

Монографія

**МЕТОДИ ТА МОДЕЛІ УПРАВЛІННЯ  
СКЛАДНИМИ СИСТЕМАМИ**

2021

Міністерство освіти і науки України

Західноукраїнський  
національний університет

# **МЕТОДИ ТА МОДЕЛІ УПРАВЛІННЯ СКЛАДНИМИ СИСТЕМАМИ**

Монографія

ТЕРНОПІЛЬ  
2021

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ЗАХІДНОУКРАЇНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

**МЕТОДИ ТА МОДЕЛІ УПРАВЛІННЯ  
СКЛАДНИМИ СИСТЕМАМИ**

**Монографія**

*За редакцією  
доктора економічних наук,  
професора Л. М. Буяк*

**Тернопіль  
«Університетська думка»  
2021**

*Рекомендовано до друку Вченою радою  
Західноукраїнського національного університету  
(протокол №1 від 31 серпня 2021 року)*

**Рецензенти:**

**Бабенко В.О.** – доктор економічних наук, професор, завідувач кафедри міжнародної електронної комерції та готельно-ресторанної справи Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна

**Кривень В.А.** – доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри математичних методів в інженерії Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя

**Лупенко С.А.** – доктор технічних наук, професор кафедри комп'ютерних систем та мереж Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя

**М-52 Методи та моделі управління складними системами:** колективна монографія / За редакцією д.е.н., проф. Л.М. Буяк // О.П. Адамів, О.С. Башуцька, Д.І. Боднар, Л.М. Буяк, О.Г. Возняк, І.В. Данилюк, Л.В. Дума, А.Я. Мушак, Р.М. Пасічник, К.М. Пришляк, Н.Г. Хома. — Тернопіль: ВПЦ «Університетська думка», 2021. – 471 с.

Монографія містить дослідження різних аспектів розвитку регіонального управління, які стосуються ресурсного забезпечення регіону, оцінки ефективності програм регіонального розвитку, зокрема розвитку його інтелектуального потенціалу, управління кваліфікованим трудовим населенням регіону, загальних проблем організації регіонального бізнесу та організації окремих виробничих процесів, автоматизації процесів підтримки наукових досліджень згаданої проблематики.

Призначена для студентів та аспірантів вищих навчальних закладів, а також дослідників проблем регіонального розвитку.

*Охороняється законом про авторське право.  
Жодна частина цього видання не може бути використана чи відтворена  
в будь-якому вигляді без дозволу автора чи видавництва*

## **ЗМІСТ**

**ПЕРЕДМОВА..... 5**

**Пришляк Катерина Мирославівна**

**ЦИФРОВА ТРАНСФОРМАЦІЯ У СФЕРІ ЗЕМЕЛЬНИХ ВІДНОСИН...9**

**Боднар Дмитро Ількович**

**ДРОБОВО-РАЦІОНАЛЬНА АПРОКСИМАЦІЯ ПОКАЗНИКІВ  
ЕФЕКТИВНОСТІ ПРОГРАМ РЕГІОНАЛЬНОГО РОЗВИТКУ..... 45**

**Дума Людмила Василівна**

**СИСТЕМА ПІДТРИМКИ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ В ПРОЦЕСАХ  
ОСВІТНЬОЇ ТА НАУКОВО-ІННОВАЦІЙНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ.....81**

**Мушак Андрій Ярославович**

**ТЕХНОЛОГІЯ КОМПОЗИЦІЙНО-СТРУКТУРНОГО МОДЕЛЮВАННЯ  
У СИСТЕМАХ ДИСТАНЦІЙНОГО НАВЧАННЯ.....117**

**Башуцька Оксана Степанівна**

**МОДЕЛІ ДИНАМІКИ ЧИСЕЛЬНОСТІ ЕКОНОМІЧНО ЗАЙНЯТОГО  
НАСЕЛЕННЯ.....158**

**Данилюк Ірина Вадимівна**  
**ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ В ПРОЦЕСІ УПРАВЛІННЯ**  
**ПІДПРИЄМСТВОМ..... 203**

**Хома Надія Григорівна**  
**ІНФОРМАЦІЙНА МОДЕЛЬ СІТКОВОГО ПЛАНУВАННЯ У**  
**ФОРМУВАННІ СТРАТЕГІЇ ПІДПРИЄМСТВА.....246**

**Буяк Леся Михайлівна**  
**МОДЕЛІ ПІДТРИМКИ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ В УПРАВЛІННІ**  
**МАЛИМ ПІДПРИЄМСТВОМ В КОНКУРЕНТНОМУ СЕРЕДОВИЩІ...288**

**Возняк Ольга Григорівна**  
**СИСТЕМИ ПІДТРИМКИ БІЗНЕС-РІШЕНЬ НА ОСНОВІ МОДЕЛЕЙ**  
**ОПТИМАЛЬНИХ ПЛАНІВ З ДИСКРЕТНИМИ ЗМІННИМИ.....324**

**Пасічник Роман Мирославович**  
**МОДЕЛІ СИСТЕМ ІЗ ВНУТРІШНІМИ ЛІМІТУЮЧИМИ**  
**ФАКТОРАМИ ТА МЕТОД ЇХ ІДЕНТИФІКАЦІЇ.....366**

**Адамів Олег Петрович**  
**СИСТЕМИ ВИДОБУВАННЯ ЗНАНЬ У БІЗНЕС АНАЛІТИЦІ.....417**

## ПЕРЕДМОВА

Відомі наступні характеристики складних систем: наявність великого числа взаємно пов'язаних і взаємодіючих між собою елементів; складність функцій, виконуваних системою, і напрямків на досягнення заданих цілей функціонування; можливість розбиття системи на підсистеми, цілі функціонування яких підпорядковані досягненню спільної мети системи; наявність управління, яке часто має ієрархічну структуру, розгалуженої інформаційної мережі і інтенсивних потоків інформації; наявність взаємодії з зовнішнім середовищем і функціонування в умовах випадкових факторів.

Складність в аспекті системності можна представити наступною формулою:

$$\text{Складність системи} = \text{Складність складу} + \text{Складність організації},$$

де складність складу описується наступним чином:

$$\text{Складність складу} = \text{Субстратна} + \text{Параметрична} + \text{Динамічна} + \text{Генетична}.$$

Субстратна складність складається із складності компонентів, підсистем і рівнів організації; параметрична складність включає складність субстратних властивостей, інтегральних властивостей і складність зв'язків і відношень; динамічна складність інтегрує в собі складність станів, стадій, фаз і перехідних процесів; генетична або еволюційна складність включає генетику станів, стадій фаз, рівнів розвитку.

Складність організації можна представити наступною формулою:

$$\text{Складність організації} = \text{Різноманіття зв'язків і відношень} + \text{Різноманіття законів},$$

де різноманіття зв'язків і відношень поєднує в собі рівні організації, підсистеми всередині рівнів, компонент, а різноманіття законів передбачає закони функціонування і розвитку.

В якості **основних властивостей** складних систем можна виділити наступні:

- 1) велика кількість взаємопов'язаних і взаємодіючих елементів;
- 2) складність виконуваної функції для досягнення мети функціонування;
- 3) ієрархічну структуру, можливість поділу системи на підсистеми;
- 4) наявність управління, інтенсивних потоків інформації і розгалуженої інформаційної мережі;
- 5) інтенсивна взаємодія з зовнішнім середовищем і функціонування в умовах впливу випадкових факторів.

Бувають системи, які однозначно оцінюються відповідно як об'єктивно і суб'єктивно прості і складні. Об'єктивна простота тут збігається з суб'єктивною простотою, а об'єктивна складність – із суб'єктивною складністю. До них відносяться: об'єктивно прості і суб'єктивно прості системи. Їх можна вважати однозначно простими; об'єктивно складні і суб'єктивно складні системи, які виступають як однозначно складні.

Але можуть бути системи, які отримують суперечливі оцінки. При спрощеному підході отримаємо два типи таких суперечливих систем: об'єктивно прості, але суб'єктивно складні системи. Для цих систем властиво те, що люди звикли до їх простоти. Але несподівано виникає нова, складніша гіпотеза, що їх пояснює, яка починає ставити під сумнів простоту системи; об'єктивно складні, але суб'єктивно прості системи. Тут ситуація характеризується спрощенням складної системи, яка може бути дуже небезпечною в реальному житті (значне число аварій техногенних систем обумовлено спрощеним, некомпетентним управлінням ними).

Найскладнішою системою виступає суспільство. До складних систем відносять також органічні системи, під якими розуміють не тільки біологічні системи, а й соціальні. Вершиною системогенезу виступають системи, що само розвиваються. Вони відрізняються здатністю вибудувувати стратегію і тактику поведінки, і орієнтовані на свій розвиток як на підвищення потенціалу системних можливостей.

Незважаючи на загальну поширеність системного підходу, досліджень, присвячених системному дослідженню проблем регіонального управління, явно недостатньо. Важливість такого підходу зростає в умовах розвитку децентралізації управління в Україні та делегування повноважень центральних органів влади місцевим. Зменшити нестачу аналітичних матеріалів вказаного виду і покликана дана монографія.

Її перший розділ присвячено загальному огляду проблем упровадження цифрових технологій у сферу регіональних земельних відносин. В наступному розділі розглянуто проблему аналітичного подання показників ефективності реалізації програм регіонального розвитку. Збалансований підхід у плануванні та реалізації програм регіонального розвитку неможливий без їх наукового аналізу. Питанням організації освітньої та наукової діяльності у регіональних вишах присвячено наступних два розділи монографії.

Освічене населення – основа розвитку економічного потенціалу регіону. Питання аналізу ефективності використання кваліфікаційного потенціалу населення регіону розглядаються у п'ятому розділі монографії. Економічний потенціал регіону реалізується першу чергу його економічними суб'єктами. В шостому розділі монографії розглядається загальний інструментарій організації інформаційних систем в управління бізнесом, а у сьомому – формування стратегії розвитку підприємств на основі методів мережевого планування. Питання управління ресурсами підприємства розглядаються у восьмому



розділі, а підходи до побудови систем підтримки прийняття рішень розглядаються у наступному дев'ятому розділі. Десятий розділ присвячений моделюванню перебігу біотехнологічних процесів а також інших ключових процесів у сфері виробництва та управління. У завершальному одинадцятому розділі розглядаються підходи до використання методів видобування знань у бізнес аналітиці.

Дана монографія узагальнює досвід моделювання процесів у складних системах викладачів кафедри економічної кібернетики та інформатики Західноукраїнського національного університету і буде корисною студентам та аспірантам спеціальностей «Системний аналіз» та «Економічна кібернетика», а також усім дослідникам, які цікавляться системними проблемами регіонального управління.

**Пришляк Катерина Мирославівна,**

**викладач кафедри економічної кібернетики та інформатики**

## **ЦИФРОВА ТРАНСФОРМАЦІЯ У СФЕРІ ЗЕМЕЛЬНИХ ВІДНОСИН**

Сьогодні використання цифрових технологій призводить до трансформації відносин між учасниками господарської діяльності в таких галузях, як енергетика, будівництво, банківська справа, транспорт, роздрібна торгівля, освіта, охорона здоров'я, ЗМІ, безпека тощо. Повсякчасне ускладнення суспільних інститутів розвитку і відносин, основою яких усе частіше виступають сучасні цифрові технології, що викликають експоненціальне зростання потоків даних, висуває на перший план питання про формування та становлення цифрової економіки в Україні. Отже, відносини в умовах цифровізації економіки потребують особливого регулювання, що має стимулювати суспільно корисне застосування таких технологій та попередження зловживання ними.

Цифровізація сфери господарювання як упровадження в ній цифрових технологій зумовила формування цифрової економіки як такої [1].

Основні риси цифрової економіки:

- 1) заснована на домінуючому застосуванні цифрових технологій;
- 2) її результатом є електронні товари та послуги, вироблені за допомогою електронного бізнесу, торгівля якими ведеться за допомогою електронних засобів;
- 3) передбачає створення мережі суб'єктів господарювання шляхом створення та обміну цифровими активами, які протікають поза реальним світом та не мають фізичного носія (тобто стають віртуальними активами) на тлі розвитку Інтернету;
- 4) є новою соціокультурною реальністю сучасного світу, яка формується в межах «грошової цивілізації» [2, с. 78-79].

З огляду на класичний склад правовідносин (суб'єкти, об'єкти, зміст правовідносин), зупинимось на цих складниках, насамперед щодо новацій у суб'єктному та об'єктному складі. Окрім традиційних учасників господарських

відносин (суб'єкти господарювання зі статусом юридичної особи чи фізичної особи – підприємця, суб'єкти організаційно-господарських повноважень зі статусом юридичної особи або через володіння відповідним обсягом корпоративних прав, споживачі та інші учасники господарських відносин, які беруть у них участь для задоволення своїх господарських потреб: навчальні заклади, лікарні, релігійні та благодійні організації тощо), з'являються нові, серед яких – уповноважені у сфері цифровізації органи держави (Мінцифри [3] зокрема), а також суб'єкти господарювання, які працюють у віртуальному середовищі з ознаками фізичної чи юридичної особи [4, с. 57-58]. Насамперед це стосується так званих віртуальних підприємств як групи осіб зі змінним складом учасників (останні можуть бути як суб'єктами господарювання, так і пересічними громадянами без статусу суб'єкта підприємництва), що не має організаційної єдності як юридична особа. Зазвичай така група осіб використовує один (одні) електронний ресурс (ресурси) – Інтернет-магазин або торговельну Інтернет-платформу для здійснення електронної комерції, на учасників якої законодавець покладає низку обов'язків та відповідальність у разі їх порушення під час виконання обов'язків продавця [5; 6].

Загалом мета розвитку цифрових інфраструктур полягає в тому, щоб усі громадяни України без обмежень та труднощів технічного, організаційного та фінансового характеру могли скористатися цифровими можливостями не(залежно від свого місцезнаходження та не перебували в сегменті «цифрового розриву». Водночас цифровий розрив (цифрова нерівність) – нерівність у доступі до можливостей в економічній, соціальній, культурній, освітній галузях, які існують або поглиблюються в результаті неповного, нерівномірного або недостатнього доступу до комп'ютерних, телекомунікаційних та цифрових технологій. У контексті зазначеного вище, фахівці вважають, що особлива увага щодо широкосмугового доступу до інтернету повинна приділятися сільським територіям, підключення яких надасть нових переваг, зокрема здійснення електронної комерції виробленою сільгосппродукцією та дасть змогу "перенести" переваги міста у село. Інтернет

має створити для сільських громад нові можливості соціально-економічного розвитку. Реалізація комплексної політики цифровізації, формування попиту на послуги широкопasmового доступу до Інтернету, спільні зусилля держави та бізнесу у напрямі розвитку інфраструктури підключення до широкопasmового доступу до Інтернету доз волять подолати цифровий розрив та нададуть додатковий поштовх для розвитку і благополуччя сільських мешканців [7].

Цифровізація сіл потенційно повинна стимулювати розвиток сільського господарства, створити робочі місця, а також мінімізувати відтік працівників до міст, без яких в умовах відкриття ринку землі буде неможливою успішна робота агросектору. Таким чином, цифровізація реального сектору економіки є базовою складовою цифрової економіки та визначальним чинником зростання економіки загалом, у тому числі безпосередньо цифрової індустрії, як виробника технологій. Цифрові технології в багатьох секторах є основою виробничих стратегій, а їх трансформаційний потенціал має змінити традиційні моделі ведення бізнесу, виробничі ланцюги і процеси, спричинити появу нових продуктів та послуг, сучасних платформ та різних інновацій, зокрема у агросекторі.

Потрібно відзначити, що найвища частка витрат, спрямованих на інноваційний розвиток агроструктур, упродовж 2011-2018 рр. спрямовувалась на придбання машин, обладнання та програмного забезпечення (останній факт має особливе значення для успішної цифровізації галузі) (табл. 1).

З метою масштабного здійснення цифрових трансформацій українським підприємствам, малому та середньому бізнесу важливо створити умови та відповідні стимули – від інформаційно-маркетингових до фінансових, що актуально для дрібних аграріїв. Цифрові технології в Україні повинні бути доступними як з точки зору організаційно-технічного доступу до відповідних цифрових інфраструктур, так і з фінансово-економічного погляду, тобто через створення умов та стимулів, які будуть заохочувати бізнес до цифровізації. Результатом такої діяльності стане модернізація економіки, її оздоровлення та конкурентоспроможність. У цьому контексті згадана у Концепції розвитку

цифрової економіки та суспільства України на 2018-2020 індустрія 4.0 – оновлена концепція "розумного виробництва", що ототожнюється з "четвертою промисловою революцією" та появою кіберфізичних систем. Індустрія 4.0 – наступний етап цифровізації виробництв та промисловості, на якому головну роль відіграють такі технології та концепти, як інтернет речей, «великі дані» (big data), «предиктивна аналітика», хмарні та туманні обчислення, «машинне навчання», машинна взаємодія, штучний інтелект, робототехніка, 3D(друк, доповнена реальність [7].

Таблиця 1

Структура витрат за напрямками інноваційної діяльності в агрокомплексі України у 2011-2018 рр., %

Напрями інноваційної діяльності	Роки							
	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
Внутрішні науково-дослідні роботи	19,46	14,60	11,78	17,18	10,78	11,40	8,30	7,60
Придбання науково-дослідних розробок	0,09	0,04	0,00	0,38	0,05	0,03	0,01	0,02
Придбання машин, обладнання та програмне забезпечення	64,39	68,31	68,13	70,17	81,55	85,30	90,10	90,60
Придбання знань	0,02	0,03	0,02	0,00	0,00	0,01	0,07	0,40
Інші витрати	16,04	17,02	20,07	12,27	7,62	3,26	1,52	1,38
Всього	100	100	100	100	100	100	100	100

*Джерело: сформовано на основі даних Державної служби статистики України*

Інтеграція цифрових технологій у процеси виробництва є пріоритетом державної політики. Державна політика стимулювання розвитку Індустрії 4.0 має три напрями:

- 1) створення інфраструктури Індустрії 4.0 – індустріальних парків, галузевих центрів технологій тощо;
- 2) доступ до капіталу для створення нових інноваційних виробництв;
- 3) розвиток цифрових навичок для підготовки персоналу, здатного працювати з технологіями Індустрії 4.0 [7].

Іншими важливими завданнями є офіційне визнання міжнародних стандартів, які становлять загально визнану основу Індустрії 4.0 (близько 100 стандартів), державна підтримка діяльності технічних комітетів, які беруть участь у роботі над стандартами, що стосуються Індустрії 4.0, створення механізму заохочення подання заявок на винаходи в Україні, державної підтримки патентування вітчизняних об'єктів інтелектуальної власності; можливість захисту патентних прав через звернення до спеціалізованих судів; створення механізмів трансферу технологій, що може бути актуальним для розвитку агросектору в Україні [7].

З метою розвитку сільського господарства важливим є впровадження цифрового землеробства – принципово нової стратегії менеджменту, що базується на застосуванні цифрових технологій, та новий етап розвитку агросфери, пов'язаний з використанням геоінформаційних систем, глобального позиціонування, бортових комп'ютерів та смарт-устаткування, а також управлінських та виконавських процесів, здатних диференціювати способи оброблення, внесення добрив, хімічних меліорантів і засобів захисту рослин. Цифровізація агросектору позитивно вплине і на цифровізацію сільської інфраструктури, зокрема у частині підключення сіл до високошвидкісного інтернету, про що зазначалось вище. Втім незадовільний стан розвитку економіки сільських територій України призводить до міграції в міста, високого рівня безробіття та низьких доходів, руйнування соціальної та інженерної інфраструктури тощо. Цифровізація землеробства та сільського господарства є, зокрема, інструментом масштабної програми цифровізації сіл, підключення їх до цифрових інфраструктур, подолання цифрового розриву та соціально-економічного відродження сільських територій [7]. Станом на сьогодні особливе значення має доступ до інформаційно(комунікаційних технологій й інших технологічних можливостей у селі, аналогічний тому, що є у містах [8;9]. Тому зрозуміло, що агровиробники зацікавлені у застосуванні інформаційних технологій у прийнятті рішень в усіх сферах управління власним бізнесом, зокрема аби підвищити якість та умови життя у сільській

місцевості, зберігши в такий спосіб кадри для роботи після повноцінного запуску у 2021 р. земельного ринку.

Зараз аграрна політика України переживає гострий період – прийнято Закон України «Про внесення змін до деяких законодавчих актів України щодо умов обігу земель сільськогосподарського призначення» від 31 березня 2020 р. з метою остаточно відкрити ринок земель сільськогосподарського призначення в Україні. Майже два десятиліття тому, коли приймався Земельний кодекс України, було встановлено мораторій – заборону прямої купівлі-продажу земельних ділянок сільськогосподарського призначення. Проте діє Закон України «Про оренду землі», за допомогою норм якого підприємці – аграрії та великі агрохолдинги пристосувалися до таких законодавчих обмежень довгостроковою орендою земельних ділянок у власників – громадян України. Коли 2019 р. до парламенту було подано законопроекти, якими передбачалося відкрити ринок землі, суспільство сприйняло ці пропозиції неоднозначно, тому що з'явилося багато критики та політичних спекуляцій, особливо щодо заниженої оцінки землі чорноземів та недостатнього матеріального забезпечення селян – фермерів, які не зможуть купити достатньо землі або через скрутне фінансове становище будуть вимушені продавати свої земельні ділянки. Також суспільство висловило хвилювання щодо стану земель сільськогосподарського призначення в Україні та потенційного впливу продажу землі безвідповідальним власникам, які через жорстку експлуатацію цінних ґрунтів можуть значно погіршити якість землі. Застосування технологій цифрового землеробства перед фактичним відкриттям ринку земель сільськогосподарського призначення в Україні здатне дозволити зняти більшість спекулятивних питань. Так, проведення комплексних аналізів ґрунтів земельних ділянок, складення цифрових карт із внесенням даних про якісний склад земель у Єдиний державний реєстр із використанням технології blockchain, аналіз даних цього реєстру за допомогою Big Data Analytics припинили б будь-які спекуляції, корупцію при визначенні меж земельних ділянок, дозволили б об'єктивно оцінити стан ґрунтів та з урахуванням

географічного розташування – ринкову вартість кожної земельної ділянки. При цьому важливо таку інформацію із земельного реєстру зробити відкритою, що дозволило б прозоро і справедливо відкрити ринок землі та провести усі торги з онлайн супроводом і громадським контролем (а можливо і з використанням смарт контрактів), коли вартість кожної земельної ділянки на торгах починалася б із ринкової вартості кожної ділянки. Дані з цифрових карт або інших показників, які можуть надати технології цифрового землеробства, можуть допомагати займатися аграрним бізнесом більш точно та ефективно, використовуючи максимально корисно властивості певних ґрунтів. Більше того, у перспективі дані цифрових карт земельних ділянок повинні оновлюватися, наприклад, кожні 5 років, щоб оцінювати за допомогою Big Data analytics [10] належним чином як вплив природних факторів, у тому числі глобального потепління, так і антропогенних факторів. Тоді безвідповідальне ставлення власників земельних ділянок буде помітно всім і об'єктивно оцінка ринкової вартості землі буде знижуватися, що не вигідно самому власнику, а значить, стримуватиме фермерів від шкідливого впливу на землю та сприятиме встановленню здорових ринкових економічних відносин.

Цифрова трансформація агропромислового виробництва розглядається як один із основних шляхів диверсифікації національної економіки, її переорієнтації з сировинної моделі експорту на постачання продуктів із високою доданою вартістю. Зниження витрат на виробництво аграрної продукції, підвищення її якості та конкурентоспроможності на основі ефективного використання ресурсів і науково-обґрунтованих підходів – це головне завдання цифровізації сільського господарства [11, с. 127]. Нині в Україні на агроринку популярні такі рішення, як: впровадження систем точного землеробства, аерозйомка з метою контролю якості посівів, ведення історії полів для вибору оптимальної культури, лабораторні дослідження ґрунту для отримання інформації про біохімічний склад. Ці технології дають можливість збільшити врожайність та знизити собівартість продукції завдяки скороченню витрат на паливо, насіння й добрива [12, с. 311]. Однак це є лише однією із



складових комплексної цифровізації, окрім цього необхідно розглянути і юридичну її складову. Так на сьогодні в Україні діє Концепція розвитку цифрової економіки та суспільства 2018-2020, вона, зокрема, передбачає розвиток, так званих, цифрових інфраструктур. Головна мета їх розвитку полягає в тому, щоб усі громадяни України без обмежень та труднощів технічного, організаційного та фінансового характеру (зокрема соціально незахищені верстви населення) могли скористатися цифровими можливостями незалежно від свого місцезнаходження чи проживання та не перебували в сегменті «цифрового розриву» [13].

Прикладами цифровізації здійснення інфраструктурного обслуговування є започаткування електронного фермерського реєстру, пілотний проект якого створювався на підставі Указу Президента України № 837/2019 від 08.11.2019 [14] метою якого є запровадження державної підтримки щодо підвищення фінансової спроможності фермерів та сільськогосподарських виробників. В наступному розширено коло учасників такого реєстру до всіх виробників сільськогосподарської продукції [15]. В подальшому цей реєстр переформатовано в електронний фермерський реєстр «Державний аграрний реєстр», метою якого є ідентифікація суб'єктів ринку та налагодження підтримки [15]. Наступним кроком є законодавче врегулювання функціонування Державного аграрного реєстру, для чого розроблено та внесено на розгляд Верховної Ради України законопроект № 3295 [16]. Законопроект спрямований на обов'язкову взаємодію усіх електронних реєстрів. Також, законопроект передбачає відповідні зміни в Законі України «Про державну підтримку сільського господарства України» [17]. Хоча, на нашу думку, ведення такого реєстру не повно сприймається як будь-яка допомога сільськогосподарським виробникам. Такі дії повинні кваліфікуватися як звичайний засіб господарсько-правового регулювання певних відносин фермера з суб'єктами та учасниками аграрного ринку.

Окрім цифровізації в Україні проводиться також і політика децентралізації, яка передбачає деконцентрацію влади та ресурсів від центру до

окремих регіонів. При цьому необхідно перерозподіляти та делегувати функції користувачів відповідних реєстрів до сільських об'єднаних територіальних громад, які зможуть більше забезпечувати господарську діяльність на своїй території на необхідність чого акцентується увага науковцями [18]. Можливо саме це стане ключем до вирішення проблем цифровізації агросектору, оскільки управлінню на місцях простіше буде проаналізувати специфіку виробництва у своєму регіоні і відповідно розподілити бюджетні кошти так, щоб певна їх частина йшла на модернізацію певної галузі сільського господарства, яка є найбільш розвиненою у регіоні.

