Чернівецький державний університет
ім. Ю. Федьковича

На правах рукопису

Возняк
Ольга Григорівна

ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНИХ СИСТЕМ З ВИРОДЖЕННЯМИ

01.01.02 - диференційні рівняння

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Чернівці - 1995

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана у відділі крайових задач для рівнянь з частинними похідними (м.Чернівці) Інституту прикладних проблем механіки і математики ім.Я.С.Підстригача НАН України.

Науковий керівник - доктор фіз.-мат. наук, професор С.Д.Івасишен

Офіційні опоненти - доктор фіз.-мат. наук, професор М.Л.Горбачук

кандидат фіз.-мат. наук, доцент В.П.Лавренчук

Провідна організація - Львівський державний університет ім.І.Франка

Захист відбудеться "28" жовтня 1995 р. о 10^{00} годині на засіданні спеціалізованої вченої ради К 07.01.04 в Чернівецькому державному університеті за адресою: 274012, Чернівці-12, вул. Університетська, 28, математичний факультет.

З дисертацією можна ознайомитися у бібліотеці Чернівецького державного університету за адресою: вул. Л.Українки, 23.

Автореферат розіслано "26" вересня 1995 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради А.Сад — А.М.Садов'як

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

АКТУАЛЬНІСТЬ ТЕМИ. На даний час для рівномірно параболічних за Петровським (і більш загальних) систем рівнянь з гладкими і обмеженими коефіцієнтами відомі досить повні результати. У випадку задачі Коші вони стосуються насамперед побудови та детального дослідження властивостей фундаментальних матриць розв'язків, дослідження коректної розв'язності задачі Коші в широких класах функціональних просторів та вивчення різних властивостей розв'язків, заданих у напіввідкритому шарі, зокрема дослідження їх інтегрального зображення і граничної поведінки при наближенні до початкової гіперплощини. У цьому напрямку є фундаментальні праці багатьох вітчизняних і зарубіжних математиків, зокрема С.Д.Ейдельмана, В.О. Солонникова, Ж.Шабровського, С.Д.Івасишена, М.І.Матійчука та ін.

Значно менше досліджена задача Коші для параболічних систем з різними виродженнями і особливостями, коли, наприклад, система не є рівномірно параболічною, коефіцієнти системи необмежені в околі деяких точок або на безмежності і т.д. Задачі для такого типу систем виникають у теоретичних і прикладних дослідженнях. Тому вони є актуальними.

Дисертаційна робота присвячена дослідженню задачі Коші для параболічних за Петровським систем і деяких вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова, які мають виродження на початковій гіперплощині.

З попередніх праць найближчими за об'єктом дослідження і результатами є праці А.С.Калашникова, А.В.Глушака і С.Д. Шмулевича. Задача Коші для вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова без виродження на початковій гіперплощині досліджувалась у працях А.М.Колмогорова, М.Вебер, А.М.Ільїна, І.М.Соніна, Г.П.Малицької, С.Д.Ейдельмана, Л.М.Тичинської, С.Д.Івасишена, Л.М.Андросової та ін.

МЕТА РОБОТИ. Побудова і дослідження властивостей фундаментальної матриці розв'язків (ФМР) та фундаментального розв'язку (ФР) задачі Коші для відповідно параболічних за Петровським систем і одного класу вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова, які мають виродження на початковій гіперплощині; застосування цих властивостей до дослідження коректної розв'язності систем і рівнянь з початковими умовами у випадку слабкого виродження та без початкових умов, коли виродження сильне, а також інтегрального зображення і граничної поведінки розв'язків.

МЕТОДИКА ДОСЛІДЖЕННЯ. При побудові та дослідженні ФМР задачі Коші використовується методика теорії рівномірно параболічних систем, зокрема перетворення Фур'є, метод Леві, метод характеристик для розв'язування диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку.

НАУКОВА НОВИЗНА РОБОТИ:

1) побудовано і досліджено ФМР та ФР задачі Коші для відповідно параболічних за Петровським систем та деяких вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова, які мають виродження на початковій гіперплощині;

2) досліджено коректну розв'язність такого типу систем із звичайною початковою умовою у випадку слабкого виродження і без початкових умов, якщо виродження сильне;

3) у випадку слабкого виродження знайдені необхідні й достатні умови зображення розв'язків таких систем у вигляді суми інтегралів Пуассона та об'ємних потенціалів; досліджено, в якому сенсі дані розв'язки задовольняють початкові умови, і описані множини початкових значень розв'язків; аналогічні результати одержані для однорідних рівнянь типу Колмогорова з виродженнями на початковій гіперплощині.

ТЕОРЕТИЧНА І ПРАКТИЧНА ЦІННІСТЬ. Робота носить теоретичний характер. Її результати можуть використовуватися при дослідженні коректної розв'язності і властивостей розв'язків задачі Коші для квазілінійних параболічних систем з виродженнями, а також вивченні математичних моделей конкретних фізичних процесів, які описуються параболічними системами з виродженнями.

