac{k-2x}{3kx}\right)^2$.

20. а) $y = \frac{1}{2\sqrt{x+k}}$; б) $y = \ln\left(\frac{2x-3k}{kx^2}\right)$; в) $y = \left(\frac{1}{4}x^{3k} + 7x^2\right)^2$;

г) $y = arctgx^{2k}$; д) $y = e^{x+k}\left(2\sin kx + 3\right)$.

21. а) $y = \sqrt{\frac{x^2+k}{\sin kx}}$; б) $y = \ln\sqrt{\frac{x^3-k}{3kx}}$; в) $y = xtgkx + 3k^x$;

г) $y = arctg\frac{x}{k} + arcctgkx$; д) $y = (kx^3 - 6x + 5)^4$.

22. а) $y=(3x^5-kx^3+5)^3$ **;** б) $y=\left(\dfrac{x}{k-5x}\right)^2$; в) $y=\dfrac{1}{3k}\sin kx$;

г) $y=e^{kx}arctg\dfrac{x^2}{k}$; д) $y=(\cos kx+1)^2$.

23. а) $y=(kx^4-5x^2+3k)^6$; б) $y=\ln\left(\dfrac{e^{kx}}{5x-k}\right)$; в) $y=\sqrt{tg^k 3x}$;

г) $y=arctg^k(\sin x)$; д) $y=\cos kx\cdot e^{kx}$.

24. а) $y=(x^6-kx^3+2kx+3)^5$; б) $y=\sqrt{x+k}\left(\dfrac{1}{\sqrt{kx}}+1\right)$;

в) $y=\ln\left(1+e^{\frac{kx}{3}}\right)$; г) $y=arctg(\dfrac{k}{kx+3})^2$; д) $y=\cos^k(x-2)tgkx$.

25. а) $y=\sqrt{k+\sin(4x-k)}$; б) $y=\arccos\dfrac{kx}{3}$; в) $y=e^{k\sin x}$;

г) $y=(kx^5-3x+5)^{2k}$; д) $y=(x+2)\ln kx$.

26. а) $y=(9x^2+k)arctg\ kx$; б) $y=2^{kx}+x^{2k}$; в) $y=\cos\sqrt{2x+k}$;

г) $y=(x^7-kx^2+3)^4$; д) $y=tg^2\left(\sqrt{x+k}\right)$.

27. а) $y=(k+\ln\cos x)^k$; б) $y=\ln\sqrt{k+\sin x}$; в) $y=\dfrac{\cos kx}{x^{2k}}$;

г) $y=arctg^2(3x^k)$; д) $y=(x^5-3kx^4+2k)^6$.

28. а) $y=\sqrt{arctgkx}$; б) $y=\left(1-\dfrac{x^2}{3k}\right)^k$; в) $y=k^{\sin x}-\sqrt[3]{3kx}$;

г) $y=\ln(x^3-kx^2+k)$; д) $y=\sin^k(7x+3)$.

29. а) $y=\ln tg\dfrac{x}{k}$; б) $y=(x^4-kx^3+2)^{k+1}$; в) $y=(3+k)tgkx$;

г) $y=arctg\sqrt{x-3k}$; д) $y=\sqrt{\sin 3x}\ln(kx)$.

30. а) $y=arc\ \ tg\sqrt{5+kx}$; б) $y=\ln\dfrac{\sin x}{\cos kx}$; в) $y=\sqrt[5]{(x+\cos kx)^k}$;

г) $y=(kx^5-3x^2+2k)^6$; д) $y=7^{kx}+\ln 7x$.

31. а) $y=\ln\sqrt{k+tgx}$; б) $y=\dfrac{\sin kx}{\cos^2 x}$; в) $y=(x^6-2kx^2+5)^{2k}$;

г) $y=\left(x^k+1\right)arctgkx$; д) $y=(x+k)^3 tg(2x+k)$.

32. а) $y=\ln^2\left(\dfrac{x+k}{x-1}\right)$; б) $y=5^{x^2+\sin kx}$; в) $y=\sqrt{\dfrac{x+k}{2x}}$; г) $y=arctg\,(2x+k)$;

д) $y=\sin^k\left(x+2\right)$.

33. а) $y=\dfrac{2^{4x}}{kx^3+5x^2-1}$; б) $y=\dfrac{arc\sin 3x}{kx-2}$; в) $y=arctg^{\,k+1}(x+3)$;

г) $y=\ln(\sqrt{2x+k})$; д) $y=e^{\sin kx}tg\left(5x+k\right)$.

34. а) $y=(x^5+k)^{5k+1}$; б) $y=\sqrt{arctg(x^k-1)}$; в) $y=\sqrt{x^3-2x+3k}$;

г) $y=e^{k-tg\,3x}$; д) $y=\sin^3\left(kx-3\right)\cos 2x$.

35. а) $y=\sin\dfrac{x}{2}+\cos\dfrac{x}{k}$; б) $y=\dfrac{x^k}{x+5k}$; в) $y=\sqrt{x+k}\cdot\sin\,kx$;

г) $y=3arctg\left(\frac{x}{5}-k\right)$; д) $y=\left(x^2-k\right)\cos\left(kx-1\right)$.

12. Підприємство за місяць виготовляє x одиниць продукції. Сумарні витрати виробництва описуються функцією $V(x)$, а залежність між ціною і кількістю одиниць продукції x - $p(x)$. Розрахувати за яких умов прибуток буде максимальним. Визначити маржинальні і сумарні витрати, а також прибуток при цих умовах.

1. $V(x)=\dfrac{1}{12}x^2+5x+300$, $p(x)=26-\dfrac{1}{16}x$.
2. $V(x)=\dfrac{1}{14}x^2+18x+100$, $p(x)=41-\dfrac{1}{8}x$.
3. $V(x)=\dfrac{1}{12}x^2+6x+100$, $p(x)=42-\dfrac{1}{12}x$.
4. $V(x)=\dfrac{1}{40}x^2+14x+200$, $p(x)=27-\dfrac{1}{12}x$.
5. $V(x)=\dfrac{1}{12}x^2+8x+100$, $p(x)=30-\dfrac{1}{10}x$.
6. $V(x)=\dfrac{1}{14}x^2+5x+200$, $p(x)=37-\dfrac{1}{18}x$.

7. $V(x)=\frac{1}{12}x^2+24x+300$, $p(x)=48-\frac{1}{24}x$.

8. $V(x)=\frac{1}{18}x^2+14x+400$, $p(x)=24-\frac{1}{12}x$.

9. $V(x)=\frac{1}{12}x^2+12x+200$, $p(x)=32-\frac{1}{8}x$.

10. $V(x)=\frac{1}{14}x^2+18x+200$, $p(x)=30-\frac{1}{10}x$.

11. $V(x)=\frac{1}{16}x^2+12x+150$, $p(x)=43-\frac{1}{15}x$.

12. $V(x)=\frac{1}{22}x^2+6x+300$, $p(x)=23-\frac{1}{12}x$.

13. $V(x)=\frac{1}{20}x^2+8x+200$, $p(x)=24-\frac{1}{12}x$.

14. $V(x)=\frac{1}{12}x^2+5x+400$, $p(x)=25-\frac{1}{8}x$.

15. $V(x)=\frac{1}{22}x^2+14x+200$, $p(x)=30-\frac{1}{10}x$.

16. $V(x)=\frac{1}{36}x^2+16x+300$, $p(x)=50-\frac{1}{22}x$.

17. $V(x)=\frac{1}{40}x^2+15x+300$, $p(x)=45-\frac{1}{20}x$.

18. $V(x)=\frac{1}{50}x^2+20x+600$, $p(x)=50-\frac{1}{10}x$.

19. $V(x)=\frac{1}{30}x^2+15x+200$, $p(x)=50-\frac{1}{5}x$.

20. $V(x)=\frac{1}{40}x^2+20x+400$, $p(x)=50-\frac{1}{20}x$.

21. $V(x)=\frac{1}{50}x^2+19x+200$, $p(x)=50-\frac{1}{12}x$.

22. $V(x)=\frac{1}{50}x^2+15x+300$, $p(x)=50-\frac{1}{20}x$.

23. $V(x)=\frac{1}{40}x^2+20x+400$, $p(x)=50-\frac{1}{20}x$.

24. $V(x)=\frac{1}{50}x^2+15x+200$, $p(x)=50-\frac{1}{20}x$.

25. $V(x)=\frac{1}{43}x^2+16x+400$, $p(x)=45-\frac{1}{15}x$.

26. $V(x)=\frac{1}{40}x^2+10x+200$, $p(x)=32-\frac{1}{15}x$.

27. $V(x)=\frac{1}{50}x^2+12x+400$, $p(x)=33-\frac{1}{12}x$.

28. $V(x)=\frac{1}{48}x^2+22x+300$, $p(x)=50-\frac{1}{10}x$.

29. $V(x)=\frac{1}{50}x^2+20x+400$, $p(x)=50-\frac{1}{10}x$.

30. $V(x)=\frac{1}{48}x^2+10x+200$, $p(x)=39-\frac{1}{10}x$.

31. $V(x)=\frac{1}{30}x^2+8x+300$, $p(x)=40-\frac{1}{10}x$.

32. $V(x)=\frac{1}{54}x^2+15x+800$, $p(x)=47-\frac{1}{10}x$.

33. $V(x)=\frac{1}{44}x^2+14x+200$, $p(x)=42-\frac{1}{12}x$.

34. $V(x)=\frac{1}{50}x^2+15x+400$, $p(x)=51-\frac{1}{10}x$.

35. $V(x)=\frac{1}{16}x^2+61x+500$, $p(x)=34-\frac{1}{12}x$.

13. Розв’яжіть задачі:

1. Із квадратного бляшаного листа 60×60 см^2 потрібно зробити прямокутну коробку без кришки, вирізаючи по кутах однакові квадратики і загинаючи полоски, що залишились. Які повинні бути розміри вирізаних квадратиків, щоб вийшла коробка найбільшого об’єму?

2. Переріз тунелю має форму прямокутника з насадженим півкругом. Периметр перерізу 18 м. За якого радіуса півкруга площа перерізу буде найбільшою?

3. Квітник прямокутної форми, який прилягає до будинку, потрібно огородити плитами (є 200 плит довжиною 0,5 м). Якими мають бути розміри квітника, щоб його площа була найбільшою?

4. Знайти такі розміри відкритого басейну з квадратним дном об’ємом 50 м^3, щоб на облицювання його стін і дна пішла найменша кількість матеріалу.

5. Переріз тунелю має форму прямокутника з насадженим півкругом. Периметр перерізу дорівнює 40 м. За яких розмірів його сторін площа перерізу буде найбільшою?

6. Знайти найбільший об'єм циліндричної посудини, в якої повна поверхня дорівнює 30 $м^2$.

7. Потрібно обгородити парканом прямокутну ділянку землі площею $216\,м^2$, а далі поділити її на дві рівні частини стіною, загородкою, паралельною одній зі сторін цієї ділянки. Якої довжини слід узяти сторони ділянки, щоб на цю споруду пішла найменша кількість матеріалу?

8. Якими мають бути розміри ящика з кришкою місткістю $V = 1764$ $см^3$, якщо сторони основи відносяться, як 3 : 4, щоб на його виготовлення пішло найменше матеріалу?

9. Із трьох дощок однакової ширини збивають жолоб. При якому куті нахилу бічних стінок площа поперечного перерізу буде найбіьшою?

10. Треба зробити конічну лійку з твірною, що дорівнює 20 $см^{2.}$ Якою має бути висота лійки, щоб її об'єм був найбільшим ?

11. Знайти розміри відкритого басейну з квадратним дном об'ємом 32$м^3$, за яких на облицювання його стін і дна пішла б найменша кількість матеріалу.

12. Із прямокутного листа заліза шириною 60 см і довжиною 90 см виготовляють ящик: по кутах вирізають квадрати і загинають краї, що залишились. Знайти розмір квадратів, які вирізають, щоб зробити ящик найбільшої місткості.

13. Бак об'ємом 4 $м^2$, який має форму паралелепіпеда з квадратною основою і відкритий зверху, потрібно покрити оловом. Якими мають бути розміри бака, щоб на його покриття пішла найменша кількість матеріалу?

14. Залізний стержень довжиною 1 м зігнутий в прямокутник. Які розміри цього прямокутника, якщо його площа найбільша?

15. Сіткою довжиною 200 м потрібно огородити прилягаючу до будинку прямокутну ділянку найбільшої площі. Знайти її розміри.

16. Сіткою довжиною 140 м потрібно огородити прилягаючу до будинку прямокутну ділянку найбільшої площі. Знайти розміри прямокутної ділянки.

17. Потрібно виготовити закритий циліндричний бак, об'єм якого дорівнює 8 $м^3$. Якими мають бути його розміри, щоб на його виготовлення пішла найменша кількість матеріалу?

18. Бічні сторони і менша сторона земельної ділянки трапецеїдальної форми становлять 16 м кожна. Знайти таку її більшу основу, щоб площа була найбільшою.

19. Бічні сторони і менша сторона земельної ділянки трапецеїдальної форми дорівнюють 10 м кожна. Знайти її більшу основу так, щоб площа була найбільшою.

20. Переріз тунелю має форму прямокутника з насадженим півкругом. Периметр перерізу 60 м. За яких розмірів його сторін площа перерізу буде найбільшою?

21. Які розміри повинна мати циліндрична водонапірна башта з поверхнею S, щоб її об'єм був найбільшим?

22. Довести, що з усіх прямокутних земельних ділянок, які мають заданий периметр $2p$, найбільшу площу має квадратна.

23. На сторінці книжки друкований текст повинен займати S $см^2$. Верхнє і нижнє поля мають бути по a *см,* права і ліва – по b *см*. При яких розмірах сторінки на текст піде найменше паперу?

24. Із квадратного бляшаного листа, сторона якого a треба зробити відкриту зверху скриньку найбільшої місткості, вирізавши рівні квадрати по кутах і відкидаючи їх, а потім згинаючи бляху так, щоб утворити боки скриньки. Яка повинна бути сторона вирізаного квадрата?

25. Потрібно виготовити бляшану посудину циліндричної форми місткістю 3 л, відкриту зверху. Які повинні бути розміри посудини, щоб на її виготовлення пішла найменша кількість матеріалу?

26. Бак для перевезення рідини має форму циліндра об'ємом V. Якими мають бути розміри циліндра, щоб кількість матеріалу, використаного для його виготовлення, була найменшою?

14. Відомі функції попиту $Q = Q(p)$ і пропозиції $S = S(p)$, де Q і S – кількість товару; p – ціна товару. Знайти:

1) рівноважну ціну, тобто ціну, при якій попит і пропозиція врівноважуються;
2) еластичність попиту і пропозиції для рівноважної ціни;
3) зміну доходу при підвищенні ціни на 7% від рівноважної.