Вже затверджено та розроблено план заходів з її реалізації, які Міністерство економіки та розвитку розробило разом з провідними експертами ІТ-сфери. Розроблена Концепція передбачає цифрову трансформацію економіки країни, перехід від сировинного типу до високотехнологічного виробництва та основі інноваційних ІТ-технологій та комунікацій.

До концептуальних основ впровадження цифрової економіки відносяться цілі розвитку цифрової економіки, принципи цифровізації, компоненти формування цифрової економіки [19].

Цілі розвитку цифрової економіки включають:

- економічне зростання залучення інвестицій;
- зростання ефективності та конкурентоспроможності секторів економіки;
- розвиток цифрових індустрій та цифрового підприємництва;
- реалізація людського ресурсу;
- доступність для громадян переваг та можливостей цифрового світу;
- створення високотехнологічних виробництв;
- технологічна та цифрова модернізація галузей.

Принципи цифровізації:

- вільний доступ;
- комплексність державного управління;
- безпека та довіра;
- стандартизація;

- інтеграція та співробітництво;
- постійне ефективне зростання;
- загальне системне зростання;
- створення переваг.

Компоненти формування цифрової економіки:

- нормативно-правова база, яка б сприяла конкуренції і виходу на ринок підприємствам, дозволяла фірмам повною мірою використовувати цифрові технології для конкуренції та інновацій;

- навички, необхідні працівникам, бізнесменам, державним службовцям, для використання можливостей цифрових технологій;

- ефективні і підзвітні інститути, що використовують інтернет для розширення прав і можливостей громадян.

Цифровізація реального сектору економіки є головною складовою частиною цифрової економіки та визначальним чинником зростання економіки в цілому, зокрема і самої цифрової індустрії, як виробника технологій. Цифрові технології в багатьох секторах є основою продуктових та виробничих стратегій. Їх перетворювальна сила змінює традиційні моделі бізнесу, виробничі ланцюги та процеси, зумовлює появу нових продуктів та послуг, платформ та інновацій. Індустрія 4.0 – оновлена концепція «розумного виробництва», що ототожнюється з «четвертою промисловою революцією» та появою кіберфізичних систем. Індустрія 4.0 – наступний етап цифровізації виробництва та промисловості, на якому головну роль відіграють такі технології та концепти, як Internet of Things – IoT (Інтернет речей), Big data («великі дані» – набори інформації надвеликих об’ємів), Predictive Analytics – предиктивна аналітика (аналіз даних для побудови прогнозів на майбутнє), хмарні та туманні обчислення, Machine Learning (машинне навчання), машинна взаємодія, Artificial intelligence – AI (штучний інтелект), робототехніка, 3D-друк, Virtual reality, Augmented Reality, Mixed reality – VR/AR/ MR (віртуальна, доповнена та змішана реальність). Цифровими технологіями, що є інноваційними трендами сучасного соціально-економічного середовища можна назвати:

Блокчейн, BioTech, NanoTech, RetailTech, FinTech, LegalTech, InsurTech, GovTech, коботи, , Big data, Quantum Tech (квантові технології, квантовий зв'язок тощо), Biometric Tech, Identification Tech тощо. Важливими для розвитку цифрової економіки є м'які цифрові інфраструктури, які також не повинні залишатися поза увагою, зокрема інфраструктура ідентифікації та довіри, відкритих даних, інтероперабельності, онлайн-взаємодії суб'єктів бізнесу, життєзабезпечення (медицина, освіта, громадська безпека, транспорт тощо), геоінформаційна та промислові цифрові інфраструктури. Особлива увага щодо широкосмугового доступу до Інтернету повинна приділятися сільським територіям, дозволять подолати цифровий розрив та нададуть додатковий поштовх для розвитку і благополуччя сільських мешканців. Цифровізація сіл також підтримує розвиток сільського господарства, створить робочі місця, зменшить міграцію сільських мешканців до міст [19].

Перехід аграрних підприємств до електронного сільського господарства може забезпечити використання сучасних цифрових технологій, таких як: комп'ютери, сервери, веб-сайти, що дозволяють передачу та отримання інформації щодо аграрної сфери та ринків сільськогосподарської продукції, сировини тощо; різноманітні мобільні пристрої, які допомагають швидко знаходити інформацію, містять поради, доступ до банкінгу, інформацію по реалізації тощо; супутники дозволяють отримувати оперативні дані погоди, глобальне позиціонування GPS, дистанційне зондування; телефони та зв'язок – це інтерактивна система голосового реагування; телекомунікації дозволяють провадити передачу та обмін досвідом, консультативні послуги, комунікації, створювати спільноти та розвивати кооперацію; сенсорні мережі Телефони та зв'язок (інтерактивна система голосового реагування) Комп'ютери, сервери, веб-сайти (передача та отримання інформації щодо аграрно сфери та ринків) Телекомунікації (передача та обмін досвідом, консультативні послуги, комунікації, створення спільнот та кооперація) Супутники (оперативні дані погоди, глобальне позиціонування GPS, дистанційне зондування) Мобільні пристрої (поради, мережа, банкінг, реалізація) Інтернет та широкосмуговий

доступ (обмін знаннями, електронна торгівля, соціальні медіа та мережі, електронна спільнота, банкінг, торгівля, торгові платформи ) Сенсорні мережі (інформація в реальному часі, краща кількість та якість даних, вища якість прийняття рішень) Хмарні технології зберігання даних та аналітика (точне землеробство, дієві знання) Програмне забезпечення (операційні системи, мережеві протоколи LoRaWan тощо, пошукові системи, географічні інформаційні системи GIS) допомагають отримувати інформацію в реальному часі, мають кращу кількість та якість даних, відповідно в рази зростає якість прийняття рішень; хмарні технології зберігання даних та аналітика дають можливість оперувати системами точного землеробства, знаходити дієві знання; Інтернет та широкопasmовий доступ – це обмін знаннями, електронна торгівля, соціальні медіа та мережі, електронна спільнота, банкінг, торгівля, торгові платформи. (напрями).

Згідно системного підходу підприємства аграрного сектору економіки, як відкриті до зовнішнього середовища, мають певні особливості [20, 21]: – відкритий характер функціонування, суттєвий вплив здійснюють суб'єкти зовнішнього середовища: постачальники, трейдери, споживачі, замовники, конкуренти, фінансово-кредитні установи, професійні об'єднання, нормативно-правова база, економічна політика в аграрній сфері і т.д.; – динамізм, вимагає від аграріїв постійних змін у сфері виробництва продукції, розвитку системи управління, застосування сучасних цифрових технологій не лише на полі, але і в управлінні, при цьому залишаючись системою; – ієрархічність, окреслює здатність послідовного розчленування системи на складові елементи (підсистеми, компоненти і т.д.); – саморегулювання, характеризує швидкість адаптації до зміни умов зовнішнього середовища під впливом глобалізаційних, технологічних та економічних умов функціонування; – стійкість, показує можливість системи повертатися в стан рівноваги після руйнівного впливу зовнішніх факторів; – самоорганізація та адаптивність, дозволяють виходити підприємству на якісно новий рівень розвитку за рахунок адаптації до швидко змінюваних умов зовнішнього середовища корегуючи свою внутрішню

структуру у відповідь на вимоги та ситуацію на ринку. Фактори зовнішнього середовища сільськогосподарських підприємств мають визначений зв'язок між собою, тому зміна одного фактора діє на інші складові середовища функціонування. Водночас вони впливають на переважну більшість процесів, які відбуваються на підприємстві, зокрема – на ефективність роботи системи управління. Застосування системного підходу при дослідженні принципів цифровізації системи управління в сільськогосподарських підприємствах обумовлене необхідністю розгляду окресленої проблеми якомога в цілісній формі, оскільки аграрне виробництво спирається на дію не лише загальних економічних законів, але і біологічних, природних та організаційних. Цифрова революція накладає значний відбиток на формування і використання програмного та інтелектуального забезпечення управлінської діяльності в підприємствах аграрного сектора економіки.

До ключових чинників переходу виробників аграрної продукції на «цифрове» землеробство належать такі:

1) Ресурсні та економічні чинники. Згідно зі зведеними даними точне землеробство зменшує потребу в добривах та засобах захисту рослин на 30-50%. У сучасних умовах, коли за рівнем застосування агрохімікатів Україна відкинута на 30-40 років, впровадження точного землеробства стане важливим заходом інтенсифікації землеробства без значних додаткових витрат (тільки завдяки перерозподілу та більш точному внесенню добрив).

2) Екологічні чинники. Зменшення рівня хімізації землеробства за одночасного підвищення ефективності господарювання означає більш повне використання засобів хімізації та обмеження їхньої міграції за межі верхнього шару ґрунту. Це відіб'ється на зменшенні забруднення ґрунтів, літо-, атмо-, гідро- та біосфери загалом.

3) Охороно-оздоровчі чинники. Продукція стає чистішою від хімікатів, що впливає на стан здоров'я споживачів, викликає так званий ефект природнього оздоровлення (їжа, яка має лікувати, а не тихо «вбивати»).

4) Соціальні та суспільні чинники. Впровадження «цифрових» технологій сприятиме підвищенню привабливості праці в агросфері, поступово перетворить агронома на сучасного менеджера, підвищить рівень економічної культури й екологічної свідомості в сільській місцевості.

Цифровізація дає змогу поліпшити співпрацю між ланцюгами виробництва сільськогосподарських продуктів. Упровадження нових гравців у ланцюжок вартості сприяє створенню нових моделей ведення сільського господарства. Інвестиції в технологію зростають за підтримки крупних сільськогосподарських підприємств, агрохолдингів, великих транснаціональних компаній або державних спонсорів. Нові технології приносять зміни у практику ведення сільського господарства. Очікується, що цифрове землеробство змінить традиційну мережу зацікавлених сторін [22]. Окрім традиційних гравців, таких як виробники, постачальники, дистриб'ютори, трейдери, роздрібні торговці та споживачі, спостерігається, що нові гравці (стартапи) входять у мережу й упроваджують цифрові технології та/або досвід для аналізу даних, отриманих у сільському господарстві, що в перспективі змінить ланцюг поставок. Ці нові методи ведення сільського господарства можуть охоплювати весь виробничий процес та інструменти – від обладнання (техніки), наприклад автономного трактора чи дронів, аж до моніторингу посівів та врожаю за допомогою датчиків (сенсорів). Точне землеробство революціонує сільськогосподарську галузь із сантиметровою точністю на полях та здатністю керувати насінням, добривами, водою, культурами та точково обприскувати хворі рослини, забезпечуючи постійний контроль та підтримку прийняття управлінських рішень. У сільському господарстві ці нові технології можуть та модернізують агросектор, сприятимуть інноваціям в агробізнесі та створюватимуть нові можливості для товаровиробників. Цифрові технології можуть бути корисними на всіх рівнях ланцюжка вартості. Проте нові технології також приносять нові проблеми. Впровадження інновацій завжди руйнує, і поряд із численними перевагами ланцюжок вартості агропродовольчої

продукції також стикається з деякими бар'єрами. Виділимо деякі основні проблеми:

- багато нових технологій використовуються або починають застосовуватися в сільському господарстві, але рівень упровадження в Україні все ще дуже низький порівняно з іншими регіонами світу, такими як США, Європа;

- первинні вимоги до забезпечення більшості нових технологій, ширококутвого покриття та стабільного підключення до Інтернету не розподіляються рівномірно в межах нашої держави, особливо у віддалених сільських районах;

- малі та середні сільськогосподарські підприємства домагаються економічності та надійності нових технологій.

Опір змінам та впровадженню нових технологій у сільському господарстві може бути наслідком розриву знань для потреб сільського господарства з боку нових постачальників технологій. Незалежно від віку чи секторів аграрії виглядають однаково чутливими до технологій та їх упровадження. Їхня головна мета – отримати вигоду та зменшити витрати ресурсів, не порушуючи спосіб роботи та негативно впливаючи на їхні пріоритети. У ланцюжку цифровізації сільського господарства та продовольчої вартості необхідно враховувати ці проблеми. Трансформацію слід здійснювати обережно, щоб уникнути збільшення «цифрового розриву» між окремими економіками та секторами, а також між тими, хто має різні можливості для впровадження нових технологій [23].

У країнах, що розвиваються, у сільській місцевості слабка технологічна інфраструктура, висока вартість технологій, низький рівень розвитку. Електронна грамотність, цифрові навички, слабка регуляторна база та обмежений доступ до послуг означають, що окреслені сфери загрожують залишитися у процесі цифровізації надовго. Тим не менше країни, що розвиваються, можуть також мати перевагу в тому, що вони зможуть «перестрибнути» старі технології та моделі на користь революції цифрового



сільського господарства. Цей новий сценарій потребуватиме радикального переосмислення політиків, міжнародних організацій, аграрних бізнес-лідерів та відповідальних осіб.

У світовому масштабі процеси цифровізації постійно обговорюються на Всесвітньому економічному форумі (WEF), який є одним з основних майданчиків та епіцентрів світової ділової активності, саме на ньому у 2015 році було оголошено про запуск спеціальної довгострокової програми Digital Transformation Initiative (DTI) – ініціатива по цифровим перетворенням. Наведена програма, пропонує спільноті до ознайомлення унікальну інформацію про вплив цифрових технологій на бізнес і суспільство протягом наступного десятиліття. Дослідження DTI підтримують співпрацю між державним і приватним секторами, спрямоване на забезпечення того, щоб цифровізація відкрила нові рівні процвітання як для окремих секторів економіки, так і для суспільства в цілому. За задумом її творців, програма повинна стати «фокальною точкою» (focal point) для виявлення нових можливостей і напрямків подальшої цифровізації економіки та суспільства [24].

Опис ключових трендів цифровізації підприємницької діяльності в сільському господарстві дозволить виділити окремі цифрові складові впливу сучасних інформаційно-комунікаційних та цифрових технологій на функціонування аграрних суб'єктів господарювання. Виділимо основні технологічні тренди цифровізації в сільськогосподарських підприємствах:

- масове впровадження інтелектуальних сенсорів і датчиків в обладнанні та у виробництві;
- перехід до хмарних технологій;
- наскрізна автоматизація та інтеграція не лише виробничих, але й управлінських процесів;
- перехід на обов'язкове оцифрування технічної документації;
- цифрове проектування та моделювання технологічних процесів; – розвиток технологій аграрної аналітики;
- практично 100% утилізація та переробка;

– Інтернет речей (IoT).

Цифровізація технологічних, економічних та управлінських процесів на кожному окремому сільськогосподарському підприємстві поступово впливає на загальний розвиток цифрових активів сільського господарства нашої держави. Найявні цифрові активи сільськогосподарських підприємств дозволяють миттєво реагувати на нові виклики аграрного ринку та постійно розвивати як існуючі технології, так і впроваджувати інноваційні, що значно посилює позиції вітчизняних товаровиробників у відкритій конкурентній боротьбі на ринку агропромислової продукції. Вітчизняне сільське господарство поступово перетворюється з традиційної у високотехнологічну галузь, яка здатна створювати нові ринки для інноваційних рішень і розробок, що не існували раніше для вирішення великої кількості практичних завдань. На зміну існуючим приходять «розумні» агротехнології, в основі яких лежить машинне навчання, цифрові платформи, 3-D друк, робототехніка, блокчейн, біосенсори та BigData. У XXI столітті інтелектуальні цифрові рішення повинні допомогти сільськогосподарським підприємствам впоратися з проблемами підвищення продуктивності та ефективності галузі на шляху до сталого розвитку.

Головним завданням сільськогосподарських підприємств є виробництво більшої кількості продукції з якомога меншими ресурсами, саме тому потрібен суттєвий прорив у застосуванні новітніх аграрних технологій. Працювати по-старому (ігноруючи процеси цифровізації) – значить програти конкурентну боротьбу.

Цифровізація аграрного підприємництва дозволить: знизити ризики, адаптуватися до зміни клімату, підвищити врожайність сільськогосподарських культур і продуктивність тварин, своєчасно планувати польові роботи і т.д. Зниження витрат на виробництво продукції, підвищення її якості та конкурентоспроможності на основі ефективного використання ресурсів і науково-обґрунтованих підходів – це головне завдання цифровізації сільського господарства. Забезпечення необхідною інформацією сільськогосподарських товаровиробників дозволить знизити трансакційні витрати на купівлю і продаж

товарів, спростити ланцюжок поставок продукції від поля до споживача, скоротити дефіцит кваліфікованої робочої сили і т. д.

Розвиток аграрного сектора в Україні стримується обмеженнями, які здебільшого характеризуються суттєвими недоліками інституційного забезпечення, зокрема, зменшення кількості підприємств різних організаційно-правових форм господарювання, змінами у структурі власності земельного фонду, стану динаміки перерозподілу сільськогосподарських угідь серед існуючих підприємств у напрямку інтегрованих компаній-агрохолдингів, зниження рівня розораності земель сільськогосподарського призначення тощо. Притаманні й інші гострі диспропорції щодо розвитку вітчизняного аграрного сектору економіки у територіальному та галузевому аспектах. Так, у структурі виробництва продукції рослинництва значно переважають зернові, зернобобові і технічні культури, овочі, картопля та баштанні продовольчі культури. Хоча й за останні роки спостерігається зростання урожайності основних сільськогосподарських культур, однак міжнародні порівняння такого показника підтверджують, що в Україні рівень урожайності є одним з найнижчих. Зазначено, що орієнтація суб'єктів аграрного сектору на вирощування рентабельних зернових та олійних культур не сприяє забезпеченню збалансованості постачання на ринок різноманітної продукції харчування [25].

Цифровізація дозволяє невеликим компаніям та проектним командам можливість створювати нові продукти та швидко виводити їх на ринок, поряд з вже присутніми там великими компаніями.

Трансформації у промисловості відбуваються в поєднанні з концепцією «Індустрія 4.0», з'являються кібервиробництво, кіберсистеми, кібермашин тощо. Така основа дозволяє трансформувати бізнес, створювати абсолютно нові форми підприємництва та на цій основі модернізувати все суспільство, перейти до цифрової його форми. Перехід до цифрової економіки повинен забезпечувати кожному громадянину рівний доступ до послуг, інформації та знань, що надаються на основі інформаційно-комунікаційних та цифрових технологій; передбачати підвищення якості надання послуг з охорони здоров'я

та отримання освіти, створення нових робочих місць, розвитку підприємництва, сільського господарства, транспорту, захисту навколишнього природного середовища, підвищення культури, сприяння подоланню бідності, гарантування громадської безпеки тощо; передбачати досягнення цифрової трансформації галузей економіки, сфер діяльності, набуття ними нових конкурентних якостей та властивостей; повинна сприяти розвитку інформаційного суспільства на основі інтеграції та співробітництва із забезпеченням стандартизації, безпеки та довіри, а також на основі комплексності державного управління.

Реальне і системно-організоване впровадження ринку землі неможливе без відповідної інфраструктури, яка б забезпечувала його становлення, функціонування та розвиток. Інфраструктура має забезпечувати зв'язок між елементами самої системи, її об'єктами та суб'єктами. У цьому полягає її основна і первинна функція, яка наразі має пасивний характер. Водночас, інфраструктура одночасно виконує регулюючу функцію, впорядковуючи взаємодії елементів самої системи. Однією із причин повільної трансформації земельних відносин до ринкового типу є недосконалість інфраструктурного забезпечення операцій зі сільськогосподарськими землями.

Уявлення про ринок землі, взаємозв'язок і функціональні особливості установ інфраструктури ринку землі може бути відображено наступною схемою (рис. 1.) [26]. Слід відзначити, що інфраструктура повинна бути адаптована, відповідно до тих сегментів ринку землі, які активно розвиваються. Оскільки будь-який ринок – специфічна група соціально-економічних відносин між людьми з приводу обміну товарами, можна запропонувати функціональну структуру інфраструктурних галузей, обслуговуючих товарний обіг землі. При цьому, у складі інфраструктури ринку землі можна виділити чотири підсистеми, кожна із яких містить відповідні елементи (табл. 2).

Одним із найважливіших елементів інфраструктури ринку земельних ресурсів є торгові дома та спеціалізовані підприємства, які здійснюють трансакції із земельними ділянками. Проведення земельних торгів на базі спеціалізованих організацій, що відповідають поставленим до них вимогам і

пройшли відповідні тендери, гарантує високу ефективність цих торгів та прозорий механізм ринкових операцій зі сільськогосподарськими землями.



Рис. 1. Схема взаємозв'язку і взаємоконтролю державних органів інфраструктури ринку землі  
*Джерело: сформовано автором на основі [26]*

Вагоме місце в інфраструктурі ринку землі займає її фінансова складова, яка включає спеціалізовані іпотечні банки та страхові компанії. До функцій земельних банків входить надання кредитів під заставу землі, аналіз фінансового стану позичальника, надання інформаційних та консультативних послуг, допомога у плануванні господарської діяльності заставодавця. Все це дасть змогу виробникам товарної сільськогосподарської продукції визначити потребу у кредитах, можливість їх сплати, акумулювати у своєму розпорядженні додаткові фінансові ресурси, необхідні для розширення обсягу

виробництва, придбання нової техніки, спорудження виробничих та складських приміщень, проведення заходів, пов'язаних із покращенням якості земель.

Таблиця 2

Підсистеми інфраструктури ринку земель сільськогосподарського призначення

Підсистема	Елементи
Організаційно-технічна	земельні аукціони, торгові доми та підприємства, які проводять земельні торги
Фінансово-кредитна	спеціалізовані земельні банки та страхові компанії
Державно-регулятивна	нормативно-правове регулювання земельних відносин, податкова система та спеціалізовані державні фонди для стимулювання ділової активності на ринку землі
Інформаційного забезпечення	кадастрові бюро, інформаційні служби, спеціальні навчальні заклади, консалтингові підприємства та юридичні контори

*Джерело: розроблено на основі [27]*

Визначальною особливістю праці у сільському господарстві є високий ступінь ризику, оскільки на кінцевий результат впливає не лише продуктивність праці чи якість землі, а й погодні умови, які є непередбачуваними. Тому, чільне місце в інфраструктурі ринку земельних ресурсів займають страхові компанії. Як показує зарубіжний досвід, головною їх функцією є страхування сільськогосподарських товаровиробників від втрати врожаю за непередбачуваних кліматичних умов та інших форс-мажорних обставин. Розвиток таких компаній гарантуватиме зростання ділової активності на ринку землі.

У період, коли ринок землі лише починає формуватися, значна роль належить консалтинговим підприємствам. До їх функцій входить надання кваліфікованих рекомендацій виробникам сільськогосподарської продукції щодо підвищення ефективності землекористування, можливості та необхідності залучення додаткових кредитних ресурсів, розробки маркетингових стратегій їх розвитку, збір й аналіз інформації про діючу ситуацію на ринку.

Раціональне використання земельних ресурсів неможливе без кількісного та якісного обліку ґрунтів із відповідним кадастровим забезпеченням. Державний земельний кадастр передбачає організацію, раціональне використання, охорону та регулювання земельних відносин, землеустрою, обґрунтування розмірів плати за землю, оцінку господарської діяльності. Він

включає дані реєстрації землекористувачів, облік кількості та якості земель, бонітування ґрунтів та їх економічну оцінку. Основною формою кількісного та якісного обліку ґрунтів є різні матеріали великомасштабних ґрунтових досліджень: карти ґрунтів, картограми та ґрунтові нариси з аналітичними даними. Важливе значення для детальної, якісної оцінки ґрунтів мають їх агровиробниче групування та бонітування.

Основними завданнями ведення державного земельного кадастру є такі: забезпечення повноти відомостей про всі земельні ділянки; застосування єдиної системи просторових координат та системи ідентифікації ділянок; запровадження єдиної системи земельно-кадастрової інформації та її достовірності (рис. 2.).



Рис. 2. Модель державного земельного кадастру в Україні  
Джерело: власні дослідження

Державний земельний кадастр включає кадастрове зонування, зйомки, бонітування ґрунтів, економічну оцінку земель, грошову оцінку земельних ділянок, державну реєстрацію, облік кількості та якості земель [273, с. 2]. Ефективне функціонування ринкового обігу сільськогосподарських земель

можливе лише за умов наявності достовірної інформації про земельну ділянку, її характеристику та стан. Варто зосередитися на дослідженні усіх складових земельного кадастру, вивчити рівень їх готовності та відповідності сучасним реаліям землекористування.

Кадастрові зйомки – це складова частина державного земельного кадастру. Вони є комплексом робіт, який виконують для визначення та відновлення меж земельних ділянок [28]. Кадастрові зйомки виконуються особами, які мають ліцензію на проведення даних робіт, видану органом Держкомзему, у встановленому законодавством порядку.

Державна реєстрація земельної ділянки здійснюється під час її формування, за результатами складання документації із землеустрою після її погодження у встановленому порядку органом державної влади або місцевого самоврядування, відкриття Поземельної книги на таку земельну ділянку. З набранням чинності Закону України “Про Державний земельний кадастр” та Порядку ведення Державного земельного кадастру, затвердженого постановою Кабінету Міністрів України, № 1051, визначено порядок ведення державної реєстрації земельних ділянок [29]. Відповідно до законодавства, державну реєстрацію земельної ділянки здійснюють кадастрові реєстратори територіальних органів Держземагентства. Державні кадастрові реєстратори наділені широкими повноваженнями щодо реєстрації сільськогосподарських земель. Саме вони приймають рішення про державну реєстрацію земельної ділянки або відмову в такій реєстрації. Послідовність проведення зазначеної реєстрації визначається Порядком ведення Державного кадастру [30, с. 5].

До головних чинників, що впливатимуть на розвиток кадастрових систем, слід віднести: глобалізацію, урбанізацію, електронне урядування, зміни клімату, потреби природокористування, технології 3D-візуалізації та аналізу, стандартизацію, інтероперабельність.

Найбільш перспективними концепціями кадастру майбутнього слід вважати: точний кадастр (віртуальні кадастрові моделі все більше наблизатимуться до реальної ситуації); об’єктно-орієнтований кадастр



(об'єктом обліку стають не земельні ділянки, а об'єкти власності); кадастри 3D/4D (кадастри включатимуть третій (висота) та четвертий (час) виміри); кадастри реального часу (зміни до кадастрів та доступ до них відбуватимуться у онлайнрежимі); глобальні кадастри (національні кадастри поступово трансформуються у глобальну кадастрову мережу); органічні кадастри (кадастри будуть адаптовані до обліку нерівних або нечітких меж природних об'єктів) [31].

З точки зору технологічних трендів, кадастрові системи майбутнього матимуть такі особливості:

- обліковуватиметься третій вимір ландшафту та об'єктів, що сьогодні подекуди виходить за межі існуючої правової бази;
- кадастр поєднуватиме стратегічну та динамічну карту, аби показати історичну еволюцію використання земель;
- кадастр буде багатофункціональним та обслуговуватиме багато юрисдикцій;
- кадастр буде глибоко інтегрований із соціальними мережами.