НА ЗАХИСТ ВИНОСИТЬСЯ:

- побудова і властивості ФМР задачі Коші для параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині;

- властивості потенціалів, породжених ФМР задачі Коші для параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині;

- теореми про коректну розв'язність параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині з початковою умовою у випадку слабкого виродження і без початкових умов, якщо виродження сильне; необхідні та достатні умови, за яких визначені у напіввідкритому шарі розв'язки зображуються у вигляді суми інтегралів Пуассона функцій або узагальнених мір із спеціальних вагових просторів та об'ємних потенціалів, якщо виродження слабке;

- побудова та властивості ФР задачі Коші для одного класу вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова, в яких є ще виродження на початковій гіперплощині;

- характеризація класу розв'язків однорідного виродженого параболічного рівняння типу Колмогорова у випадку слабкого виродження на початковій гіперплощині, які зображуються у вигляді інтегралів Пуассона елементів спеціальних вагових просторів функцій та узагальнених мір.

АПРОБАЦІЯ РОБОТИ. Основні результати дисертації доповідались і обговорювались на Всеукраїнській науковій конференції "Нові підходи до розв'язання диференціальних рівнянь" (Дрогобич, 25-27 січня 1994 р.); науковій конференції, присвяченій 120-річчю заснування Чернівецького університету (Чернівці, 4-6 травня 1995 р.); міжнародній конференції "Нелінійні диференціальні рівняння" (Київ, 21-27 серпня 1995 р.); наукових семінарах кафедри математичного моделювання Чернівецького університету (Чернівці, 1992-1995 рр.); наукових семінарах Чернівецького відділу ІППММ НАН України (Чернівці, 1992-1995 рр.).

ПУБЛІКАЦІЇ. Основні результати дисертації опубліковано в 8 роботах, список яких наведено в кінці автореферату.

Особисто дисертанткою побудовано і досліджено ФМР та ФР задачі Коші для відповідно параболічних за Петровським систем та деяких вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова з виродженнями на початковій гіперплощині; досліджено коректну розв'язаність такого типу систем із звичайною початковою умовою у випадку слабкого виродження і без початкових умов, якщо виродження сильне; у випадку слабкого виродження знайдені необхідні й достатні умови інтегрального зображення розв'язків таких систем та однорідних рівнянь типу Колмогорова з виродженнями на початковій гіперплощині.

СТРУКТУРА І ОБСЯГ РОБОТИ. Дисертація складається із вступу, двох розділів та списку літератури. Обсяг дисертації 150 сторінок машинописного тексту. Бібліографічний список містить 35 найменувань.

ЗМІСТ ДИСЕРТАЦІЇ

У вступі обгрунтовується актуальність теми роботи, робиться огляд результатів за тематикою дисертації та описуються одержані в роботі результати.

Список основних позначень містить ті позначення, які є загальними для всієї роботи.

Перший розділ, що складається з трьох параграфів, присвячений дослідженню задачі Коші для параболічних за Петровським систем з виродженням на початковій гіперплощині.

У § I розглядається система N рівнянь з частинними похідними

$$[\alpha(t)ID_t^1-\beta(t)\sum_{0<|k|\le 2b}a_k(t,x)D_x^k-a_0(t,x)]u(t,x)=$$

$$=f(t,x),(t,x)\in\Pi_{(0,T]}^n\equiv(0,T]\times\mathbb{R}^n, \qquad (1)$$

де функції $\alpha:[0,T]\to[0,\infty)$ і $\beta:[0,T]\to[0,\infty)$ неперервні, причому функція β монотонно неспадна, і такі, що

$$\alpha(0)\beta(0)=0,\ \forall t\in(0,T]:\alpha(t)>0,\ \beta(t)>0.$$

Для коефіцієнтів a_k, $|k|\le 2b$, вважаються виконаними наступні умови.

Умова I (умова параболічності). Існує така стала $\delta > 0$, що p-корені $p_1, \dots, p_N$ рівняння

$$\det\Big(\sum_{|k|=2b} a_k(t,x)(i\sigma)^k - pI\Big) = 0$$

задовольняють нерівності

$$\operatorname{Re} p_j(t,x,\sigma) \le -\delta|\sigma|^{2b}, \quad 1 \le j \le N,$$

для довільних $(t,x) \in \Pi^n_{[0,T]}$ і $\sigma \in \mathbb{R}^n$.

Умова 2. Коефіцієнти a_k, $|k| \le 2b$, обмежені і неперервні по t (при цьому неперервність коефіцієнтів з $|k|=2b$ рівномірна по $x \in \mathbb{R}^n$), а також задовольняють у $\Pi^n_{[0,T]}$ умову Гельдера по x з показником $\lambda \in (0,1)$.

Використовується також ще така умова.

Умова 3. Існують обмежені і неперервні по t похідні $D^k_x a_k$, $|k| \le 2b$, які задовольняють у $\Pi^n_{[0,T]}$ умову Гельдера по x з показником λ.

Оскільки система (I) вироджується при $t=0$, то не завжди для неї можна розглядати задачу Коші з початковими даними при $t=0$ у звичайній постановці. Але можна говорити про ФМР задачі Коші згідно з таким означенням.