1. $Q(p) = \dfrac{50p + k}{50p - k}, S(p) = 50p + 2k.$

2. $Q(p) = \dfrac{49p + k}{49p - k}, S(p) = 49p + 2k.$

3. $Q(p)=\dfrac{48p+k}{48p-k}, S(p)=48p+2k.$

4. $Q(p)=\dfrac{47p+k}{47p-k}, S(p)=47p+2k.$

5. $Q(p)=\dfrac{46p+k}{46p-k}, S(p)=46p+2k.$

6. $Q(p)=\dfrac{45p+k}{45p-k}, S(p)=45p+2k.$

7. $Q(p)=\dfrac{44p+k}{44p-k}, S(p)=44p+2k.$

8. $Q(p)=\dfrac{43p+k}{43p-k}, S(p)=43p+2k.$

9. $Q(p)=\dfrac{42p+k}{42p-k}, S(p)=42p+2k.$

10. $Q(p)=\dfrac{41p+k}{41p-k}, S(p)=41p+2k.$

11. $Q(p)=\dfrac{40p+k}{40p-k}, S(p)=40p+2k.$

12. $Q(p)=\dfrac{6p+k}{6p-k}, S(p)=6p+2k.$

13. $Q(p)=\dfrac{5p+k}{5p-k}, S(p)=5p+2k.$

14. $Q(p)=\dfrac{4p+k}{4p-k}, S(p)=4p+2k$

15. $Q(p)=\dfrac{3p+k}{3p-k}, S(p)=3p+2k.$

16. $Q(p)=\dfrac{2p+k}{2p-k}, S(p)=2p+2k$

17. $Q(p)=\dfrac{p+k}{p-k},\quad S(p)=p+2k$

18. $Q(p)=\dfrac{39p+k}{39p-k}, S(p)=39p+2k.$

19. $Q(p)=\dfrac{38p+k}{38p-k}, S(p)=38p+2k.$

20. $Q(p)=\dfrac{37p+k}{37p-k},\ \ S(p)=37p+2k.$

21. $Q(p)=\dfrac{23p+k}{23p-k}, S(p)=23p+2k.$

22. $Q(p)=\dfrac{36p+k}{36p-k}, S(p)=36p+2k.$

23. $Q(p)=\dfrac{35p+k}{35p-k}, S(p)=35p+2k.$

24. $Q(p)=\dfrac{34p+k}{34p-k}, S(p)=34p+2k.$

25. $Q(p)=\dfrac{33p+k}{33p-k}, S(p)=33p+2k.$

26. $Q(p)=\dfrac{32p+k}{32p-k}, S(p)=32p+2k.$

27. $Q(p)=\dfrac{31p+k}{31p-k}, S(p)=31p+2k.$

28. $Q(p)=\dfrac{30p+k}{30p-k}, S(p)=30p+2k.$

29. $Q(p)=\dfrac{29p+k}{29p-k}, S(p)=29p+2k.$

30. $Q(p)=\dfrac{28p+k}{28p-k}, S(p)=28p+2k.$

31. $Q(p)=\dfrac{27p+k}{27p-k}, S(p)=27p+2k.$

32. $Q(p)=\dfrac{26p+k}{26p-k}, S(p)=26p+2k.$

33. $Q(p)=\dfrac{25p+k}{25p-k}, S(p)=25p+2k.$

34. $Q(p)=\dfrac{24p+k}{24p-k}, S(p)=24p+2k.$

35. $Q(p)=\dfrac{22p+k}{22p-k}, S(p)=22p+2k.$

15. Розв'яжіть задачі з економічним змістом:

1. Функція витрат підприємства має вигляд $V(x)=0{,}002x^3-0{,}1x^2+10x+2000$ (тисяч гривень). Знайти маржинальну вартість при $x_1=50,\ x_2=100$ і $x_3=120$.

2. Визначити маржинальний дохід виробництва 300 одиниць виробів, якщо кількість виготовлених виробів можна знайти за формулою $x=1000-100p,$ де p – роздрібна вартість одного виробу.

3. Знайти маржинальний дохід підприємства, якщо кількість виготовлених і проданих виробів x та роздрібна вартість кожного виробу p зв'язані рівністю $x=4000-2p.$

4. Підприємство виготовляє x виробів, роздрібна вартість кожного з них $p=80-0{,}1x$, а функція витрат $V(x)=5000+20x$ (у гривнях). Знайти маржинальний прибуток, якщо виготовлено та продано 150 і 400 виробів.

5. Валовий продукт держави змінюється з часом t за формулою $П=100+t$ (мільярдів гривень), а кількість населення змінюється за законом $P=120+2t$ (мільйонів). Знайти швидкість зміни частини валового продукту держави, що припадає на кожного громадянина.

6. Витрати виробництва $K(x)$ залежать від обсягу продукції x: $K(x)=15x-\dfrac{1}{10}x^2$. Визначити граничні витрати, якщо обсяг виробництва становить 5 і 10 одиниць.

7. Функція ціни залежно від попиту на певний товар можна визначити формулою $p=20-x,$ де x – попит, p – ціна. Визначити граничну виручку, якщо попит становить 3 одиниці.

8. Функція прибутку фірми залежно від ціни p на одиницю виготовленої продукції характеризується формулою $f(p)=-20p^2+400p+150.$ Визначити граничний прибуток фірми залежно від ціни для значень $p=5,\ p=10,\ p=12.$

9. Знайти еластичність попиту Q відносно ціни p, якщо $q=30-4p,\ p=5.$

10. Крива повних витрат має вигляд $K=\ln(3+5x).$ Визначити ела-

стичність повних витрат для $x=-1$.

11. Функція пропозиції певного товару $S=\dfrac{10+4p^2}{1+12p}$. Визначити еластичність пропозицій, якщо ціна $p=3$.

12. Мале підприємство може виготовити і продати кожну одиницю виробу з прибутком 10 гривень і витратити x гривень на рекламу. Кількість проданих товарів виражають функцією $f(x)=1000(1-e^{-0,001x})$. Знайти швидкість зміни прибутку відносно зміни витрат на рекламу при $x=1000$ і $x=3000$.

13. Кількість хворих під час епідемії грипу в 2010 році змінювалась з часом t (вимірюється днями) з початку вакцинації населення за законом $P(t)=\dfrac{200t}{t^2+100}$. Знайти час максимуму захворювань, інтервали зростання і спадання епідемії.

14. Промислова продукція держави протягом t років після 2000 року змінювалась за законом $y=500(1+215e^{-0,07t})^{-1}$. Коли випуск продукції зростав, а коли – спадав?

15. Зміна населення держави з часом t здійснюється за законом $P(t)=\dfrac{A}{1+Be^{-t}}$, де A і B – постійні величини. Чому дорівнює максимальна швидкість зміни населення?

16. Знайти еластичність попиту і вказати стан доходу відповідного підприємства при $p=5$ і $p=15$, якщо дано рівняння кількості виготовлених і проданих виробів x з вартістю кожного виробу p.

а) $x=100(5-p)$, б) $x=50(4-\sqrt{p})$, в) $x=200\sqrt{9-p}$.

17. Завод виробляє x одиниць продукції на місяць, а сумарні витрати виробництва становлять $K=\dfrac{1}{30}x^2+20x+500$. Залежність між питомою ціною p і кількістю одиниць продукції x, яку можна продати за цією ціною, становить $p=30-\dfrac{1}{10}x$. За яких умов прибуток буде максимальним?

18. Функція середніх витрат – $\Pi(x)=4x$, а функція попиту –

$p = 12 - 2x$. При якому обсязі виробництва прибуток буде найбільшим?

19. Крива повних витрат – $K = x^3 - 4x^2 + 10x$. При якому обсязі виробництва (x) середні витрати будуть мінімальними?

20. Витрати виробництва K залежать від обсягу продукції x за формулою $K(x) = -0{,}05x^3 + 3375x + 200$. При яких значеннях x витрати виробництва почнуть спадати?

21. Підводний телеграфний кабель складається із серцевини, виготовленої з мідного дроту, та оболонки, виготовленої з непровідного матеріалу. Нехай x – відношення радіуса серцевини до товщини оболонки. Тоді швидкість сигналізації пропорційна до $x^2 \ln \frac{1}{x}$. Показати, що найбільша швидкість досягається, коли $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$.

22. Виробнича функція підприємства $y = 30\sqrt[4]{x}$, де обсяг основних фондів x та обсяги випуску продукції y задано у вартісній формі. Обсяг основних фондів становить 81 умов. грош. од. Знайдіть середню та граничну фондовіддачу та еластичність випуску за фондами. Визначити оптимальний обсяг випуску продукції, якщо ціна на неї вдвічі більша за ціну ресурсу.

23. Обсяг випуску продукції v (од.) фірми виражається функцією $v = -t^3 + 10t^2 - 100t + 10$, де t – робочий час (год). Визначити продуктивність праці через годину після початку роботи і за годину до її завершення, $t \in [0;8]$.

24. Залежність між витратами виробництва цигарок задано функцією $y = \frac{10000}{x} - 100$, де x (%) – вміст шкідливих речовин у них. Визначте середні та граничні витрати виробництва, якщо вміст шкідливих речовин у цигарках становить 5 %. Знайдіть оптимальний для підприємства обсяг випуску продукції.

25. Залежність між собівартістю одиниці продукції y (умов. грош. од.) та обсягом випуску продукції x (од.) виражається функцією $y = -0{,}3x + 900$. Знайти еластичність собівартості за обсягу випуску продукції 500 одиниць. Визначити, за якого обсягу випуску продукції собівартість буде еластичною.

Комплексне практичне індивідуальне завдання № 2
II СЕМЕСТР

1. Нехай задано виробничу функцію $z(x,y)$, де x – об'єм фондів, y – об'єм трудових ресурсів. Знайти еластичність випуску по фондах $E_x(z)$ та по праці $E_y(z)$ при $x=1$, $y=1$. Як зміниться обсяг виробництва при зростання фондів на 1% і при зростання трудових ресурсів на 1%?

1. $z(x,y)=20x+10y+4x^2-2y^2+3xy$; 2. $z(x,y)=x+4xy+y^2$;
3. $z(x,y)=20x+10y-2x^2+4y^2+3xy$; 4. $z(x,y)=2x^2y+3xy^2+y^3$;
5. $z(x,y)=2x^2+3y$; 6. $z(x,y)=2x+3y^2$;
7. $z(x,y)=500+3x-6y^2$; 8. $z(x,y)=2x^{0,2}y^{0,8}$;
9. $z(x,y)=2x^2y+3xy^2+x^3$; 10. $z(x,y)=2x^3y+y^2+x^3$;
11. $z(x,y)=x^2+5xy^2+2y^3$; 12. $z(x,y)=5xy^2+y^3+3y$;
13. $z(x,y)=x^3+7x^2y+4y$; 14. $z(x,y)=x^3+4x^2y+y^4$;
15. $z(x,y)=x^4+3xy^2+y^3$; 16. $z(x,y)=xy^3+x^2y^4+2y$;
17. $z(x,y)=x^4+3x^2y^3+3y$; 18. $z(x,y)=2xy^2+3yx^2+4y$;
19. $z(x,y)=x+3xy+y^2$; 20. $z(x,y)=x^3y+y^2+2x^2$;
21. $z(x,y)=3x^2+5xy^2+y^3$; 22. $z(x,y)=300+3x-2y^2$;
23. $z(x,y)=x^{0,4}y^{0,6}$; 24. $z(x,y)=xy^2+y^3+3y^2$;
25. $z(x,y)=x^3+6x^2y+4y^2$; 26. $z(x,y)=x^3+3x^2y+2y^4$;
27. $z(x,y)=x^3+3xy^2+y^3$; 28. $z(x,y)=xy^3+x^2y^3+3y$;
29. $z(x,y)=x^4+xy^3+3y$; 30. $z(x,y)=2xy^2+yx^2+y$;
31. $z(x,y)=x+3x^2y+y^2$; 32. $z(x,y)=x^3y+2y^2+3x^2$;
33. $z(x,y)=x^2+5xy^2+2y^3$ 34. $z(x,y)=200+3y-2x^2$;
35. $z(x,y)=0,5x^{0,7}y^{0,3}$.

2. Нехай виробнича функція визначається функцією Кобба-Дугласа. З метою збільшення випуску продукції на $a\%$, необхідно збільшити фонди на $b\%$ або чисельність працівників на $c\%$. В 2021 році один працівник протягом місяця виготовляв продукції на $M=6000$ (грн.), а всього робітників $L=125\cdot k$. Основні фонди оцінюються в $K=9$ (млн.грн.) Записати виробничу функцію y, величину середньої фондовіддачі і середньої продуктивності праці, еластичність випуску по праці $E_L(y)$ і по фондах $E_K(y)$.

1. $a=\frac{37}{2}\%,\ b=37\%,\ c=\frac{111}{2}\%.$

2. $a=19\%,\ b=38\%,\ c=57\%.$

3. $a=\frac{39}{2}\%,\ b=39\%,\ c=\frac{117}{2}\%.$

4. $a=20\%,\ b=40\%,\ c=60\%.$

5. $a=20\%,\ b=40\%,\ c=60\%.$

6. $a=\frac{41}{2}\%, b=41\%, c=\frac{123}{2}\%.$

7. $a=21\%,\ b=42\%,\ c=63\%.$

8. $a=\frac{43}{2}\%, b=43\%, c=\frac{129}{2}\%.$

9. $a=22\%,\ b=44\%,\ c=66\%.$

10. $a=23\%,\ b=46\%,\ c=69\%.$

11. $a=\frac{47}{2}\%,\ b=47\%,\ c=\frac{141}{2}\%.$

12. $a=24\%,\ b=48\%,\ c=72\%.$

13. $a=\frac{49}{2}\%,\ b=49\%,\ c=\frac{147}{2}\%.$

14. $a=25\%,\ b=50\%,\ c=75\%.$

15. $a=1\%,\ b=2\%,\ c=3\%.$

16. $a=\frac{3}{2}\%,\ b=3\%,\ c=\frac{9}{2}\%.$

17. $a=2\%,\ b=2\%,\ c=6\%.$

18. $a=\frac{5}{2}\%,\ b=5\%,\ c=\frac{15}{2}\%.$

19. $a=3\%,\ b=6\%,\ c=9\%.$

20. $a=\frac{7}{2}\%,\ b=7\%,\ c=\frac{21}{2}\%.$

21. $a=4\%,\ b=8\%,\ c=12\%.$

22. $a=\frac{9}{2}\%,\ b=9\%,\ c=\frac{27}{2}\%.$

23. $a=5\%,\ b=10\%,\ c=15\%.$

24. $a=\frac{11}{2}\%,\ b=11\%,\ c=\frac{33}{2}\%.$

25. $a=6\%,\ b=12\%,\ c=18\%.$

26. $a=\frac{13}{2}\%,\ b=13\%,\ c=\frac{39}{2}\%.$

27. $a=7\%,\ b=14\%,\ c=21\%.$

28. $a=\frac{15}{2}\%,\ b=15\%,\ c=\frac{45}{2}\%.$

29. $a=8\%,\ b=16\%,\ c=24\%.$

30. $a=\frac{17}{2}\%,\ b=17\%,\ c=51\%.$

31. $a=9\%,\ b=18\%,\ c=27\%.$

32. $a=\frac{19}{2}\%,\ b=19\%,\ c=\frac{57}{2}\%.$

33. $a=10\%,\ b=20\%,\ c=30\%.$

34. $a=\frac{21}{2}\%,\ b=21\%,\ c=\frac{63}{2}\%.$

35. $a=11\%,\ b=22\%,\ c=33\%.$

3. Мале підприємство виробляє товари *A* і *B*. Загальні щоденні витрати *V(x)* (у гривнях) на виробництво *x* одиниць товару *A* та *y* одиниць товару *B* відомі. Визначити кількість одиниць товарів *A* і *B*, яку потрібно виробляти, щоб загальні витрати підприємства були мінімальними.