Перспективними технологіями кадастрово-реєстраційної діяльності слід вважати:

- модель суспільного землекористування (STDM) (проектний підхід, що дозволяє зафіксувати нетрадиційні форми землекористування);
- точковий кадастр (швидкий кадастровий підхід, який фіксує єдину координату (потенційно захоплену з використанням портативної GNSS) для представлення парцели, а не повного набору обстежених меж) [31];
- використання «цифрового пера» (інструменту, який значно зменшує процес транскрипції польових даних, тим самим зменшуючи помилки та прискорюючи час запису);
- краудсорсінговий кадастр або «Кадастр 2.0» (підхід, за яким громадяни навчаються самостійно приймати рішення щодо демаркації, пошуку та реєстрації межі, використовуючи недорогі процеси та мобільні технології);

– використання супутникових знімків високої роздільної здатності (HRSI) для швидкого встановлення меж та картографування сільської місцевості;

– використання ДЗЗ на малій висоті (LARSI) (зображень, що зняті легкими або безпілотними літаками, які обладнані камерою, GNSS-приймачем та іншими інструментами позиціонування).

У зв'язку з цим, на нашу думку, важливим кроком на шляху до прозорості ринку землі в Україні має стати перезавантаження державного земельного кадастру, яку можна поділити на такі етапи:

– Створення ортофотопланів та 3-D моделі місцевості території України;

– Наповнення відомостями ДЗК, що передбачає: стовідсоткову інвентаризацію державних сільськогосподарських земель; інвентаризацію решти державних земель; внесення відомостей про якісні характеристики земель;

– Створення електронного реєстру сертифікованих інженерів-землевпорядників та геодезистів.

Значним потенціалом для впровадження під час здійснення реєстрації речових прав на нерухоме майно характеризується технологія блокчейн (від англ. block – блок, chain – ланцюг), що передбачає розподілене зберігання ланцюжка блоків транзакцій, захищена від підробки та переробки. Кожен блок містить часову мітку та посилання на попередній блок хеш-дерева. Ця технологія здатна взагалі усунути державу від виконання функції гаранту речових прав на нерухомість, проте існують також і вагомні застереження щодо її можливого застосування. В Україні, попри широко анонсоване «переведення кадастру на блокчейн», фактично відбулося лише використання окремих елементів технології під час видачі витягів із Державного земельного кадастру, а сама ж база даних кадастру на цю технологію не переводилася та не розповсюджувалась у відкритому доступі.

Вважаємо, що потрібно очікувати на «велике перезавантаження» оціночної діяльності. Головним драйвером змін стане автоматизація оцінки та широке використання комп'ютерних моделей під час оцінки нерухомості, що

базуватимуться на системах автоматизованого моніторингу та прогнозування ринкового середовища, а також технологіях нейромереж, Big Data та Deep Learning. Перспективним джерелом інформації для оцінки майна стає використання соціальних мереж.

Оцінювати технологічні перспективи розвитку землеустрою та територіального планування, як правило, найбільш складно, зважаючи на те, що ця сфера є доволі консервативною і значною мірою спирається на усталені місцеві традиції, нормативну базу та підходи до проектування. Можна очікувати, що перспективними технологіями територіального планування мають стати: розширений просторовий аналіз; багатоагентні системи; моделі просторової оптимізації; системні динамічні моделі; створення віртуальних світів; нові методи візуалізації. Слід також очікувати на ширше застосування веб-сервісів у територіальному плануванні, а також застосування у цій сфері краудсорсингу, коли проектне рішення ставатиме не результатом авторського задуму конкретного інженерапроектанта, а спільним здобутком місцевої спільноти небайдужих мешканців, які будуть висловлювати власне бачення щодо перспектив розвитку території через веб-інтерфейси різноманітних громадських обговорень та соціальних мереж.

В Україні за допомогою діджиталізації землекористування здійснюється інвентаризація с/г угідь. Вона є одним із складових елементів обліку майна сільськогосподарського підприємства, за допомогою якого проводиться контроль і перевірка наявності та стану земельних ділянок для забезпечення достовірності даних обліку та фінансової звітності. Закладено фундамент Національної інфраструктури просторових даних, вперше з'явиться цифрова топографічна база даних. Створюватимуть її за допомогою аерофотозйомки. 3D-моделі місцевості надаватимуть інформацію про земельні ресурси, лісові масиви, забудову, рослинність, лінії електромереж тощо.

Розвитку космічних технологій для моніторингу ефективності землекористування сприяють міжнародні програми, які діють в Україні. Так, Світовий банк за фінансової підтримки ЄС запусив в Україні пілотний проект

супутникового моніторингу використання сільськогосподарських земель. Також Міністерством розвитку економіки, торгівлі та сільського господарства України презентовано проект «Відкрита земля». Головна мета — забезпечити прозорість та відстежуваність земельних відносин, а також надати інформацію про власників землі, вартість угод купівлі-продажу та оренди, концентрацію земель в одних руках тощо.

Основним інструментом названого проекту є геопортал, де зібрані результати обробки даних дистанційного зондування земель України та підключена публічна кадастрова карта. На отриманій карті геопорталу можна побачити межі ділянок, чи обробляються вони чи ні, які культури там ростуть, яка зволоженість ґрунту, який індекс вегетації культур на момент зйомки тощо. За допомогою даних з геопорталу вирішуються питання незареєстрованих земель, які використовуються, але з яких не платяться податки.

На рівні громад, з метою ефективного використання земельних ресурсів, необхідним є моніторинг їх стану та ефективності використання, сплати податків, інвентаризація. Особливо це актуально в умовах завершення земельної реформи та передачі громадам сільськогосподарських угідь. ОТГ отримують можливість моніторингу використання сільськогосподарських земель та формування баз даних для громад, відстежувати використання землі та повноту сплачених податків.

Важливим є застосування геоінформаційних технологій як на регіональному, так і на державному рівнях для вертикальної (між різними рівнями управління) та горизонтальної (між господарствами або організаціями одного рівня) координацій дій. Варто відмітити п'ять основних трендів із залучення сучасних ІТ-технологій:

1. Розвиток систем точного землеробства з використанням технологій глобальних навігаційних супутникових систем і систем дистанційного зондування Землі.
2. Безпілотні технології.

3. Системи віддаленого обліку і контролю матеріально-технічних цінностей.

4. Інтелектуальний аналіз даних і сценарне моделювання.

5. Агроскаутінг, який передбачає використанням мобільних додатків для моніторингу стану землекористування у межах конкретного поля.

В Україні, у зв'язку із завершенням земельної реформи, яка вимагає запровадження ринку землі та створення його відповідної інфраструктури, постало питання щодо створення спеціального кредитно-фінансового інституту, діяльність якого сприяла б надходженню інвестицій на сільські території [32, с. 2]. Для реалізації окреслених цілей та забезпечення ефективного функціонування ринку сільськогосподарських земель необхідно створити спеціалізовану фінансову установу. Такою має стати Державний земельний банк, який буде наділений функціями, що забезпечить ефективне управління землями державної власності, фінансово-кредитну діяльність, підтримку малого сільськогосподарського бізнесу.

Історичний досвід розвинутих аграрних країн підтвердив, Державний земельний банк є обов'язковою складовою ринку сільськогосподарських земель. Крім того, поява фінансової установи, що матиме можливість кредитувати під значно нижчу за ринкову вартість ресурсів, надасть такі можливості: стимулювати інтерес банківського сектора до сільськогосподарських товаровиробників; реалізувати державні програми розвитку аграрного сектора економіки та інфраструктури села; консолідувати інформаційну клієнтську базу; диверсифікувати кредитні ризики за рахунок перерозподілу їх на банківському ринку, підвищуючи, тим часом, вартість застави; забезпечити продовольчу безпеку держави з одночасним стимулюванням розвитку середніх та дрібних сільськогосподарських товаровиробників і, як наслідок, підвищити зайнятість на сільських територіях.

Україна, намагаючись наслідувати приклад інших країн і розуміючи важливість розвитку аграрного сектора, розпочала процес створення спеціалізованої фінансової установи – Державного земельного банку. Державний

земельний банк наділявся правом купувати і продавати земельні ділянки, передавати їх в оренду та інше користування, що не притаманно діяльності звичайних комерційних банків [33, с. 2]. Передбачалося, що Державний земельний банк виконуватиме кредитну, контрольну та функцію обігу земель.

За діяльності Державного земельного банку умовами кредитування будуть наступні: надання коштів повинно мати цільовий характер і сприяти відтворенню виробництва; застава можлива тільки за згодою власника земельної ділянки і на термін, що не перевищує строку оренди, причому, у перший рік основний борг і відсотки за ним не виплачуються; власник земельної ділянки має отримувати гарантовану орендну плату та збереження об'єкта власності у випадку неповернення кредиту. При цьому, архітектура фінансово-кредитної системи обслуговування аграрного виробництва передбачає взаємодію двох підсистем: фінансової та кредитної.

В умовах глобалізації світової економіки основними завданнями Державного земельного банку є такі: консолідація земельних ділянок і передача їх в оренду; збільшення відсотка оренди державних земель; фінансова підтримка розвитку малого і середнього агробізнесу; підтримка державних програм розвитку аграрного сектора економіки на основі поворотного фінансування. Джерелами формування ресурсної бази Державного земельного банку повинні стати внутрішні та зовнішні кошти.

Проблемними питаннями є те, що розвиток кредитування під заставу земель сільськогосподарського призначення не буде нарощуватися швидкими темпами, навіть при знятті мораторію. Зазначене обумовлено існуючим протиріччям між дрібним землеволодінням та крупним землекористуванням в Україні. Аналіз статистичних даних за 2018 р. спонукає до висновку, що більшість власників сільськогосподарських угідь передають свої землі в оренду, а потребу в кредитах мають, в основному, товаровиробники, які виступають як орендарі земельних ділянок, а отже, вони не можуть використовувати землю як заставу.

В Україні фактично немає інструментів іпотечного кредитування під заставу сільськогосподарських земель. Постанова НБУ №351 від 30.06.2016 року, відповідно до міжнародних норм регулювання банківських ризиків, чітко визначає, що предметом застави не може бути майно, яке не може бути вільно продане. Ця вимога відноситься до підмораторних земель, а для земель, які не обмежені мораторієм, встановлено один найнижчий коефіцієнт ліквідності, оскільки ринок практично відсутній. Для того, щоб він з'явився і з'явилися банківські продукти, необхідне чітке законодавче регулювання ринку купівлі та продажу сільськогосподарських земель і час для формування цін, реалізації статистики дефолтів і формування судової практики.

Результати проведених досліджень розвитку інфраструктури земельного ринку дозволяють констатувати, що невід'ємною складовою повноцінного земельного ринку є його науково-дослідна та інформаційна інфраструктура, до складу якої входять спеціальні дослідні установи і навчальні заклади, консалтингові компанії, інформаційні центри та агентства. Основним завданням дорадчої інфраструктури є інформування продавців і покупців земельних ділянок про діючі ціни, наявний попит та пропозицію землі, що дозволить їм приймати найбільш правильні рішення та максимально задовольнити свої інтереси. Головною умовою ефективного функціонування інформаційної інфраструктури у сфері земельних ресурсів є наявність єдиної системи державної реєстрації речових прав на нерухоме майно та їх обмеження, яка містить у собі відомості про усі об'єкти і суб'єкти нерухомого майна.

Ми вважаємо, що для динамічного розвитку інфраструктури ринку слід вдосконалити фіскальну політику як потужний інструмент регулювання земельних відносин. Нині земельний податок на землі сільськогосподарського призначення не має ні регулюючої функції, ні функції вилучення рентних платежів, ні стимулюючої функції. Тут потрібне окреме наукове дослідження і розробка механізму формування стимулюючої системи земельного оподаткування з системою пільг за докорінне поліпшення землі.

Активізація спекуляцій із землею потребує посилення регулюючої ролі держави, шляхом розширення системи контролю за цільовим використанням землі і передбачити не тільки систему штрафних санкцій, але і механізм безкомпенсаційної конфіскації ділянок при несанкціонованій зміні цільового призначення землі. Для цього необхідне правове забезпечення на державному і регіональному рівнях.

Кращим засобом моніторингу спекуляцій із землею, на нашу думку, є організація земельної біржі, яка б дозволила: укріпити систему інформації про ринок, оскільки торги стали б індикатором стану земельних відносин і економіки сільського господарства регіону; регулювати земельні відносини шляхом експансії держави на ринку землі неадміністративними методами; протидіяти монополізму на ринку землі; організувати моніторинг ринку землі. Проте проблема створення земельної біржі полягає в тому, що держава поки що не готова поступитися частиною своїх функцій на ринку землі, а низька прибутковість землеробства не сформувала економічну основу ринкових відносин, які б зруйнували монополізм держави. Більш того, низька інформованість суб'єктів ринкових відносин про стан ринку землі і монополізм адміністрацій створюють умови для правопорушень в операціях із землею, що виявляється в невідповідності цін на землю і ставок орендної плати.

Розвиток процесів викупу землі у власників земельних часток і оренди цих часток, а також угод про сумісне використання землі вимагає серйозних зусиль з боку держави із захисту прав власності власників землі. На регіональному рівні необхідно забезпечити створення адміністративних підрозділів з контролю операцій і, що головне, з контролю реалізації операцій в цьому напрямі з метою: захистити права власності власників землі від свавілля великих підприємств-орендарів; перевести систему орендних відносин з віртуальної в практичну сферу господарської діяльності; підтримки цільового використання землі; моніторингу ринку оренди як найбільш і розвиненого сегмента ринку землі.



Для цього на підрозділ повинена покладатися функція розрахунку мінімальної ставки орендної плати і мінімальної ставки компенсації при викупі землі, а також право контролю виконання операцій. Вважаємо, що такий підрозділ може бути міжвідомчою комісією, що постійно діє, до складу якої повинні увійти представники арбітражу, адміністрації і комітету, із земельних ресурсів.

Для розвитку інфраструктури і недопущення конфліктних ситуацій між командно-адміністративною системою забезпечення ринкових відносин з приводу використання землі і ринковим характером операцій із нею потрібна розгалужена мережа ріелторських організацій. В цьому випадку вдасться уникнути фінансових витрат держави, пов'язаних з розвитком інфраструктури товарного обігу землі і ризиком в різних його сегментах, переклавши їх на приватне підприємництво подібно до того, як на ф'ючерсних біржах на спекулянтів покладені функції фінансового буфера-компенсатора втрат, пов'язаних з ризиком, і які виконуються за допомогою диверсифікації цих ризиків. Вважаємо, що розвиток приватних ріелторських компаній в областях не призведе до їх укрупнення, оскільки ринок землі розподілений по територіях і вимагає безпосередньої роботи в регіонах.

Дослідження секторальної структури земельного ринку дозволяє виділити три сектори, що розрізняються за об'єктами купівлі-продажу і мотивами поводження покупців і продавців.

Перший сектор – продаж і купівля земельних ділянок громадянами та їх об'єднаннями для ведення особистого селянського господарства, садівництва, тваринництва, індивідуального житлового будівництва та дачного господарства.

Другий – продаж земель місцевими органами влади громадянам та їх об'єднанням, юридичним особам для ведення особистого підсобного господарства, садівництва, селянського (фермерського) господарства та для підприємницької діяльності.

Третій – це ринок земельних ділянок для ведення товарного сільськогосподарського виробництва. Його сегменти розвинені неоднаково та існує переважно у формі оренди землі. Купівля-продаж, застава землі практично не розвинені, про що свідчить незначна кількість угод із земельними ділянками для селянських (фермерських) господарств та земельними частками [34].

Уже зараз чітко проявилася поляризація сегментів ринку: виділилися величезні ареали ажіотажного попиту на земельні ділянки навколо великих міст і промислових центрів і величезні площі із млявим, а найчастіше – нульовим земельним обігом, через фрагментарність і невпорядкованість земельного ринку, зумовленого недостатнім розвитком законодавчої бази, земельного кадастру та оцінки земель. Негативно позначається відсутність кредитно-фінансових інструментів та інститутів, що поєднують інтереси держави і кредитних установ з інтересами землевласників і землекористувачів, відповідних інститутів земельного ринку – земельного банку, земельного нотаріату, ріелторських установ, земельного суду і ін.

Підводячи підсумки можна зробити висновок, що земельний ринок відображає відносини, в результаті яких право власності або користування землею від одних осіб переходить іншим, на основі двосторонньої угоди, що реєструється в нотаріальній конторі, успішний розвиток якого забезпечується розвиненою інфраструктурою ринку землі, посиленням регулюючої ролі держави.

### **ВИКОРИСТАНА ЛІТЕРАТУРА**

1. Вінник О.М., Шаповалова О.В. Господарське право в умовах цифровізації економіки : навчальний посібник / за заг. ред. О.М. Вінник. Київ: НДІ приватного права і підприємництва імені академіка Ф.Г. Бурчака НАПрН України, 2020. – С. 314.

2. Гриценко О.А. Цифрова економіка: сучасні виклики для економістів та правознавців // Економічна теорія та право. 2018. – № 2(33). – С. 79-99.

3. Питання Міністерства цифрової трансформації: Постанова Кабінету Міністрів України від 18.09.2019. – № 856. – URL:

<https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/856-2019-%D0percentageBF>

4. Вінник О.М. Господарські відносини в умовах цифровізації та їх правове регулювання. – Підприємництво, господарство і право. – 2020. – № 5. – С. 56-62.

5. Про захист прав споживачів: Закон України від 12.05.1991. – URL:

<https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/1023-12>

6. Про авторське право та суміжні права: Закон України від 23 грудня 1993 р. – URL: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/3792-12#Text>

7. Концепція розвитку цифрової економіки та суспільства України на 2018-2020 роки. – URL:

[https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/67\(2018\(%D1%80#Text](https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/67(2018(%D1%80#Text)

8. Демчишак Н.Б., Біленька В.А. Розвиток технологічних платформ як інструмент реалізації інноваційного потенціалу в Україні // Економіка та суспільство. – 2018. – № 16. – С. 731-738.

9. Черепаня І.Р., Демчишак Н.Б. Інструменти фінансового регулювання розвитку інформаційно-комунікаційних технологій як чинника підвищення конкурентоспроможності економіки України // Агросвіт. – 2017. – № 24. – С. 53-59.

10. E-agriculture in action: blockchain for agriculture. Opportunities and challenges. – Edited by Gerard Sylvester. FAO and ITU, Bangkok, 2019. – 72 p.

11. Руденко М. В. Вплив цифровізації на розвиток агросфери // Матеріали міжнародної науково-практичної конференції. – 2019. – С. 127-129.

12. Шерстюк Л. М. Цифрове сільське господарство: зарубіжний досвід та особливості впровадження й використання в Україні: колективна монографія. – 2019. – С. 310-318.

13. Концепція розвитку цифрової економіки та суспільства України на 2018-2020 роки затверджена Розпорядженням Кабінету Міністрів України № 67-р. – 2018. – URL:

<https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/67-2018-%D1%80#Text>

14. Указ Президента України № 837/2019 від 08.11.2019. – URL:

<https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/837/2019#Text>

15. Офіційних Веб-сайт Міністерства розвитку економіки, торгівлі та сільського господарства України. – URL:

<https://www.me.gov.ua/News/Detail?lang=uk-UA&id=ef25db5b-94f4-441d-a577-df83426ca104&title=InnaMtlvaProvelaOnlainna raduSchodoStvorenniaElektronnogoFarmerskogoRestruZPilotnimiRegionami>

16. Нормативно-правове регулювання проведення пілотного проекту зі створення та функціонування державного аграрного реєстру. – URL:

<http://valky-rda.kh.gov.ua/news/208/78502>

17. Законопроект № 3295 від 30.03.2019. – URL:

[http://w1.c1.rada.gov.ua/pls/zweb2/webproc4\\_1?pf3511=68504](http://w1.c1.rada.gov.ua/pls/zweb2/webproc4_1?pf3511=68504)

18. Стан господарської діяльності окремих об'єднаних територіальних громад Харківської області: наук.-практ. посіб. / за заг. ред. С.В. Глібка, Ю.В. Георгієвського, Н. М. Внукової. – Харків: НДІ ПЗІР НАПрН України, 2020. – 88 с.

19. НІТЕСН office (2016), “Digital Agenda of Ukraine - 2020 (Digital Agenda 2020). Conceptual backgrounds (version 1.0). – Priority areas, initiatives, projects for "digitization" of Ukraine until 2020”, available at:

<https://ucci.org.ua/uploads/files/58e78ee3c3922.pdf>

20. Ткаль Я.С., Абрахам Ю.В. Формування ефективного використання земельних ресурсів в обліку, аналізі та управлінні сільськогосподарськими підприємствами // Фінансовий простір. 2019. – № 1(33). – С. 21-37

21. Лупенко Ю.О., Малік М.Й., Шпикуляк О.Г. Розвиток підприємництва і кооперації: інституціональний аспект: монографія. – Київ: ННЦ ІАЕ, 2016. – 235 с.

22. Руденко М.В. Управління підприємствами з урахуванням позицій зацікавлених сторін // Наукові праці Кіровоградського національного технічного університету. – Економічні науки. – 2016. – Вип. 29. – С. 103-109.

23. OECD. nd. Bridging the Digital Divide. – URL:

<https://ww.oecd.org/site/schoolingfortomorrowknowledgebase/themes/ict/bridgingthedigitaldivide.html>

24. Digital Transformation Initiative (DTI). – Retrieved from:

<http://reports.weforum.org/digitaltransformation/introducing-the-digital-transformation-initiative>.

25. Щуревич Л.М. Інноваційні перспективи в розвитку сільського господарства в Україні // Інвестиції: практика та досвід. – 2018. – № 10. – С. 101-105.

26. Ступень Р.М. Інституціональні особливості інфраструктурного забезпечення функціонування ринку сільськогосподарських земель // Агросвіт. – 2016. – № 5. – С. 33-36.

27. Данкевич В. Є. Розвиток земельних відносин в умовах глобалізації: монографія. – Житомир: О.О. Євенок, 2017. – 392 с.

28. Боклаг В. А. Формування та розвиток державної політики у сфері управління земельними ресурсами в Україні: дис... д-ра наук з держ. упр. Запоріжжя, 2015. – 423 с.

29. Ліга: Закон URL: <http://www.ligazakon>

30. Про Державний Земельний кадастр: Закон України від 07.07.2011 р. № 3613, в ред. від 01.03.2016 р. – URL: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/3613-%2017>

31. Antwi, R., Bennett, R.M., de Vries, W.T., Lemmen, C.H.J. and Meijer, C. The requirements for point cadastres. // In: FIG Working Week 2012, Rome, 6-10 May 2012. – Knowing to manage the territory, protect the environment, evaluate the cultural heritage. – Rome: FIG. – 2012. – 11 p.

32. Можливості консолідації земель в Україні: земельний (іпотечний) банк та ринок земель. – URL: <http://www.dorada/org.ua/nevs>

33. Про затвердження Статуту публічного акціонерного товариства «Державний земельний банк»: постанова Кабінету міністрів України від 25 лип. 2012 р. – № 934. – URL: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/934-2012-%D0%BF#Text>

34. Земельний кодекс України: Закон України від 25.10.2001 р. – № 2768-14. – URL: <http://zakon5.rada.gov.ua/laws/show/2768-14>

**Боднар Дмитро Ількович, доктор фізико-математичних наук,  
професор кафедри економічної кібернетики та інформатики**

**ДРОБОВО-РАЦІОНАЛЬНА АПРОКСИМАЦІЯ ПОКАЗНИКІВ  
ЕФЕКТИВНОСТІ ПРОГРАМ РЕГІОНАЛЬНОГО РОЗВИТКУ**

Недоліками методів оцінювання програм регіонального розвитку є велика кількість якісних показників, не підкріплених кількісними даними, зведення оцінювання програм до контролю за цільовим використанням коштів, декларативність цілей, зіставлення неадекватних показників та ін. Крім того методика оцінювання, вибір показників, які демонструють тенденції розвитку регіону часто змінювались при зміні складу керівництва регіону. Сама практика визначення таких показників мало поширена на регіональному рівні. Стара система програмно-цільового планування мала організаційні можливості ефективного об'єднання ресурсів і виконавців. Доцільно говорити про комплексний показник – валовий регіональний продукт.

Державна стратегія регіонального розвитку передбачає підвищення рівня конкурентоспроможності регіонів, територіальну соціально-економічну інтеграцію та просторовий розвиток, ефективне державне управління у сфері регіонального розвитку. Для досягнення цих цілей запропоновано біля 50 показників, які доцільно розбити по групах: загальноекономічний стан регіонів, стан та розвиток промисловості і сільського господарства, стан та розвиток інфраструктури і послуг. Потрібно враховувати і демографічну характеристику населення, характеристику його зайнятості, характеристику екологічного стану регіону. Є показники-стимулятори: обсяг прямих іноземних інвестицій, обсяг експорту, ВРП на душу населення; щільність автомобільних доріг, середньомісячна зарплата, кількість малих підприємств на 10 тисяч наявного населення тощо.

Послідовність показників, які характеризують зміну явища в часі, називають динамічним рядом. Динамічні ряди є моментні та інтервальні. Зокрема метод підгонки полягає в тому, щоб знайти криву, яка достатньо точно

відображає початкову інформацію з наступним використанням її для прогнозування. Найчастіше використовують наступні види кривих: лінійна, параболічна, поліноміальна третього степеня, логарифмічна, гіперболічна, експоненціальна та інші.

Пропонуємо для апроксимації показників ефективності програм регіонального розвитку використовувати неперервні дроби та їх багатовимірні узагальнення – гіллясті ланцюгові дроби.

Раціональні наближення конструктивно будуються за допомогою неперервних дробів чи їх узагальнень – апроксимацій Паде. У багатьох випадках швидкість збіжності раціональних наближень значно перевищує швидкість збіжності поліноміальних наближень, області збіжності неперервних дробів є ширшими, ніж області збіжності відповідних степеневих рядів. Крім того неперервні дроби володіють властивістю до не нагромадження похибок у процесі їх обчислення. Тому вони стали ефективним математичним апаратом у застосуваннях.

Уже більше 2000 років математики займаються вивченням неперервних дробів. Зрозуміло, що такий великий інтервал часу може витримати тільки теорія, яка має фундаментальне значення. За допомогою неперервних дробів розв'язуються важливі задачі теорії функцій, диференціальних рівнянь і теорії чисел.

Перші розвинення деяких елементарних функцій у неперервні дроби були запропоновані ще Л. Ейлером і Ж. Лагранжем у XVIII ст. У 1813 році К. Гаусс отримав розвинення відношень гіпергеометричних функцій у неперервний дріб, досліджував відповідність між степеневими рядами та неперервними дробами. П. Л. Чебишев використовував неперервні дроби при розв'язанні задач теорії функцій - задачі інтерполяції, інтегрування алгебраїчних функцій, розвинення довільних функцій у ряди за ортогональними поліномами.