Означення. ФМР задачі Коші для системи (I) називається квадратна матриця порядку N $Z(t,x;\tau,\xi)$, $0<\tau<t\le T$, $\{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n$, така, що функція

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;\tau,\xi)\varphi(\xi)\,d\xi, \quad (t,x) \in \Pi^n_{(\tau,T]},$$

є розв'язком однорідної системи (I), який задовольняє умову

$$u(t,x)\big|_{t=\tau} = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

для будь-якого $\tau \in (0,T)$ і довільної неперервної та обмеженої функції $\varphi: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}_N$, де $\mathbb{C}_N$ - сукупність усіх стовпчиків висоти N, елементи яких належать до $\mathbb{C}$.

Основні результати § I містяться в наступній теоремі.

Теорема I.I. Нехай для коефіцієнтів a_k, $|k| \le 2b$, виконуються умови I і 2. Тоді існує ФМР задачі Коші для системи (I) $Z(t,x;\tau,\xi)$, $0<\tau<t\le T$, $\{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n$,

для якої правильні оцінки

$$|D_x^k Z(t,x;\tau,\xi)| \le C[B(t,\tau)]^{-\frac{n+|k|}{2b}} E_c^d(t,\tau,|x-\xi|), \quad (2)$$

$$|\Delta_x^{x'} D_x^k Z(t,x;\tau,\xi)| \le C|x-x'|^\lambda [B(t,\tau)]^{-\frac{n+|k|+\lambda}{2b}} \times$$

$$\times[E_c^d(t,\tau,|x-\xi|)+E_c^d(t,\tau,|x'-\xi|)], \quad (3)$$

$$0<\tau<t\le T,\ \{x,x',\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\ |k|\le 2b,$$

де $C>0$, $c>0$, $d\in\mathbb{R}$, $\Delta_x^{x'}F(\cdot,x;\cdot,\cdot)\equiv F(\cdot,x;\cdot,\cdot)-$ $-F(\cdot,x';\cdot,\cdot)$, $B(t,\tau)\equiv\int\limits_\tau^t \frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)}\,d\theta$, $E_c^d(t,\tau,|x|)\equiv$ $\equiv E_c(t,\tau,|x|)E^d(t,\tau)\equiv\exp\{-c[B(t,\tau)]^{1-q}|x|^q\}\times$

$$\times\exp\{d\int\limits_\tau^t\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\},\ q=\frac{2b}{2b-1}.$$

Як для рівномірно параболічних систем, побудова матриці Z здійснюється за допомогою методу Леві, згідно з яким вона відшукується у вигляді

$$Z(t,x;\tau,\xi)=Z_0(t,x;\tau,\xi;\xi)+$$

$$+\int\limits_\tau^t\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}Z_0(t,x;\theta,y;y)\varphi(\theta,y;\tau,\xi)dy,$$

$$0<\tau<t\le T,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,$$

де, на відміну від випадку систем без виродження, матриця $Z_0(t,x;\tau,\xi;y)$, $0<\tau<t\le T$, $\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$, є ФМР задачі Коші для системи

$$[\alpha(t)ID_t^1-\beta(t)\sum_{|k|=2b}a_k(t,y)D_x^k-a_0(t,y)]u(t,x)=0,$$

$$(t,x)\in\Pi^n_{(0,T]},\ y\in\mathbb{R}^n.$$

В оцінках (2) і (3) стала d може бути будь-якого знаку або нулем. Якщо, наприклад, для системи (1) мають місце оцінки (2) і (3) з $d=d_0>0$, то відповідні оцінки для системи

$$[\alpha(t)ID_t^1-\beta(t)\sum_{0<|k|\le 2b}a_k(t,x)D_x^k-a_0(t,x)+pI]u(t,x)=$$

$$=f(t,x),\ (t,x)\in\Pi^n_{(0,T]}, \tag{4}$$

з комплексним параметром p таким, що $\mathrm{Re}\,p\geq d_0$, правильні з $d=d_0-\mathrm{Re}\,p\leq 0$, що випливає з формули

$$Z_p(t,x;\tau,\xi)=E^{-p}(t,\tau)Z(t,x;\tau,\xi),$$
$$0<\tau<t\leq T,\ \{x,\xi\}\subset R^n,$$

де Z і Z_p - ФМР задачі Коші відповідно для систем (I) і (4).

Крім властивостей, описаних у теоремі I.I, в § I і 2 встановлені і деякі інші властивості матриці Z, а також властивості потенціалів, породжених цією матрицею. При цьому істотно розрізняються випадки слабкого (інтеграл

$$\int_0^T \frac{d\sigma}{\alpha(\sigma)}$$

збігається) і сильного (цей інтеграл розбігається) вироджень.

Властивості ФМР дозволяють дослідити в § 3 коректну розв'язність системи (I) з початковою умовою

$$u(t,x)\big|_{t=0}=\varphi(x),\ x\in R^n, \tag{5}$$

у випадку слабкого виродження і без початкової умови, якщо має місце сильне виродження. Класи коректності при цьому складаються з функцій, які можуть зростати при $|x|\to\infty$ не швидше, ніж функція

$$\exp\{k(t)|x|^q\},\ x\in R^n,$$
$$k(t)\equiv c_0 a[c_0^{2b-1}-a^{2b-1}(T-B(T,t))]^{1-q},\ 0\leq t\leq T,$$

де c_0 - фіксована стала з проміжку $(0,c)$, а число a таке, що $0\leq a<c_0T^{1-q}$, c - стала з оцінок (2) і (3).