1. $V(x) = 250–4x–7y+0,2x^2+0,1y^2$; 2. $V(x) = 360–6x–8y+0,3x^2+0,4y^2$;
3. $V(x) = 450–5x–6y+0,1x^2+0,3y^2$; 4. $V(x) = 306–7x–4y+0,1x^2+0,2y^2$;
5. $V(x) = 386–3x–5y+0,1x^2+0,1y^2$; 6. $V(x) = 412–4x–6y+0,2x^2+0,3y^2$;
7. $V(x) = 501–5x–7y+0,1x^2+0,5y^2$; 8. $V(x) = 370–8x–6y+0,2x^2+0,3y^2$;
9. $V(x) = 390–2x–9y+0,1x^2+0,3y^2$; 10. $V(x) = 368–9x–7y+0,3x^2+0,1y^2$;
11. $V(x) = 505–10x–3y+0,2x^2+0,1y^2$; 12. $V(x) = 49–11x–2y+0,2x^2+0,1y^2$;
13. $V(x) = 398–12x–3y+0,5x^2+0,1y^2$; 14. $V(x) = 441–14x–4y+0,7x+0,1y$;
15. $V(x) = 299–2x–11y+0,1x^2+0,2y^2$; 16. $V(x) = 33–3x–12y+0,1x^2+0,5y^2$;
17. $V(x) = 432–4x–14y+0,2x^2+0,7y^2$; 18. $V(x) = 54–15x–5y+0,3x^2+0,1y^2$;
19. $V(x) = 654–16x–7y+0,4x^2+0,1y^2$; 20. $V(x) = 49–5x–15y+0,1x^2+0,3y^2$;
21. $V(x) = 401–7x–16y+0,1x^2+0,4y^2$; 22. $V(x) = 67–17x–8y+0,5x^2+0,2y^2$;
23. $V(x) = 597–13x–3y+0,5x^2+0,1y^2$; 24. $V(x) = 74–14x–5y+0,7x^2+0,1y^2$;
25. $V(x) = 637–8x–17y+0,2x^2+0,5y^2$; 26. $V(x) = 547-3x-13y+0,1x^2+0,5y^2$;
27. $V(x) = 699–5x–14y+0,1x^2+0,7y^2$; 28. $V(x) = 591-15x-6y+0,5x^2+0,3y^2$;
29. $V(x) = 679–16x–8y+0,2x^2+0,2y^2$; 30. $V(x) = 704-6x-15y+0,3x^2+0,5y^2$;
31. $V(x) = 800–8x–16y+0,2x^2+0,2y^2$; 32. $V(x) = 987-17x-9y+0,5x^2+0,3y^2$;
33. $V(x)=941–18x–10y+0,3x^2+0,5y^2$; 34. $V(x) = 112-19x-11y+0,5x^2+0,5y^2$.
35. $V(x) = 1500–18x–7y+0,2x^2+0,1y^2$.

4. Сумарний прибуток підприємства залежить від витрат двох ресурсів x та y і виражається функцією $P(x, y)$. Кількість ресурсів обмежена рівністю $x + y = q$. Визначити витрати ресурсів x та y, що забезпечують максимальний прибуток підприємства, та обчислити його.

1. $P(x, y) = 8000 - x^2 - y^2 + 40x + 60y$, $q = 100$;
2. $P(x, y) = 90000 - x^2 - 2y^2 + 40x + 120y$, $q = 200$;
3. $P(x, y) = 10000 - 2x^2 - 4y^2 + 60x + 80y$, $q = 100$;
4. $P(x, y) = 25000 - x^2 - y^2 + 30x + 100y$, $q = 155$;
5. $P(x, y) = 30\sqrt{x}\sqrt[3]{y} - 5x - 10y$, $q = 120$;
6. $P(x, y) = 10\sqrt{x}\sqrt{y} - 5x - 10y$, $q = 400$;
7. $P(x, y) = \sqrt{x}y - y^2 + 6y - x$, $q = 100$;
8. $P(x, y) = xy + 2000$, $q = 25$;
9. $P(x, y) = 2x + 10y - y^2$, $q = 200$;

10. $P(x, y) = -x^2 - y^2 + 1000$, $q = 20$;

11. $P(x, y) = 20x - x^2 + 2y$, $q = 200$.

5. Маючи ціну X (грн./од.) на товар і попит на цей товар Y (од.)

X	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8
Y	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6	Y_7	Y_8

знайти емпіричну формулу цієї залежності.

1.

X	60	62	65	70	72	80	85	90
Y	100	95	90	86	85	80	70	60

2.

X	30	35	40	50	52	55	60	70
Y	20	18	17	15	12	10	8	5

3.

X	200	205	210	220	230	240	250	260
Y	145	140	132	110	100	90	70	60

4.

X	110	115	120	130	145	150	160	180
Y	78	75	70	60	58	55	50	40

5.

X	5	7	9	13	16	17	19	20
Y	31	29	27	25	21	17	15	10

6.

X	13	17	20	23	25	27	29	30
Y	70	65	62	57	55	51	50	45

7.

X	150	153	156	160	163	166	169	170
Y	60	58	55	53	50	48	45	43

8.

X	112	115	120	123	126	128	130	135
Y	351	350	345	343	340	335	332	330

9.

X	115	117	120	123	125	127	130	133
Y	437	435	430	427	425	421	418	410

10.

X	97	100	103	107	109	113	115	120
Y	303	300	297	293	290	288	285	280

11.

X	82	80	74	70	66	60	58	55
Y	25	27	30	33	35	38	40	42

12.

X	33	35	37	40	46	50	52	55
Y	73	70	67	65	60	57	55	50

13.

X	70	72	75	76	79	80	83	85
Y	200	197	195	193	190	187	185	183

14.

X	40	42	47	50	55	58	62	65
Y	150	147	140	138	135	132	130	128

15.

X	60	63	67	72	75	80	82	87
Y	120	118	110	108	105	100	97	95

16.

X	150	152	155	170	175	180	190	200
Y	315	310	300	280	272	263	250	240

17.

X	520	525	530	540	550	560	580	600
Y	350	340	335	300	290	280	260	255

18.

X	130	132	140	150	155	170	180	190
Y	230	220	210	205	200	180	160	150

19.

X	320	325	330	332	340	350	360	370
Y	202	200	195	185	180	170	165	150

20.

X	210	215	218	230	232	235	245	260
Y	305	300	290	270	265	264	250	230

21.

X	50	52	55	60	62	70	75	80
Y	202	200	190	180	178	170	160	140

22.

X	420	425	430	450	455	470	480	500
Y	190	180	175	160	162	150	142	110

23.

X	180	182	190	195	200	220	230	240
Y	410	405	390	384	380	350	320	300

24.

X	450	455	460	470	480	485	490	500
Y	300	295	294	280	250	240	220	200

25.

X	500	505	510	520	525	540	545	550
Y	220	218	205	200	200	180	170	150

26.

X	90	92	95	100	110	112	120	125
Y	150	145	142	130	120	115	100	90

27.

X	80	84	90	95	100	110	120	140
Y	300	290	288	280	260	255	230	200

28.

X	220	225	230	240	250	255	260	280
Y	302	300	290	280	270	264	260	240

29.

X	410	415	425	440	450	450	455	470
Y	180	175	170	160	158	155	140	120

30.

X	70	75	80	82	85	90	95	100
Y	210	205	195	190	180	170	150	130

31.

X	95	100	102	110	120	125	130	140
Y	202	200	190	180	170	150	142	120

32.

X	200	205	210	240	245	250	270	280
Y	140	130	128	110	106	104	90	70

33.

X	110	120	125	135	140	150	160	170
Y	240	220	212	200	190	160	150	120

34.

X	350	355	360	365	375	380	400	410
Y	85	80	80	75	70	60	40	38

35.

X	240	245	250	260	275	285	290	310
Y	160	150	130	128	120	110	100	70

6. Відомі наступні дані про витрати на рекламу X (тис. у.о.) і обсяг реалізованої продукції Y (тис. од.):

X	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
Y	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5

Передбачається, що між змінними X та Y існує квадратична залежність виду $y = ax^2 + bx + c$. Знайдіть значення параметрів a, b, c методом найменших квадратів.

1.

X	1	2	3	4	5
Y	1,6	4	7,4	12	18

2.

X	1	2	3	4	5
Y	1,5	4	7,5	13	18

3.

X	1	2	3	4	5
Y	1,7	5	7,8	13	19

4.

X	1	2	3	4	5
Y	1,6	5	8	14	20

5.

X	1	2	3	4	5
Y	1,7	4	7,6	12	19

6.

X	1	2	3	4	5
Y	1,4	4	7,7	13	19

7.

X	1	2	3	4	5
Y	1,5	3,9	7,4	13	18

8.

X	1	2	3	4	5
Y	1,6	4,1	7,5	12	18

9.

X	1	2	3	4	5
Y	1,6	4,2	7,4	13	19

10.

X	1	2	3	4	5
Y	1,5	3,9	7,5	12	19

11.

X	1	2	3	4	5
Y	1,6	4,2	7,6	13	19

12.

X	1	2	3	4	5
Y	1,6	4	7,4	12,2	18,4

7. Відомі експериментальні дані про кількість одиниць виготовленої продукції X і витрати Y (тис. у.о.).

X	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
Y	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5

Функція витрат шукається у вигляді $y = ax^2 + bx$. Знайдіть значення параметрів a і b методом найменших квадратів.

1.

X	10	20	30	40	50
Y	2	5,9	12	20	30

2.

X	10	20	30	40	50
Y	3	6	11	20	30

3.

X	10	20	30	40	50
Y	2	6	13	20	30

4.

X	5	10	15	20	25
Y	2	5,9	12	20	30

5.

X	5	10	15	20	25
Y	1,6	4	7,4	12	18

6.

X	5	10	15	20	25
Y	1,7	5	13	20	30

7.

X	5	10	15	20	25
Y	1,8	6	13	21	32

8.

X	5	10	15	20	25
Y	1,7	5	13	20	30

9.

X	1	2	3	4	5
Y	2	5,9	12	20	30

10.

X	1	2	3	4	5
Y	3	6	11	20	30

11.

X	1	2	3	4	5
Y	2	6	13	20	30

12.

X	1	2	3	4	5
Y	1,8	6	13	21	32

8. Відомі експериментальні дані про ціну за одиницю продукції p (у.о.) і частку реалізованої продукції w (тис. у.о.).

p	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
w	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5

Функція $w(p)$ шукається у вигляді $w = 1 - bp - ap^2$. Знайдіть її параметри a і b методом найменших квадратів.

1.

p	10	12	15	16	20
w	0,95	0,93	0,92	0,9	0,89

2.

p	10	12	15	16	20
w	0,96	0,94	0,92	0,9	0,88

3.

p	10	12	15	16	20
w	0,94	0,92	0,9	0,89	0,87

4.

p	10	12	15	16	20
w	0,97	0,93	0,91	0,9	0,88

5.

p	9	11	14	15	20
w	0,95	0,93	0,92	0,9	0,89

6.

p	9	11	14	15	20
w	0,96	0,94	0,92	0,9	0,88

7.

p	9	11	14	15	20
w	0,94	0,92	0,9	0,89	0,87

8.

p	9	11	14	15	20
w	0,97	0,93	0,91	0,9	0,88

9.

p	10	13	15	16	19
w	0,95	0,93	0,92	0,9	0,88

10.

p	10	12	14	16	20
w	0,96	0,93	0,92	0,89	0,87

11.

p	10	12	14	16	20
w	0,95	0,93	0,92	0,9	0,89

9. Знайти площу фігури, обмеженої заданими лініями:

1. $y = x^3$, $x = k$.
2. $y = k^2x^2 + 4kx - 3$, $y = kx + 1$.
3. $y = \dfrac{\sqrt{x}}{2k}$, $y = 0$, $x = k^2$.
4. $y = k\sin x$, $y = k\cos x$, $x = 0$.
5. $y = \dfrac{\sqrt{x}}{k}$, $y = 1$, $x = 2$.
6. $x = 2k^2 - y^2$, $x = -ky$.
7. $y = kx^2$, $kx + y = 2k$.
8. $y = x^2 + 4kx - 5k^2$, $y = 0$.
9. $y = \sqrt{-kx}$, $x = -3$, $y = 0$.
10. $x^2 = 2ky$, $y^2 = 2kx$.

11. $\dfrac{x^2}{k^2}-\dfrac{y^2}{4}=1$, $x=2k$.

12. $y=x^2$, $y=(x-k)^2-9$, $y=0$.

13. $y=kx^2$, $y=10$.

14. $y=2x^2$, $y=2(x-k)^2$, $y=0$.

15. $y=x^3$, $y=k^2x$.

16. $y^2=kx$, $x^2=ky$.

17. $y=x^3$, $y=\dfrac{k}{2}$, $x=0$.

18. $y=x^2$, $y=k^2-2kx$, $y=0$.

19. $y=\dfrac{1}{2}x^2$, $y=3x-\dfrac{2}{k}x^2$.

20. $y=\dfrac{x^3}{k}$, $y=kx$.

21. $x^2-y^2=k^2$, $y=\pm k$.

22. $y^2=2kx+k^2$, $x-y-k=0$.

23. $x^2+y^2=k^2$.

24. $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{k^2}=1$.

25. $4k^2x^2+y^2=k^2$.

26. $xy=k$; $x=2$; $x=6$; $y=0$.

27. $y=kx^3$, $y=\pm 5$.

28. $x^2+y^2=k^2$, $x=\dfrac{k}{2}$.

29. $y=\pm\sqrt{-kx}$, $x=-3$.

30. $y=x^2-k^2$, $y=0$.

31. $x^2+y^2=k^2$, $y=\dfrac{k}{2}$.

32. $y=-kx^2+1$, $y=kx^2-1$.

33. $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{k^2}=1$.

34. $xy=k$; $x=1$; $x=4$; $y=0$.

35. $y=\cos\dfrac{x}{k}$, $y=\sin\dfrac{x}{k}$ (в межах одного періоду).

10. Обчислити об’єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями:

1. $x^2-y^2=9$, $y=\pm 3$ навколо осі *Oy*.
2. $y^2=1-x$, $x=-3$ навколо осі *Ox*.
3. $xy=6$, $x+y-7=0$ навколо осі *Ox*.
4. $4y=x^2$, $y^2=4x$ навколо осі *Ox*.
5. $y=\sqrt{x-1}$, $x=5$, $y=0$ навколо осі *Ox*.
6. $y=\dfrac{1}{2}x^2$, $y=x-x^2$ навколо осі *Oy*.
7. $xy=3$, $x=1$, $x=\dfrac{3}{2}$, $y=0$ навколо осі *Ox*.

8. $y = 2x^3$, $x = 0$, $y = 2$ навколо осі Oy.

9. $y^2 = 2x$, $y = 0$, $y = 2$ навколо осі Ox.

10. $x^2 + y^2 = 25$ навколо осі Oy.

11. $x^2 - y^2 = 16$, $y = 4$, $y = -4$ навколо осі Ox.

12. $y = -x^2 + 9$, $y = 0$ навколо осі Ox.

13. $y = x^2$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$ навколо осі Oy.

14. $y^2 - 2x = 0$, $x - y = 0$ навколо осі Ox.

15. $y = \dfrac{5}{x}$, $x = 1$, $x = 5$, $y = 0$ навколо осі Ox.

16. $y = x^2$, $y = 6 - x$, $y = 0$ навколо осі Ox.

17. $y = x^3$, $y = 5$, $x = 0$ навколо осі Oy.

18. $y = -4x^2 + 1$, $y = 0$ навколо осі Ox.

19. $y = \cos x$ (однією півхвилею), $y = 0$ навколо осі Ox.

20. $y = x$, $y = -x^2 + 2$, $y = 0$ навколо осі Ox.

21. $y = \sqrt{x}$, $y = -x + 2$, $y = 0$ навколо осі Ox.

22. $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = 0$, $0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}$ навколо осі Oy.

23. $yx = 5$, $y = -x + 6$ навколо осі Ox.

24. $y = -x^2 + 25$, $y = 0$ навколо осі Ox.

25. $y = x^2$, $y = 4$ навколо осі Ox.

26. $y^2 = 8x$, $x = 5$ навколо осі Oy.

27. $xy = 4$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$ навколо осі Oy.

28. $y^2 = 4 - x$, $x = 0$ навколо осі Oy.

29. $y = \sin x$ (однією півхвилею), $y = 0$ навколо осі Ox.

30. $x^2 - y^2 = 4$, $y = \pm 2$ навколо осі Oy.

31. $y = x^3$, $x = 0$, $y = 8$ навколо осі Oy.

32. $y = x - x^2$, $y = 0$ навколо осі Ox.

33. $y = 4x$, $x = 0, y = 4$ навколо осі Oy.

34. $y = \sin x$ і відрізком $0 \le x \le \pi$ осі Ox навколо осі Ox.

35. $y = x^2$, $y = 3$ навколо осі Ox.