Теорія неперервних дробів була започаткована ще за часів Ейлера. Дослідження і використання можливостей неперервних дробів у великих

масштабах стало можливим тільки тоді, коли завдяки фон Нейману зрозуміли, як можна проводити обчислення.

*Неперервним дробом* називають впорядковану пару  $\langle\langle\{a_n\}, \{b_n\}\rangle, \{f_n\}\rangle$ , де  $a_1, a_2, \dots$  і  $b_0, b_1, b_2, \dots$  – комплексні числа, причому всі  $a_n \neq 0$ , а  $\{f_n\}$  – послідовність в розширеній комплексній площині, що визначається наступним чином:

$$f_n = S_n(0), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (1a)$$

де

$$S_0(w) = s_0(w), \quad S_n(w) = S_{n-1}(s_n(w)), \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (1б)$$

$$s_0(w) = b_0 + w, \quad s_n(w) = \frac{a_n}{b_n + w}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (1в)$$

Алгоритмом, який задає неперервний дріб, є функція  $D$ , що ставить у відповідність кожній впорядкованій парі  $\langle\{a_n\}, \{b_n\}\rangle$  послідовність  $\{f_n\}$ , визначену формулами (1).

Числа  $a_n$  і  $b_n$  називають *елементами* або відповідно *n-ми частинними чисельником і частинними знаменником* неперервного дроби; дріб  $\frac{a_n}{b_n}$  називають *n-ою ланкою* неперервного дроби;  $f_n$  – *n-им підхідним дробом*.

Якщо  $\{a_n\}$  і  $\{b_n\}$  – нескінченні послідовності, то неперервний дріб  $\langle\langle\{a_n\}, \{b_n\}\rangle, \{f_n\}\rangle$  називається *нескінченним*.

Неперервний дріб називається *скінченним*, якщо  $\{a_n\}$  і  $\{b_n\}$  мають тільки скінченне число членів  $a_1, a_2, \dots, a_m$  і  $b_0, b_1, b_2, \dots, b_m$ .

Отже, *n-ий підхідний дріб* можна записати наступним чином:

$$f_n = b_0 + \frac{a_0}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3 + \dots + \frac{a_n}{b_n}}}}, \quad (2)$$



і тому неперервний дріб  $\langle\langle\{a_n\},\{b_n\}\rangle,\{f_n\}\rangle$  можна записати у вигляді:

$$b_0 + \frac{a_0}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3 + \dots}}} \quad (3)$$

Для зручності будемо використовувати компактні позначення неперервного дроби (3) в одній із наступних форм:

$$b_0 + \frac{a_1}{|b_1|} + \frac{a_2}{|b_2|} + \dots + \frac{a_n}{|b_n|} + \dots, \quad (4)$$

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots + \frac{a_n}{b_n} + \dots \text{ або } b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n} \quad (5)$$

Аналогічно для  $n$ -го підхідного дроби  $f_n$  можна використовувати такий запис:

$$f_n = b_0 + \frac{b_1}{|a_1|} + \frac{b_2}{|a_2|} + \dots + \frac{a_n}{|b_n|} \text{ або } f_n = b_0 + \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{b_k}$$

Тоді неперервний дріб

$$b_0 + \frac{(-a_1)}{|(b_1)|} + \frac{(-a_2)}{|(b_2)|} + \dots + \frac{(-a_n)}{|(b_n)|} + \dots$$

ми можемо записати у вигляді:

$$b_0 - \frac{a_1}{|b_1|} - \frac{a_2}{|b_2|} - \dots - \frac{a_n}{|b_n|} - \dots$$

Кожному неперервному дроби (5) ставляться у відповідність послідовності комплексних чисел  $\{A_n\}$  і  $\{B_n\}$ , які визначаються системою лінійних рекурентних рівнянь другого порядку:

$$A_n = b_n A_{n-1} + a_n A_{n-2}, n = 1, 2, 3, \dots, \quad (6)$$

$$B_n = b_n B_{n-1} + a_n B_{n-2}, n = 1, 2, 3, \dots, \quad (7)$$

з початковими умовами

$$A_{-1} = 1, A_0 = b_0, B_{-1} = 0, B_0 = 1. \quad (8)$$

Числа  $A_n$  і  $B_n$  називаються відповідно  $n$ -м канонічним чисельником і канонічним знаменником  $n$ -го підхідного дроби.

Будемо використовувати таку класифікація функціональних неперервних дробів.

*C*-дроби – це функціональні неперервні дроби вигляду

$$1 + \frac{a_1 x^{\alpha_1}}{|1|} + \frac{a_2 x^{\alpha_2}}{|1|} + \frac{a_3 x^{\alpha_3}}{|1|} + \dots, a_n \neq 0, \quad (9)$$

де всі  $\alpha_n$  – додатні цілі числа, а  $a_n$  – ненульові комплексні константи.

Якщо всі  $\alpha_n = 1$ , то дріб (9) називається *правильним C-дробом*.

Якщо  $\alpha_n = 1$  і  $a_n > 0$  для  $n \geq 1$ , то дріб (9) називається *S-дробом*.

Неперервні дроби вигляду

$$\frac{s_0}{|1|} + \frac{g_1 x}{|1|} + \frac{(1-g_1)g_2 x}{|1|} + \frac{(1-g_2)g_3 x}{|1|} + \frac{(1-g_3)g_4 x}{|1|} + \dots,$$

де

$$s_0 > 0, \quad 0 < g_n < 1, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

називаються *g-дробами*. *g-дроби* зображають голоморфні функції у площині з розрізом  $G = \{\arg(1+z) < \pi\}$ . Встановлено інтегральне представлення цих функцій, досліджено збіжність дроби, встановлено оцінку швидкості збіжності в області  $G$ .

Нехай

$$f(x) = 1 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n + \dots \quad (10)$$

розвинення функції у степеневий ряд в околі нуля,

$$D(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k x}{1}, \quad (11)$$

правильний неперервний *C*-дріб, у якого всі  $a_n \neq 0$ ,

$$D_n(x) = \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{a_k x}{1}, \quad (12)$$

–  $n$ -ий підхідний дріб неперервного дроби (11).

Кожен правильний  $C$ -дріб (11) відповідний однозначно визначеному функціональному степеневому ряду (11). Порядок відповідності  $n$ -го підхідного дроби  $f_n(x)$  рівний  $\nu_n = n+1$ , так що розвинення Тейлора функції  $f_n(x)$  співпадає з (11) аж до члена  $c_n x^n$  включно, тобто

$$f_n(x) = 1 + c_1 x + \dots + c_n x^n + \gamma_{n+1}^{(n)} x^{n+1} + \dots$$

Якщо два правильні  $C$ -дроби, а саме дроби (11) та

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{a}_k x^k}{1}, \quad \tilde{a}_n \neq 0,$$

відповідають одному й тому ж ряду (10), то

$$a_n = \tilde{a}_n, \quad n=1, 2, 3, \dots$$

Перш за все цікавим є питання, коли ланцюговий дріб, який відповідає даному степеневому ряду, є правильним.

*Неперервний дріб, який відповідає степеневому ряду*

$$1 + c'_1 x + c'_2 x^2 + \dots$$

*тоді і лише тоді нескінченний і правильний, коли визначники*

$$\varphi_\nu = \begin{vmatrix} c'_1 & c'_2 & \dots & c'_\nu \\ c'_2 & c'_3 & \dots & c'_{\nu+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c'_\nu & c'_{\nu+1} & \dots & c'_{2\nu-1} \end{vmatrix} \quad (\nu = 1, 2, \dots),$$

$$\psi_\nu = \begin{vmatrix} c'_2 & c'_3 & \dots & c'_\nu \\ c'_3 & c'_4 & \dots & c'_{\nu+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c'_\nu & c'_{\nu+1} & \dots & c'_{2\nu-1} \end{vmatrix} \quad (\nu = 2, 3, \dots)$$

*всі відмінні від нуля. В цьому випадку коефіцієнти відповідного ланцюгового дроби мають значення:*

$$c_1 = \varphi_1, c_{2\nu} = \frac{\psi_{\nu+1} \varphi_{\nu-1}}{\psi_\nu \varphi_\nu}, c_{2\nu+1} = \frac{\psi_\nu \varphi_{\nu+1}}{\psi_{\nu+1} \varphi_\nu}, (\nu = 1, 2, \dots)$$

*при цьому потрібно покласти  $\varphi_0 = 1, \psi_1 = 1$ .*

*Приєднані неперервні дроби – це дроби такого вигляду*

$$\frac{k_1x|}{|1+l_1x} - \frac{k_2x^2|}{|1+l_2x} - \frac{k_3x^2|}{|1+l_3x} - \frac{k_4x^2|}{|1+l_4x} - \dots, \quad k_n \neq 0, \quad (13)$$

де  $k_n$  і  $l_n$  – комплексні константи. Парна частина правильного  $C$ -дроби

$$\frac{a_1x|}{|1} + \frac{a_2x|}{|1} + \frac{a_3x|}{|1} + \dots, \quad a_n \neq 0,$$

є приєднаним неперервним дробом

$$\frac{a_1x|}{|1+a_2x} - \frac{a_2a_3x^2|}{|1+(a_3+a_4)x} - \frac{a_4a_5x^2|}{|1+(a_5+a_6)x} - \dots$$

Кожному неперервному дробу (13) однозначно відповідає степеневий ряд

$$1 + c_1x + c_2x^2 + \dots$$

таким чином, що для кожного  $\lambda$ , ряд Тейлора для підхідного дроби  $\lambda$ -го порядку співпадає з ним до члена  $c_{2\lambda}x^{2\lambda}$  включно.

Степеневий ряд

$$1 + c_1x + c_2x^2 + \dots$$

має лише тоді і тільки тоді приєднаний ланцюговий дріб (13), коли визначники

$$\varphi_v = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_v \\ c_2 & c_3 & \dots & c_{v+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_v & c_{v+1} & \dots & c_{2v-1} \end{vmatrix} \quad (v \neq 1)$$

всі відмінні від нуля, і саме тоді, якщо покласти

$$\varphi_0 = 1, x_1 = c_2, x_v = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_{v-1} & c_{v+1} \\ c_2 & c_3 & \dots & c_v & c_{2v+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_v & c_{v+1} & \dots & c_{2v-2} & c_{2v} \end{vmatrix} \quad (v \geq 2),$$

то  $k_1 = \varphi_1, l_1 = -\frac{x_1}{\varphi_1}, k_v = \frac{\varphi_v \varphi_{v-2}}{\varphi_{v-1}^2}, l_v = \frac{x_{v-1}}{\varphi_{v-1}} - \frac{x_v}{\varphi_v}, v \geq 2.$

З приєднаними дробами тісно зв'язані наступні дроби.

$J$ -дроби – це дроби виду

$$\frac{1|}{|d_1+x} - \frac{c_1^2|}{|d_2+x} - \frac{c_2^2|}{|d_3+x} - \frac{c_3^2|}{|d_4+x} - \dots, \quad c_n^2 \neq 0,$$

де  $c_n$  і  $d_n$  – комплексні константи.

$J$ -дріб буде додатно визначеним, якщо існує послідовність додатних чисел  $\{g_n\}$ , така, що

$$\left|c_n^2\right| - \operatorname{Re}(c_n^2) \leq 2\delta_n \delta_{n+1} (1 - g_{n-1}) g_n, \quad n=1, 2, 3, \dots,$$

де

$$\delta_n = \operatorname{Im}(d_n) \geq 0 \text{ і } 0 < g_{n-1} < 1, \quad n=1, 2, 3, \dots$$

Якщо всі  $c_n$  і  $d_n$  – дійсні числа, то дріб називається дійсним  $J$ -дрібом.

Причому, дійсні  $J$ -дроби будуть додатно визначеними.

Загальні  $T$ -дроби – це неперервні дроби виду

$$\frac{x|}{|e_1 + d_1 x} + \frac{x|}{|e_2 + d_2 x} + \frac{x|}{|e_3 + d_3 x} + \dots, \quad e_n \neq 0,$$

де  $e_n$  і  $d_n$  – комплексні константи.

Якщо  $e_n = 1$  для всіх  $n$ , то цей дріб називається  $T$ -дрібом. Загальний  $T$ -дріб можна представити у вигляді еквівалентного неперервного дроби

$$\frac{F_1 x|}{|1 + G_1 x} + \frac{F_2 x|}{|1 + G_2 x} + \frac{F_3 x|}{|1 + G_3 x} + \dots, \quad F_n \neq 0,$$

де

$$F_n = \frac{1}{e_n e_{n-1}}, \quad G_n = \frac{d_n}{e_n} \quad (e_0 = 1), \quad n=1, 2, 3, \dots$$

Загальний  $T$ -дріб називається *додатним  $T$ -дрібом*, якщо для  $n \geq 1$  всі коефіцієнти  $e_n$ ,  $d_n$ ,  $F_n$ ,  $G_n$  – додатні дійсні числа. Із загальними  $T$ -дробами тісно пов'язані  $M$ -дроби

$$\frac{F_1|}{|1 + G_1(x)} + \frac{F_2|}{|1 + G_2(x)} + \frac{F_3|}{|1 + G_3(x)} + \dots, \quad F_n \neq 0,$$

де  $G_n(x)$  – многочлени.

Для інтерполяції та апроксимації функцій неперервними дробами розглядаються обернені поділені різниці та обернені похідні, встановлюються їх основні властивості. Визначимо інтерполяційний дріб Тіле.

Нехай значення функції  $f(x)$  задаються в точках  $x_0, x_1, \dots, x_n$ ,  $y_i = f(x_i)$ , причому  $y_i \neq y_j$ , якщо  $i \neq j$ . Побудуємо таку послідовність функцій:

$$\Phi_0(x) = f(x), \quad \Phi_1[x_0, x] = \frac{x - x_0}{\Phi_0(x) - \Phi_0(x_0)} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}, \dots,$$

$$\Phi_k[x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x] = \frac{x - x_{k-1}}{\Phi_{k-1}[x_0, \dots, x_{k-2}, x] - \Phi_{k-1}[x_0, \dots, x_{k-2}, x_{k-1}]},$$

де  $k=1, 2, \dots$ . Вираз  $\Phi_n[x_0, \dots, x_n]$  називають *оберненою n-ою поділеною різницею* функції  $f(x)$  для значень аргументу  $x_0, x_1, \dots, x_n$ .

Послідовно підставляючи ці вирази, отримаємо зображення функції  $f(x)$  у вигляді дроби:

$$f(x) = \Phi_0(x_0) + \frac{x - x_0}{\Phi_1[x_0, x_1] + \frac{x - x_1}{\Phi_2[x_0, x_1, x_2] + \dots + \frac{x - x_{n-1}}{\Phi_n[x_0, \dots, x_{n-1}, x_n] + \frac{x - x_n}{\Phi_{n+1}[x_0, \dots, x_n, x]}}}}.$$

Відкинувши останню ланку, отримаємо *інтерполяційний дріб Тіле*:

$$\Phi_0(x_0) + \frac{x - x_0}{\Phi_1[x_0, x_1] + \frac{x - x_1}{\Phi_2[x_0, x_1, x_2] + \dots + \frac{x - x_{n-1}}{\Phi_n[x_0, \dots, x_{n-1}, x_n]}}$$

Вирази вигляду

$$\rho_k(x_0, \dots, x_{k-1}, x_k) = \frac{x_k - x_{k-1}}{\rho_{k-1}(x_0, \dots, x_{k-2}, x_k) - \rho_{k-1}(x_0, \dots, x_{k-2}, x_{k-1})} + \rho_{k-2}(x_0, \dots, x_{k-2}),$$

$\rho_{-1} = 0$ ,  $k=1,2,\dots$  називають *оберненою різницею* функції  $f(x)$  для значень аргументу  $x_0, x_1, \dots, x_k$ .

Справджуються такі співвідношення

$$\rho_k[x_0, \dots, x_k] = \Phi_k[x_0, \dots, x_k] + \Phi_{k-2}[x_0, \dots, x_{k-2}] + \dots + \Phi_{k-2[k/2]}[x_0, x_{k-2[k/2]}],$$

які називатимемо *оберненими різницями 2-го типу*. Обернені різниці симетричні відносно усіх своїх аргументів.

Якщо існує границя оберненої різниці  $n$ -го порядку  $\rho_n(x_0, x_1, \dots, x_n)$ , при  $x_0, x_1, \dots, x_n \rightarrow x$ , то граничне значення називається *оберненою похідною Тіле  $n$ -го порядку* функції  $f(x)$  в точці  $x$ .

Для обернених похідних виконується рекурентне співвідношення

$${}^{(n)}f(x) = {}^{(n-2)}f(x) + n[{}^{(n-1)}f(x)],$$

де  $n=2,3,\dots$ , причому  ${}^{(0)}f(x) = f(x)$ ,  ${}^{(1)}f(x) = \frac{1}{f'(x)}$ .

Наприклад, розвинення показникової та степеневої функцій в неперервний дріб Тіле в околі точки  $x_0$  матиме вигляд

$$e^x = e^{x_0} \left( 1 + \frac{x-x_0}{|1|} - \frac{x-x_0}{|2|} + \frac{x-x_0}{|3|} - \frac{x-x_0}{|2|} + \frac{x-x_0}{|5|} - \frac{x-x_0}{|2|} + \frac{x-x_0}{|7|} - \dots - \frac{x-x_0}{|2|} + \frac{x-x_0}{|2k+1|} - \dots \right),$$

$$\begin{aligned} (c+x)^\alpha &= \\ &= (c+x_0) \left( 1 + \frac{\alpha(x-x_0)}{|c+x_0|} + \frac{(1-\alpha)(x-x_0)}{|2|} + \frac{(1+\alpha)(x-x_0)}{|3(c+x_0)|} + \right. \\ &\quad + \frac{(2-\alpha)(x-x_0)}{|2|} + \frac{(2+\alpha)(x-x_0)}{|5(c+x_0)|} + \frac{(3-\alpha)(x-x_0)}{|2|} + \\ &\quad \left. + \frac{(3+\alpha)(x-x_0)}{|7(c+x_0)|} + \dots + \frac{(k-\alpha)(x-x_0)}{|2|} + \frac{(k+\alpha)(x-x_0)}{|(2k+1)(c+x_0)|} + \dots \right). \end{aligned}$$

Різні конструкції багатовимірних узагальнень неперервних дробів виникли в теорії чисел. Ще Лагранж довів, що кожна квадратична ірраціональність розвивається у правильний неперервний періодичний дріб. Проблема побудови правильних багатовимірних неперервних дробів, у які розвивались би довільні алгебраїчні ірраціональності вищих порядків залишається сьогодні відкритою. У цьому плані одним з найбільш вдалих і досліджених узагальнень неперервних дробів є алгоритм Якобі-Перрона. Якобі побудував алгоритм, який дав можливість як завгодно точно наблизити два несумірні дійсні числа раціональними зі спільним знаменником. Це перша спроба знайти трьохвимірні аналоги правильних неперервних дробів. Збіжність алгоритму обґрунтував Перрон через 37 років.

Для побудови розвинення дійсного числа у правильний неперервний дріб використовується алгоритм Евкліда. Підхідні дроби цього розвинення дають найкращі раціональні наближення даного числа. Можна отримати багатовимірні узагальнення неперервних дробів, узагальнюючи алгоритм Евкліда. Цей підхід застосував норвежський математик Viggo Brun ще в 1919 р. Він використав інтерпретацію алгоритму Евкліда як алгоритму “різниць”. Майже через 40 років він повернувся до цієї тематики. Розглядаючи алгоритм Евкліда як алгоритм “часток”, Є. В. Подсипанін побудував алгоритм, по суті еквівалентний алгоритму Brun’а.

Японський математик Katahiro Takebe (1664 – 1739) застосував поняття, що узагальнює неперервний дріб до розв’язання діофантових нерівностей. Це було першим узагальненням неперервних дробів.

В. Я. Скоробогатько запропонував багатовимірне узагальнення неперервного дроби для функцій багатьох змінних, назвавши його гіллястим ланцюговим дробом. Поняття гіллястого ланцюгового дроби (ГЛД) було одним із його наукових відкриттів, яке він активно пропагував все своє життя, починаючи з 1966 року, коли було вперше опубліковано дві праці з даної тематики у матеріалах Другої конференції молодих математиків України. Він створив наукову школу з аналітичної теорії ГЛД та їх застосувань, вагомий



вклад у формування якої внесли також його учні: П. І. Боднарчук, Р. В. Слоньовський, І. П. Пустомельников, Д. І. Боднар, Х. Й. Кучмінська, М. С. Сявавко, М. О. Недашковський, В. Семашко, В. І. Шмойлов, З. І. Крупка, Я. М. Пелех, Є. М. Максимів, М. М. Пагіря, І. В. Єрохов та їх учні: Р. І. Дмитришин, Т. М. Антонова, О. М. Сусь, Н. П. Гоєнко, О. С. Манзій, В. Р. Гладун, О. Є. Баран, І. Б. Біланик, Є. О. Болтарович, М. М. Бубняк, Р. І. Михальчук, С. М. Возна, О. Я. Ковальчук, Р. А. Кацала.

Особливі та частинні випадки таких дробів розглядалися раніше. В роботі Ilse Pratiє вони виникли при застосуванні композицій відображень Жуковського

$$w_n = \frac{a_n}{2} \left( \frac{w_{n+1}}{a_{n+1}} + \frac{a_{n+1}}{w_{n+1}} \right), \quad n = 1, 2, \dots,$$

до задачі уніформизації, у В. П. Терських – при дослідженні механічних коливань у різних енергетичних установках в суднобудуванні.

Гіллясті ланцюгові дроби (ГЛД) визначаються за допомогою композицій багатовимірних дробово-лінійних відображень. ГЛД – це послідовність  $\{f_n\}$ , де

$$f_n = b_0 + \frac{\sum_{i_1=1}^N \frac{a_{i_1}}{b_{i_1} + \sum_{i_2=1}^N \frac{a_{i_1 i_2}}{b_{i_1 i_2} + \dots + \sum_{i_n=1}^N \frac{a_{i_1 i_2 \dots i_n}}{b_{i_1 i_2 \dots i_n}}}}}{\sum_{i_1=1}^N \frac{a_{i_1}}{b_{i_1} + \sum_{i_2=1}^N \frac{a_{i_1 i_2}}{b_{i_1 i_2} + \dots + \sum_{i_n=1}^N \frac{a_{i_1 i_2 \dots i_n}}{b_{i_1 i_2 \dots i_n}}}}} = b_0 + \mathcal{D} \sum_{k=1}^n \frac{a_{i_1 i_2 \dots i_k}}{b_{i_1 i_2 \dots i_k}}.$$

Характерні рекурентні формули для канонічних чисельників та канонічних знаменників підхідних дробів багатовимірних узагальнень неперервних дробів, що розглядалися раніше, для ГЛД не справедливі. Різні аспекти в дослідженні аналітичної теорії ГЛД розглядалися у монографіях П. І. Боднарчука і В. Я. Скоробогатька, В. Я. Скоробогатька, Д. І. Боднара, М. С. Сявавка, Х. Й. Кучмінської та оглядових статтях Д. І. Боднара і Х. Й. Кучмінської.

М. С. Сявавко запропонував континуальний аналог ГЛД і застосував його до розв'язання інтегральних рівнянь. М. О. Недашковським та його учнями

побудовані економічні чисельно стійкі методи розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь на основі гіллястих ланцюгових дробів.

Серед різноманітних багатовимірних узагальнень неперервних дробів найбільш пристосованими до наближення функцій багатьох змінних є гіллясті ланцюгові дроби. Існують різні конструкції таких дробів: ГЛД з  $N$  гілками розгалуження, двовимірні відповідні неперервні дроби, ГЛД з нерівнозначними змінними. Найпростішими за структурою, аналогічні структурі кратних степеневих рядів, є гіллясті ланцюгові дроби з нерівнозначними змінними.

ГЛД з нерівнозначними змінними досліджувались в роботах Д. І. Боднара, О. Є. Баран, Т. М. Антонової, В. Семашка, Р. І. Дмитришина, М. М. Бубняк, І. Б. Біланик.

Подвійний степеневий ряд можна записати у вигляді

$$\sum_{i,j=0}^{\infty} c_{ij} z_1^i z_2^j = \sum_{j=0}^{\infty} \left( \sum_{i=0}^{\infty} c_{ij} z_1^i \right) z_2^j.$$

Переносячи цю ідею по формі запису на багатовимірний дріб, отримаємо

$$f(z_1, z_2) = f_0(z_1) + \frac{a_{01} z_2}{f_1(z_1) + \frac{a_{02} z_2}{f_2(z_1) + \dots}} = b_0 + \frac{a_{10} z_1}{1 + \frac{a_{20} z_1}{1 + \dots}} + \frac{a_{01} z_2}{1 + \frac{a_{11} z_1}{1 + \frac{a_{21} z_1}{1 + \dots}} + \frac{a_{02} z_2}{1 + \dots}}.$$

Загальний ГЛД з  $N = 2$  гілками розгалуження має таку структуру:

$$b_0 + \frac{a_1 z_1}{1 + \frac{a_{11} z_1}{1 + \dots} + \frac{a_{12} z_2}{1 + \dots}} + \frac{a_2 z_2}{1 + \frac{a_{21} z_1}{1 + \dots} + \frac{a_{22} z_2}{1 + \dots}}.$$

Для запису ГЛД загального вигляду будемо вживати позначення

$$b_0 + D \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}}. \quad (14)$$

Для запису ГЛД з нерівнозначними змінними – позначення

$$b_0 + D \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}},$$

де  $i_0 = N$ ,  $i(k) = i_1 i_2 \cdots i_k$ , – мультиіндекс,  $a_{i(k)}$ ,  $b_{i(k)}$  – комплексні числа або функції.

Створена В. Я. Скоробогатьком наукова школа з аналітичної теорії ГЛД та їх застосувань продовжує розвивати як аналітичну теорію ГЛД так і інших багатовимірних узагальнень неперервних дробів. Досліджуються числові і функціональні ГЛД загального вигляду з  $N$  ( $N > 1$ ) гілками розгалуження, спеціального вигляду з нерівнозначними змінними, двовимірні неперервні дроби (ДНД). Зазначимо деякі найважливіші, з нашої точки зору, отримані результати і напрямки досліджень.

**1. Дослідження дробів з дійсними елементами.** Для ГЛД загального вигляду в роботах Т. М. Антонової, В. Р. Гладуна, для ДНД в роботах Т. М. Антонової, Х. Й. Кучмінської, О. М. Сусь досліджувались властивості послідовностей підхідних дробів, елементами яких є дійсні числа, зокрема, властивості монотонності, обмеженості. Це дало змогу довести ряд достатніх ознак збіжності ГЛД з дійсними елементами, дослідити багатовимірні множини збіжності різних підпослідовностей їх підхідних дробів. Деякі, отримані тут результати, не мають аналогів у теорії неперервних дробів.