Нехай $u:\Pi^n_{[0,T]}\to C_N$ - задана неперервна або вимірна за Лебегом по x при кожному фіксованому $t\in[0,T]$ функція. Для $t\in[0,T]$ і $1\leq p\leq\infty$ означимо норми

$$\|u(t,\cdot)\|^{k(t)}\equiv\sup_{x\in R^n}[|u(t,x)|\exp\{-k(t)|x|^q\}],$$

$$\|u(t,\cdot)\|_p^{k(t)}\equiv\|u(t,\cdot)\exp\{-k(t)|\cdot|^q\}\|_{L_p(R^n)}.$$

де $L_p(\mathbb{R}^n)$ - лебеговий простір функцій, визначених на $\mathbb{R}^n$ із значеннями в $\mathbb{C}_N$. Через $C^{k(0)}$ і $L_p^{k(0)}$ позначимо простори відповідно всіх неперервних і всіх вимірних за Лебегом функцій $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}_N$, для яких скінченні відповідно норми $\|\varphi\|^{k(0)}$ і $\|\varphi\|_p^{k(0)}$. Через $M^{k(0)}$ позначимо сукупність усіх узагальнених борельових мір μ, заданих на σ-алгебрі $\mathcal{B}_n$ борельових множин простору $\mathbb{R}^n$ і таких, що

$$\|\mu\|^{k(0)} \equiv \int_{\mathbb{R}^n} \exp\{-k(0)|x|^q\}\, d|\mu|(x) < \infty,$$

де $|\mu|$ - повна варіація μ.

Для випадку слабкого виродження системи (I) при виконанні умов I-3 в § 3 доведені наступні три теореми.

Теорема 3.I. Нехай $\varphi \in C^{k(0)}$, а функція $f: \Pi^n_{(0,T]} \to \mathbb{C}_N$ неперервна, задовольняє в $\Pi^n_{(0,T]}$ локальну умову Гельдера по x та умову

$$\exists C>0 \;\; \forall t \in (0,T]:$$

$$F_0(t) \equiv \int_0^t [B(t,\tau)]^{-1+\frac{1}{2b}} \|f(\tau,\cdot)\|^{k(\tau)} \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \leq C,$$

тоді формулою

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;0,\xi)\varphi(\xi)\,d\xi + \int_0^t \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \int_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;\tau,\xi) f(\tau,\xi)\,d\xi, \quad (t,x) \in \Pi^n_{(0,T]}, \tag{6}$$

визначається єдиний розв'язок системи (I), який задовольняє такі умови:

а) $\exists C>0 \;\; \forall t \in (0,T] \;\; \forall m, |m| \leq 2b-1:$

$$\|D^m u(t,\cdot)\|^{k(t)} \leq C([B(t,0)]^{-\frac{|m|}{2b}} \|\varphi\|^{k(0)} + F_0(t));$$

б) для будь-якого компакту $K \subset \mathbb{R}^n$ рівномірно на K

$$u(t,\cdot) \xrightarrow[t \to 0+]{} \varphi(\cdot).$$

Теорема 3.2. Якщо $\varphi \in L_p^{k(0)}$, $1 \le p \le \infty$, а функція $f: \Pi_{(0,T]}^n \longrightarrow \mathbb{C}_N$ неперервна, задовольняє в $\Pi_{(0,T]}^n$ локальну умову Гельдера по x та умову

$$\exists C>0 \ \forall t \in (0,T]:$$

$$F_p(t) \equiv \int_0^t [B(t,\tau)]^{-1+\frac{1}{2b}} \|f(\tau,\cdot)\|_p^{k(\tau)} \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \le C, \tag{7}$$

то формула (6) визначає єдиний розв'язок системи (I), для якого виконуються такі умови:

а) $\exists C>0 \ \ \forall t \in (0,T] \ \ \forall m, |m| \le 2b-1:$

$$\|D^m u(t,\cdot)\|_p^{k(t)} \le C\left([B(t,0)]^{-\frac{|m|}{2b}} \|\varphi\|^{k(0)} + F_p(t)\right);$$

б) при $1 \le p < \infty$

$$\lim_{t \to 0+} \|u(t,\cdot) - \varphi(\cdot)\|_p^{k(t)} = 0,$$

а при $p=\infty$ $u(t,\cdot) \xrightarrow[t \to 0+]{\omega} \varphi(\cdot)$, тобто мають місце співвідношення

$$\forall \eta \in L_1^{-k(T)}:$$

$$\lim_{t \to 0+} \int_{\mathbb{R}^n} \eta'(x) \overline{u(t,x)} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \eta'(x) \overline{\varphi(x)} dx;$$