11. Швидкості зміни витрат і доходу підприємства після початку його діяльності визначались функціями $V'(t), D'(t)$, які вимірювали у мільйонах гривень, а t – у роках**.** Визначити тривалість прибуткового існування підприємства і знайти загальний прибуток, який одержали за цей час:

1. $V'(t)=4+\sqrt[3]{t^2},\ D'(t)=16-2\sqrt[3]{t^2}.$

2. $V'(t)=1+2\sqrt[3]{t^2}, D'(t)=17-2\sqrt[3]{t^2}$.

3. $V'(t)=2+2\sqrt[3]{t^2}, D'(t)=10-2\sqrt[3]{t^2}.$

4. $V'(t)=3+3\sqrt[3]{t^2}, D'(t)=23-2\sqrt[3]{t^2}.$

5. $V'(t)=4+3\sqrt[3]{t^2}, D'(t)=24-2\sqrt[3]{t^2}.$

6. $V'(t)=2+2\sqrt[3]{t^2}, D'(t)=22-3\sqrt[3]{t^2}.$

7. $V'(t)=5+2\sqrt[3]{t^2}, D(t)=10-3\sqrt[3]{t^2}.$

8. $V'(t)=6+2\sqrt[3]{t^2}, D'(t)=11-3\sqrt[3]{t^2}.$

9. $V'(t)=7+\sqrt[3]{t^2}, D'(t)=12-4\sqrt[3]{t^2}.$

10. $V'(t)=8+3\sqrt[3]{t^2}, D'(t)=13-2\sqrt[3]{t^2}.$

11. $V'(t)=9+4\sqrt[3]{t^2}, D'(t)=14-\sqrt[3]{t^2}.$

12. $V'(t)=2+2\sqrt[3]{t^2}, D'(t)=18-2\sqrt[3]{t^2}.$

13. $V'(t)=13+2\sqrt[3]{t^2}, D'(t)=18-3\sqrt[3]{t^2}.$

14. $V'(t)=9+2\sqrt[3]{t^2}, D'(t)=29-3\sqrt[3]{t^2}.$

15. $V'(t)=8+3\sqrt[3]{t^2},\ D'(t)=28-2\sqrt[3]{t^2}.$

16. $V'(t)=10+\sqrt[4]{t^3},\ D'(t)=12-\sqrt[4]{t^3}.$

17. $V'(t)=12+\sqrt[4]{t^3},\ D'(t)=14-\sqrt[4]{t^3}.$

18. $V'(t)=10+2\sqrt[4]{t^3}, D'(t)=14-2\sqrt[4]{t^3}.$

19. $V'(t)=6+\sqrt[4]{t^3}, D'(t)=22-\sqrt[4]{t^3}.$

20. $V'(t)=5+\sqrt[4]{t^3}, D'(t)=21-\sqrt[4]{t^3}.$

21. $V'(t)=3+\sqrt[4]{t^3}, D'(t)=57-\sqrt[4]{t^3}.$

22. $V'(t) = 1 + 4\sqrt[4]{t^3}$, $D'(t) = 57 - 3\sqrt[4]{t^3}$.

23. $V'(t) = 1 + 3\sqrt[4]{t^3}$, $D'(t) = 57 - 4\sqrt[4]{t^3}$.

24. $V'(t) = 2 + 3\sqrt[4]{t^3}$, $D'(t) = 58 - 4\sqrt[4]{t^3}$.

25. $V'(t) = 2 + 4\sqrt[4]{t^3}$, $D'(t) = 58 - 3\sqrt[4]{t^3}$.

26. $V'(t) = 1 + 2\sqrt{t}$, $D'(t) = 7 - \sqrt{t}$.

27. $V'(t) = 4 + 3\sqrt{t}$, $D'(t) = 9 - 2\sqrt{t}$.

28. $V'(t) = 3 + 2\sqrt{t}$, $D'(t) = 8 - 3\sqrt{t}$.

29. $V'(t) = 4 + \sqrt{t}$, $D'(t) = 7 - 2\sqrt{t}$.

30. $V'(t) = 3 + 2\sqrt{t}$, $D'(t) = 11 - 2\sqrt{t}$.

31. $V'(t) = 4 + 2\sqrt{t}$, $D'(t) = 19 - 3\sqrt{t}$.

32. $V'(t) = 3 + 2\sqrt{t}$, $D'(t) = 21 - 4\sqrt{t}$.

33. $V'(t) = 8 + 2\sqrt{t}$, $D'(t) = 20 - 4\sqrt{t}$.

34. $V'(t) = 5 + \sqrt{t}$, $D'(t) = 17 - 3\sqrt{t}$.

35. $V'(t) = 6 + 2\sqrt{t}$, $D'(t) = 16 - 3\sqrt{t}$.

12. Розв’яжіть задачі з економічним змістом:

1. Гранична ціна за продану продукцію виражена функцією $P'(x) = 2x + 50$, де x – кількість проданої продукції. Знайти загальну функцію ціни за продану продукцію, якщо ціна 10 одиниць продукції дорівнює 2000 гривень.

2. Граничні витрати фірми на виготовлення x одиниць продукції виражені функцією $V'(x) = 100 + 0{,}04x$. Знайти загальні можливі витрати при виробництві 1000 одиниць продукції.

3. Маржинальний річний дохід фірми заданий рівністю $D'(x) = 80 - 0{,}04x$. Знайти функцію річного прибутку цієї фірми.

4. Маржинальна функція доходу малого підприємства дорівнює $D'(x) = 6 - 0{,}03x$. Після реалізації 100 одиниць продукції підприємство одержало дохід 30 тисяч гривень. Визначити функцію доходу цього підприємства. Який дохід одержить підприємство після реалізації 125 одиниць продукції?

5. Маржинальні витрати (у гривнях) взуттєвої фабрики характеризуються функцією $V'(x) = \dfrac{x}{100}\sqrt{x^2 + 360}$, де x – кількість пар виготовленого взуття. Знайти функцію загальних витрат фабрики, якщо витрати 50 гривень на пару взуття фіксовані.

6. Продуктивність праці робітника протягом дня задано функцією $f(t)$. Визначити обсяг продукції, що виготовляє робітник: 1) за першу годину робочого часу; 2) за восьмигодинний робочий день.

а) $f(t) = \dfrac{3}{4t+5} + 5$; б) $f(t) = \dfrac{10}{t+2} + 1$; в) $f(t) = -t^2 + 8t + 3$.

7. Денна продуктивність праці (за 7 робочих годин) бригади робочих машинобудівного заводу виражена функцією

$$y = -0{,}0033t^2 - 0{,}08t + 20{,}96,$$

де t – проміжок часу в годинах. Визначити об’єм випуску продукції протягом року (за 240 робочих днів). Обчислити прибуток, якщо заводська оптова ціна одиниці продукції становить 200 гривень, її собівартість – 100 гривень, а кількість бригад – 10.

8. Знайти обсяг продукції, виробленої фірмою за два роки, якщо виробнича функція Кобба-Дугласа має вигляд:

а) $f(t) = (1+2t)e^{5t}$; б) $f(t) = (1+0,05t)e^{2t}$.

9. Продуктивність праці протягом робочого дня описується функцією

$$f(t) = \begin{cases} -t^2 + 6t, & 0 < t \le 4, \\ 0, & 4 < t < 5, \\ -t^2 + 3t - 40, & 5 \le t \le 8, \end{cases}$$

де t – час, що відлічується від початку робочого дня. Визначити обсяг продукції, виробленої за весь робочий день.

10. Витрати електроенергії (у кВт) міськими підприємствами і населенням міста з 8 до 18 год. наближено виражені функцією $y = 10000 - 8t + 15t^2$, де t – проміжок часу в годинах. Визначити вартість електроенергії, спожитої містом, якщо вартість 1кВт/год дорівнює 12 коп.

11. Надходження товару на склад виражене функцією $y_1 = 0{,}006t^2 - 0{,}3t + 75,$ а реалізація цих товарів – функцією $y_2 = 0{,}003t^2 - 0{,}4t + 56,$ де t – кількість днів. Визначити запас товару в умовних одиницях після закінчення 60 робочих днів, якщо вихідного товару на складі не було.

12. За даними дослідження в розподілі доходів в одній із країн крива Лоренца описана функцією $y(x)$. Тут x відсоток населення, а y – відсоток доходів населення. Обчислити коефіцієнт Джіні.

а) $y(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}$; б) $y(x) = 5 - \sqrt{25 - x^2}$;

в) $y(x) = \dfrac{x}{3 - 2x}$; г) $y(x) = \dfrac{x}{2 - x}$.

13. Нехай $y(x)$, крива Лоренца визначена дослідженням нерівномірного розподілу прибуткового податку. Тут y – відсоток загального прибуткового податку; x – відсоток всього населення держави, яка сплачує цей податок. Обчислити коефіцієнт нерівномірності розподілу податку (коефіцієнт Джіні).

а) $y(x) = \dfrac{15}{16}x^2 + \dfrac{1}{16}x$; б) $y(x) = \dfrac{19}{20}x^2 + \dfrac{1}{20}x$.

14. Капітальні інвестиції підприємства характеризуються функцією $I(t)$. Знайдіть: 1) приріст капіталу за три роки; 2) проміжок часу, за який приріст капіталу становитиме ΔK у.о.

а) $I(t) = 9000t^{1/2}$, $\Delta K = 150000$; б) $I(t) = 7000\sqrt{t}$, $\Delta K = 50000$.

15. Функція маржинальних витрат має вигляд: $V'(x) = 23{,}5 - 0{,}01x$. Знайти зростання загальних витрат, якщо виробництво зростає з 1000 до 1500 одиниць.

16. Знайти обсяг випуску продукції підприємством за 4 роки, якщо виробнича функція Кобба-Дугласа має вигляд $k(t) = (2t + 1)e^{3t}$.

17. Продуктивність праці робітника протягом дня задано функцією $g(t) = \dfrac{3}{4t + 5} + 5$. Визначте обсяг продукції, який виготовив робітник за перші дві години робочого часу.

13. Еластичність попиту $E_p(Q)$ на певний товар є постійна величина. Визначити функцію попиту $Q = f(p)$, якщо:

1. $E_p(Q) = -2, \ Q = 4, \ p = \frac{1}{2}$.
2. $E_p(Q) = -3, \ Q = 6, \ p = 1$.
3. $E_p(Q) = -\frac{1}{2}$, $Q = 3$, $p = 1$.
4. $E_p(Q) = -1$, $Q = 2$, $p = 1$.
5. $E_p(Q) = -\frac{1}{3}$, $Q = 5$, $p = 1$.
6. $E_p(Q) = -2$, $Q = 4$, $p = 1$.
7. $E_p(Q) = -\frac{1}{4}$, $Q = 3$, $p = 1$.
8. $E_p(Q) = -4$, $Q = 2$, $p = 1$.
9. $E_p(Q) = -\frac{1}{3}$, $Q = 2$, $p = 1$.
10. $E_p(Q) = -1$, $Q = 4$, $p = 1$.
11. $E_p(Q) = -\frac{1}{2}$, $Q = 4$, $p = 1$.
12. $E_p(Q) = -3$, $Q = 1$, $p = 1$.
13. $E_p(Q) = -\frac{1}{4}$, $Q = 6$, $p = 1$.
14. $E_p(Q) = -\frac{1}{2}$, $Q = 3$, $p = 1$.
15. $E_p(Q) = -1$, $Q = 2$, $p = 1$.
16. $E_p(Q) = -2$, $Q = 3$, $p = 1$.
17. $E_p(Q) = -\frac{1}{3}$, $Q = 1$, $p = 1$.
18. $E_p(Q) = -\frac{1}{4}$, $Q = 1$, $p = 1$.
19. $E_p(Q) = -4$, $Q = 1$, $p = 1$.
20. $E_p(Q) = -\frac{1}{3}$, $Q = 3$, $p = 1$.
21. $E_p(Q) = -1$, $Q = 6$, $p = 1$.
22. $E_p(Q) = -0{,}5$, $Q = 6$, $p = 1$.
23. $E_p(Q) = -3$, $Q = 2$, $p = 1$.
24. $E_p(Q) = -\frac{1}{4}$, $Q = 5$, $p = 1$.
25. $E_p(Q) = -\frac{1}{2}$, $Q = 5$, $p = 1$.
26. $E_p(Q) = -1$, $Q = 3$, $p = 1$.
27. $E_p(Q) = -2$, $Q = 5$, $p = 1$.
28. $E_p(Q) = -\frac{1}{3}$, $Q = 6$, $p = 1$.
29. $E_p(Q) = -\frac{1}{5}$, $Q = 3$, $p = 1$.
30. $E_p(Q) = -\frac{2}{3}$ $Q = 2$, $p = 1$.
31. $E_p(Q) = -\frac{3}{2}$, $Q = 3$, $p = 1$.
32. $E_p(Q) = -\frac{4}{3}$, $Q = 2$, $p = 1$.
33. $E_p(Q) = -\frac{3}{2}$, $Q = 1$, $p = 1$.
34. $E_p(Q) = -\frac{4}{3}$ $Q = 3$, $p = 1$.
35. $E_p(Q) = -\frac{3}{4}$, $Q = 3$, $p = 1$.

ВКАЗІВКИ ТА ЗРАЗКИ РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Задача 1. Обчислити визначники двома способами: а) за допомогою елементарних перетворень; б) розклавши за елементами рядка (стовпця).

І спосіб:

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 5 & -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} + \\ \times(-2) \quad \times(-5) \\ + \\ + \end{array}$$

Другий рядок залишаємо без змін. Додамо до елементів першого рядка відповідні елементи другого. Додамо до елементів третього рядка відповідні елементи другого, помножені на (-2), додамо до елементів четвертого рядка відповідні елементи другого, помножені на (-5). Одержаний визначник, скориставшись теоремою розкладу, розкладемо визначник за елементами першого стовпця.

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 5 & -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -7 & -4 \\ 0 & -7 & -14 & -7 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 4 & 3 & 3 \\ -3 & -7 & -4 \\ -7 & -14 & -7 \end{vmatrix} =$$

$$= -(4\cdot(-7)\cdot(-7) + 3\cdot(-4)\cdot(-7) + (-3)\cdot(-14)\cdot 3 - (-7)\cdot(-7)\cdot 3 -$$

$$- 4\cdot(-14)\cdot(-4) - (-3)\cdot 3\cdot(-7)) =$$

$$= -(196 + 84 + 126 - 147 - 224 - 63) = -(406 - 434) = 28.$$

ІІ спосіб:

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 5 & -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} + 3\cdot(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix} +$$

$$+ 0\cdot(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 5 & -2 & 3 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 5 & -2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)\cdot(-3 + 0 - 2 - 4 - 0 + 9) - 3\cdot(-3 + 0 + 4 + 10 - 0 - 18) -$$

$$-1\cdot(-1 - 5 - 12 + 15 - 2 - 2) = (-1)\cdot 0 - 3\cdot(-7) - 1\cdot(-7) = 28.$$

Задача 2. Розв'язати системи рівнянь трьома методами: а) за правилом Крамера; б) методом Гаусса; в) матричним способом.

Розв'язати за правилом Крамера систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -3 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 3 \end{cases}.$$

Розв'язування. Задана неоднорідна система трьох лінійних алгебраїчних рівнянь з трьома невідомими. Основний визначник цієї системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 2 + 2 + 3 + 4 + 1 = 9 \neq 0.$$

Тому, згідно з правилом Крамера, задана система має єдиний розв'язок, який знайдемо за формулами:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

Спочатку обчислимо допоміжні визначники:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -3 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 9 - 1 + 6 + 9 - 2 - 3 = 18,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 6 - 3 - 1 - 6 - 3 = -18,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 9 + 6 - 2 + 9 - 12 - 1 = 9.$$

Тепер знаходимо $x_1 = \frac{18}{9} = 2;\ \ x_2 = \frac{-18}{9} = -2;\ \ x_3 = \frac{9}{9} = 1$.