**2. Побудова та дослідження багатовимірних  $g$ -дробів.** Найбільш вивченим класом функціональних неперервних дробів є  $g$ -дроби, якими зображається клас голоморфних функцій на площині з розрізом вздовж дійсної осі від мінус одиниці до мінус нескінченності. Різні конструкції багатовимірних  $g$ -дробів запропоновані Д. І. Боднаром та Р. І. Дмитришиним (на основі загальних ГЛД та ГЛД з нерівнозначними змінними), Х. Й. Кучмінською, С. М. Возною (на основі ДНД). Техніка  $g$ -дробів і ланцюгових послідовностей використана при доведенні багатьох ознак збіжності ГЛД та ДНД, зокрема, аналогів теорем Перрона, Ван Флека, Пейдона — Уолла, Слешинського — Прінгсгейма, Коха та ін. Для таких дробів Р. І. Дмитришин побудував

параболічні та еліптичні області збіжності, отримав оцінки похибок наближень підхідними дробами. Аналогічні результати встановлено і для двовимірних  $g$ -дробів, побудованих на основі ДНД. У роботі Д. І. Боднара і Р. І. Дмитришина досліджений аналог алгоритму Бауера розвинення подвійного степеневого ряду у двовимірній  $g$ -дріб із нерівнозначними змінними.

### **3. Наближення гіпергеометричних функцій багатьох змінних.**

Встановлено нові рекурентні співвідношення для гіпергеометричних функцій Аппеля (Д. І. Боднар, О. С. Манзій), Лаурічелли (Н. П. Гоєнко), Лаурічелли—Сарана, Горна вироджених гіпергеометричних функцій (Р. І. Дмитришин, Т. М. Антонова), на основі яких побудовано розвинення відношення цих функцій у ГЛД, досліджено збіжність отриманих розвинень. Н. П. Гоєнко отримала багатовимірне узагальнення ознаки збіжності Ньорлунда, оцінки похибок наближень підхідними дробами та, використовуючи принцип відповідності для послідовності аналітичних функцій до формального кратного степеневого ряду, встановила критерій рівномірної збіжності до функції її формального розвинення у ГЛД.

**4. Дослідження збіжності різних типів багатовимірних неперервних дробів із комплексними елементами.** Є. О. Болтарович довів, що теорема Лейтона—Уолла (теорема про спарені області збіжності) в принципі не переноситься на ГЛД. Різні аналоги цієї теореми були встановлені Є. О. Болтавичем (для ГЛД загального вигляду), Т. М. Антоною і О. М. Сусь (для ДНД), О. Є. Баран (для ГЛД з нерівнозначними змінними). Д. І. Боднар, Р. І. Дмитришин, Х. Й. Кучмінська, Т. М. Антонова, О. М. Сусь, В. Р. Гладун, І. Б. Біланик встановили нові ознаки збіжності типу множин збіжності (параболічні, кутові, кругові та інші), М. О. Недашковський отримав узагальнення теореми Слешинського – Прінгсгейма для ГЛД загального вигляду, елементами якого є комплексні матриці. У вигляді таких дробів він представив розв'язки алгебраїчних рівнянь із матричними коефіцієнтами. Р. І. Дмитришин дослідив відповідність між кратними степеневими рядами і

гіллястими ланцюговими дробами з нерівнозначними змінними, означив та дослідив різні класи функціональних ГЛД з нерівнозначними змінними.

**5. Побудова інтерполяційних формул у вигляді ДНД.** Для функцій двох змінних узагальнено як відомі інтерполяційні формули Тіле (Х. Й. Кучмінська, В. Сємашко, М. М. Пагіря), так і побудовано нові формули (симетричну і несиметричну) на основі комбінації обернених різниць Тіле та розділених різниць Ньютона, так званих змішаних різниць – формули типу Ньютона—Тіле (Х. Й. Кучмінська, С. М. Возна).

**6. Дослідження стійкості до збурень ГЛД.** В. Р. Гладун дав означення стійкості до збурень для нескінченних ГЛД загального вигляду, встановив різні формули для обчислення абсолютних та відносних похибок підхідних дробів, отримав умови стійкості до збурень ГЛД з додатними, від’ємними та знакозмінними дійсними елементами, побудував та дослідив багатовимірні множини стійкості ГЛД із комплексними компонентами.

**7. Інтегральні ланцюгові дроби (ІЛД).** М. С. Сявавко означив континуальний аналог гіллястого ланцюгового дроби – ІЛД, побудував разом зі своїми учнями основи аналітичної теорії ІЛД, застосував ці дроби для розв’язання інтегральних рівнянь. Ознаки збіжності ІЛД встановлені М. С. Сявавком, Р. І. Михальчуком, Т. М. Антоновою; їх застосування розглядалися Т. В. Пасічником, О. М. Рибицькою. Б. Р. Михальчук застосував ІЛД для інтерполяції функціоналів.

Результати досліджень регулярно доповідаються на всеукраїнських, міжнародних школах, семінарах, конференціях. Організовано та проведено три конференції „Ланцюгові дроби, їх узагальнення та застосування“ (1975, Львів; 1994, Верхнє-Синєвидне; 2002, Ужгород).

При вивченні властивостей послідовності  $\{f_k\}$  наближень ГЛД (14) використовується формула різниці  $f_m - f_n$ ,  $n = 1, 2, \dots, m > n$ ,

$$f_m - f_n = (-1)^n \sum_{i_1=1}^N \dots \sum_{i_{n+1}=1}^N \frac{\prod_{k=1}^{n+1} a_{i(k)}}{\prod_{k=1}^{n+1} Q_{i(k)}^{(m)} \prod_{k=1}^n Q_{i(k)}^{(n)}},$$

де

$$Q_{i(k)}^{(n)} = b_{i(k)} + D \sum_{p=k+1}^n \sum_{i_p=1}^N \frac{a_{i(p)}}{b_{i(p)}}$$

– залишки ГЛД (14).

Нехай задано формальний кратний степеневий ряд

$$L(z) = \sum_{|m(N)| \geq 0} c_{m(N)} z^{m(N)}, \quad (15)$$

де  $c_{m(N)} \in \mathbb{C}$ ,  $z = (z_1, z_2, \dots, z_N) \in \mathbb{C}^N$ ,  $m(N) = m_1 m_2 \dots m_N$  – мультиіндекс,  $m_i \geq 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ ;  $|m(N)| = m_1 + m_2 + \dots + m_N$ ;  $z^{m(N)} = z_1^{m_1} z_2^{m_2} \dots z_N^{m_N}$ .

Деякий функціональний ГЛД є відповідним ряду (15), якщо розвинення кожного його  $n$ -го підхідного дробу у формальний кратний степеневий ряд збігається з рядом (15) за всіма однорідними поліномами до степеня  $\nu_n$  включно і  $\nu_n \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$ .

У класі багатовимірних  $S$ -дробів з  $N$  гілками розгалуження

$$b_0 + D \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^N \frac{a_{i(k)} z_{i_k}}{1}$$

ця задача не має однозначного розв'язку. Для досягнення бажаного результату потрібно накладати додаткові умови на коефіцієнти дробу, наприклад  $a_{i(k)}$  не змінюються при перестановці індексів у всіх мультиіндексах або покласти деякі  $a_{i(k)}$  рівними нулю. Другий шлях – це змінити структуру відповідного дробу і (або) структуру підхідних дробів.

Саме так були означені відповідні двовимірні неперервні дроби для подвійних степеневих рядів у роботах J. A. Murphy і M. R. O'Donohoe,

Х. Й. Кучмінської. Дещо іншу структуру двовимірних неперервних дробів запропонував В. Семашко.

Відповідні ГЛД для ряду (15) можна будувати у вигляді ГЛД з нерівнозначними змінними

$$b_0 + D \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{i(k)} z_{i_k}}{1},$$

де  $i_0 = N$ . Такі дроби в даний час найбільш активно досліджуються. Для них розглянуто різні ознаки збіжності та встановлено зв'язок із кратними степеневими рядами.

Р. І. Дмитришин означив та дослідив різні класи функціональних гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними, встановив умови їх збіжності, дав оцінки похибок апроксимації підхідними дробами, побудував різні багатовимірні алгоритми розвинення кратних степеневих рядів в такі дроби, зокрема:  $g$ -алгоритм Бауєра,  $q$ - $d$ -алгоритм Рутисхаузера та інші. Він побудував та дослідити розвинення деяких конкретних аналітичних функцій функціональними ГЛД з нерівнозначними змінними.

Наприклад, функція

$$F(a,1,c;z_1) F(b,1,d;-z_2 \cdot (F(a,1,c;-z_1))^2) = \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \left( \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(a)_k}{(c)_k} z_1^k \right)^{2l+1} \times \frac{(b)_l}{(d)_l} z_2^l$$

розкладається у  $g$ -дріб з нерівнозначними змінними

$$\left( \Phi_0(z_1) + D \frac{g_{0n}(1-g_{0n})z_2}{\Phi_n(z_1)} \right)^{-1}, \quad \Phi_n(z_1) = 1 + g_{1n}z_1 \left( 1 + D \frac{g_{kn}(1-g_{k-1,n})z_1}{1} \right)^{-1},$$

$$g_{2r-1,l-1} = \frac{a+r-1}{c+2r-2}, \quad g_{2r,l-1} = \frac{r}{c+2r-1}, \quad g_{0,2l-1} = \frac{b+l-1}{d+2l-2}, \quad g_{0,2l} = \frac{l}{d+2l-1}.$$

У різних класах ГЛД розглядаються різні типи функціональних ГЛД: багатовимірні  $g$ -,  $J$ -,  $\pi$ -,  $S$ -,  $C$ -дроби. Найбільш вивченими є багатовимірні  $g$ -дроби.

Дослідимо збіжність ГЛД з додатними і комплексними компонентами. Сформулюємо багатовимірні аналоги деяких класичних ознак збіжності неперервних дробів.

**Теорема 1 (Зейдель 1848).** Неперервний дріб  $b_0 + D \frac{1}{b_k}$ , де  $b_k > 0$ ,

збігається тоді і тільки тоді, коли розбігається ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ .

Нехай  $\alpha_k = \min(b_{i(k)} : 1 \leq i_p \leq N, p = \overline{1, k})$ ,  $\beta_k = \max(b_{i(k)} : 1 \leq i_p \leq N, p = \overline{1, k})$

– мінімальний і максимальний елементи ГЛД на  $k$ -му поверсі.

**Теорема 2. ГЛД**

$$b_0 + D \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{b_{i_k}} \quad (16)$$

з додатними елементами розбігається, якщо ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k$  збігається.

**Теорема 3.** ГЛД (16) з додатними елементами збігається, якщо

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^{2m+1} \alpha_{k-1} (\alpha_k + N^{-1} \alpha_{k-2} + N^{-2} \alpha_{k-4} + \dots + N^{-[(k-1)/2]} \alpha_{k-2[(k-1)/2]}) = \infty.$$

Питання чи умова розбіжності ряду  $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k$  є достатньою для збіжності

дробу (16) сьогодні є відкритим. Встановлено необхідні і достатні умови збіжності (16) при деяких додаткових обмеженнях. Наприклад,  $\beta_k \leq M \alpha_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$

Для гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними з додатними елементами

$$b_0 + D \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{b_{i_k}}, \quad (17)$$

І. Б. Біланик встановила критерій збіжності та ефективну достатню умову збіжності.



**Теорема 4.** ГЛД (17) з додатними елементами є збіжним, якщо розбіжними є ряди

$$\sum_{p=1}^{\infty} b_{m[p]}, m = \overline{1, N}; \sum_{p=1}^{\infty} b_{i[n]m[p]}, m = \overline{1, N-1}, i(n) \in I^{(m+1)},$$

де

$$I^{(m)} = \{i(n) = i_1 i_2 \dots i_n : m \leq i_n \leq i_{n-1} \leq \dots \leq i_0; n \geq 1; i_0 = N\},$$

$$m = \overline{2, N}, m[p] = \underbrace{mm \dots m}_p.$$

Розглянемо багатовимірне узагальнення ознаки збіжності Ворпіцького.

**Теорема 5 (Ворпіцький, 1865).** Якщо для неперервного дроби

$$\left(1 + \mathbf{D} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{c_k(z)}{1}\right)^{-1} \quad (18)$$

де  $c_k(z)$  – комплексні функції, визначені в деякій області  $G$ , виконуються умови

$$|c_k(z)| \leq \frac{1}{4}, k = 1, 2, \dots,$$

то:

а) дріб (18) рівномірно збігається в  $G$ ;

б) областю значень є круг

$$\left|z - \frac{4}{3}\right| \leq \frac{2}{3};$$

в) стала  $\frac{1}{4}$  і область значень є найкращими, тобто сталу не можна збільшити, область значень зменшити.

**Теорема 6.** Якщо для ГЛД

$$\left(1 + \mathbf{D} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^N \frac{a_{i(k)}}{1}\right)^{-1}, \quad (19)$$

де  $a_{i(k)}$  – комплексні числа, при всеможливих наборах індексів виконуються умови

$$\sum_{i_k=1}^N |a_{i(k)}| \leq \alpha \leq \frac{1}{4}, \quad (20)$$

то:

1) ГЛД (20) збігається;

2) справджується оцінка швидкості збіжності

$$|f - f_m| \leq \frac{(1-q^2)q^m}{1-q^{m+1}}, m \geq 1, \text{ якщо } 0 \leq \alpha < \frac{1}{4};$$

$$|f - f_m| \leq \frac{2}{m+2}, m \geq 1, \text{ якщо } \alpha = \frac{1}{4},$$

де  $f$  – значення ГЛД (20),  $f_m$  – його  $m$ -ий підхідний дріб

$$q = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\alpha}}{1 + \sqrt{1 - 4\alpha}};$$

3) значення дроби (20) і всіх його підхідних дробів лежать в області

$$\left| \left( \alpha + \frac{1}{2} (1 + \sqrt{1 - 4\alpha}) \right) z - 1 \right| \leq \frac{1}{2} (1 - \sqrt{1 - 4\alpha}); \quad (21)$$

4) гранична стала  $\alpha = \frac{1}{4}$  є найкращою, її не можна збільшити, а відповідну область значень (20) не можна зменшити.

Багато з існуючих ознак збіжності неперервних дробів є ознаками типу областей збіжності (теореми Ворпіцького, Ван Флека, параболічні теореми).

Дві області  $G_1$  і  $G_2$  комплексної площини називаються парними областями збіжності неперервного дроби

$$\mathbf{D} \frac{a_k}{1}, \quad (22)$$

якщо при виконанні умов  $a_{2k-1} \in G_1$  і  $a_{2k} \in G_2$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , дріб (22) збігається.

Перший результат про парні області збіжності був отриманий у 1936 році Лейтоном і Уоллом: для збіжності дробу (22) достатньо виконання умов

$$|a_{2k-1}| \leq \frac{1}{4} \text{ і } |a_{2k}| \leq \frac{25}{4}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Покладаючи  $a_k = c_k^2$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , Троном була встановлена теорема збіжності неперервного дробу

$$\mathbf{D} \frac{\prod_{k=1}^{\infty} c_k^2}{1} \quad (23)$$

до скінченного значення, якщо

$$|c_{2k-1}| \leq \rho \text{ і } |c_{2k} \pm i| \geq \rho, \quad 0 < \rho < 1, \quad k = 1, 2, \dots,$$

причому ця збіжність є рівномірною відносно даних областей. Ланге довів збіжність дробу (23) до скінченного значення за умов, що

$$|c_{2k-1} \pm ia| \leq \rho \text{ і } |c_{2k} \pm i(1+a)| \geq \rho, \quad k = 1, 2, \dots,$$

де  $a \in \mathbb{C}$  та  $a$  і  $\rho$  задовольняють нерівність  $|a| < \rho < |a+1|$ , причому ця збіжність є рівномірною відносно областей збіжності.

Для  $\rho = 1$  Трон довів, що умови  $|c_{2k-1}| \leq 1$  і  $|c_{2k} \pm i| \geq 1$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , разом з умовою  $|c_{2k}| > \varepsilon$ , де  $\varepsilon$  – довільне додатне число, достатні для збіжності дробу (23) до скінченного значення, збіжність є рівномірною відносно даних областей.

Для  $\rho > 1$  Трон встановив, що для збіжності дробу (22) до скінченного значення достатньо виконання умов

$$|a_{2k-1}| \leq \rho^2 \text{ і } |a_{2k}| \geq 2(\rho^2 = \cos \arg a_{2k}), \quad k = 1, 2, \dots$$

Важливим є результат Н. Вишінскі та Дж. Мак Лафлін, який встановлює, що дріб (22) збігається до скінченного значення, якщо

$$|a_{2k-1}| \leq c \text{ і } |a_{2k}| \geq 1 + 3c + 2\sqrt{c}\sqrt{2c+1}, \quad k = 1, 2, \dots, \text{ де } c > 0.$$

Досліджувалися парні області збіжності для ГЛД з  $N > 1$  гілками розгалуження на кожному поверсі. Є. А. Болтаровичом був побудований контрприклад, з якого випливає, що теорема Лейтона-Уолла у природному

формулюванні, як теорема про парні області збіжності, на ГЛД не переноситься. Ним був встановлений аналог цієї теореми для дробу вигляду

$$\mathbf{D} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{i(k)}}{1}, \quad (24)$$

де  $i(k) = i_1 i_2 \dots i_k$  – мультиіндекс,  $a_{i(k)}$  – комплексні числа.

**Теорема 7.** *Нехай частинні чисельники ГЛД (24) з  $N > 1$  гілками розгалуження є комплексними числами, які задовольняють умови:*

$$1) |a_{i(2k-1)}| \leq \frac{\alpha}{N}, \quad i_p = \overline{1, N}, \quad p = \overline{1, 2k-1}, \quad k = 1, 2, \dots;$$

2) для кожного натурального  $k$  існує єдиний індекс  $j_{2k}$ ,  $1 \leq j_{2k} \leq N$ , що

$$|a_{i(2k-1)j_{2k}}| \geq R, \quad i_p = \overline{1, N}, \quad p = \overline{1, 2k-1}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$|a_{i(2k)}| \leq \frac{r}{N-1}, \quad i_p = \overline{1, N}, \quad p = \overline{1, 2k}, \quad i_{2k} \neq j_{2k}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

де  $\alpha$ ,  $r$ ,  $R$  – довільні дійсні числа, такі, що

$$0 \leq \alpha \leq \frac{1}{4}, \quad 0 \leq r < \infty, \quad R > \frac{(1+\alpha)(r+2-2\alpha)}{1-\alpha},$$

$$(1-\alpha)^2 \left( \frac{R}{1+\alpha} - \frac{r}{1-\alpha} - 1 \right)^2 > \alpha(R+r).$$

Тоді ГЛД (24) збігається.

Області збіжності в теоремі 7 не є парними. Парні області збіжності ГЛД досліджували у своїх роботах Т. М. Антонова та В. Р. Гладун, для гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними – О. Є. Баран.

О. Є. Баран для гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду встановлено кругові області збіжності, які є багатовимірними узагальненнями деяких відомих теорем (У. Лейтона і Г. Уолла, В. Трона, Л. Ланге, Н. Вишінські та Дж. Мак Лафліна) про спарені множини збіжності неперервних дробів. У випадку  $N = 1$  при певних умовах на параметри отримані нею кругові множини збіжності є ширшими, ніж у згаданих вище теоремах.

Позначимо через  $I$  множину всіх мультиіндексів  $i(k)$ , тобто

$$I = \{i(k) : i(k) = i_1 i_2 \dots i_k, 1 \leq i_p \leq i_{p-1}, p = \overline{1, k}, k = 1, 2, \dots, i_0 = N\}.$$

Розіб'ємо множину  $I$  на три підмножини  $I = I_1 \cup I_2 \cup I_3$ , які попарно не перетинаються:

$$I_1 = \{i(k) : i(k) \in I, l = 1, k = 1, 2, \dots\},$$

$$I_2 = \{i(k) : i(k) \in I, l - \text{парне}, l > 1, k = 2, 3, \dots\},$$

$$I_3 = \{i(k) : i(k) \in I, l - \text{непарне}, l > 1, k = 3, 4, \dots\},$$

де  $l = \sum_{s=1}^k \delta_{i_k}^{i_s}$  – кількість повторів індекса  $i_k$  в мультиіндексі  $i(k) \in I$ ,  $\delta_{i_k}^{i_s}$  –

символ Кронекера.

Ці множини попарно не перетинаються.

**Теорема 8.** Гіллястий ланцюговий дріб ( $N > 1$ )

$$D \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{c_{i(k)}^2}{1}$$

з комплексними елементами  $c_{i(k)}$ , збігається, якщо виконуються умови:

$$a) |c_{i(k)} \pm i\Gamma_{1,i_k}| \leq \xi_{1,i_k}, \left( \xi_{1,i_k} + |\Gamma_{1,i_k}| \right)^2 \leq \frac{\rho_1 - \varepsilon_1}{i_{k-1} - 1}, i(k) \in I_1;$$

$$б) |c_{i(k)} \pm i\Gamma_{2,i_k}| \leq \xi_{2,i_k}, \left( \xi_{2,i_k} + |\Gamma_{2,i_k}| \right)^2 \geq (2 + \rho_1)(1 + \rho_1 + \rho + \varepsilon_2), i(k) \in I_2;$$

$$в) |c_{i(k)} \pm i\Gamma_{3,i_k}| \leq \xi_{3,i_k}, \left( \xi_{3,i_k} + |\Gamma_{3,i_k}| \right)^2 \leq (\rho - \varepsilon_3), i(k) \in I_3,$$

де

$$\rho_1 > 0, \rho > 0, 0 < \varepsilon_1 < \rho, 0 < \varepsilon_3 < \rho, \varepsilon_2 > 0,$$

$$\Gamma_{s,i_k} \in \mathbb{C}, \xi_{s,i_k} > 0, s = 1, 2, 3.$$

Для гіллястого ланцюгового  $S$ -дріб з нерівнозначними змінними

$$D \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{a_{i(k)} z_{i_k}}{1}, \quad (25)$$

де  $i(k) = i_1 i_2 \dots i_k$  – мультиіндекс,  $i_0 = N$ ,  $N$  – кількість гілок розгалужень,  $N \geq 2$ ,  
 $a_{i(k)}$  – комплексні числа,  $z = (z_1, z_2, \dots, z_N) \in C^N$ .

**Теорема 9.** ГЛД (25) рівномірно збігається в замкненій області

$$D = \{z \in C^N, \alpha \leq |z_p| \leq \beta, p = 1, 2, \dots, N\}$$

до деякої голоморфної функції  $f(z)$ , якщо елементи дробу  $a_{i(k)}$  – комплексні числа, які задовольняють умови

$$|a_{i(k)}| \leq \begin{cases} \frac{r_1/\beta}{i_{k-1} - 1}, \text{ якщо } i(k) \in I_1; \\ r/\beta, \text{ якщо } i(k) \in I_3; \end{cases}$$

$$|a_{i(k)}| \geq \frac{1}{\alpha} (2 + r_1)(1 + r_1 + r), i(k) \in I_2,$$

$$0 < r_1 < \frac{1 - 3r}{1 + r}, 0 < r < \frac{1}{3},$$

і справджується оцінка швидкості збіжності

$$|f - f_m| < M C_{N+m}^{N-1} q^{m+1},$$

де  $f$  – значення ГЛД (25),  $f_m$  – його  $m$ -ий підхідний дріб,

$$M = \left(\frac{r_1}{r}\right)^p, p = i_1 - i_{m+1} + 1, 1 \leq p \leq N$$

$$q = \frac{\alpha}{\beta}, \alpha = \sqrt{(2 + r_1)r}, \beta = \sqrt{1 - r_1 - r}.$$

Найбільш загальну параболічну область збіжності для ГЛД загального вигляду встановила Т.М. Антонова

**Теорема 10.** Нехай існують такі додатні сталі  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon < 1$ , і  $\psi$ ,  $\psi < \frac{\pi}{2(1 + \varepsilon)}$

що для всіх можливих мультиіндексів елементів ГЛД

$$\mathbf{D} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{i(k)}}{1} \quad (26)$$

задовольняються умови

$$\sum_{i_k=1}^N \frac{|a_{i(k)}| - \operatorname{Re}(a_{i(k)} \exp(-i(\psi_{i(k-1)} + \psi_{i(k)})))}{\cos \psi_{i(k)} - p_{i(k)}} \leq 2(1 - \varepsilon) p_{i(k-1)},$$

де  $\psi_{i(k)}$ ,  $p_{i(k)}$  – деякі дійсні числа такі, що

$$|\psi_{i(n)}| \leq \psi, n = 0, 1, 2, \dots; \dots, 0 \leq p_{i(k)} < (1 - \varepsilon) \cos \psi_{i(k)}, k = 1, 2, \dots, p_0 \geq 0.$$

Тоді

1) значення всіх підхідних дробів ГЛД (1) скінченні і лежать у півплощині

$$V_0 = \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(w \exp(-i\psi_0)) \geq -p_0\};$$

2) існують скінченні границі підпоследовностей підхідних дробів  $\{f_{2n}\}$ ,  $\{f_{2n-1}\}$  ГЛД (26);

3) ГЛД (26) збігається, якщо розбігається ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left( \max |a_{i(k)}| \right)^{-1}.$$

В. Р. Гладун по новому став трактувати питання стійкості ГЛД, як стійкість до збурень, як неперервну залежність нескінченних ГЛД від своїх елементів.

Нехай

$$I_0 = \{0\}, I_k = \{i(k) : i_p = 1, 2, \dots, N; p = 1, 2, \dots, k\}, k \geq 1.$$

Розглянемо ГЛД

$$a_0 \left( b_0 + \mathbf{D} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}} \right)^{-1} \quad (27)$$

і збурений до нього ГЛД

$$\hat{a}_0 \left( \hat{b}_0 + \mathbf{D} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\hat{a}_{i(k)}}{\hat{b}_{i(k)}} \right)^{-1} \quad (28)$$

з комплексними елементами. Послідовність не порожніх множин

$$\{\Omega_{i(k)}\}, \Omega_{i(k)} \subset C^2$$

назвемо послідовністю множин абсолютної стійкості до збурень ГЛД (27), якщо для довільного дійсного  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ , існує таке дійсне число  $\delta$ ,  $\delta > 0$ , що для кожного

$$(a_{i(k)}, b_{i(k)}) \in \Omega_{i(k)}, i(k) \in I_k, k \geq 0,$$

і кожного

$$(\hat{a}_{i(k)}, \hat{b}_{i(k)}) \in \Omega_{i(k)}, i(k) \in I_k, k \geq 0,$$

таких, що

$$|a_{i(k)} - \hat{a}_{i(k)}| < \delta, |b_{i(k)} - \hat{b}_{i(k)}| < \delta,$$

виконуються нерівності

$$|f_n - \hat{f}_n| < \varepsilon, n \geq 0$$

де  $f_n, \hat{f}_n$  –  $n$ -ті підхідні дроби ГЛД (27) і (28) відповідно.