де $L_1^{-k(T)}$ – множина всіх вимірних за Лебегом функцій $\eta: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}_N$, для яких скінченна норма

$$\|\eta\|_1^{-k(T)} \equiv \|\exp\{k(T)|\cdot|^q\} \eta(\cdot)\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}.$$

Теорема 3.3. Нехай $\mu \in M^{k(0)}$, а функція f така ж, як у теоремі 3.2, причому умову (7) задовольняє з $p=1$ тоді формулою

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;0,\xi)\, d\mu(\xi) + $$
$$+ \int_0^t \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \int_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;\tau,\xi) f(\tau,\xi) d\xi,$$

$$(t,x) \in \Pi_{(0,T]}^n, \tag{8}$$

визначається єдиний розв'язок системи (I), який має такі властивості:

а) $\exists C>0 \ \forall t\in(0,T] \ \forall m, |m|\le 2b-1:$

$$\|D^m_{\cdot} u(t,\cdot)\|_1^{k(t)} \le C([B(t,0)]^{-\frac{|m|}{2b}} \|\mu\|^{k(\beta)} + F_1(t));$$

б) $u(t,\cdot)\xrightarrow[t\to 0+]{w}\mu$, тобто правильні співвідношення

$$\forall \eta\in C_0^{-k(T)}:$$

$$\lim_{t\to 0+}\int_{\mathbb{R}^n}\eta'(x)\overline{u(t,x)}\,dx=\int_{\mathbb{R}^n}\eta'(x)\,d\overline{\mu(x)},$$

де $C_0^{-k(T)}$ – множина всіх таких неперервних функцій η : $\mathbb{R}^n\longrightarrow \mathbb{C}_N$, що $|\eta(x)|\exp\{k(T)|x|^q\}\xrightarrow[|x|\to\infty]{} 0$.

Якщо має місце сильне виродження, то початкову умову (5) задовольнити, взагалі кажучи, не можна. У наступній теоремі наводяться умови, за яких існує єдиний розв'язок сильно виродженої системи (I) без початкових умов.

<u>Теорема 3.5</u>. Нехай виконуються умови I-3 і має місце сильне виродження. Якщо функція $f:\Pi^n_{(0,T]}\longrightarrow \mathbb{C}_N$ неперервна, задовольняє в $\Pi^n_{(0,T]}$ таку локальну умову Гельдера по x :

$$\forall R>0 \ \exists L>0 \ \exists\lambda\in(0,1] \ \forall t\in(0,T] \ \forall\{x,\xi\}\subset \mathbb{K}^n_R:$$

$$|f(t,x)-f(t,\xi)|\le L\,\delta(t)E^{-d}(T,t)|x-\xi|^{\lambda},$$

де $\delta:(0,T]\longrightarrow[0,\infty)$ – функція, яка задовольняє умову $\int_0^T\frac{\delta(t)}{\alpha(t)}\,dt<\infty$, $\mathbb{K}^n_R\equiv\{x\in\mathbb{R}^n \mid |x|\le R\}$, а d – стала з оцінок (2), та умову

$$F(t)\equiv\int_0^t E^{d}(t,\tau)\|f(\tau,\cdot)\|^{k(\tau)}\frac{d\tau}{\alpha(\tau)}\le C,$$

то формула

$$u(t,x)=\int_0^t\frac{d\tau}{\alpha(\tau)}\int_{\mathbb{R}^n}Z(t,x;\tau,\xi)f(\tau,\xi)\,d\xi,$$

$$(t,x)\in\Pi^n_{(0,T]},$$

визначає єдиний розв'язок системи (I), для якого правильна оцінка

$$\|u(t,\cdot)\|^{k(t)} \leq C E^{-d}(T,t)F(t),\ t\in(0,T].$$

В п. 3.2 для системи (1) із слабким виродженням доведена наступна теорема, яка є у певному розумінні оберненою до теорем 3.2 і 3.3.

<u>Теорема 3.4</u>. Нехай для розв'язку u і правої частини f системи (1) із слабким виродженням виконуються такі умови:

а) $\exists C>0 \quad \forall t\in(0,T]: \|u(t,\cdot)\|_p^{k(t)} \leq C$

з деяким $p\in[1,\infty]$;

б) f задовольняє умови з теореми 3.2.

Тоді при $1<p\leq\infty$ існує єдина функція $\varphi\in L_p^{k(0)}$, а при $p=1$ – єдина узагальнена міра $\mu\in M^{k(0)}$ такі, що розв'язок u зображується відповідно у вигляді (6) і (8).

<u>Наслідок</u>. З теорем 3.2-3.4 випливають такі твердження: за умов на f з цих теорем

1) простори $L_p^{k(0)}$ і $M^{k(0)}$ є множинами початкових значень розв'язків системи (1) тоді і тільки тоді, коли розв'язки задовольняють умову а) з теореми 3.4 при $1<p\leq\infty$ і $p=1$ відповідно;

2) для зображення розв'язків системи (1) у вигляді (6) чи (8) необхідно й досить, щоб виконувалась умова а) з теореми 3.4.

<u>Другий розділ</u>, до якого входять § 4-6, присвячений дослідженню задачі Коші для виродженого параболічного рівняння типу Колмогорова, в якого є ще виродження на початковій гіперплощині.