Отже, розв'язком заданої системи буде (2; –2; 1).

Розв'язати матричним способом систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 9 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 14 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 16 \end{cases}.$$

Розв'язування. Основною матрицею заданої системи буде матриця

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Визначник цієї матриці

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 8 - 27 - 12 - 3 + 24 = -6 \neq 0.$$

Для запису оберненої матриці A^{-1} знайдемо алгебраїчні доповнення елементів матриці A:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 14; \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -10;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2;$$

$$A_{21} = 5; \quad A_{22} = -4; \quad A_{23} = 1; \quad A_{31} = -13; \quad A_{32} = 8; \quad A_{33} = 1.$$

Матриця, складена з алгебраїчних доповнень, має вигляд

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 14 & -10 & -2 \\ 5 & -4 & 1 \\ -13 & 8 & 1 \end{bmatrix}.$$

Приєднана до матриці A буде

$$A^{*} = \begin{bmatrix} 14 & 5 & -13 \\ -10 & -4 & 8 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Отже, обернена матриця має вигляд:

$$A^{-1} = -\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 14 & 5 & -13 \\ -10 & -4 & 8 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Розв'язок вихідної системи знаходимо за формулою $X = A^{-1}B$, тобто

$$X = -\frac{1}{6} \cdot \begin{bmatrix} 14 & 5 & -13 \\ -10 & -4 & 8 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 9 \\ 14 \\ 16 \end{bmatrix} = -\frac{1}{6} \cdot \begin{bmatrix} 14 \cdot 9 + 5 \cdot 14 + (-13) \cdot 16 \\ (-10) \cdot 9 + (-4) \cdot 14 + 8 \cdot 16 \\ (-2) \cdot 9 + 1 \cdot 14 + 1 \cdot 16 \end{bmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{6} \cdot \begin{bmatrix} -12 \\ -18 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Розв'язком системи буде: $x_1 = 2,\ x_2 = 3,\ x_3 = -2.$

Задача 3. Підприємство використовує сировину R_1, R_2, R_3 для виробництва проміжної продукції H_1, H_2, H_3. Воно використовує ці проміжні товари для виробництва товарів G_1, G_2, G_3. Норми витрат на виробництво цих товарів та проміжних товарів подано в таблицях:

	H_1	H_2	H_3
R_1	3	4	5
R_2	2	9	6
R_3	1	8	7

	G_1	G_2	G_2
H_1	1	2	3
H_2	4	5	6
H_3	7	8	9

1) Визначте кількість R_1, R_2, R_3, необхідну для виробництва 1 одиниці G_1, 2 одиниць G_2 і 3 одиниця G_3.

2) Скільки коштує сировина в 1) загалом, якщо ціна одиниці сировини R_1 становить 50 грн, а одиниці сировини R_2 і R_3 по 60 грн?

3) Скільки коштує одиниця товару G_1 при цінах, які визначені в 2)?

Розв'язування: Складемо системи балансових рівнянь

$$\begin{cases} R_1 = 3H_1 + 2H_2 + H_3, \\ R_2 = 4H_1 + 9H_2 + 8H_3, \\ R_3 = 5H_1 + 6H_2 + 7H_3, \end{cases} \qquad \begin{cases} H_1 = G_1 + 4G_2 + 7G_3, \\ H_2 = 2G_1 + 5G_2 + 8G_3, \\ H_3 = 3G_1 + 8G_2 + 9G_3, \end{cases}$$

які перепишемо у вигляді матричних рівнянь $R = N \cdot H,\ \ H = M \cdot G$, де

$$H = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{bmatrix},\quad R = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix},\quad G = \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \end{bmatrix},\quad N = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 9 & 8 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix},\quad M = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

Тоді отримаємо формулу $R = N \cdot M \cdot G$ для знаходження витрат сировини для виробництва товарів G.

1) Якщо $G = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, то $R = N \cdot M \cdot G = \begin{bmatrix} 420 \\ 616 \\ 608 \end{bmatrix}$. Отже, для виробництва 1 одиниці G_1, 2 одиниць G_2 і 3 одиниця G_3 необхідно 420 одиниць

сировини R_1, 616 одиниць сировини R_2 і 608 одиниць сировини R_3.

2) Знайдемо загальну вартість витраченої сировини:

$$P = \begin{bmatrix} 50 & 60 & 60 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 420 \\ 616 \\ 608 \end{bmatrix} = 94440 \text{ грн.}$$

3) Припустимо, що ми виготовляємо лише 1 одиницю продукції G_1. Тоді порахуємо витрати сировини:

$$R = N \cdot M \cdot G = N \cdot M \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 54 \\ 80 \\ 82 \end{bmatrix}.$$

Отже, ціна одиниці товару G_1 дорівнює загальній вартості витраченої сировини на її виробництво:

$$P = \begin{bmatrix} 50 & 60 & 60 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 54 \\ 80 \\ 82 \end{bmatrix} = 12420 \text{ грн.}$$

Задача 4. Для виготовлення чотирьох видів продукції P_1, P_2, P_3, P_4 використовують три види сировини S_1, S_2, S_3. Запаси сировини та норми витрат наведені в таблиці:

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	7	1	3	2	2
S_2	7	2	1	2	3
S_3	7	2	2	1	2

Визначити кількість продукції P_1, P_2, P_3, P_4, яку можна виготовити, якщо сировину буде повністю вичерпано. Вказати базовий розв'язок.

Розв'язування: Якщо вважати, що x_1, x_2, x_3, x_4 – це кількість одиниць продукції P_1, P_2, P_3, P_4, то дану задачу можна записати в вигляді системи лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 7 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 7 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 7 \end{cases},$$

що представляє собою математичну модель даної економічної задачі.

Розв'яжемо її методом Жордана-Гаусса, використовуючи таблиці:

Табл. 1. В першому рядку за ключовий елемент вибираємо 1. Цей рядок називається ключовим рядком. Переписуємо його без змін першим рядком другої таблиці. До відповідних елементів другого і третього рядків додаємо елементи першого помножені на "-2". Результати записуємо другим і третім рядком таблиці 2.

	x_1	x_2	x_3	x_4	$в_i$
1	**1**	3	2	2	7
	2	1	2	3	7
	2	2	1	2	7
2	1	3	2	2	7
	0	**-5**	-2	-7	-7
	0	-4	-3	-2	-7
3	1	0	4/5	7/5	14/5
	0	1	2/5	1/5	7/5
	0	0	**-7/5**	-6/5	-7/5
4	**1**	0	0	5/7	2
	0	**1**	0	-1/7	1
	0	0	**1**	6/7	1

Табл. 2. В якості ключового елемента вибираємо "-5". Результат ділення другого рядка на ключовий елемент, записуємо другим рядком третьої таблиці. Помноживши другий рядок таблиці 3 на "-3", а потім на "4", додаючи отримані рядки відповідно до першого і третього рядків другої таблиці, отримуємо перший і третій рядки третьої таблиці, в яких відбувся процес виключення невідомої x_2.

Табл. 3. В третьому рядку ключовий елемент (-7/5) є коефіцієнтом при невідомій x_3. Тому ділимо третій рядок третьої таблиці на ключовий елемент (-7/5) і записуємо отриманий рядок третім рядком четвертої таблиці. Нам залишається виключити невідому x_3 з перших двох рядків третьої таблиці. Для цього третій рядок множимо спочатку на (-4/5) і додаємо до першого рядка третьої таблиці, а потім, множимо на (-2/5) і додаємо до другого рядка третьої таблиці. Результати дій записуємо першим і другим рядком четвертої таблиці. Таким чином ми отримали результуючу четверту таблицю, в якій кожний рядок має лише дві із чотирьох невідомих. Ця таблиця є розширеною матрицею системи рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + 5/7x_4 = 2 \\ x_2 - 1/7x_4 = 1, \\ x_3 + 6/7x_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - 5/7x_4 \\ x_2 = 1 + 1/7x_4 \\ x_3 = 1 - 6/7x_4. \end{cases}$$

В останній системі рівнянь x_1, x_2, x_3 називаються базисними змінними, оскільки матриця, складена з коефіцієнтів при них є одиничною. Невідома x_4 називається вільною, тому що може приймати будь-які значення. Але в нашій задачі невідомі x_i (i=1, 2, 3, 4) виражають кількість реалізованої продукції, тому вони повинні бути невід'ємними, тобто $x_i \geq 0$. А значить

$$\begin{cases} x_1 = 2 - 5/7x_4 \geq 0 \\ x_2 = 1 + 1/7x_4 \geq 0, \\ x_3 = 1 - 6/7x_4 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_4 \leq 14/5 \\ x_4 \geq 0, \\ x_4 \leq 7/6 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq x_4 \leq \min\{14/5; 7/6\} = 7/6.$$

Будь-якому значенню $x_4 \in [0; 7/6]$ відповідає невід'ємний розв'язок, який задовольняє умові задачі. Отже, для $x_4 = 0$, $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$ – базовий розв'язок.

Задача 5. Знайти рівняння висоти AD трикутника ABC, якщо відомо, що $A(2; 6)$, $B(-3; 1)$, $C(6; 0)$.

Розв'язування. Запишемо рівняння сторони BC як рівняння прямої, що проходить через дві точки B і C, за формулою:

$$\frac{x - x_B}{x_C - x_B} = \frac{y - y_B}{y_C - y_B},$$

тобто $\dfrac{y-1}{0-1} = \dfrac{x+3}{6+3}$, або $x + 2y - 6 = 0$. Тут $k_{BC} = -\dfrac{1}{9}$. З умови перпендикулярності двох прямих AD і BC $k_{AD} = -\dfrac{1}{k_{BC}}$, маємо $k_{AD} = 9$. Отже, рівняння шуканої висоти буде: $y - 6 = 9(x - 2)$, або $9x - y - 12 = 0$.

Задача 6. Написати канонічне рівняння гіперболи, що проходить через точки $A(2; 1)$, $B(-4; \sqrt{7})$.

Розв'язування. Канонічне рівняння гіперболи знайдемо, використавши формулу $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Оскільки точки $A(2; 1)$ і

$B(-4;\sqrt{7})$ лежать на гіперболі, то їх координати задовольняють це рівняння. Звідси:

$$\begin{cases} \dfrac{4}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}=1 \\ \dfrac{16}{a^2}-\dfrac{7}{b^2}=1 \end{cases}, \qquad \begin{cases} 4b^2-a^2=a^2b^2 \\ 16b^2-7a^2=a^2b^2 \end{cases}.$$

Після алгебраїчного віднімання одержимо $a^2=2b^2$. Із першого рівняння системи маємо:

$$\frac{2}{b^2}-\frac{1}{b^2}=1, \quad b^2=1,$$

отже, $a^2=2.$ Тоді шукане рівняння гіперболи:

$$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{1}=1.$$

Задача 7. Завод виробляє вироби A і продає їх по 2 гривні за кожний. Керівництво заводу встановило, що сума $y_в$ загальних щотижневих витрат (у гривнях) на виготовлення виробів A кількістю x (тисяч одиниць) має таку закономірність:

$$y_в=1000+1300x+100x^2.$$

Визначити щотижневу кількість виготовлення та продажу виробів A, що забезпечує рівновагу витрат і доходу.

Розв'язування. Дохід від продажу x тисяч виробів A вартістю 2 гривні за кожний буде: $y_д=2000x.$ Для рівноваги доходу та витрат треба, щоб виконувалась рівність: $y_в=y_д,$ тобто

$$1000+1300x+100x^2=2000x,$$

$$x^2-7x+10=0, \quad x_1=2, \quad x_2=5.$$

Ця задача має дві точки рівноваги. Завод може виробляти 2000 ($x=2$) виробів A з доходом і витратами 4000 гривень, або 5000 ($x=5$) виробів A з доходом і витратами 10 000 гривень.

Розглянемо на цьому прикладі можливості заводу. Позначимо щотижневий прибуток через $P.$ Тоді:

$$P=y_д-y_в=2000x-(1000+1300x+100x^2)=-1000+700x-$$

$$-100x^2=-100(x-2)(x-5).$$

Звідси випливає, що при $x=2$ або $x=5$ маємо $P=0,$ тобто ці значення x будуть точками рівноваги.

Якщо $2 < x < 5$, тоді $x - 2 > 0$, $x - 5 < 0$ маємо $P > 0$, тобто завод одержить прибуток. При інших значеннях x, тобто коли $x \notin [2; 5]$, будемо мати $P < 0$ – завод несе збитки.

Задача 8. Знайти $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}$.

Розв'язування. При $x \to 2$ чисельник і знаменник дробу мають границю, що дорівнює нулю. Перенесемо ірраціональність у знаменник, помноживши чисельник і знаменник на спряжений вираз до чисельника, тобто на $\sqrt{x^2+5}+3$, одержимо:

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(\sqrt{x^2+5}-3)(\sqrt{x^2+5}+3)}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)} =$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{x^2+5-9}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)} =$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)} = \lim_{x\to 2} \frac{(x+2)}{(\sqrt{x^2+5}+3)} = \frac{2+2}{3+3} = \frac{2}{3}.$$

Задача 9. У місті проживає 249 тис. мешканців. Щорічно народонаселення збільшується на 1,7%. Яка кількість жителів буде в цьому місті через 12 років?

Розв'язування. Використаємо формулу зростання за складними процентами:

$$K_{12} = 249 \left(1 + \frac{1{,}7}{100}\right)^{12} \approx 305.$$

Отже, через 12 років у місті буде 305 тис. жителів.

Задача 10. Кожного місяця студент вносить 100 гривень на свій рахунок накопичення з одержанням прибутку 5% щомісячно. Обчислити величину його накопичення після здійснення 12 внеску.

Розв'язування. Оскільки табличне значення $S_{n/i}$ рівне $S_{n/i} = S_{12/0{,}05} = 15{,}917127$, то $S = 100 \cdot 15{,}917127 \approx 1591{,}71$ грн.

Задача 11. В день 55-річчя працівниця фірми "Остер" відкрила рахунок ренти в страховій компанії "УНІВЕРСАЛЬНА" за умови щорічного отримання у свій день народження 1000 грн. протягом 15 років. Яку суму внесено на рахунок ренти, якщо кошти прийнято з 5% щорічним зростанням?

Розв'язування. Використаємо формулу $A = P \cdot a_{n/i}$. В нашій задачі регулярні виплати $P = 1000$ грн. Коефіцієнт $a_{n/i}$ взято із таблиці Д 2 і рівний $a_{15/0,05} = 10{,}379658$. Значить $A = 1000 \cdot 10{,}379658 \approx 10379{,}66$ грн.

Отже, працівниця фірми повинна покласти на рахунок ренти 10379,66 грн., щоб одержувати по 1000 грн. щорічно протягом 15 років.

Задача 12. На час навчання студент університету отримав з фонду навчання в борг 8000 грн. Цей кредит йому надано із 8% щорічного зростання і умовою щорічного повернення боргу в кінці кожного року після закінчення університету протягом 15 років.

Скільки коштів повинен повертати студент кожного року після закінчення університету?

Розв'язування. Шукана величина P щорічної сплати боргу студентом знаходиться за формулою $P = \dfrac{A}{a_{n/i}}$. В даному випадку борг $A = 8000$ грн., час його повернення $n = 15$, відсоток зростання $R = 8$, $i = \dfrac{R}{100} = 0{,}08$. Із таблиці Д 2 знаходимо $a_{15/0,08} = 8{,}559479$. Тому

$$P = \frac{8000}{a_{15/0,08}} = \frac{8000}{8{,}559479} \approx 934{,}64 \text{ грн.}$$

Отже, для погашення боргу студент повинен в кінці кожного року сплачувати фонду навчання 934,64 грн.

Задача 13. Знайти похідні функцій:

а) $y = \sqrt{x^2+1} + \sqrt[3]{x^3+1}$; б) $y = \ln\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}$.