Якщо ж всі

$$a_{i(k)} \neq 0, b_{i(k)} \neq 0, i(k) \in I_k, k \geq 0,$$

і для кожного

$$(a_{i(k)}, b_{i(k)}) \in \Omega_{i(k)}, i(k) \in I_k, k \geq 0,$$

і кожного

$$(\hat{a}_{i(k)}, \hat{b}_{i(k)}) \in \Omega_{i(k)}, i(k) \in I_k, k \geq 0,$$

таких, що

$$\left| \frac{a_{i(k)} - \hat{a}_{i(k)}}{a_{i(k)}} \right| < \delta, \left| \frac{b_{i(k)} - \hat{b}_{i(k)}}{b_{i(k)}} \right| < \delta,$$



виконуються нерівності

$$\left| \frac{f_n - \hat{f}_n}{f_n} \right| < \varepsilon, \quad n \geq 0,$$

то послідовність множин  $\{\Omega_{i(k)}\}$  називають множинами відносної стійкості до збурень ГЛД (27).

Досліджено стійкість до збурень ГЛД з додатними, дійсними, зокрема, від'ємними, знакозмінними елементами, стійкість деяких підпослідовностей їх підхідних дробів. Особливо цікавим виявився факт збіжності, і тим більше стійкості, у випадку, коли частинні чисельники ГЛД є від'ємними. Це в принципі не можливо для неперервних дробів, в області

$$\left\{ x \in \mathbb{R} : x < -\frac{1}{4} \right\}.$$

**Теорема 11.** *Нехай відносні похибки елементів ГЛД (27) є рівномірно обмеженими. Тоді області*

$$\Omega_0 = (0, +\infty) \times (v_0, +\infty), \quad \Omega_{i(k)} = \Omega_k = (0, \mu_k) \times (v_k, +\infty), \quad i(k) \in I_k, \quad k \geq 1,$$

де всі  $v_k > 0$ ,  $\mu_k > 0$ , є послідовністю областей відносної стійкості ГЛД (27), якщо розбігається ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_{k-1} v_k^2 \mu_k^{-1} (N \mu_{k+1} + v_k v_{k+1})^{-1}.$$

Досліджено також багатовимірні множини стійкості ГЛД з комплексними елементами, коли

$$(a_{i(k)1}, a_{i(k)2}, \dots, a_{i(k)N}, b_{i(k)}) \in \Omega_{i(k)}, \quad \Omega_{i(k)} \subset \mathbb{C}^{N+1}, \quad i(k) \in I_k, \quad k \geq 0.$$

Цікавими і перспективними є дослідження збіжності ГЛД з матричними елементами. Нехай  $X$  – банахова алгебра квадратних матриць порядку  $p$  над полем  $\mathbb{C}$ . Матричний ГЛД – це послідовність підхідних дробів:

$$F_1 = \sum_{i_1=1}^N b_{i_1}^{-1} a_{i_1} = \sum_{i_1=1}^N \frac{a_{i_1}}{b_{i_1}},$$

$$F_2 = \sum_{i_1=1}^N \left( b_{i_1} + \sum_{i_2=1}^N b_{i_2}^{-1} a_{i_2} \right)^{-1} a_{i_1} = D \sum_{k=1}^2 \sum_{i_k=1}^N \frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}}, \dots,$$

де  $a_{i(k)}, b_{i(k)} \in X$  – квадратні невиврожені  $p \times p$  матриці. М. О. Недашковський встановив такий результат:

**Теорема 12.** *Матричний гіллястий ланцюговий дріб*

$$D \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^N \frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}} \quad (29)$$

з елементами, що задовольняють умовам

$$\|b_{i(k)}^{-1}\| \leq \left( 1 + \sum_{i_{k+1}=1}^N \|a_{i_{k+1}}\| \right)^{-1}, \quad i(k) \in I_k, \quad k \geq 1,$$

абсолютно збігається, а його множиною значень є множина

$$\left\{ z \in X : \|z\| \leq \sum_{i_1=1}^N \|a_{i_1}\| \right\}.$$

Для побудови розвинень функцій багатьох змінних у ГЛД використовуються два підходи: деякі рекурентні співвідношення для даних функцій, принцип відповідності між кратними степеневими рядами і функціональними ГЛД.

Перший підхід був використаний О.С. Манзій для побудови розвинень відношень гіпергеометричних функцій Аппеля

$$F_2(a, b, b'; c, c'; z), \quad F_3(a, a', b, b'; c; z).$$

Нею були встановлені нові рекурентні співвідношення для цих функцій, на основі яких побудовано і досліджено відповідність та збіжність розвинень їх відношень у ГЛД, встановлено оцінки похибок апроксимацій підхідними дробами в деяких обмежених областях. В роботах Н.П. Гоєнко апарат гіллястих ланцюгових дробів було використано для наближення гіпергеометричних функцій Лаурічелли

$$F_D^{(N)}(a, b_1, b_2, \dots, b_N; c; z_1, z_2, \dots, z_N) =$$

$$= \sum_{k_1, k_2, \dots, k_N=0}^N \frac{(a)_{k_1+k_2+\dots+k_N} (b_1)_{k_1} (b_2)_{k_2} \dots (b_N)_{k_N} z_1^{k_1} z_2^{k_2} \dots z_N^{k_N}}{(c)_{k_1+k_2+\dots+k_N} k_1! k_2! \dots k_N!},$$

де параметри  $a, b_1, b_2, \dots, b_N; c$  – комплексні числа,  $c \neq 0, -1, -2, \dots$ ;  $z_1, z_2, \dots, z_N$  – комплексні змінні;  $(\alpha)_k$  – символ Похгаммера.

Побудовано та досліджено багатовимірний аналог неперервного дробу *Nörlund'a*.

**Теорема 13.** Нехай параметри функції  $F_D$  дійсні і задовольняють умови:

$$a > 0, b_k > 0, k = \overline{1, N},$$

$$2c > a + \sum_{k=1}^N b_k + 1.$$

Відношення гіпергеометричних функцій Лаурічелли

$$\frac{F_D(a, \bar{b}; c; \bar{z})}{F_D(a+1, \bar{b} + \bar{e}_i; c+1; \bar{z})} \quad (30)$$

розвивається у ГЛД типу *Nörlund'a*

$$b_0(\bar{z}) + D \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^N \frac{a_{i(k)}(\bar{z})}{b_{i(k)}(\bar{z})}, \quad (31)$$

де

$$b_0(\bar{z}) = 1 - \frac{a+1}{c} z_1 - \sum_{j=1}^N \frac{b_j}{c} z_j,$$

$$b_0(\bar{z}) = 1 - \frac{a+1}{c} z_1 - \sum_{j=1}^N \frac{b_j}{c} z_j,$$

$$b_{i(k)}(\bar{z}) = 1 - \frac{a+k}{c+k} z_{i_k} - \sum_{j=1}^N \frac{b_j + p_{i(k)j}}{c+k} z_j,$$

$$p_{i(k)} = \sum_{m=1}^{k-1} \delta_{i_k}^{i_m} + \delta_{i_k}^1,$$

який збігається рівномірно на компактах області

$$G = \left\{ \bar{z} \in C^N : \operatorname{Re} z_i < \frac{1}{2}, i = \overline{1, N} \right\}$$

до голоморфної функції, яка є аналітичним продовженням функції (30), голоморфної в деякому околі початку координат на область  $G$ .

Нерозв'язаною залишається проблема встановлення необхідних ознак збіжності для різних типів ГЛД. М. М. Бубняк означила і, використовуючи властивості гранично-періодичних і зворотних неперервних дробів, встановила ознаки поточної і рівномірної збіжності періодичних ГЛД спеціального вигляду, зокрема дослідила овальні області збіжності для  $\bar{p}$  – періодичних ГЛД. Зокрема, вона встановила таку необхідну ознаку збіжності 1-періодичного ГЛД

**Теорема 14.** Нехай збігається 1-періодичний ГЛД з дійсними елементами

$$\left( 1 + D \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{i_k}}{1} \right)^{-1}. \quad (33)$$

Тоді його елементи задовольняють умови:

$$c_q \geq -\frac{1}{4} X_q^2, q = 1, 2, \dots, N,$$

де  $X_q$  визначаються рекурентно

$$X_q = \frac{1}{2} \left( X_{q-1} + \sqrt{X_{q-1}^2 + 4c_q} \right), X_0 = 1.$$

Якщо ж

$$c_q > -\frac{1}{4} X_q^2, q = 1, 2, \dots, N,$$

то ГЛД (33) збігається.

## ВИКОРИСТАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Боднар Д. І., Кучмінська Х.Й. Гіллясті ланцюгові дроби (до 30-річчя виходу першої публікації) // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1996. – **39**, № 2. – С. 9-19.

2. Скоробогатько В.Я., Дронюк Н.С., Бобик О.І., Пташник Б.Й. Гіллясті ланцюгові дроби і їх застосування // Друга наук. конф. молодих математиків України. – К. : Наук. думка, 1966. – С. 561-565.

3. Боднарчук П.І., Скоробогатько В.Я. Гіллясті ланцюгові дроби та їх застосування. – К. : Наука, 1974. – 272 с.

4. Скоробогатько В.Я. Теория ветвящихся цепных дробей и ее применение в вычислительной математике. – М. : Наука, 1883. – 312 с.

5. Боднар Д.И. Ветвящиеся цепные дроби. – К. : Наука, 1986. – 176 с.

6. Сявак М.С. Інтегральні ланцюгові дроби. – К. : Наука, 1994. – 205 с.

7. Кучмінська Х.Й. Розвиток аналітичної теорії двовимірних неперервних дробів: дисертація доктора фіз.-мат. наук: 01.01.01 / Кучмінська Христина Йосифівна. – Львів, 2012. – 306 с.

8. Дмитришин Р.І. Багатовимірні аналоги  $g$ -дробів, їх властивості, ознаки збіжності: дисертація кандидата фіз.-мат. наук: 01.01.01 / Дмитришин Роман Іванович. – Львів, 1998. – 128 с.

9. Манзій О.С. Наближення гіпергеометричних функцій Аппеля гіллястими ланцюговими дробами: дисертація кандидата фіз.-мат. наук: 01.01.01 / Манзій Олександра Степанівна. – Львів, 2000. – 142 с.

10. Гоєнко Н.П. Наближення гіпергеометричних функцій Лаурічелли гіллястими ланцюговими дробами: дисертація кандидата фіз.-мат. наук: 01.01.01 / Гоєнко Наталія Павлівна. – Львів, 2004. – 125 с.

11. Гладун В.Р. Аналіз стійкості до збурень гіллястих ланцюгових дробів: дисертація кандидата фіз.-мат. наук: 01.01.01 / Гладун Володимир Романович. – Львів, 2007. – 150 с.

12. Возна С.М. Наближення функцій неперервними та двовимірними неперервними дробами: дисертація кандидата фіз.-мат. наук: 01.01.01 / Возна Світлана Миколаївна. – Львів, 2008. – 146 с.

13. Баран О.Є. Наближення функцій багатьох змінних гіллястими ланцюговими дробами з нерівнозначними змінними: дисертація кандидата фіз.-

мат. наук: 01.01.01 / Баран Оксана Євгеніївна. – Івано-Франківськ, 2014. – 146 с.

14. Бубняк М.М. Множини збіжності періодичних гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду: дисертація кандидата фіз.-мат. наук: 01.01.01 / Бубняк Марія Миколаївна. – Івано-Франківськ, 2016. – 151 с.

15. Макаров В.Л., Хлобистов В.В., Михальчук Б.Р. Інтерполяційні інтегральні ланцюгові дроби // Український математичний журнал. – 2003. – **55**, №4. – С. 479-488.

16. Пагіря М.М. Наближення функцій ланцюговими дробами. – Ужгород: Гражда, 2016. – 412 с.

17. Пагіря М.М., Кацала Р.А. Властивості обернених похідних // Український математичний журнал. – 2010. – **62**, №5. – С. 708-713.

18. Недашковський М.О. Розв'язування нелінійно-поліноміальних рівнянь гіллястими ланцюговими дробами // International Journal of Computing. – 2014. – **2**, №. 1. – Р. 83-87.

19. Недашковський М.О., Ковальчук О.Я. Очислення з  $\lambda$ -матрицями. – К.: Наук. думка, 2007. – 294 с.

20. Боднар Д. І., Возняк О.Г., Михальчук Р.І. Ознака збіжності гіллястого ланцюгового дроби з додатними елементами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2015. – **58**, № 1. – С. 57-64.

21. Jones W.B., Thron W.J. Continued Fractions: Analytic Theory and Applications, Encyclopedia of Mathematics and its Applications. – Vol. 11. – Massachusetts : Addison-Wesley Publishing Company. – 1980. – 428 p.

22. Lorentzen L., Waadeland H. Continued Fractions. – Amsterdam-Paris: Atlantis Press/World Scientific, 2008. – Second edition – 308 p.

23. Perron O. Die Lehre von der Kettenbrüchen. – Stuttgart: Teubner, 1957. – Band 2. – 524 s.

24. Wall H.S. Analytic Theory of Continued Fractions. – New York: Van Nostrand, 1948. – 433 p.

25. Боднар Д. І. Аналітична теорія гіллястих ланцюгових дробів: історія,

основні результати, нерозв'язані проблеми // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2007. – **50**, № 3. – С. 21-29.

26. Антонова Т.М. Багатовимірне узагальнення теореми про параболічні області збіжності неперервних дробів // Мат методи та фіз.-мех. поля. –1999. – **42**, №4. – С. 7-12.

27. Гладун В.Р. Умови збіжності та стійкості до збурень гіллястих ланцюгових дробів з від'ємними частинними чисельниками // Мат. методи та фіз.-мех. поля. –2003. – **46**, № 4. – С. 16-26.

28. Боднар Д. І., Гладун В.Р. Деякі області стійкості до збурень гіллястих ланцюгових дробів з комплексними елементами // Вісник Чернівецького університету. Серія “Математика”. – 2006. – Вип. 288. – С. 18-27.

29. Боднар Д. І., Гладун В.Р. Про стійкість до збурень гіллястих ланцюгових дробів з комплексними елементами // Математичні студії. – 2006. – **25**, № 2. – С. 207-212.

30. Недашковський М.О. Ознаки збіжності матричних гіллястих ланцюгових дробів// Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2003. – **46**, № 4. – С. 50-56.

31. Боднар Д. І., Манзій О.С. Дослідження збіжності розвинення відношення гіпергеометричних функцій Аппеля  $F_3$  у гіллястий ланцюговий дріб // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1998. – **41**, № 4. – С. 12-16.

32. Манзій О.С. Про збіжність розвинення відношення гіпергеометричних функцій Аппеля  $F_3$  у гіллястий ланцюговий дріб у деякій необмеженій області // Мат. методи та фіз.-мех. поля. –1999. – **42**, № 2. – С. 7-11.

33. Гоєнко Н.П. Про збіжність розвинення відношення гіпергеометричних функцій Лаурічелли у гіллясті ланцюгові дроби // Теорія наближення функцій та її застосування. Праці Інституту математики НАН України. – 2000. – **31**. – С. 135-143.

34. Боднар Д. І., Гоєнко Н.П. Наближення відношення функцій Лаурічелли  $F_D$  гіллястим ланцюговим дробом // Математичні студії. – 2003. –

Т. 20, № 2. – С. 210-214.

35. Гоєнко Н., Антонова Т., Ракінцев С. Наближення відношення функцій Лаурічелли-Сарана  $F_S$  з дійсними параметрами гіллястими ланцюговими дробами // Математичний вісник НТШ. – 2011. – **8**. – С. 28-42.

36. Murphy J. A., O'Donohoe M. R. A two-variable generalization of the Stieltjes-type continued fractions // J. Comp. and Appl. Math. – 1978. – No. 4, №3. – P. 181-190.

37. Кучмінська Х. Й., Сусь О. М., Возна С. М. Апроксимативні властивості двовимірних неперервних дробів // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 1. – С. 30-44.

38. Kuchmins'ka Kh. Yo., Vozna S. M. Truncation error bounds for a two-dimensional continued  $g$ -fraction // Мат. студії. – 2005. – **24**, № 2. – P. 120-126.

39. Сусь О. М. Про оцінку швидкості збіжності двовимірних неперервних дробів з комплексними елементами // Прикладні проблеми механіки і математики. – 2008. – Вип 4. – С. 115-123.

40. Антонова Т.М., Сусь О. М. Необхідні умови збіжності для одного класу двовимірних неперервних дробів з комплексними елементами // Збірник праць Інституту математики НАН України. Теорія наближення функцій та суміжні питання / Відп. ред.: А.С. Романюк. – 2015. – **50**, № 3. – С. 94-101.

41. Возна С.М. Збіжність двовимірного неперервного  $g$ -дробу // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2004. – **47**, № 3. – С. 39-43.

42. Siemaszko W. Branched continued fraction for double power series // J. Comp. and Appl. Math. – 1980. – **6**, № 2. – P. 121-125.

43. Антонова Т.М., Боднар Д. І. Області збіжності гіллястих ланцюгових дробів с спеціального вигляду // Праці Ін-ту математики НАН України. – Київ: Ін-т математики НАНУ. – 2000. – **31**. – С. 19-32.

44. Баран О. Є. Парні кругові області збіжності гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2009. – **52**, № 4. – С. 73-80.



45. Баран О. Є. Деякі кругові області збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2013. – **56**, № 3. – С. 7-14.

46. Бубняк М. М. Оцінки швидкості збіжності 1-періодичного гіллястого ланцюгового дробу спеціального вигляду // *Карпатські математичні публікації.* – 2013. – **5**, № 2. – С. 187-195.

47. Боднар Д. І., Бубняк М. М. Оцінки швидкості поточної та рівномірної збіжності 1-періодичного гіллястого дробу спеціального вигляду // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2013. – **56**, № 4. – С. 24-32.

48. Vodnar D. I., Bubniak M. M. On Convergence  $(2,1,\dots,1)$ -periodic Branched Continued Fraction of the Special Form // *Карпатські математичні публікації.* – 2015. – **7**, № 2. – С. 148-154.

49. Дмитришин Р.І., Баран О.Є. Деякі типи гіллястих ланцюгових дробів, відповідних до кратних степеневих рядів // *Теорія наближення функцій та її застосування. Праці ІМ НАН України.* – Київ. – 2000. – Вип. 31. – С. 82-92.

50. Dmytryshyn R.I. The two-dimensional  $g$ -fraction with independent variables for double power series // *Journal of Approximation Theory.* – 2012. – **164**, № 12. – P. 1520-1539.

51. Дмитришин Р.І. Приєднані гіллясті ланцюгові дроби з двома нерівнозначними змінними // *Укр. мат. журн.* – 2014. – **66**, № 9. – С. 1175-1184.

52. Vodnar D.I., Dmytryshyn R.I., On the convergence of multidimensional  $g$ -fraction // *Матем. студії.* – 2001. – **15**, № 2. – С. 115-126.

53. Гоєнко Н.П. Принцип відповідності та збіжність послідовностей аналітичних функцій багатьох змінних // *Математичний вісник НТШ.* – 2007. – **4**. – С. 42-48.

**Дума Людмила Василівна, кандидат економічних наук,  
старший викладач кафедри економічної кібернетики та інформатики**

## **СИСТЕМА ПІДТРИМКИ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ В ПРОЦЕСАХ ОСВІТНЬОЇ ТА НАУКОВО-ІННОВАЦІЙНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ**

В даний час заклади вищої освіти, основна роль яких раніше полягала в навчанні студентів і здійсненні науково-дослідної діяльності, стають ще й центрами появи інновацій і їх виведення на ринок. Більшість закладів вищої освіти активно підтримують ініціативи співробітників та слухачів в галузі реалізації проектів, комерціалізації результатів інтелектуальної діяльності, створення і розвитку МП, сприяють в залученні фінансування для забезпечення проектної й інноваційної діяльності [7].

Надання нових можливостей для учнів ускладнюється відсутністю розуміння і досвіду управління бізнес-процесами при створенні свого МП або стартапа.

Серед основних етапів можна виділити: формування концепту виробничого об'єкта, який орієнтований на пошук об'єктів інтелектуальної діяльності, пошук грантів та інших джерел фінансування інноваційної діяльності, формування команди, пошук періодичних видань для публікацій результатів досліджень.

Стандартні виробничі бізнес-процеси, інструменти, орієнтовані на їх ведення та супровід, розрізняються по вимог і специфіки з процесами науково-інноваційної діяльності. Серед основних етапів можна виділити: формування концепту виробничого об'єкта, який орієнтований на пошук об'єктів інтелектуальної діяльності, пошук грантів та інших джерел фінансування інноваційної діяльності, формування команди, пошук періодичних видань для публікацій результатів досліджень.

Автоматизація процесів виконання перерахованих етапів повинна дозволити студентам підготуватися до реалізації виробничих процесів науково-інноваційної діяльності, спростити процедуру пошуку результатів інтелектуальної діяльності, членів команди, а також підвищити значимість

отриманих результатів за рахунок їх публікації в високо рейтингових періодичних виданнях[10].

Метою дослідження є розробка методів і алгоритмів інтелектуалізації підтримки прийняття рішень з реалізації процесів науково-інноваційної діяльності в інформаційній системі управління (ІСУ) університетом.

Для досягнення поставленої мети в дослідженні були поставлені і вирішені наступні завдання:

- Аналіз стану сучасних засобів реалізації процесів науково-інноваційної діяльності та способів автоматизації за рахунок системи інтелектуальної підтримки прийняття рішення (СІППР).

- Розробка методу інтелектуальної підтримки прийняття рішень (ППР) з реалізації процесів науково-інноваційної діяльності з використанням методів та алгоритмів штучного інтелекту на основі даних ІСУ університету і зовнішніх джерел.

- Розробка методу автоматичної побудови інформаційної моделі наукових інтересів учасників інноваційної діяльності, заснованої на зборі, формалізації та подальшій агрегації інформації про публікації, видання і авторів з наукометричних баз даних (БД), а також аналізу їх наявних переваг на основі даних ІСУ університету із застосуванням методів частотного аналізу й алгоритмів нечіткого пошуку.

- Розробка алгоритму аналізу відповідності індексованих періодичних видань, наукових заходів та конкурсів науковим інтересам студентів на основі побудови зваженого багатокритеріального простору для опису множини альтернатив і визначення способів їх порівняння, ранжирування.

- Розробка методики аналізу й оцінки пов'язаності наукових інтересів учасників науково-інноваційної діяльності, заснованої на побудові інформаційної моделі процесів наукової діяльності та автоматизації пошуку в просторі інформаційних моделей з використанням методів теорії корисності.

- Проектування і розробка СІППР по реалізації науково-інноваційної діяльності студентів та її апробація на прикладі університету ЗУНУ.

Об'єктом дослідження є процеси науково-інноваційної діяльності в технологічних галузях.

Предметом дослідження є методи і засоби автоматизації процесів навчання фахівців, орієнтованих на виконання науково-інноваційної діяльності в високотехнологічних областях, в тому числі, в рамках стартапів і МПП.

Методами дослідження є теорії штучного інтелекту, теорії корисності, теорії нечіткого пошуку, моделі знань, а також методи онтологічного інжинірингу.

Розроблені методи й алгоритми реалізовані та інтегровані в ІСУ університету ЗУНУ. Рекомендації, що формуються СППР, застосовуються в процесі виконання науково-дослідної частини індивідуальних планів. Дана система також може застосовуватися при виконанні наукових досліджень та створенні інноваційних розробок, формуванні проектної команди, в тому числі, в рамках створюваних стартапів і МПП.

## **1. Теоретико-методологічні аспекти побудови СППР в сфері науково-дослідної діяльності**

Освітній процес в аспірантурі та магістратурі починається зі складання індивідуального плану студента на весь період навчання.

За підсумками семестру проводиться атестація учнів. Метою атестації є:

- контроль виконання індивідуальних планів;
- забезпечення захисту дисертації в строк.

Процес роботи з індивідуальним планом представлений на рис. 1.1.

Цей процес складається з двох частин – створення та затвердження індивідуального плану студента і створення та затвердження звіту про виконання індивідуального плану. Індивідуальний план учня створюється один раз на весь період навчання.

За підсумком кожного семестру складається звіт про виконання індивідуального плану. Оцінка звіту про виконання індивідуального плану

здійснюється шляхом порівняння заявлених показників індивідуального плану і результатів, якими відзвітували за даними показниками.

Крім автоматичної оцінки індивідуального плану, оцінку про виконання плану дає науковий керівник і завідувач кафедрою. За підсумками виконання індивідуального плану приймається рішення про призначення базової і підвищеної стипендії.