Розглядається рівняння вигляду

$$[\alpha(t)D_t^1-\beta(t)\Big(\sum_{j=1}^{m}x_jD_{y_j}^1+\sum_{j=1}^{l}y_jD_{z_j}^1+\sum_{0<|k|\leq 2b}a_k(t)D_x^k\Big)-$$

$$-a_0(t)]u(t,X)=0,\ (t,X)\in\Pi_{(0,T]}^{L}\equiv(0,T]\times\mathbb{R}^L, \quad (9)$$

де $X\equiv(x,y,z)\in\mathbb{R}^L$, $x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, $y=(y_1,\ldots,y_m)\in\mathbb{R}^m$, $z=(z_1,\ldots,z_l)\in\mathbb{R}^l$, $1\leq l\leq m\leq n$, $L\equiv l+m+$

$+n$. Коефіцієнти $a_k : [0,T] \to \mathbb{C}$, $0<|k|\leq 2b$, $a_0 : (0,T] \to \mathbb{C}$ неперервні і такі, що вираз

$$D_t^1 - \sum_{0<|k|\leq 2b} a_k(t) D_x^k$$

рівномірно параболічний за Петровським, $\exists A \in \mathbb{R}\ \forall t \in (0,T]$: $\operatorname{Re} a_0(t) \leq A$, а функції α і β такі ж, як у першому розділі.

У § 4 побудований ФР $Z(t,X;\tau,\Xi)$, $0<\tau<t\leq T$, $\{X,\Xi\} \subset \mathbb{R}^L$, задачі Коші для рівняння (9) і досліджені його властивості. Зокрема, одержані такі оцінки:

$$|D_x^k D_y^r D_z^s Z(t,X;\tau,\Xi)| \leq C\,[B(t,\tau)]^{-M(k,r,s)} \times$$

$$\times \Phi_c^d(t,X;\tau,\Xi),\ \tau<t\leq T,\ \{X,\Xi\} \subset \mathbb{R}^L,$$

де $M(k,r,s) \equiv \frac{1}{2b}[n+|k|+(2b+1)(m+|r|)+(4b+1)(\ell+|s|)]$, $C>0$, $c>0$, $d\in\mathbb{R}$, $\Phi_c^d(t,X;\tau,\Xi) \equiv \exp\{d\int_\tau^t \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} -$

$$-c\left(\frac{|x-\xi|^q}{[B(t,\tau)]^{q-1}} + \frac{|y+B(t,\tau)\hat{x}-\eta|^q}{[B(t,\tau)]^{2q-1}} + \right.$$

$$\left. + \frac{|z+B(t,\tau)y'+\frac{1}{2}[B(t,\tau)]^2 x'-\zeta|^q}{[B(t,\tau)]^{3q-1}}\right)\Big\}.$$

Властивості ФР задачі Коші дозволяють одержати для рівнянь вигляду (9) (як однорідних, так і неоднорідних) результати, аналогічні результатам з першого розділу. Вони стосуються у випадку слабкого виродження на початковій гіперплощині коректної розв'язності задачі Коші, інтегрального зображення та граничної поведінки розв'язків, визначених у напіввідкритому шарі $\Pi^L_{(0,T]}$, а у випадку сильного виродження – коректної розв'язності неоднорідного рівняння без початкових умов у відповідних просторах функцій. У § 5 і 6 наведені лише деякі результати для однорідного рівняння (9) у випадку слабкого виродження на початковій гіперплощині.

Щоб їх сформулювати, означимо потрібні норми і простори. Для кожного $t\in[0,T]$ покладаємо $\|u(t,\cdot)\|_p^{k(t,a)} \equiv \|u(t,x) \times$

$$\times \exp\{-k_1(t,a_1)|x|^q - k_2(t,a_2)|y + B(t,0)\hat{x}|^q -$$

$$- k_3(t,a_3)|z + B(t,0)y' + \tfrac{1}{2}[B(t,0)]^2 x'|^q\}\|_{L_p(\mathbb{R}^L)},$$

де $1 \leq p \leq \infty$,

$$k(t,a) \equiv (k_1(t,a_1), k_2(t,a_2), k_3(t,a_3)),$$

$$k_j(t,a_j) \equiv c_0 a_j [c_0^{2b-1} - a^{2b-1}(T - B(T,t))^{2b(j-1)+1}]^{1-q},$$

$$0 \leq t \leq T,\ 0 \leq a_j < c_0 T^{\frac{2b(j-1)+1}{2b}}.$$

Через $L_p^{k(0,a)}$, $1 \leq p \leq \infty$, позначаємо простір усіх комплекснозначних функцій $\varphi(X)$, $X \in \mathbb{R}^L$, які вимірні і для яких скінченна норма $\|\varphi\|_p^{k(0,a)}$, а через $M^{k(0,a)}$ – сукупність усіх узагальнених борельових мір μ, заданих на σ-алгебрі $\mathcal{B}_L$ борельових множин простору $\mathbb{R}^L$, і таких, що