Розв'язування.

а) Використаємо правило диференціювання для суми двох диференційованих функцій, а потім знайдемо похідні складних функцій:

$$y' = (\sqrt{x^2+1} + \sqrt[3]{x^3+1})' = (\sqrt{x^2+1})' + (\sqrt[3]{x^3+1})' = \left((x^2+1)^{\frac{1}{2}}\right)' +$$

$$+\left((x^3+1)^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}(x^2+1)' + \frac{1}{3}(x^3+1)^{-\frac{2}{3}}(x^3+1)' =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot 2x + \frac{1}{3\sqrt[3]{(x^3+1)^2}}\cdot 3x^2 = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3+1)^2}}.$$

б) Задану функцію прологарифмуємо, а тоді знайдемо похідну складної функції:

$$y = \ln\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}} = \ln\left(\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ln(1-\sin x) - \frac{1}{2}\ln(1+\sin x);$$

$$y' = \left(\frac{1}{2}\ln(1-\sin x) - \frac{1}{2}\ln(1+\sin x)\right)' = \left(\frac{1}{2}\ln(1-\sin x)\right)' -$$

$$-\left(\frac{1}{2}\ln(1+\sin x)\right)' = \frac{1}{2}\frac{(1-\sin x)'}{1-\sin x} - \frac{1}{2}\frac{(1+\sin x)'}{1+\sin x} = \frac{1}{2}\frac{-\cos x}{1-\sin x} -$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\cos x}{1+\sin x} = \frac{-2\cos x}{2(1-\sin^2 x)} = -\frac{1}{\cos x}.$$

Задача 14. Обчислити $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x+\ln x}{1-\sqrt{2x-x^2}}$.

Розв'язування. Безпосередньою за допомогою підстановки можна переконатися, що маємо невизначеність виду $\dfrac{0}{0}$.

Застосуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-x+\ln x}{1-\sqrt{2x-x^2}} = \lim_{x\to 1}\frac{-1+\frac{1}{x}}{\frac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2}}} = -\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)\sqrt{2x-x^2}}{2x(1-x)} =$$

$$= -\lim_{x\to 1}\sqrt{2x-x^2} = -1.$$

Задача 15. Обчислити $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{e^x}$.

Розв'язування. У даному випадку використаємо правило Лопіталя два рази, оскільки дане відношення і відношення похідних призводить до невизначеності виду $\dfrac{\infty}{\infty}$. Отже,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(2x)'}{(e^x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x}=0.$$

Задача 16. Знайти еластичність попиту $Q=15-2p$ стосовно ціни $p=5$.

Розв'язування. Знайдемо еластичність попиту:

$$E_c=-\frac{p}{Q}\frac{dQ}{dp}=-\frac{p}{Q}(-2)=\frac{2p}{Q}=\frac{2p}{15-2p}.$$

При $p=5$ маємо $E_c=2.$ Це означає, що попит є еластичним. При ціні 5 грн. підвищення її на 1% приведе до зниження попиту на 2%.

Задача 17. Підприємство за місяць виготовляє x одиниць продукції. Сумарні витрати виробництва описуються функцією $V=\frac{1}{30}x^2+8x+300$, $p=40-\frac{1}{10}x$ – залежність між питомою ціною і кількістю одиниць продукції x, яку можна продати по цій ціні. Розрахувати, за яких умов прибуток буде максимальним. Визначити маржинальні і сумарні витрати, прибуток при цих умовах.

Розв'язування. Прибуток P визначається як різниця між доходами і сумарними витратами виробництва $P=D-V$.

В нас дохід – $D=p\cdot x=(40-\frac{1}{10}x)\cdot x=40x-\frac{1}{10}x^2,$

сумарні витрати – $V=\frac{1}{30}x^2+8x+300,$ прибуток –

$$P=40x-\frac{1}{10}x^2-\frac{1}{30}x^2-8x-300=-\frac{2}{15}x^2+32x-300.$$

Знайдемо маржинальний прибуток – $P'=-4/15\cdot x+32$.

Максимальний прибуток буде тоді, коли $P'=0,$ оскільки $P''=-4/15<0.$

При цьому $-4/15\cdot x+32=0$; $-4x+480=0$; $x=120$.

Отже, щоб прибуток був максимальним, треба випускати 120 од. продукції.

Маржинальні витрати: $V'(120)=\frac{1}{15}\cdot 120+8=16,$

сумарні витрати:

$$V(120)=\frac{1}{30}\cdot 120^2+8\cdot 120+300=480+960+300=1740.$$

Максимальний прибуток: $P(120) = -\frac{2}{15} \cdot 120^2 + 32 \cdot 120 - 300 = 1620$.

Задача 18. При відомій функції попиту $Q = Q(p) = 7 - p$ і пропозиції $S = S(p) = p + 1$, де Q і S-кількість товару; p – ціна товару.

Знайти:

а) рівноважну ціну;

б) еластичність попиту і пропозиції для рівноважної ціни;

в) зміну доходу при підвищенні ціни на 5% від рівноважної.

Розв'язування.

а) рівноважна ціна – ціна, при якій попит і пропозиція врівноважуються. Тому, рівноважна ціна визначається з рівняння $Q(p) = S(p)$; $7 - p = p + 1$; $p = 3$ грн.

б) знаходимо еластичність попиту і пропозиції за формулами:

$$E_p(Q) = \frac{p}{Q}\frac{dQ}{dp}, \quad E_p(S) = \frac{p}{S}\frac{dS}{dp}.$$

В даному випадку

$$E_p(Q) = \frac{p}{7-p} \cdot (-1) = -\frac{p}{7-p}; \; E_p(S) = \frac{p}{S} \cdot 1 = \frac{p}{p+1}.$$

Для рівноважної ціни $p=3$ маємо $E_{p=3}(Q) = -0{,}75$; $E_{p=3}(S) = 0{,}75$.

Знайдені значення еластичності за абсолютною величиною менші за 1, тоді і попит, і пропозиція даного товару при рівноважній ціні нееластичні відносно ціни, тобто зміна ціни не призведе до різкої зміни попиту і пропозиції. Так, при підвищенні ціни на 1%, попит зменшиться на 0,75%, а пропозиція підвищиться на 0,75%.

в) при підвищенні ціни p на 5% від рівноважної, попит зменшиться на $5 \cdot 0{,}75 = 3{,}75\%$, а дохід зросте на 3,75%.

Задача 19. Нехай задано виробничу функцію $z(x, y) = 10x + 20y - 3x^2 + 2y^2 + 5xy$, де x – об'єм фондів, y – об'єм трудових ресурсів. Знайти еластичність випуску по фондах $E_x(z)$ та по праці $E_y(z)$ при $x = 1$, $y = 1$. Як зміниться обсяг виробництва при зростання фондів на 1% і при зростання трудових ресурсів на 1%?

Розв'язування. Знайдемо еластичності функції по фондах та по праці:

$$E_x(z) = \frac{x}{z}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{10x + 20y - 3x^2 + 2y^2 + 5xy}(10 - 6x + 5y);$$

$$E_y(z)=\frac{x}{z}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{10x+20y-3x^2+2y^2+5xy}(20+4y+5x)\,.$$

Обчислимо коефіцієнти еластичності при $x=1$, $y=1$.

$$E_{x=1,\,y=1}(z)=\frac{10-6+5}{34}=\frac{9}{34}\approx 0,26\,;\;E_{y=1,\,x=1}(z)=\frac{20+4+5}{34}=\frac{29}{34}\approx 0,85\,.$$

Отже, із зростанням фондів на 1% відбувається відносне зростання обсягу виробництва приблизно на 0,26% (за умови стабільності чинника y – об'єм трудових ресурсів). При зростанні об'єму трудових ресурсів на 1% і незмінності чинника x – об'єм фондів обсяг виробництва зростає приблизно на 0,85%. Таким чином, найбільше впливає на виробничу функцію $z(x,y)$ чинник y.

Задача 20. Нехай виробнича функція визначається функцією Кобба-Дугласа. Щоб збільшити випуск продукції на 5%, треба збільшити фонди на 10% або чисельність робітників на 15%. В 2001 році один робітник за місяць виготовляв продукції на 2000 грн., а всього робітників було 1000. Основні фонди оцінювались в 4 млн. грн. Записати виробничу функцію, величину середньої фондовіддачі і середньої продуктивності праці, еластичність випуску по праці і по фондах.

Розв'язування. Еластичність випуску по праці $\beta=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}.$, а по фондах $\alpha=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}.$ Отже, функція Кобба-Дугласа має вигляд: $\int\frac{du}{\cos^2 u}=tg\left(u\right)+C$, $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}<1.$ Підставляючи інші величини, одержимо:

$$2000\cdot 1000=A\cdot(4\cdot 10^6)^{1/2}(1000)^{1/3}\text{, тобто}$$

$$2000\cdot 1000=A\cdot 2\cdot 10^3\cdot 10;\quad A=\frac{2000\cdot 1000}{2000\cdot 10}=100.$$

Отже, шукана виробнича функція $y=100\cdot K^{1/2}\cdot L^{1/3}$. Середня фондовіддача дорівнює $k=\frac{y}{K}=\frac{2000\cdot 1000}{4000000}=\frac{1}{2}$, а середня продуктивність $l = \dfrac{y}{L} = \dfrac{2000 \cdot 1000}{1000} = 2000,$ $E_L(y) = \beta = \dfrac{1}{3}$, $E_K(y) = \alpha = \dfrac{1}{2}$.

Задача 21. Мале підприємство виробляє товари *A* і *B*. Загальні щоденні витрати *V* (у гривнях) на виробництво *x* одиниць товару *A* та *y* одиниць товару В відомі: V=320 – 14x – 10y + 0,2 x^2+ 0,1 y^2. Визначити кількість одиниць товарів *A* і *B*, яку потрібно виробляти, щоб загальні витрати підприємства були мінімальними.

Розв'язування. Загальна функція витрат відома: V=320–14x–10y+0,2x^2+0,1 y^2. Щоб знайти кількість одиниць товарів ***x*** товару *A* і ***y*** товару *B*, необхідно дослідити цю функцію на екстремум.

Знайдемо частинні похідні І-го порядку $\begin{cases} V'_x = -14 + 0,4x, \\ V'_y = -10 + 0,2y. \end{cases}$

Прирівнюючи їх до нуля, одержимо систему рівнянь

$$\begin{cases} -14 + 0,4x = 0, \\ -10 + 0,2y = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 35, \\ y = 50. \end{cases}$$

Знайдемо частинні похідні II порядку:

$$A = V''_{xx} = 0,4,\ B = V''_{xy} = 0,\ C = V''_{yy} = 0,2.$$

Обчислимо D=AC–B^2=0, 4 $\cdot$ 0, 2–0=0, 08 > 0 *і* A=0,4 > 0

Отже, функція витрат при x = 35, y= 50 досягає мінімуму. Це означає, що для того, щоб загальні витрати підприємства були мінімальними, необхідно виробити 35 одиниць товару *A* і 50 одиниць товару *B*.

Задача 22. Сумарний прибуток підприємства залежить від витрат двох ресурсів *x* та *y* і виражається функцією $P(x, y) = 100 - x^2 - y^2 + 4x + 6y$. Кількість ресурсів обмежена рівністю $x + y = 10$. Визначити витрати ресурсів x та y, що забезпечують максимальний прибуток підприємства, та обчислити його.

Розв'язування. Склалемо функцію Лагранжа:

$L(x, y, \lambda) = 100 - x^2 - y^2 + 4x + 6y + \lambda(x + y - 10)$.

Знайдемо її частинні похідні та прирівняємо їх до нуля:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = -2x + 4 + \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = -2y + 6 + \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = x + y - 10 = 0. \end{cases}$$

Віднімемо від першого рівняння системи друге рівняння і отримаємо систему:

$$\begin{cases} -2x + 2y - 2 = 0, \\ x + y - 10 = 0. \end{cases}$$

Отримаємо розв'язок системи: $x = 4,5$; $y = 5,5$; $\lambda = 5$.

З'ясуємо, чи є критична точка $M(4,5;5,5)$ точкою екстремуму. Для цього обчислимо частинні похідні другого порядку:

$$A = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = -2,\ B = \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} = 0,\ C = \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = -2.$$

Оскільки $A = -2 < 0$, $D = A \cdot C - B^2 = 4 > 0$, то в точці M маємо умовний максимум:

$$P(4,5;5,5) = 100 - 4,5^2 - 5,5^2 + 4 \cdot 4,5 + 6 \cdot 5,5 = 100,5.$$

Отже, при витратах ресурсів $x = 4,5$ та $y = 5,5$ підприємство отримає максимальний прибуток 100,5 у.о.

Задача 23. Маючи ціну ***X*** *(*грн./од.)на товар і попит на цей товар *Y* (од.)

X	200	205	210	220	225	250	260	275
Y	402	400	390	388	380	360	350	300

Знайти емпіричну формулу цієї залежності.

Розв'язування. Вважаючи залежність лінійною, шукаємо її у вигляді $y = kx + b$, де *k і b* знаходяться з системи нормальних рівнянь

$$\begin{cases} k\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \\ k\sum_{i=1}^{n} x_i + nb = \sum_{i=1}^{n} y_i. \end{cases}$$

Для обчислення потрібних сум побудуємо таблицю:

n_i	x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2
1	200	402	80400	40000
2	205	400	82000	42025
3	210	390	81900	44100
4	220	388	85360	48400
5	225	380	85500	50625
6	250	360	90000	62500
7	260	350	91000	67600
8	275	300	82500	75625
Σ	1845	2970	678660	430875

Підставивши одержані суми в систему нормальних рівнянь, одержимо:

$$\begin{cases} 430875k + 1845b = 678660, \\ 1845k + 8b = 2970. \end{cases}$$

Звідси $k = \dfrac{\begin{vmatrix} 678660 & 1845 \\ 2970 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 430875 & 1845 \\ 1845 & 8 \end{vmatrix}} = \dfrac{678660 \cdot 8 - 2970 \cdot 1845}{430875 - (1845)^2} = -1{,}172$

$$8b = 2970 - 1845k;\ b = \frac{2970 - 1845k}{8} = \frac{2970 - 1845 \cdot (-1{,}172)}{8} = 641{,}54.$$

Отже, дана залежність виражається формулою $y = -1{,}172x + 645{,}54$.

Задача 24. Результати спостережень наведені в таблиці:

X	1	2	3	4	5	6
Y	1,5	– 4,5	– 5	– 2,7	5,3	17,4

Передбачається, що між змінними X та Y існує квадратична залежність виду $y = ax^2 + bx + c$. Знайдіть методом найменших квадратів значення параметрів a , b , c .

Розв'язування. Згідно з МНК коефіцієнти a , b , c визначаються із системи нормальних рівнянь

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i + cn = \sum_{i=1}^{n} y_i, \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + c\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i^4 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + c\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i. \end{cases}$$

Для обчислення потрібних сум побудуємо таблицю:

n_i	x_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	y_i	$x_i y_i$	$x_i^2 y_i$
1	1	1	1	1	1,5	1,5	1,5
2	2	4	8	16	– 4,5	– 9	– 18
3	3	9	27	81	– 5	– 15	– 45
4	4	16	64	256	– 2,7	– 10,8	– 43,2
5	5	25	125	625	5,3	26,5	132,5
6	6	36	216	1296	17,4	104,4	626,4
Σ	21	91	441	2275	12	97,6	654,2

Підставивши одержані суми в систему нормальних рівнянь, одержимо:

$$\begin{cases} 91a + 21b + 6c = 12, \\ 441a + 91b + 21c = 97,6, \\ 2275a + 441b + 91c = 654,2. \end{cases}$$

Звідси, наприклад за методом Крамера, $a \approx 2,22$, $b \approx -12,39$, $c \approx 11,63$.

Отже, шукана залежність – це $y = 2,22x^2 - 12,39 + 11,63$.