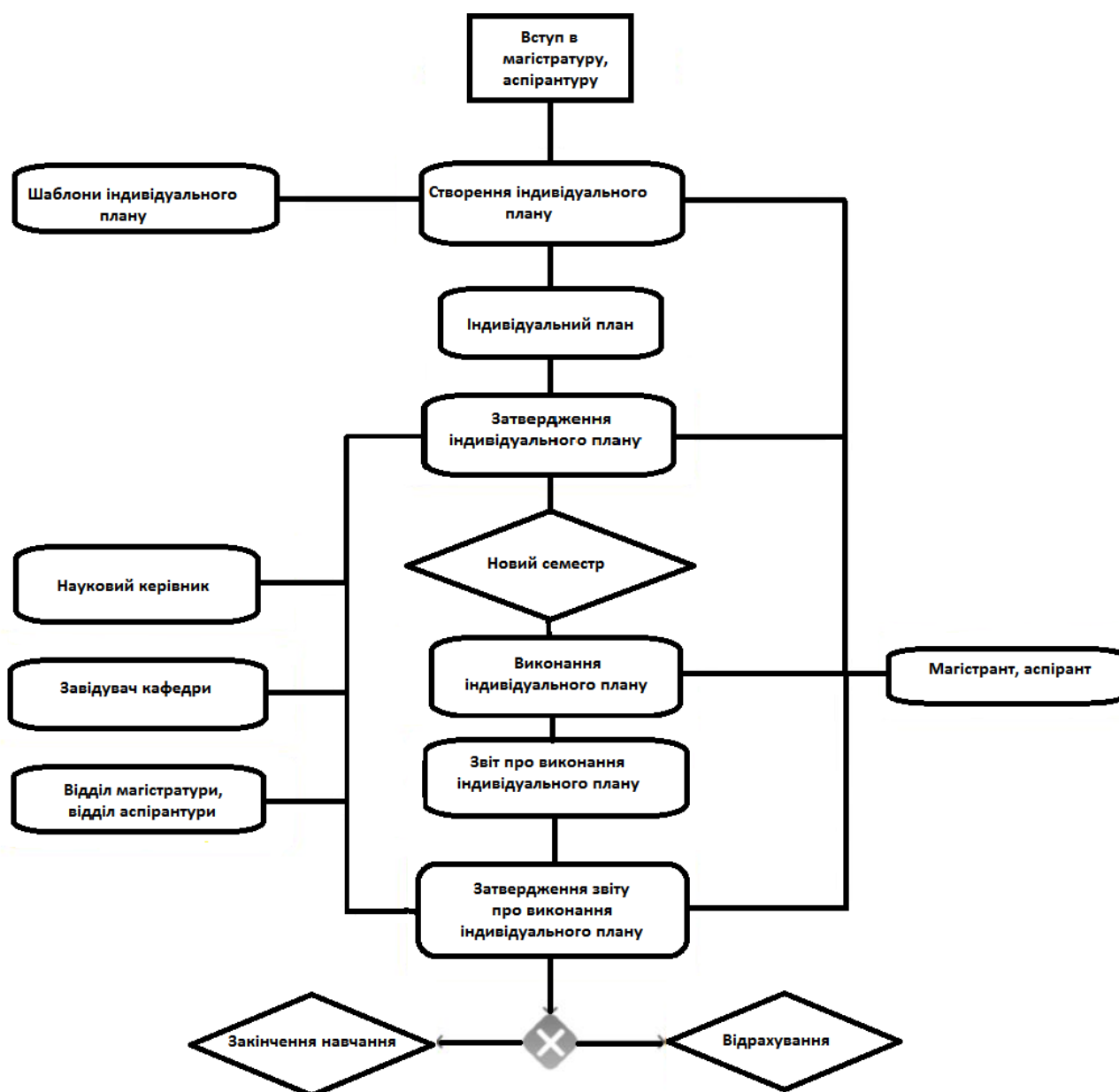


Рис.1.1. Процес роботи з індивідуальними планами

Створення індивідуального плану відбувається на основі попередньо налаштованого шаблону показників. Попереднє налаштування шаблону показників здійснюється співробітниками відділу аспірантури та магістратури.

Шаблон зберігає інформацію про мінімальні показники по кожному семестру. Навчається в праві внести коригування показників в даний шаблон, але зміни показників допустимі тільки в більшу сторону. Індивідуальний план учня складається з двох частин.

Для успішної реалізації завдань, поставлених в навчальній частині індивідуального плану, як для викладачів, так і для учнів, існують різні засоби планування, контролю реалізації поставлених завдань, а також різні інструменти і методи подання матеріалів. Магістрант або аспірант що навчається має регламент, який дозволяє йому досягти поставлені перед ним цілі. Весь процес навчання контролюється деканатом і відділами аспірантури та магістратури.

Науково-дослідницька частина індивідуального плану є не регламентованою, контроль її виконання здійснює науковий керівник, того хто навчається. Навчається, в зв'язку з недостатнім досвідом, не завжди може розпланувати, реалізувати наукові дослідження і представити їх результати.

Існуючі засоби автоматизації освітньої діяльності на основі освітніх стандартів не враховують нові вимоги до науково-освітньої діяльності. Найчастіше дані вимоги регламентуються загальними вимогами до показників по університету. Для полегшення процесу реалізації виконання показників по науково-дослідній частині індивідуальних планів необхідне створення інтелектуальних засобів підтримки прийняття рішень.

З метою визначення областей для яких будуть використовуватися методи підтримки прийняття рішень, були досліджені області науково-дослідної діяльності учнів і наукових керівників на основі існуючих в університеті положень і регламентів ведення проектної діяльності, обліку науково-практичних досягнень співробітників університету та учнів, річних звітів з наукової діяльності, конкурсів на матеріальне стимулювання, а також регламенту підрахунку рейтингів учнів [10].

Аналізуючи проблематику підтримки прийняття рішень в освітній діяльності дозволяє встановити, що до теперішнього часу в частині науково-

дослідницької діяльності в галузі освіти існують різні регламентуючі процеси, спрямовані на облік, а також матеріальне заохочення студентів за результати науково-дослідної діяльності [9].

Реалізація процесу досягнення даних результатів є однією з головних проблем для слухачів магістратури та аспірантури. Складність вирішуваних завдань і багатокритеріальність оцінки їх рішень вимагає розробки СППР та її інтеграції в існуючі системи управління освітніми процесами.

В цьому дослідженні ми хочемо запропонувати побудову СППР, яка дозволяє в значній мірі вирішити проблеми навчання в процесі формування та реалізації результатів науково-дослідної діяльності.

Розглянемо процес науково-інноваційної діяльності на прикладі МПІ (малих інноваційних підприємств). Кожне МПІ проходить в своєму житті різні стадії господарської та інноваційної діяльності. Їх представлено в Додатку А.

На основі представленого життєвого циклу МПІ можна виділити наступні галузі, які потребують використання методів підтримки прийняття рішень:

- пошук публікацій з заданим тематиками;
- пошук результатів інтелектуальної діяльності за заданими тематиками;
- пошук конкурсів на матеріальне стимулювання;
- підбір кадрів;
- вибір найбільш придатних видань для публікації [20].

Одним з важливих показників в науково-дослідній діяльності є активність публікації. Даний показник є на всіх етапах виконання науково-дослідної частини індивідуального плану, наявність публікацій необхідно в подальшому для захисту дисертації. Важливими показниками для оцінки публікації є:

- індексування видання в наукометричних БД;
- наукометричних показники видання;
- цитування публікації.

В роботі розглядаються наступні наукометричних БД:

- e-Library, українська наукова електронна бібліотека (<http://elibrary.ua>);
- Web of Science корпорації Thomson Reuters;

- Scopus видавництва Elsevier.

Представлені наукометричних БД обрані через врахування публікацій, що входять в дані БД, в різних показниках і звітах, необхідних міністерством освіти України, а також через використання їх науковим співтовариством [6].

Основним таким критерієм є відносний показник цитування статей, опублікованих в даному журналі, тобто, його імпакт-фактор [7, 12].

- Web of Science – найавторитетніша в світі база даних по науковому цитуванню інституту наукової інформації (Institute of Scientific Information - ISI). Використовуваний унікальний ідентифікатор - ResearcherID [12].

- Scopus – це найбільша в світі єдина мульти дисциплінарна реферативна база даних, що надає унікальну систему оцінки частоти цитування. Використовуваний унікальний ідентифікатор – ORCID [12].

Частота цитування (індекс цитування) – загальноприйнята в науковому світі міра значущості вченого. Показник індексу цитування визначається кількістю посилань на публікацію в інших джерелах. Якість цитування визначається не тільки частотою цитування праць автора, а й якістю даного цитування.

Для обліку цитування використовуються наступні індекси цитування:

- Індекс Хірша (h-індекс) – кількісна характеристика вченого, заснована на кількості його публікацій і кількості цитувань цих публікацій. Наприклад, вчений має індекс Хірша 5, якщо 5 з його статей цитуються як мінімум 5 разів кожна [19].

- Імпакт-фактор (IF) показує, скільки разів в середньому цитується кожна опублікована в журналі стаття протягом двох наступних років після виходу [19].

Важливим показником при виборі періодичного видання є видавництво. Як правило, перевагу при оцінці значущості публікації (при інших рівних характеристиках) віддається публікаціям, розміщених не в журналах університету. В інформаційній системі університету ведуться відомості про



публікації співробітників і учнів, а також відомості про періодичні видання, в яких опубліковані ці статті.

Одним з показників науково-дослідної частини індивідуального плану, що навчається є участь в наукових заходах. Наукові заходи можна розділити на дві категорії:

- конференція, конгрес, семінар і т.д. – дана категорія є способом ознайомлення громадськості зі своїми теоретичними і практичними результатами;

- конкурс – дана категорія включає в себе такі конкурси, як конкурс грантів, конкурс на стипендію уряду України, конкурс на стипендію президента України і інші.

Представлені категорії характеризуються відповідним набором параметрів, які впливають на прийняття рішення про участь у наукових заходах.

Важливими показниками для наукової конференції є:

- тип конференції (міжнародна, українська, внутрівузівських та інші);
- тематика конференції (ключові слова, що характеризують дану конференцію);
- статус конференції (заочна, очна);
- місце і час проведення;
- тип друкованого матеріалу (збірник тез, праці конференції, збірник статей);
- індексування друкованих матеріал в наукометричних базах даних.

Найчастіше навчаються беруть участь тільки в наукових заходах, що проводяться університетом. Участь тільки у внутрівузівських заходах так само, як і публікація статей тільки в журналі університету, не вітається науковим співтовариством.

Вибір грантів, конкурсів на стипендію та інших конкурсів, орієнтованих на матеріальну підтримку, викликає у багатьох учнів труднощі. Однією з

причин є відсутність своєчасної інформації про проведення даних конкурсів. В ІСУ університету є відомості про проведені конкурсах, програмах і фондах.

Магістри або аспіранти, що навчаються стикаються з проблемами вибору наукового керівника і проектів для участі.

Даний вибір в значній мірі визначено для магістрантів, які вже нашили наукового керівника будучи бакалаврами і надалі продовжують навчання під його керівництвом. У решти учнів вибір наукового керівника визначається рекомендаціями старшокурсників або викладачів.

Для правильного вибору наукового керівника необхідно однозначно вирішити ряд питань, пов'язаних з подальшими планами на наукову діяльність. Виділено наступні характеристики, на які звертають увагу навчаються при виборі наукового керівника:

- пропонувані напрямки наукових досліджень;
- публікаційна діяльність;
- наукове керівництво магістрами та аспірантами;
- результативність захистів;
- наукова ступінь;
- вчене звання;
- місце роботи;
- участь у проектах.

В рамках теоретичного обґрунтування побудови СППР визначено загальний алгоритм підтримки прийняття рішень, що складається з етапів, який показує, що для досягнення найбільш ефективного результату можливі неодноразові повторення одного і того ж етапу. Розглянемо докладніше кожен етап:

**Етап 1.** Реалізація першого етапу, етапу формулювання і аналізу проблеми, здійснюється шляхом виконання наступних кроків: [10,14]:

- моніторинг зовнішнього середовища, а також об'єкта управління;
- визначення і формування проблеми, оцінка новизни сформованої задачі;
- установка зв'язку з іншими задачами;

- оцінка повноти проблеми, а також достовірності інформації по даній задачі;

- ведення бази даних інформаційних ресурсів по певній задачі.

Для визначення цілей і формулювання завдань необхідно:

- аналіз інформації про існуючу проблему;
- визначення загальної структури проблематики.

**Етап 2.** На даному етапі визначаються цілі системи. Відбувається формулювання глобальної мети, установка обмежень і формування послідовності завдань для досягнення поставлених цілей [16]:

- визначення можливості розв'язання проблеми;
- концептуальна розробка варіантів вирішення проблеми;
- оцінка варіантів вирішення проблеми;
- декомпозиція виявленої проблеми на окремі завдання;
- постановка завдань на вербальному рівні;
- формулювання умов і цілей;
- логічний аналіз умов, цілей і завдань на вербальному рівні;
- постановка завдань виконавцям.

При формуванні цілей враховуються основні принципи системного аналізу (принцип кінцевої мети, єдності і зв'язності) [2, 7].

**Етап 3.** При формуванні системи критеріїв реалізується послідовність дій [52]:

- визначення критеріїв досягнення мети [17];
- поділ критеріїв за підцілей [6, 16];
- оцінка ефективності критеріїв [11].

Процес формування системи критеріїв не має ефективності і тому вимагає в кожному випадку індивідуального підходу. Даний процес залежить від невизначеності вихідної інформації, що призводить до необхідності використання різних методів для визначення множини критеріїв. Поняття «критерій» розглядається також, як і спосіб порівняння альтернатив. Критерієм якості альтернативи може служити будь-яка її ознака. Після визначення

характеристик (критеріїв) з'являється можливість сформулювати завдання вибору й оптимізації [13].

**Етап 4.** На даному етапі відбувається формування множини альтернатив. Процес формування множини альтернатив, заснований на евристичних перевагах особи, яка приймає рішення, можна представити в наступному вигляді:

- генерування множини альтернатив;
- структурування альтернатив;
- визначення підмножини згенерованих альтернатив.

Генерацію рішень ефективно проводити за допомогою експертних методів і теорії нечітких множин [3, 16].

**Етап 5.** Важливим етапом є аналіз варіантів рішень [1, 13]. В ході аналізу варіантів рішення необхідно провести оптимізацію альтернатив і вибір найкращої із запропонованих множин, з використанням методології підтримки прийняття рішень, що включає різноманітні технології і методи, які можна частково або повністю формалізувати [14].

**Етап 6.** Результат дії системи підтримки прийняття рішень на попередніх етапах. Етап може включати в себе застосування експертних методів і методів оптимізації, розглянутих на попередніх етапах.

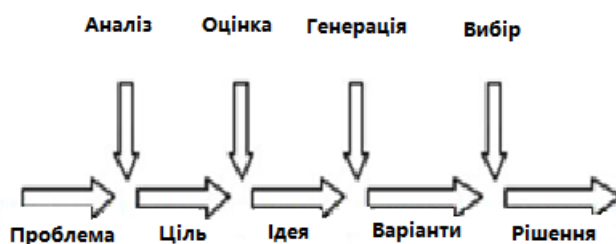


Рис 1.2. Життєвий цикл прийняття рішення  
розроблено автором на основі [4]

Життєвий цикл прийняття рішення при наявності багатокритеріального вибору показаний на рис. 1.2 [3].

На рисунку представлені два види стрілок:

- Горизонтальні стрілки позначають елемент життєвого циклу.

- Вертикальними позначаються дії осіб, які приймають рішення.

Структурний процес прийняття рішення описується ланцюжком «потреба – активність – мотивація – ціль». Даний ланцюжок можна представити схемою, зображеної на рис.1.3.

Схема є методологічною підставою для представленої вище моделі багатокритеріального вибору. В рамках даної моделі оцінка множини мотивів (альтернатив рішення).

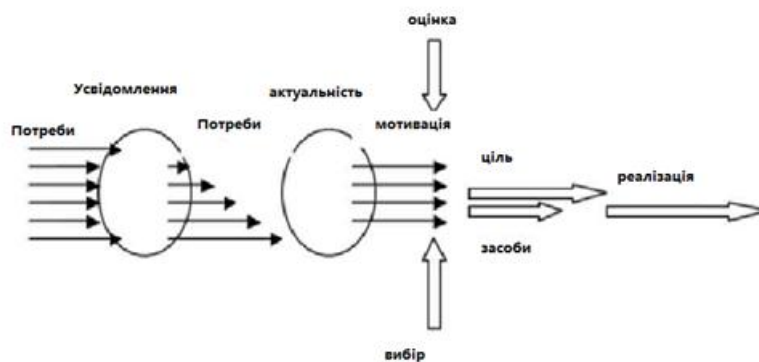


Рис. 1.3. Структурна схема прийняття рішення, як послідовність психологічних дій розроблено автором на основі [4]

*Методологію побудови системи підтримки прийняття рішень в сфері науково-дослідницької діяльності можна представити у вигляді етапів:*

**Етап 1. Аналіз предметної області.** Визначення об'єктів, для яких будуть формуватися рекомендації.

**Етап 2. Побудова моделей об'єктів предметної області.**

**Етап 3. Збагачення моделей предметної області.** Прикладами удосконалення моделей є:

- *модель публікації* – інтеграція з науково метричними БД і актуалізація описових характеристик, а також набору тематик (ключових слів);
- *модель видання* – інтеграція з науково метричними БД та актуалізація описових характеристик, а також набору тематик (ключових слів);
- *модель користувача ІСУ* (учасника освітнього процесу) – автоматичне оновлення наукових інтересів на основі наукових профілів у наукометричних

БД, активністю публікацій, схожих наукових інтересів, а також за підсумком відвідування сторінок наукових заходів.

**Етап 4. На основі аналізу предметної області формування набору критеріїв для кожного об'єкта.** На основі сформованих критеріїв створюються шаблони для кожного об'єкта, що містять набори критеріїв і значимість (ваги) кожного з критеріїв.

**Етап 5. Формування множини альтернатив.** Процес формування множини альтернатив ґрунтується на аналізі наукових інтересів користувача та порівняння їх з ключовими словами і тематиками об'єктів пошуку.

**Етап 6. Аналіз альтернатив.** Аналіз альтернатив здійснюється шляхом отримання оцінки для кожної альтернативи за всіма критеріями.

**Етап 7. Формування матриці рішень.** Обчислення нормованого значення для кожної альтернативи по кожному критерію, а також обчислення функції корисності.

**Етап 8. Подання рекомендацій учасникам навчального процесу.**

## **2. Розробка інформаційних моделей підтримки прийняття рішень в галузі науково-дослідної діяльності**

Розглянемо виробничий процес науково-інноваційної діяльності на прикладі МПП. Кожне МПП проходить в своєму житті різні стадії господарської та інноваційної діяльності. Їх можна представити таким чином [7]:

- **виникнення**
  - формування інноваційної ідеї;
  - патентна літературна оцінка ідеї;
  - оцінка інноваційних потреб і фінансових можливостей;
  - маркетингові дослідження і підготовка до заснування МПП;
  - формальне установа МПП;
  - визначення мети діяльності та розробка підприємницької концепції;
  - розвиток;
  - проведення та дослідження розробок;

- патентування нововведень, захист авторам прав;
- маркетингові дослідження і підготовка ринку;
- організаційно-правова підготовка виробництва;
- початкова виробництво інноваційного продукту;

- **зростання;**

- нарощування виробничої потужності;
- збільшення обсягу продажів;
- освоєння нових ринків;
- формування стійкості мережі постачальників;
- вдосконалення технології, організації виробництва і менеджменту;
- збільшення чисельності працюючих і підвищення спеціалізації

працюючих;

- **зрілість**

- стабілізація постачальників;
- модернізація і індивідуалізація інноваційного продукту;
- пошук нових ринків;
- проведення досліджень і розробок;
- пошук нових сфер застосування інноваційних ідей;
- модернізація підприємницької концепції;

- **загасання – реформування**

- модернізація виробничої бази;
- скорочення виробничої інфраструктури;
- скорочення чисельності працівників;
- ліквідація запасів;
- продаж власних ноу–хау, ліцензії, патенти;
- придбання чужих виробництв, ліцензій, патентів.

На основі представленого життєвого циклу МПП можна виділити наступні області, які потребують використання методів підтримки прийняття рішень:

- пошук публікацій з заданим тематикам;
- пошук результатів інтелектуальної діяльності за заданими тематиками;

- пошук конкурсів на матеріальне стимулювання;
- підбір кадрів;
- вибір найбільш придатних видань для публікації.

Дані області схожі з областями, визначеними в рамках виконання науково-дослідної частини індивідуального плану навчаються [15].

В роботі побудована інформаційна модель верхнього рівня для галузі наукової діяльності (див. рис. 2.1). Аналіз моделі верхнього рівня дозволив виділити три основні моделі:

- модель користувача ІСУ університету;
- модель публікації;
- модель наукового заходу.

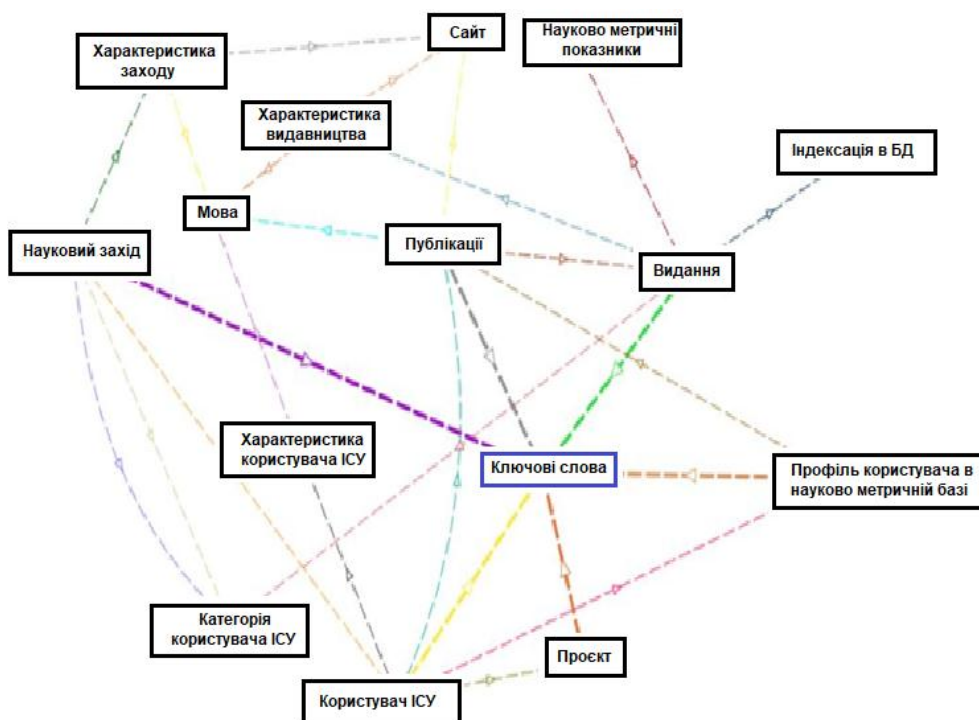


Рис. 2.1. Інформаційна модель верхнього рівня для процесів підтримки прийняття рішень розроблено автором на основі [12]

Дана модель призначена для отримання інформації про профілі користувачів ІСУ університету з наукометричних БД.



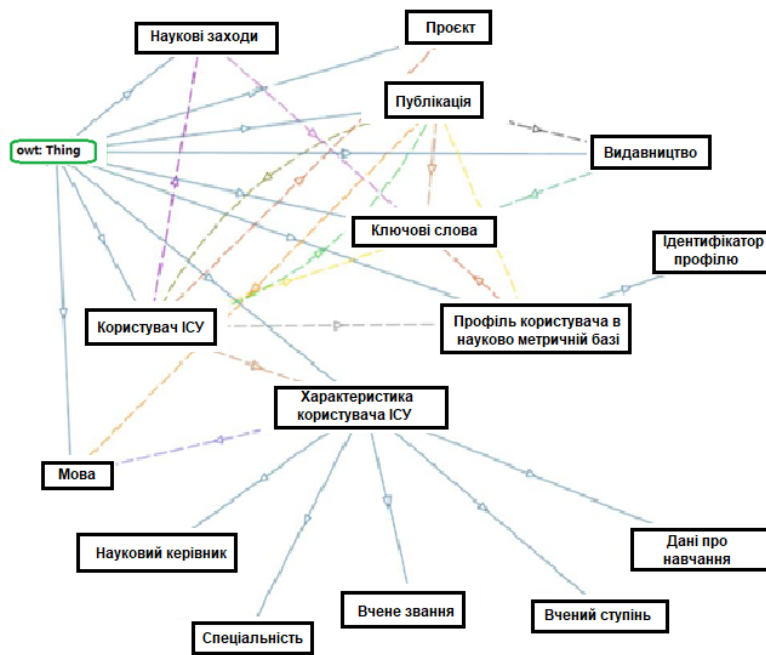


Рис. 2.2. Інформаційна модель користувача ІСУ розроблено автором на основі [3]

На рисунку 2.3 представлена інформаційна модель публікації. Модель містить допоміжну модель – модель видання.

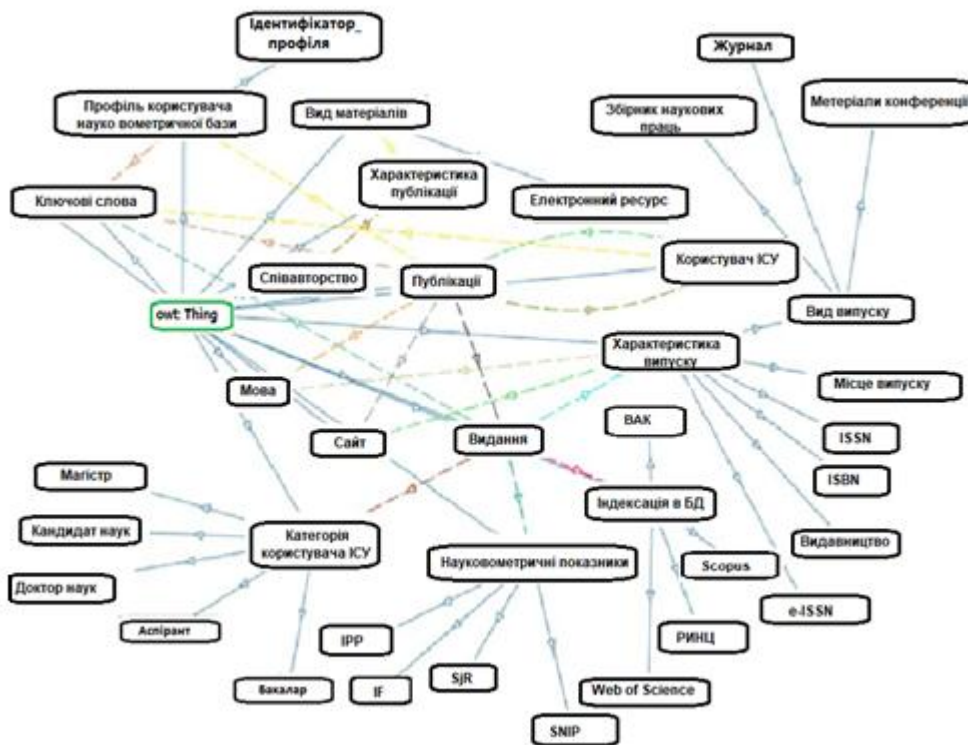


Рис. 2.3. Інформаційна модель публікації розроблено автором на основі [18]

Ця модель представлена в розширеному вигляді і максимально описує елементи, необхідні при аналізі та формуванні рекомендацій по публікаціям і виданням.

На рис. 2.4 представлена інформаційна модель наукового заходу. Дана модель, так само, як і модель публікації, представлена в розширеному вигляді.