$$\|\mu\|^{k(0,a)} \equiv \int_{\mathbb{R}^L} \exp\{-k_1(0,a_1)|x|^q - k_2(0,a_2)|y|^q -$$

$$- k_3(0,a_3)|z|^q\}\, d|\mu|(X).$$

Покладаємо ще

$$\|u(t,\cdot)\|_p^{s(t)} \equiv \|u(t,X)\exp\{-s_1(t)|x|^q -$$

$$- s_2(t)|y|^q - s_3(t)|z|^q\}\|_{L_p(\mathbb{R}^L)},$$

де

$$s_1(t) \equiv k_1(t,a_1) + 2^{q-1}[B(t,0)]^q k_2(t,a_2) +$$

$$+ 2^{-q} 3^{q-1}[B(t,0)]^{2q} k_3(t,a_3),$$

$$s_2(t) \equiv 2^{q-1} k_2(t,a_2) + 3^{q-1}[B(t,0)]^q k_3(t,a_3),$$

$$s_3(t) \equiv 3^{q-1} k_3(t,a_3),$$

$$s(t) \equiv (s_1(t), s_2(t), s_3(t)),\ 0 \leq t \leq T.$$

Теорема 6.I. Нехай має місце слабке виродження і $1 \leq p \leq \infty$. Тоді:

а) для будь-якої функції $\varphi \in L_p^{k(0,a)}$ формулою

$$u(t,X)\equiv\int_{R^L} Z(t,X;0,\Xi)\varphi(\Xi)\,d\Xi,$$

$$(t,X)\in\Pi^L_{(0,T]}, \qquad (10)$$

визначається единий розв'язок рівняння (9) у шарі $\Pi^L_{(0,T]}$ який задовольняє такі умови:

I) існує стала $C>0$, не залежна від φ і така, що

$$\forall t\in(0,T]: \|u(t,\cdot)\|_p^{k(t,a)}\le C\|\varphi\|_p^{k(0,a)},$$

2) при $1\le p<\infty$ $\lim\limits_{t\to0+}\|u(t,\cdot)-\varphi(\cdot)\|_p^{s(t)}=0$,

а при $p=\infty$ $u(t,\cdot)\xrightarrow[t\to0+]{\omega}\varphi(\cdot)$, тобто

$$\forall\psi\in L_1^{-s(T)}:$$

$$\lim_{t\to0+}\int_{R^L}u(t,X)\psi(X)\,dX=\int_{R^L}\varphi(X)\psi(X)\,dX,$$

де $L_1^{-s(T)}$ – множина комплекснозначних вимірних функцій $\psi(X)$, $X\in R^L$, для яких скінченна норма

$$\|\psi\|_1^{-s(T)}\equiv\|\psi(X)\exp\{s_1(T)|x|^q+s_2(T)|y|^q+ +s_3(T)|z|^q\}\|_{L_1(R^L)};$$

б) для будь-якої узагальненої міри $\mu\in M^{k(0,a)}$ формула

$$u(t,X)=\int_{R^L}Z(t,X;0,\Xi)\,d\mu(\Xi),$$

$$(t,X)\in\Pi^L_{(0,T]}, \qquad (11)$$

визначає единий розв'язок рівняння (9) у шарі $\Pi^L_{(0,T]}$, який має такі властивості:

I) існує така, не залежна від μ, стала $C>0$, що

$$\forall t\in(0,T]: \|u(t,\cdot)\|_1^{k(t,a)}\le C\|\mu\|^{k(0,a)},$$

2) $u(t,\cdot)\xrightarrow[t\to0+]{\omega}\mu$, тобто $\forall\varphi\in C_0^{-s(T)}$:

$$\int_{R^L}\varphi(X)u(t,X)\,dX\xrightarrow[t\to0+]{}\int_{R^L}\varphi(X)\,d\mu(X),$$

де $C_0^{-s(T)}$ - множина всіх комплекснозначних неперервних функцій $\varphi(X)$, $X\in\mathbb{R}^L$, які мають властивість

$$|\varphi(X)|\exp\{s_1(T)|x|^q+s_2(T)|y|^q+s_3(T)|z|^q\}\xrightarrow[|X|\to\infty]{}0.$$

Оберненою до теореми 6.1 є теорема про зображення у вигляді інтегралів Пуассона розв'язків, визначених у напіввідкритому шарі.

<u>Теорема 6.2</u>. Нехай має місце слабке виродження і u - розв'язок рівняння (9) у шарі $\Pi^L_{(0,T]}$, який задовольняє умову

$$\forall t\in(0,T]:\|u(t,\cdot)\|_p^{k(t,a)}\le C \tag{12}$$

з деякими $C>0$ і $1\le p\le\infty$. Тоді при $1<p\le\infty$ існує єдина функція $\varphi\in L_p^{k(0,a)}$, а при $p=1$ - єдина узагальнена міра $\mu\in M^{k(0,a)}$ такі, що розв'язок u зображується у вигляді (10) і (11) відповідно.