Задача 25. Обчислити площу криволінійної трапеції, обмеженої лініями $y = \dfrac{2}{x}$, $y = -x^2 + 4x + 1$.

Розв'язування. Для знаходження меж інтегрування знайдемо точки перетину ліній, розв'язавши систему рівнянь .

$$\begin{cases} y = \dfrac{2}{x} \\ y = -x^2 + 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \quad -x^2 + 4x + 1 = \frac{2}{x} \quad \Leftrightarrow \quad -x^3 + 2x^2 + x = 2 \quad \Leftrightarrow$$

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2(x-2) - (x-2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-2)(x^2-1) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

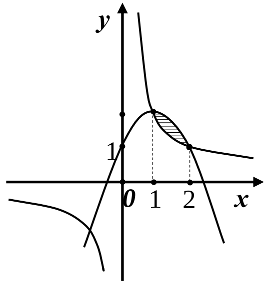
$x_1 = 2$; $x_2 = -1$; $x_3 = 1$.

Отже, площа фігури, яку треба знайти, обмежена заданими кривими, що перетинаються у точках з абсцисами $x=1$, $x=2$.

$$S=\int_1^2\left[(-x^2+2x+1-\frac{2}{x}\right]dx=$$

$$\left(-\frac{x^3}{3}+x^2+x-2\ln|x|\right)\Big|_1^2= \ .$$

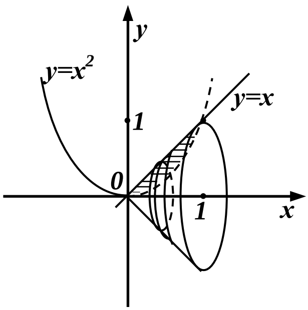
$$=4-\frac{7}{3}-2\ln 2=1\frac{2}{3}-2\ln 2 \qquad \text{(кв. од.)}$$



Задача 26. Обчислити об'єм тіла обертання утвореного обертанням навколо осі *Ox* фігури, обмеженої лініями $y=x^2$, $y=x$.

Розв'язування. Щоб знайти межі інтегрування розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} y=x^2 \\ y=x \end{cases} \Leftrightarrow x^2=x \Leftrightarrow x(x-1)=0 \Leftrightarrow x_1=0,\ x_2=1.$$



Об'єм тіла обертання знаходиться за формулою

$$V=\pi\int_a^b\left[f_2^2(x)-f_1^2(x)\right]dx\ .$$

Отже, на основі цього маємо

$$V=\pi\int_0^1\left(x^2-x^4\right)dx=\pi\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right)\Big|_1^2=$$

$$=\frac{2}{15}\pi \qquad \text{(куб. од.).}$$

Задача 27. Швидкості зміни витрат і доходу підприємства після початку його діяльності визначались формулами:

$V'(t)=6+4\sqrt[4]{t^3}$, $D'(t)=13-3\sqrt[4]{t^3}$. V і D вимірювали у мільйонах гривень, а $\boldsymbol{t}$ – у роках. Визначити тривалість прибуткового існування підприємства і знайти загальний прибуток, що одержали за цей час.

Розв'язування. Оптимальний час t_1 для прибутку підприємства одержимо з умови $D'(t)=V'(t)$:

$$6+4\sqrt[3]{t^2}=13-3\sqrt[3]{t^2},\quad 7\sqrt[4]{t^3}=7,\quad \sqrt[4]{t^3}=1,\quad t_1=1$$

Отже, підприємство було прибутковим 1 рік. За цей час одержано прибутку:

$$P=\int_0^1[D'(t)-V'(t)]dt=\int_0^1\left(13-3\sqrt[4]{t^3}-6-4\sqrt[4]{t^3}\right)dt=\int_0^1\left(7-7t^{3/4}\right)dt=$$

$$=\left(7t-7\cdot\frac{t^{7/4}}{7/4}\right)\Bigg|_0^1=7-4=3(\text{млн. грн.}).$$

Задача 28. Заданий граничний дохід фірми $D'(x)=200-2x,$ де x – кількість виробленої продукції. Знайти функцію сумарного доходу фірми, якщо нульовий випуск продукції дає нульовий дохід.

Розв'язування. Функцію сумарного доходу можна знайти так:

$$D(x)=\int(200-2x)dx=200x-2\cdot\frac{x^2}{2}+C=200x-x^2+C.$$

Якщо врахувати, що $D(0)=0$, то $D(0)=0=$ $200\cdot 0-0^2+C.$ Звідси $C=0.$

Отже, сумарний дохід фірми $D(x)=200x-x^2.$

Задача 29. Маржинальний дохід фірми виражено функцією $D'(x)=12-0,04x.$ Знайти функцію доходу і визначити відношення між вартістю одиниці продукції та проданою її кількістю.

Розв'язування. Інтегруючи функцію маржинального доходу, знайдемо функцію доходу фірми:

$$D(x)=\int D'(x)dx=\int(12-0,04x)dx=12\int dx-0,04\int xdx=$$

$$=12x-0,04\frac{x^2}{2}+C=12x-0,02x^2+C.$$

З умови, що непродаж жодної одиниці продукції дає нульовий дохід, маємо: $0=12\cdot 0-0,02\cdot 0^2+C,\quad C=0.$

Отже, функція доходу має вигляд: $D(x)=12x-0,02x^2.$

Оскільки дохід дорівнює добутку вартості кожної одиниці продукції (P) проданої фірмою на кількість (x) одиниць продукції, то $D(x)=P\cdot x=12x-0,02x^2.$ Звідси $P=12-0,02x$.

Задача 30. Продуктивність праці робітника задано функцією $f(t)=6t-t^2$. Робочий день працівника становить 6 год. Визначити обсяг виробленої продукції: а) за робочий день; б) за дві останні години роботи.

Розв'язування.

$$\text{а) } q_1 = \int_0^6 f(t)dt = \int_0^6 (6t - t^2)dt = \left(3t^2 - \frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_0^6 = 36 \text{ од. пр.;}$$

$$\text{б) } q_2 = \int_4^6 f(t)dt = \int_4^6 (6t - t^2)dt = \left(3t^2 - \frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_4^6 = 9\frac{1}{3} \text{ од. пр.}$$

Задача 31. Знайти обсяг продукції, виробленої підприємством за п'ять років, якщо виробнича функція Кобба-Дугласа має вигляд $y = (1 + 0,05t)e^{2t}$.

Розв'язування.

$$q = \int_0^4 (1+0,05t)e^{2t}dt = \begin{vmatrix} u = 1 + 0,05t, & du = 0,05dt \\ dv = e^{2t}dt, & v = \frac{1}{2}e^{2t} \end{vmatrix} = \frac{1+0,05t}{2}e^{2t}\Bigg|_0^4 -$$

$$-\frac{1}{40}\int_0^4 e^{2t}dt = 0,6e^8 - 0,5e^0 - \frac{1}{80}e^{2t}\Big|_0^4 = 0,6e^8 - 0,5 - \frac{1}{80}(e^8 - e^0) =$$

$$= 0,5875e^8 - 0,4875 \ (\textit{од.пр.}).$$

Задача 32. Знайти середній прибуток за 8 місяців поточного року, якщо функція прибутку фірми має вигляд $P(t) = 3t^2 - 2t - 1$, де t час у місяцях.

Розв'язування. Середній прибуток фірми потрібно знайти за інтервал часу від $t_1 = 0$ до $t_2 = 8$.

$$P_{сер.} = \frac{1}{8}\int_0^8 (3t^2 - 2t - 1)dt = \frac{1}{8}\left(t^3 - t^2 - t\right)\Big|_0^8 = \frac{1}{8}\left(8^3 - 8^2 - 8\right) = 55 \text{ ум.грош. од.}$$

Задача 33. За даними чистими інвестиціями $I(t) = 30000\sqrt{t}$ знайти приріст капіталу з першого по четвертий рік і визначити, за скільки років приріст капіталу становитиме 20000000 умов. грош. од.

Розв'язування. Приріст капіталу знайдемо за інтервал часу від $t_1 = 1$ до $t_2 = 4$.

$$\Delta K = K(4) - K(1) = \int_1^4 30000\sqrt{t}dt = 20000\sqrt{t^3}\Big|_1^4 = 140000 \text{ ум. гр. од.}$$

За умовою задачі

$$\Delta K = K(t_k) - K(0) = \int_0^{t_k} 30000\sqrt{t}dt = 20000\sqrt{t^3}\Big|_0^{t_k} = 20000000\ ,$$

тобто $\sqrt{t_{t_k}^3} = 1000$, звідки $t_k = 10$. Отже, потрібно 10 років, щоб приріст капіталу досяг 20 млн. умов. грош. од.

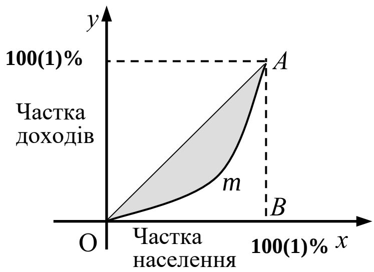
Задача 34. Нехай $y = 2 - \sqrt{4 - x^2}$, крива Лоренца, визначена за дослідженнями розподілу доходів в якійсь країні, де x – відсоток населення, у – відсоток доходів населення. Обчислити коефіцієнт Джіні.

Розв'язування. З малюнка видно, що $k = \dfrac{S_{OAm}}{S_{\Delta OAB}}$,

$$S_{OAm} = \int_0^1 (x - 2 + \sqrt{4 - x^2})dx = \int_0^1 xdx - 2\int_0^1 dx + \int_0^1 \sqrt{4 - x^2}dx.$$

Для знаходження $\int_0^1 \sqrt{4 - x^2}dx$ введемо заміну $x = 2\sin t$, тоді нижня межа t = 0, а верхня $t = \dfrac{\pi}{6}$.

Обчислюємо



$$S_{oAm} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} 2\sqrt{1 - \sin^2 t}\, 2\cos t dt =$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 t dt = \frac{1}{2} - 2 + \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,41.$$

$$S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}.$$

Тому $k = \dfrac{0,41}{0,5} = 0,82$. Великий коефіцієнт k показує нерівномірність розподілу доходів серед населення даної країни.

Задача 35. Відомо, що еластичність попиту Q визначається за формулою $\eta = \dfrac{p}{Q} \cdot \dfrac{dQ}{dp}$, де x – кількість одиниць деякого товару вартістю p за кожну одиницю. Знайти функцію попиту на цей товар, якщо еластичність попиту постійна і дорівнює – 1.

Розв'язування. За умовою задачі: $\frac{p}{Q}\cdot\frac{dQ}{dp}=-1$; $\frac{dQ}{Q}=-\frac{dp}{p}$;

$$\ln|Q|=-\ln|p|+\ln|C|;\ \ln|Q|=\ln\left|\frac{C}{p}\right|;\ Q=\frac{C}{p};\ \ p=\frac{C}{Q}.$$

Знайшли залежність між кількістю товару та його вартістю, тобто функцію попиту.

Задача 36. *Задача про раціональний розкрій матеріалу.* Припустимо, що підприємство випускає два види продукції *(A* і *B).* Для виготовлення 1 од. виробу *A* потрібно витратити 2 м тканини 1-го типу, 3 м тканини 2-го типу та 1 м тканини 3-го типу, для виготовлення 1 од. виробу *B* – ті самі тканини із витратами відповідно 1 м, 4 м і 3 м. Виробництво забезпечено сировиною кожного типу у кількості 400 м, 900 м і 600 м відповідно. Вартість виробу *A* становить 60 гри, а виробу *B* – 40 гри. Складіть план виробництва виробів *A і B,* який забезпечить максимальний прибуток від реалізації.

Розв'язання. Розглянемо три етапи розв'язання задачі.

1) Складемо математичну модель задачі.

Нехай x_1 – кількість виробів *A,* E_2 – кількість виробів *B,* які сплановано до виробництва ($E_1 \geq 0$; $E_2 \geq 0$). Тоді тканини 1-го типу потрібно буде витратити $2x_1$ м на виріб *A* і x_2 м на виріб *B;* увесь запас тканини 1-го типу дорівнює 400 м, тобто $2x_1 + x_2 \leq 400$; аналогічно для 2-го типу тканини: $3x_1+4x_2 \leq 900$; для 3-го типу тканини: $x_1+3x_2 \geq 600$. Після реалізації виробів буде одержано ($60x_1 + 40x_2$) грн.

Таким чином, потрібно знайти такі x_1 і x_2, щоб виконувались умови:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 400, \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 900, \\ x_1 + 3x_2 \leq 600, \\ x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0, \\ Z = 60x_1 + 40x_2 \to max. \end{cases} \qquad (1)$$

Функція Z – цільова функція, x_1 і x_2 – її аргументи, система (1) – обмеження, які описують умови виробництва.

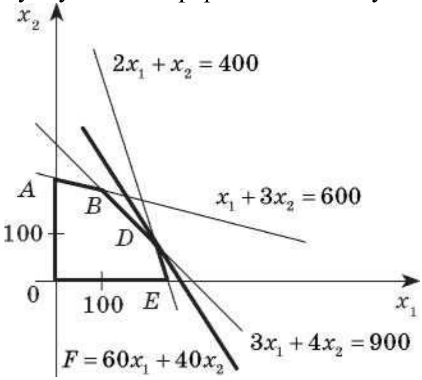
Крім того, відповідно до умови лінійна функція $Z = 60x_1 + 40x_2$ повинна мати найбільше значення.

Отже, задача полягає в тому, щоб знайти множину розв'язків системи (1) і з неї обрати ті, за яких значення функції Z буде найбільшим.

2) На другому етапі розв'язання задачі можуть бути застосовані як графічний метод розв'язування, так і симплекс-метод.

Застосуємо графічний метод розв’язування даної задачі.

Множиною розв’язків кожної нерівності системи (1) є півплощина; областю розв’язків даної системи нерівностей є переріз цих півплощин. На рисунку таким перерізом є многокутник *OABDE.*



Найбільшого значення функція Z набуває в одній з вершин цього многокутника: $O(0;0)$, $A(0;200)$, $B(60;180)$, $D(140;120)$, $E(200;0)$, тому що функція Z приймає значення, яке дорівнює c, для всіх пар (x; y) таких, що $60x_1 + 40x_2 = c$. На координатній площині x_1Ox_2 ці точки належатимуть прямій $60x_1 + 40x_2 = c$. Будемо надавати довільні значення c, при цьому отримаємо різні прямі, які будуть паралельні, оскільки матимуть однаковий кутовий коефіцієнт. Якщо ці прямі будуть проходити через внутрішні точки многокутника *OABDE,* то при цьому функція Z не набуватиме ані найменшого, ані найбільшого значення. Отже, залишаються прямі, які перетинають многокутник *OABDE* тільки по його межі. Таким чином, найбільшого значення функція $Z = 60x_1 + 40x_2$ набуває у вершині $D(140;\ 120)$ многокутника:

$$Z(140;\ 120) = 60x_1 + 40x_2 = 60 - 140 + 40 - 120 = 13\,200.$$

Звідси одержимо, що $x_1 = 140$; $x_2 = 120$.

3) На третьому етапі розв’язування задачі переведемо одержані результати на мову умови задачі та отримаємо, що оптимальним розв’язком буде виготовлення 140 одиниць виробу A і 120 одиниць виробу B; обчислимо максимальний прибуток:

$$Z = 60 - 140 + 40 - 120 = 13\,200 \text{ (грн)}.$$

Задача 37. Для виготовлення виробів *А і В* підприємство використовує три види сировини (І, ІІ, ІІІ). Прибуток від реалізації 1 од. виробу A дорівнює 30 грн, 1 од. виробу B – 40 грн. Норми витрат сировини кожного виду на виготовлення 1 од. певної продукції та загальна кількість сировини кожного виду, яка може бути використана підприємством, наведено у таблиці.

Вид сировини	Норми витрат сировини на 1 од. виробу		Загальна кількість сировини
	A	*B*	
I	3	1	75
II	1	1	30
III	1	4	84

Складіть план випуску виробів *A* і *B,* при якому прибуток підприємства від реалізації всіх виробів буде максимальним. Ураховуйте те, що підприємство може виготовляти такі вироби у будь-яких співвідношеннях (збут забезпечений).

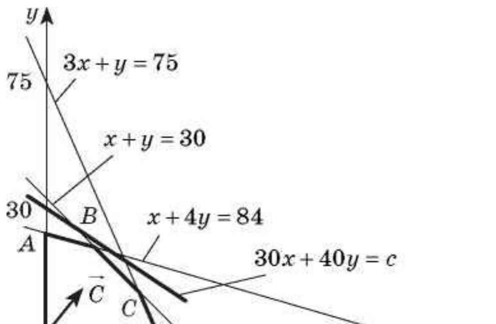
Розв'язання. Нехай x – кількість виробів *A, y* – кількість виробів *B*. Ураховуючи, що виробництво продукції обмежене кількістю сировини кожного виду, яка є на підприємстві, і що кількість виготовлених виробів не може бути від'ємною, складемо систему нерівностей:

$$\begin{cases} 3x + y \leq 75, \\ x + y \leq 30, \\ x + 4y \leq 84, \\ x \geq 0, \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Загальний прибуток від реалізації виробів *A* і виробів *B* задамо цільовою функцією $Z = 30x + 40y$.

Серед невід'ємних розв'язків системи лінійних нерівностей необхідно знайти такий, при якому функція Z набуватиме максимального значення.

Відобразимо в одній системі координат умови системи нерівностей. Множина всіх точок замкненого многокутника *OABCD* задовольняє всі нерівності системи.



Щоб знайти точку, у якій функція Z досягає свого максимального значення, побудуємо вектор $\overline{C}(30; 40)$ і пряму $30x + 40y = c$. Надаючи c різні значення, побудуємо різні паралельні прямі. Припустимо, що c = 480. Побудуємо $30x + 40y = 480$ та будемо рухати цю пряму у напрямку вектора $\overline{C}$. Із рисунка видно, що останньою спільною точкою прямої та п'ятикутника є точка B.

Координати точки B знаходимо із системи: $\begin{cases} x + y = 30, \\ x + 4y = 84. \end{cases}$

Звідси $B(12;18)$. Отже, якщо підприємство вироблятиме 12 од. виробу A і 18 од. виробу B, то воно отримає максимальний прибуток:

$$Z_{max} = 30 \cdot 12 + 40 - 18 = 1080 \text{ (грн)}.$$

ДОДАТКИ

Д1. Зразок титульної сторінки робочого зошита

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ,УКРАЇНИ
ЗАХІДНОУКРАЇНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

кафедра прикладної математики

Робочий зошит студента
для виконання
комплексного практичного індивідуального завдання
з вищої математики

Виконав студент групи
______
____
(П.І.Б.)
Перевірив
____

Тернопіль 2021

Д 2. Таблиця відсотків рахунків накопичення

$$S_{\frac{n}{i}} = \frac{\left[(1+i)^n - 1\right]}{i} \text{ та ренти } a_{\frac{n}{i}} = \frac{\left[1-(1+i)^{-i}\right]}{i}$$

i=0,5%= 0,005				*i=1%= 0,01*			
n	***(1+i)ⁿ***	$a_{\frac{n}{i}}$	$S_{\frac{n}{i}}$	***n***	***(1+i)ⁿ***	$a_{\frac{n}{i}}$	$S_{\frac{n}{i}}$
1	1,005	0,99502	1,0	1	1,01	0,990099	1,0
2	1,0010025	1,98509	2,005	2	1,0201	1,970395	2,01
3	1,015075	2,97024	3,015025	3	1,030301	2,940985	3,0301
4	1,020151	3,95049	4,0301	4	1,040604	3,901966	4,060401
5	1,025251	4,925866	5,050251	5	1,05101	4,853431	5,101005
6	1,030378	5,896384	6,075502	6	1,06152	5,795476	6,152015
7	1,035529	6,862074	7,105879	7	1,072135	6,728195	7,2133535
8	1,040707	7,822959	8,141409	8	1,082857	7,651678	8,285671
9	1,045911	8,779064	9,182116	9	1,093368	8,566018	9,368527
10	1,05114	9,730412	10,228026	100	1,104622	9,471305	10,462213
11	1,0563396	10,677027	11,279167	11	1,115668	10,367628	11,566835
12	1,061678	11,061893	12,335562	12	1,126825	11,255077	12,682503
13	1,066986	12,556151	13,339724	13	1,138093	12,13374	13,809328
14	1,072321	13,488708	14,464226	14	1,149474	13,003703	14,947421
15	1,077683	14,416625	15,536548	15	1,160969	13,865053	16,096896
16	1,083071	15,339925	16,61423	16	1,172579	14,717874	17,257864
17	1,088487	16,258632	17,697301	17	1,184304	15,562251	18,430443
18	1,093929	17,172768	18,785788	18	1,196147	16,398269	19,614748
19	1,099399	18,082335	19,879717	19	1,208109	17,226008	20,810895
20	1,104896	18,987419	20,979113	20	1,22019	18,045553	22,019004
21	1,11042	19,887979	22,084011	21	1,232392	18,856983	23,239194
22	1,115972	20,784059	23.194431	22	1,244716	19,660379	24,471586
23	1,121552	21,675681	24,310403	23	1,257163	20,455821	25.716302
24	1,12716	22,562866	25,431955	24	1,269735	21,243387	26,973405

Таблиця відсотків рахунків накопичення

$$S_{\frac{n}{i}} = \frac{\left[(1+i)^n - 1\right]}{i} \text{ та ренти } a_{\frac{n}{i}} = \frac{\left[1-(1+i)^{-i}\right]}{i}$$

(продовження)

i=2%= 0,02				*i=3%= 0,03*			
n	***(1+i)ⁿ***	$a_{\frac{n}{i}}$	$S_{\frac{n}{i}}$	***n***	***(1+i)ⁿ***	$a_{\frac{n}{i}}$	$S_{\frac{n}{i}}$
1	1,02	0,980392	1,0	1	1,03	0,970874	1,0
2	1,0404	1,941561	2,02	2	1 ,0609	1,91347	2,03
3	1,061208	2,883883	3,0604	3	1,092727	2,828611	3,0909
4	1,082432	3,807729	4,121608	4	1,125509	3,717098	4,183627
5	1,104081	4,7134	5,20404	5	1,192274	4,579707	5,309136
6	1,126162	5,601431	6,308121	6	1,194052	5,417191	5,46841
7	1,148686	6,471991	7,434283	7	1,229874	6,230283	7,662462
8	1,171659	7,325481	8,582969	8	1,26677	7,019692	8,892236
9	1,195093	8,1622337	9,754628	9	1,304773	7,786109	10,159106
10	1,218994	8,982585	10,949721	10	1,343916	8,530203	11,463879
11	1,243374	9,786848	12,168715	11	1,384234	9,252624	12,807796
12	1,268242	10,575341	13,41209	12	1,425761	9,954004	14,19203
13	1,293607	11,348374	14,680332	13	1,468534	10,634955	15,61779
14	1,319479	12,106249	15,973938	14	1,51259	11,296073	17,086324
15	1,345868	12,849264	17,293417	15	1,557967	11,937935	18,598914
16	1,372786	13,57770	18,639285	16	1,604706	12,561102	20,156881
17	1,400241	14,291872	20,012071	17	1,652848	13,166118	21,761588
18	1,428246	14,992031	21,412312	18	1,702433	13,753513	23,414435
19	1,456811	15,678462	22,840559	19	1,753506	14,323799	25,116868
20	1,485947	16,351433	24,29737	20	1,806111	14,877475-	26,870374
21	1,515666	17,011209	25,783317	21	1,860295	15,415024	28,676486
22	1,54598	17,658048	27,298984	22	1,916103	15,936917	30,53678
23	1,576899	18,292204	28,844963	23	1,973587	16,443608	32,452884
24	1,608437	18,913926	30,421852	24	2,032794	16,935542	34,42647

Таблиця відсотків рахунків накопичення

$$S_{\frac{n}{i}} = \frac{\left[(1+i)^n - 1\right]}{i} \text{ та ренти } a_{\frac{n}{i}} = \frac{\left[1-(1+i)^{-i}\right]}{i}$$

(продовження)

i=5%= 0,05				*i=8%= 0,08*			
n	***(1+i)^n***	$a_{\frac{n}{i}}$	$S_{\frac{n}{i}}$	***n***	***(1+i)^n***	$a_{\frac{n}{i}}$	$S_{\frac{n}{i}}$
I	1,05	0,95238 1	1,0	1	1,08	0,925926	1,0
2	1,1025	1,85941	2,05	2	1,164	1,783265	2,08
3	1,157625	2,723248	3,1525	3	1,259712	2,577097	3,2464
4	1,215506	3,545951	4,310125	4	1,360489	3,312127	4,506112
5	1,276282	4,329477	5,525631	5	1,469328	3,99271	5,866601
6	1,340096	5,075692	6,801913	6	1,586874	4,62288	7,335929
7	1,4071	5,786373	8,142008	7	1,713824	5,20637	8,922803
8	1,477455	6,463213	9,549109	8	1,85093	5,746639	10,636628
9	1,551328	7,107822	11,026564	9	1,999005	6,246888	12,487558
10	1,628895	7,721735	12,577893	10	2,158925	6,710081	14,486562
11	1,710339	8,306414	14,206787	11	2,331639	7,138964	16,645487
12	1,795856	8,863252	15,917127	12	2,51817	7,536078	18,977126
13	1,885649	9,393573	17,712983	13	2,719624	7,903776	21,495297
14	1,979932	9,898641	19,598632	14	2,937194	8,244237	24,21 492
15	2,078928	10,379658	21,578564	15	3,172169	8,559479	27,152114
16	2,182875	10,83777	23,657492	16	3,425943	8,531369	30,324283
17	2,292018	11,274066	25,840366	17	3,700018	9,121638	33,750226
18	2,406619	11,689587	28,132385	18	3,996019	9,373887	37,450244
19	2.52695	12,085321	30,539004	19	4,315701	9,603599	41,446263
20	2,653298	12,46221	33,065954	20	4,660957	9,818147	45,761964
21	2,785963	12,821153	35,719252	21	5,033834	10,016803	50,422921
22	2,925261	13,163003	38,505214	22	5,43654	10,200744	55,456755
23	3,071524	13,488574	41,430475	23	5,871464	10,371059	60,893296
24	3,2251	13.798642	44,501999	24	6,341181	10,528758	66,764759

ЛІТЕРАТУРА

1. Алілуйко А.М., Неміш В.М., Шинкарик М.І. Вища математика: комплексні практичні індивідуальні завдання: Навчальний посібник. – Тернопіль: ТНЕУ, 2013. – 158 с.
2. Апанасов П. Т., Апанасов Н. П. Сборник математических задач с практическим содержанием: Кн. для учителя. – М.: Просвещение, 1987. – 110 с.
3. Барковський В. В., Барковська Н. В. Математика для економістів: Вища математика. – К.: Національна академія управління, 1997. – 397 с.
4. Белинский В. А., Калихман И. Л., Майстров Л. Е., Митькин А. М. Высшая математика с основами математической статистики. – М.: Высш. шк., 1965. – 516 с.
5. Бугір М. К. Математика для економістів: Навчальний посібник. – Тернопіль: Підручники і посібники, 1998. – 192 с.
6. Валєєв К. Г., Джалладова І. А. Вища математика: Навчальний посібник: У 2-х ч. – К.: КНЕУ, 2001. – Ч.1. – 546 с.; – К.: КНЕУ, 2002. – Ч.2. – 451с.
7. Вища математика. Підручник / Домбровський В. А., Крижанівський І. М., Мацьків Р. С. та ін.; за редакцією Шинкарика М. І. – Тернопіль: Вид-во Карп'юка, 2003. – 480 с.
8. Вища математика: Навч.-метод. посібник для самостійного вивчення дисципліни / К. Г. Валєєв, І. А. Джалладова, О. І. Лютий та ін. – К.: КНЕУ, 1999. – 396 с.
9. Глаголев А. А., Солнцева Т. В. Курс высшей математики. – Изд. 2-е, перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 1971. – 656 с.
10. Гудименко Ф. С., Борисенко Д. М., Волкова В. О. та інші. Збірник задач з вищої математики: Учбовий посібник. – К.: Вид-во КДУ, 1967. – 352 с.
11. Данко П. Е., Попов А. Г. Высшая математика в упражнениях и задачах: Учеб. пособие. – Изд. 2-е. – М.: Высш. шк., 1974.– Ч. I. – 416 с.
12. Данко П. Е., Попов А. Г. Высшая математика в упражнениях и задачах: Учеб. пособие. – Изд. 2-е. – М.: Высш. шк., 1974. – Ч. II. – 464 с.

13. Доброжицкая И. Г., Доброжицкий М. Б. Краткое руководство к решению задач по высшей математике (для техникумов). – Минск: Вышейш. шк., 1972. – 200 с.
14. Економіко-математичне моделювання: Навч. посібник / За ред.. О.Т. Іващук. – Тернопіль: ТНЕУ «Економічна думка», 2008. – 704 с.
15. Каплан И. А. Практические занятия по высшей математике: Учеб. пособие. – Изд. 4-е.– Харьков: Изд-во ХГУ, 1970. – Ч. I, II.– 576 с.
16. Каплан И. А. Практические занятия по высшей математике: Учеб. пособие. – Изд. 3-е, стереотипное. Ч. III. – Изд. 2-е, стереотипное. – Ч. IV. – Харьков: Изд-во ХГУ, 1971. – 500 с.
17. Карасев А. И., Аксютина З. М., Савельева Т. И. Курс высшей математики для економических вузов. – Ч. I. Основы высшей математики: Учеб. пособие. – М.: Высш. шк., 1982.– 272 с.
18. Клюева Л. А., Тальский Д. А. Практикум по математике для заочных техникумов: Учеб. пособие. – М.: Высш. шк., 1970.– 446 с.
19. Крыньский Х. Э. Математика для економистов: Пер. с польск. Меникера В. Д. Под ред. Баренгольца М. И. – М.: Статистика, 1970. – 584 с.
20. Минорский В. П. Сборник задач по высшей математике: Учеб. пособие. – М.: Наука, 1971. – 352 с.
21. Неміш В. М., Процик А. І., Березька К. М. Практикум з вищої математики: Навч. посібник., 3-тє видання. – Тернопіль: ТНЕУ в-во «Економічна думка» 2010. – 304 с.
22. Петров В. А. Математические задачи из сельскохозяйственной практики: Пособие для учителей. – М.: Просвещение, 1980.– 64 с.
23. Сборник задач по курсу высшей математики: Учеб. пособие для втузов. / Кручкович Г. И., Гутарина Н. И., Дюбюк П. Е. и др. / Под ред. Крючковича Г. И. – Изд. 3-е, перераб. – М.: Высш. шк., 1973. – 576 с.
24. Типові індивідуальні розрахункові завдання з вищої математики: Навчальний посібник / Домбровський І.В., Лесик О.Ф., Мигович Ф.М. та ін.; за редакцією Шинкарика М.І. – Тернопіль: в-во “Підручники і посібники”, 2008.-208с.
25. Фишер С., Дорнбуш Р., Шмалензи Р. Экономика: Пер. с англ. со 2-го изд. – М.: “Дело ЛТД”, 1993. – 864 с.

ЗМІСТ

Вступ…………………………………………………………………….3
Структура залікових кредитів дисципліни………………………………5
Варіанти завдань для виконання КПІЗ…………………………………...7
Комплексне практичне індивідуальне завдання № 1…………..………10
Комплексне практичне індивідуальне завдання № 2…………..………53
Вказівки та зразки розв'язування задач………………………………...69
Додатки……………………………………………………………………95
Література………………………………………………………….....…99