<u>Наслідок</u>. З теорем 6.1 і 6.2 випливає що

1) простори $L_p^{k(0,a)}$, $1<p\le\infty$, і $M^{k(0,a)}$ є множинами початкових значень розв'язків рівняння (9) тоді і тільки тоді, коли розв'язки задовольняють умову (12) при $1<p\le\infty$ і $p=1$ відповідно;

2) для зображення розв'язків рівняння (9) у вигляді (10) чи (11) з $\varphi\in L_p^{k(0,a)}$, $1<p\le\infty$, і $\mu\in M^{k(0,a)}$ необхідно й досить, щоб виконувалась умова (12).

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ І ВИСНОВКИ

Побудована і досліджена ФМР задачі Коші для параболічних за Петровським систем з виродженням на початковій гіперплощині. Досліджені властивості потенціалів, породжених ФМР задачі Коші для таких систем. Ці властивості використані для доведення теорем про коректну розв'язність та інтегральне зображення розв'язків.

Побудований і досліджений ФР задачі Коші для одного класу вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова, які мають ще виродження на початковій гіперплощині. Для однорідних рівнянь з такого класу у випадку слабкого виродження на початковій гіперплощині описаний клас розв'язків, які зображуються у вигляді інтегралів Пуассона елементів спеціальних вагових просторів.

ОСНОВНІ ПОЛОЖЕННЯ ДИСЕРТАЦІЇ ОПУБЛІКОВАНІ В РОБОТАХ:

1. Возняк О.Г., Івасишен С.Д. Задача Коші для параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині // Доп. НАН України.- 1994.- № 6.- С. 7-11.
2. Возняк О.Г. Про задачу Коші для деяких параболічних систем з виродженням // Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения.- Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1994.- С. 48-49.
3. Возняк О.Г., Івасишен С.Д. Фундаментальні матриці розв'язків задачі Коші для параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині.- Чернівець. ун-т.- Чернівці, 1995.- 51 с.- Деп. в ДНТБ України 12.07.95, № 1808-Ук95.
4. Возняк О.Г. Про інтегральне зображення розв'язків параболічних систем з виродженням // Матеріали міжнародної математичної конференції, присвяченої пам'яті Ганса Гана.- Чернівці: Рута, 1995.- С. 42-60.
5. Возняк О.Г. Про фундаментальний розв'язок задачі Коші для одного класу вироджених параболічних рівнянь // Матеріали наукової конференції викладачів, співробітників та студентів, присвяченої 120-річчю заснування Чернівецького університету (4-6 травня 1995 року). Том 2. Фізико-математичні науки.- Чернівці: Рута, 1995.- С. 79.
6. Возняк О.Г., Івасишен С.Д. Фундаментальний розв'язок задачі Коші для параболічного рівняння другого порядку з виродженням по часу // Тези доповідей наукової конференції викладачів та студентів географічного факультету Тернопільського державного педінституту.- Тернопіль, 1992.- С. 109-110.

7. Возняк О.Г., Івасишен С.Д. Про задачу Коші для параболічного рівняння з виродженням // Тези доповідей наукової конференції викладачів та студентів географічного факультету Тернопільського педінституту.- Тернопіль, 1992.- С. 106-107.
8. Возняк О.Г., Івасишен С.Д. Задача Коші для параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині // Тези доповідей Всеукраїнської наукової конференції "Нові підходи до розв'язання диференціальних рівнянь" (25-27 січня 1994 року, м. Дрогобич).- Київ, 1994.- С. 31.

Voznuak O.G.The Cauchy problem for the parabolic systems with the degenerations. Manuscript. Thesis for a degree of Candidate of Science (Ph.D) in Physics and Mathematics , speciality 01.01.02 - Differential Equations Chernivtsi State University , Chernivtsi , 1995 .

The parabolic systems with the degenerations on the initial hyperplain and the some degenerate parabolic equations are considered . These equations are the same as the Kolmogorov's equation of diffusion with inertia and they have the degenerations on the initial hyperplain . The fundamental matrixes of the solutions of the Cauchy problem are constructed for such systems and equations , their properties are investigated and some applications of these properties are obtained.

Возняк О.Г.Задача Коши для параболических систем с вырождениями . Рукопись . Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико - математических наук по специальности 01.01.02 - дифференциальные уравнения . Черновицкий государственный университет , Черновцы , 1995.

Рассматриваются параболические системы с вырождениями на начальной гиперплоскости и некоторые вырожденные параболические уравнения типа уравнения диффузии с инерцией Колмогорова , в которых имеются е е вырождения на начальной гиперплоскости . Построены фундаментальные матрицы решений задачи Коши для таких систем и уравнений , изучены их свойства , приведены некоторые применения этих свойств .

КЛЮЧОВІ СЛОВА : параболічна система з виродженням , задача Коші , фундаментальна матриця розв'язків задачі Коші , фундаментальний розв'язок задачі Коші , інтеграл Пуассона .

ОВозн -

Підписано до друку 19.09.95
Формат 60 х 84/16
Папір друкарський
Друк офсетний. Ум. друк. арк.1,16
Обл.- вид.арк.1,17.
Зам. 031

Друкарня видавництва "Рута" Чернівецького держуніверситету.
274012, Чернівці, вул. Коцюбинського, 2.