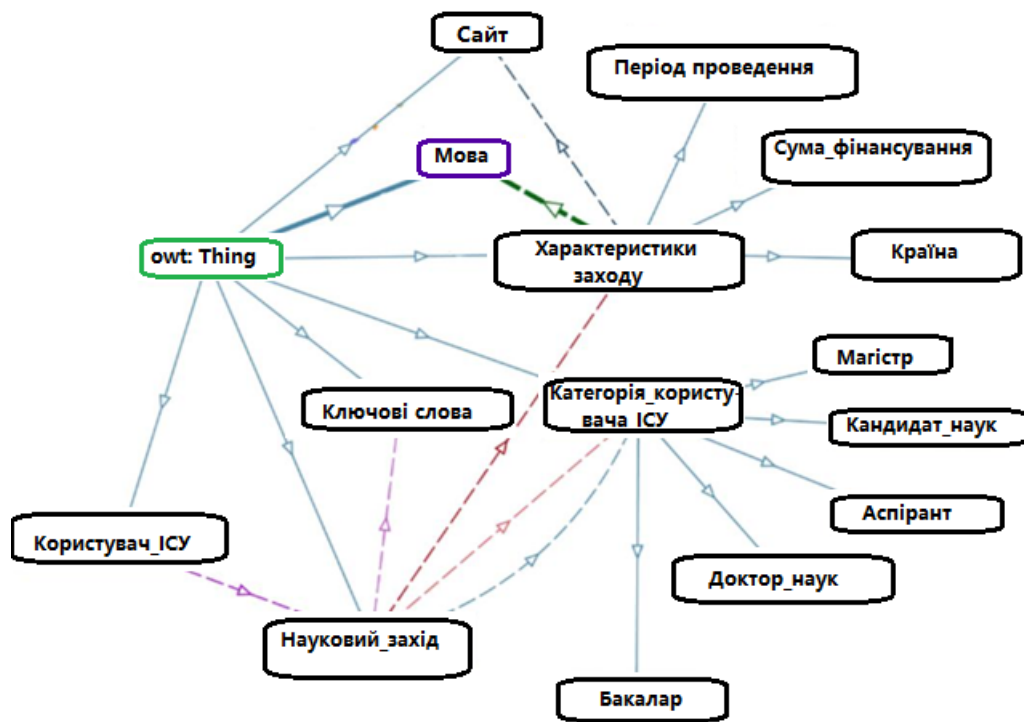


Рис. 2.4. Інформаційна модель наукового заходу розроблено автором на основі [2]

Як видно з рис. 2.1, всі інформаційні моделі взаємопов'язані через ключові слова. У моделі публікації, представленій на рисунку 2.2, використовувалися наступні складові моделі – тематики, наукові інтереси, наукові дослідження, всі ці складові об'єднані в понятті ключові слова. Дане перетворення спрощує пошук схожих об'єктів.

Для реалізації процедури пошуку була розроблена модель користувача ІСУ університету, яка містить загальну інформацію про користувача, опис його науково-практичної активності і наукових інтересів. Модель користувача ІСУ університету є і включає не тільки учасників науково-інноваційної діяльності, а й інших учасників життєвих процесів університету в цілому.

$$P = (D, Apr, P_a, P_p, M, K),$$

де  $D$  – множина описових характеристик користувача, включаючи вчений ступінь, вчене звання, спеціальність, володіння мовою, відомості про навчання, наукове керівництво,  $Apr$  – множина профілів користувачів в наукометричних БД,  $P_a$  – множина публікацій користувача,  $P_p$  – множина наукових проектів, в яких користувач брав участь або був керівником,  $M$  – множина наукових заходів, в яких користувач брав безпосередню участь,  $K$  – множина наукових інтересів користувача.

$$K = K^p \cup K^a,$$

де  $K^p$  – множина ключових слів, зазначених користувачем,  $K^a$  – множина автоматично обраних ключових слів з урахуванням частоти їх появи в інформаційній системі в ході роботи користувача.

$$K^a = \{q \in Q: f(q) > c\},$$

де  $Q$  – множина автоматично отриманих ключових слів,  $f(q)$  – частота появи ключового слова  $q$ ,  $c$  – порогове значення для частоти появи ключового слова.

$$Q = \bigcup_{i=1}^h Q_i,$$

де  $h$  – кількість джерел, на основі яких формується множина  $Q$ . Множина  $Q$  формується за рахунок:

- аналізу відвідування користувачем інформаційної системи.  $Q_1$  – множина ключових слів, отриманих за результатами відвідування сторінок;

$$Q_1 = \bigcup_{j=1}^m L_j,$$

де  $L_j$  – множина ключових слів  $j$ -ої сторінки, що містить ключові слова та тематики,  $m$  – кількість сторінок;

- аналізу схожих інтересів користувачів, які відвідали однакові сторінки.  $Q_2$  – множина ключових слів користувачів зі схожими інтересами;

$$Q_2 = \{K_v: v \in \bigcup_{j=1}^m V_j\}, K_j(K_v, K^p) > s,$$

де  $K_v$  – множина ключових слів користувача  $v$ ,  $V_j$  – множина користувачів, які відвідали  $j$ -ту сторінку, за винятком розглянутого користувача,

$$K_j(K_v K^p) = \frac{|K_v \cap K^p|}{K_v \cup K^p}$$

– міра Жаккара ( $0 \leq K_j(K_v K^p) \leq 1$ ), а  $s$  – порогове значення схожості;

- аналізу тематики публікацій, автором яких є користувач.  $Q_3$  – множина ключових слів, отриманих на основі аналізу практики публікації активності користувача,

$$Q_3 = \cup_{j=1}^g K_{pj},$$

де  $K_{pj}$  – множина ключових слів  $j$ -ої публікації,  $g$  – кількість публікацій користувача;

- аналізу схожості інтересів між співавторами публікацій, автором яких є користувач.  $Q_4$  – множина ключових слів співавторів публікацій користувача;

$$Q_4 = \{K_{ca}: c_a \in \cup_{j=1}^g Ca_j, K_j(K_{ca}, K^p) > s\},$$

де  $K_{ca}$  – множина ключових слів користувача  $p_{ca}$ ,  $Ca_j$  – множина співавторів публікації  $j$ , за винятком розглянутого користувача,  $K_j(K_{ca}, K^p)$  – заходи Жаккара, а  $s$  – порогове значення схожості;

- аналізу підписки користувача на розсилку в ІСУ.  $Q_5$  – множина ключових слів, зазначених користувачам для отримання розсилок в інформаційній системі;

- аналізу профілю користувача в наукометричних БД.  $Q_6$  – множина ключових слів користувача, отриманих з наукометричних баз даних;

$$Q_6 = \{K_{apr}: a_{pr} \in \cup_{j=1}^d Apr_j\},$$

де  $K_{apr}$  – множина ключових слів для користувача профілю  $a_{pr}$ ,  $Apr_j$  – множина авторських профілів науково метричної бази даних  $j$  для розглянутого користувача,  $d$  – кількість наукометричних баз даних.

В системі враховуються найбільш поширені науково метричні БД і їх ідентифікатори авторських профілів [5]:

- РИНЦ (рінц); використовується унікальний ідентифікатор SPIN-код;

- Web of Science – база даних по науковому цитуванню інституту наукової інформації (Institute of Scientific Information – ISI); використовується унікальний ідентифікатор ResearcherID [16];

- Scopus – єдина мультидисциплінарна реферативна база даних, що представляє унікальну систему оцінки частоти цитування. Використовуваний унікальний ідентифікатор – ORCID [15].

Також розглянемо ще інші моделі, розроблені для університету.

**Модель профілю учасника в наукометричній БД.** Авторський профіль з наукометричних БД представляється наступним чином [1]:

$$A_{pr} = \langle K_{apr}, P_{pr}, Ind_{pr} \rangle,$$

де  $P_{pr}$  – множина публікацій авторського профілю,  $Ind_{pr}$  – ідентифікатор авторського профілю.

**Модель профілю учасника в ІСУ університету.** Профіль учасника  $a_i$  у інформаційній системі має наступний вигляд:

$$a_i = \langle K^i, p^i, Apr^i, W^i \rangle,$$

де  $Apr^i$  – множина профілів в наукометричних базах даних,  $W^i$  – множина публікацій автора на іноземній мові.

$$W^i = \{w_j^i\}_{j=1}^t,$$

де  $t$  – кількість унікальних іноземних публікацій.

**Модель наукових колективів** представлена у вигляді:

$$Akl^i = \langle Ca^i, Cw^i, St^i, Pt^i \rangle,$$

де  $Ca^i$  – співавтори по публікаціям автора  $a_i$ ,  $Cw^i$  – співробітники підрозділів в якому працює або працював автор  $a_i$ ;  $St^i$  – студенти або аспіранти, які навчаються під керівництвом автора  $a_i$ ;  $Pt^i$  – учасники проектів, в яких бере участь автор  $a_i$ .

**Модель публікації** має вигляд:

$$At = \langle lz, Aat, Kat \rangle,$$

де,  $lz$  – профіль видання,  $Aat$  – множина авторів публікацій,  $Kat$  – множина тематичних характеристик публікації.

$$lz = \langle Diz, Niz, Siz, Pbiz, Kiz \rangle,$$

де  $Diz$  – множина описових характеристик видання, таких як місце видання, видавництва, вид видання, сайт видання, мова видання, вид матеріалів, ISSN, ISBN, e-ISSN,  $Niz$  – множина наукометричних показників (IF, IPP, SJR, SNIP),  $Siz$  – множина показників статусів публікацій згідно індексування в наукометричних базах даних,  $Pbiz$  – множина категорій авторів публікуються в даному виданні як: студенти, аспіранти, співробітники, кандидати наук, доктора наук, іноземні співробітники,  $Kiz$  – множина тематичних характеристик видання.

**Модель наукового заходу** представляється в такий спосіб:

$$Kf = \langle Dkf, Pkf, Pkfv, Kkf \rangle,$$

де  $Dkf$  – множина описових характеристик наукових заходів, таких як сума фінансування, країна, мова заходу, рядки проведення, сайт заходи,  $Pkf$  – множина категорій користувачів, які брали участь в даному заході,  $Pkfv$  – множина категорій користувачів, які відвідали цей захід,  $Kkf$  – множина тематичних характеристик наукових заходів.

На рисунку 2.5 представлені можливі варіанти ідентифікації авторів.

Розглянемо приклад, представлений на рисунку 2.5, більш детально. У публікації англійською мовою вказані два учасника: Вуйак L.M., Duma L.V. Для того щоб ідентифікувати співробітників, які є авторами даної публікації, необхідно на іноземній мові написати прізвище, ім'я та по батькові авторів, та знайти в базі даних відповідних співробітників. Для розглянутого прикладу були знайдені такі збіги [7]:

- Автор 1 – Вуйак L.M. Для даного автора були знайдені наступні схожі написання:

- o  $w_1^1$  – Буяк Л.М. Дане написання вказано у двох користувачів:

- $a_{pt_1}$  – Вуйак L.M.
    - $a_{pt_2}$  – Вуйак L.M.

о  $w_2^1$  – Буяк Л.М. Дане написання визначено на підставі аналізу іноземного написання прізвищ авторів, що зберігаються в системі:

- $a_{pt_3}$  – Вуяк L.M.
- Автор 2 – Duma L.V. Для даного автора було знайдено одне написання:  
о  $w_1^2$  – Дума Л.В.
- $a_{pt_4}$  – Duma L.V.

Таким чином, однозначно визначити зв'язок Автора 1 з користувачем інформаційної системи неможливо, на відміну від Автора 2, для якого було знайдено тільки один зв'язок з  $a_{pt_3}$ .

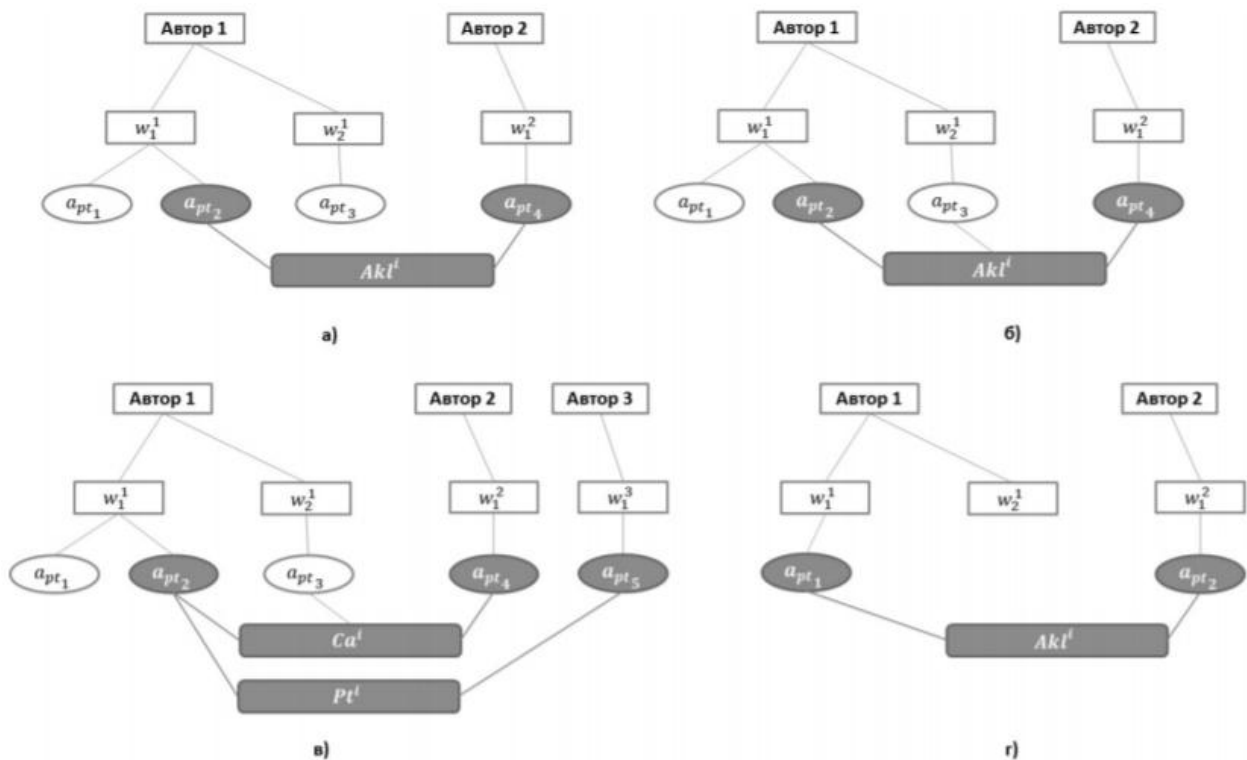


Рис.2.5. Приклади ідентифікації авторів  
Розроблено автором

Для того щоб визначити Автора 1, використовується аналіз авторських колективів. За допомогою проведеного аналізу вдалося визначити, що з потенційних авторів  $a_{pt_1}$ ,  $a_{pt_2}$ ,  $a_{pt_3}$  тільки співробітник  $a_{pt_2}$  брав участь в авторському колективі зі співробітником  $a_{pt_4}$ .

Метод ідентифікації авторів, заснований на визначенні потенційних авторів з написання спільних публікацій, з урахуванням наукових колективів і частоти їх появи. Цей метод дозволив підвищити якість визначення та зв'язку авторських профілів з науково метричними БД і користувачами інформаційної системи.

Процес виконання науково-дослідної частини індивідуального плану є циклічним і відбувається раз на семестр. На малюнку 10 представлений процес виконання науково-дослідної частини індивідуального плану.

Процес виконання наукової-дослідної частини індивідуального плану, має наступні кроки:

**Крок 1.** Пошук навчаються періодичного видання, наукового заходу, конкурсу грантів

**Крок 2.** Публікація наукових досліджень, виступ на конференції, участь в конкурсі грантів.

**Крок 3.** Внесення відомостей про отримані результати.

**Крок 4.** Затвердження звіту про виконання індивідуального плану.

Процес підтримки прийняття рішень повинен реалізовуватися між кроком 1 і кроком 2 з можливістю частково або повністю замінити крок 1.

Цей процес повинен забезпечувати формування рекомендацій і їх обґрунтування. Включення блоку щодо формування рекомендацій в процес виконання індивідуального плану є важливим завданням, що впливає на досягнення поставлених перед які навчаються науково-дослідних завдань і часом їх виконання.

Склад вирішуваних завдань представлений на малюнку у вигляді блоку формування рекомендацій:

- формування рекомендацій щодо вибору наукових конференцій;
- формування рекомендацій щодо вибору періодичного видання для публікації наукових робіт;
- формування рекомендацій щодо вибору наукових конкурсів для забезпечення матеріального зачепила своєї роботи;



- формування рекомендацій щодо вибору наукових публікацій в високорейтингових журналах по заданій тематиці;
- формування рекомендацій щодо вибору наукового керівника або консультанта;
- формування рекомендацій щодо вибору або створення наукового колективу.

Робота блоку щодо формування рекомендацій, досягається шляхом виконання наступних завдань:

- ***формування наукових інтересів:***

- аналіз поведінки користувача в ІСУ університету;
- аналіз профілів користувачів в наукометричних БД;
- аналіз пов'язаності наукових інтересів користувачів в ІСУ університету;

- ***збір і аналіз відомостей з зовнішніх наукометричних БД;***

- ***збір і аналіз профілів наукових заходів, публікацій та конкурсів на матеріальне стимулювання.***

**Склад факторів, що впливають на процес формування рекомендацій:**

- збір і аналіз різнорідної інформації з зовнішніх наукометричних БД;
- ідентифікація авторів публікацій;
- формування критеріїв для оцінки альтернатив і вказівку значущості даних критеріїв;
- формування обґрунтування по запропонованим рішенням.

**Вимоги до СППР:**

- всі рекомендації повинні задовольняти науковим інтересам того, хто навчається;
- рекомендації повинні враховувати вимоги індивідуального плану за відповідний семестр;
- інформація про наукові заходи повинна бути актуальна і отримана своєчасно;
- вимоги щодо вибору періодичного журналу для публікації робіт повинні враховувати вимоги індивідуального плану;

- безліч альтернатив повинно бути ранжовано за ступенем впливу на досягнення мети.

У більшості алгоритмів аналізу альтернатив використовується метод зважених сум. Даний метод передбачає наступні дії:

- провести оцінку по кожному критерію;
- провести нормування; при оцінюванні в роботі використовуються різні критерії і їх показники;
- обчислити функцію корисності – дозволяє здійснити ранжування отриманих результатів і при формуванні рекомендацій надати інформацію в порядку обґрунтування актуальності.

Метод зважених сум з мультиплікативної моделлю обчислення ваг критеріїв використовується при створенні шаблону оцінки об'єкта за замовчуванням.

### **3. Реалізація системи підтримки прийняття рішень в ІСУ ЗУНУ**

#### **Модель даних**

Аналіз проблемної області дозволив виділити наступні атрибутику БД:

- *Шаблони* – даний атрибут відводиться для зберігання переліку шаблонів з зазначенням таблиці об'єктів на котрі розрахований даний шаблон, а також найменування поля, який містить ідентифікатор об'єкта.

- *Показники* – атрибут відводиться для зберігання відомостей про критерії, на підставі яких проводиться розрахунок функції корисності.

- *Набори показників* – атрибут відводиться для зберігання набору показників, що відносяться до відповідного шаблону, а також ваг показників для даного шаблону.

- *Настройки показників* – атрибут відводиться для зберігання відомостей про скорегований набір показників зв'язків з динамічними запитамі з зазначенням типу зв'язків.

- *Запити* – атрибут відводиться для зберігання відомостей про попередньо налаштовані запити, а також типи даних запитів. Тип запиту необхідності для

розуміння яку інформацію даний запит буде повертати. Запит може повертати кількісну характеристику, а також розшифровку даної кількісної характеристики.

- *Шаблони користувача* – атрибут відводиться для зберігання відомостей у шаблонах конкретного користувача за умови посилання на вихідний шаблон і певного користувача.

- *Призначені для користувача настройки* – атрибут відводиться для зберігання відомостей, які призначені для користувача. Робиться певна настройка персональних шаблонів за умови посилання на першочергово набір показників, з можливістю коригування ваги відповідних показників.

- *Розрахунок* – атрибут відводиться для зберігання відомостей про розрахунок, датою його проведення та посилання на призначений для користувача шаблон.

- *Значення розрахунку* – атрибут відводиться для зберігання відомостей для призначеного користувача, із зазначеним посиланням на розрахунок, а також попередньо сформоване значення показника і результати нормалізації даних значень.

- *Ключові слова* – атрибут відводиться для ведення відомостей про ключові слова в певній тематиці.

- *Ключові слова об'єкта* – атрибут відводиться для зберігання відомостей по ключових словах, на підставі яких був попередньо сформований набір об'єктів для подальшої оцінки за критеріями.

- *Ключові слова користувача* – атрибут, що відводять для зберігання всіх ключових слів користувача ІСУ, включаючи автоматично сформовані ключові слова. Містить показання користувачів про ключові слова, а також об'єкт, на підставі якого з'явилося дане ключове слово, а також посилання на наукові інтереси авторів, які є співавторами.

На підставі проаналізованих атрибутів була побудована ER-модель ІППР.

Всі атрибути, представлені в ER-моделі, були реалізовані на базі даних Oracle в рамках ІСУ університету. Всі реалізовані модулі були зібрані в пакет.

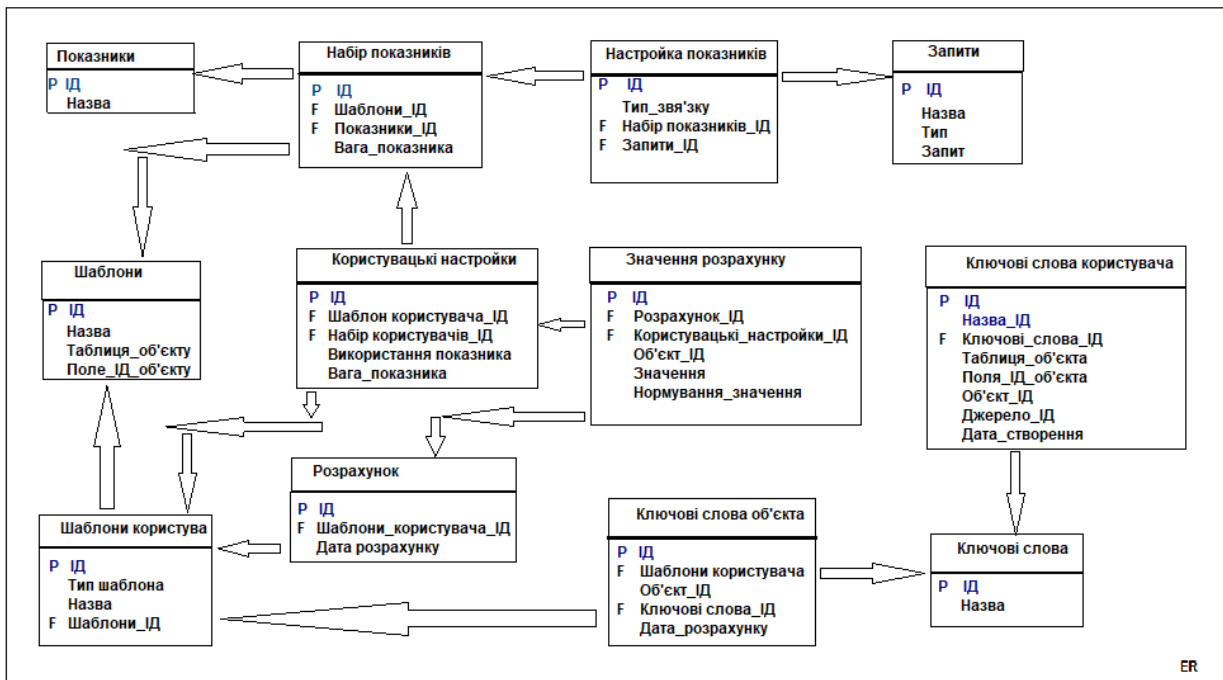


Рис. 3.1. ER-модель ІППР  
Розроблено автором

Даний пакет містить наступні основні функції та процедури:

*Процедури:*

- оновлення публікацій – для того, щоб отримувати оновлення з науково метричних БД;
- оновлення наукових інтересів користувачів – оновлення наукових інтересів користувача на основі його активності публікацій, аналізу схожих інтересів з співавторами публікацій, а також оновлення відомостей наукових інтересів за профілем авторів з науково метричних БД;
- оновлення профілів науково метричної БД – щоб отримувати оновлення профілів з науково метричних БД і їх ідентифікація;
- розрахунок значень – здійснює заповнення таблиці значень розрахунку.

*Функції:*

- *активність користувача* – фіксація відвідування наукових сторінок;
- *додавання ключових слів* – функція здійснює додавання ключових слів. Ця функція вносить оновлення для користувача з зазначенням джерела появи конкретного ключового слова;

- *пошук користувачів* – функція здійснює пошук користувачів по заданим об'єкта. У разі аналізу публікацій функція здійснює пошук співавторів;
- *розрахунок відстані Жаккара* – розраховує відстані Жаккара між двома користувачами;
- *копіювання шаблону* – функція здійснює копіювання попередньо заданого шаблону для конкретного користувача;
- *отримання значень запиту* – функція здійснює виконання запиту, заданого в шаблоні і повертає результат його виконання;
- *отримання таблиці за запитом* – функція дозволяє отримати значення запиту за шаблоном у вигляді таблиці. Ця функція дозволяє отримати розшифровку за отриманим в попередньої функції значенням;
- *нормування значень* – функція здійснює нормування значень для конкретних показників у відповідному розрахунку;
- *обчислення функції корисності* – функція здійснює розрахунок функції корисності по заданими показниками у відповідному розрахунку.

***Процедури, що запускаються планувальником завдань Oracle:***

- ***Процедура оновлення публікацій.*** Дана процедура використовує зовнішню функцію повідомлення; функція сповіщає співробітників бібліотеки про появі нових публікацій або про оновлення вже існуючих.
- ***Процедура оновлення наукових інтересів користувачів.*** Дана процедура використовує такі функції:
  - ✓ пошук користувачів;
  - ✓ розрахунок відстані Жаккара;
  - ✓ додавання ключових слів.
- ***Процедура оновлення профілів наукометричної БД.*** Дана процедура використовує зовнішню функцію повідомлення; функція сповіщає співробітників бібліотеки про появу нових профілів, отриманих з науково метричних БД.
- ***Процедура розрахунку значень викликається з програми і дозволяє здійснити розрахунок для певного об'єкта за заданими параметрами.***

*Процедура використовує такі функції:*

- копіювання шаблону – копіювання здійснюється в разі, якщо користувач здійснює розрахунок по заданому об'єкту вперше;
- отримання значень запиту – функція виконується при розрахунку параметрів;
- нормування значень – функція виконується по закінченню розрахунків параметрів для окремого об'єкта.

Система ІППР є частиною ІСУ університету. *ІСУ університету це:* комплексна система, яка складається з чотирьох базових компонент: адміністративного, навчального, проектного та фінансово-господарського комплексів. ІСУ університету представлена як інтернет-ресурс – більше 200 ресурсів, а також як інтернет-ресурси – більш 10000 користувачів і 100 додатків.

Інтернет-портал університету ЗУНУ, який утворює корпоративний інформаційно-функціональний простір університету, побудований на базі платформи Oracle Application Express і СУБД Oracle [9, 15].

Система ІППР інтегрована в ІСУ університету, взаємодія з її компонентами представлено на малюнку 3.2.

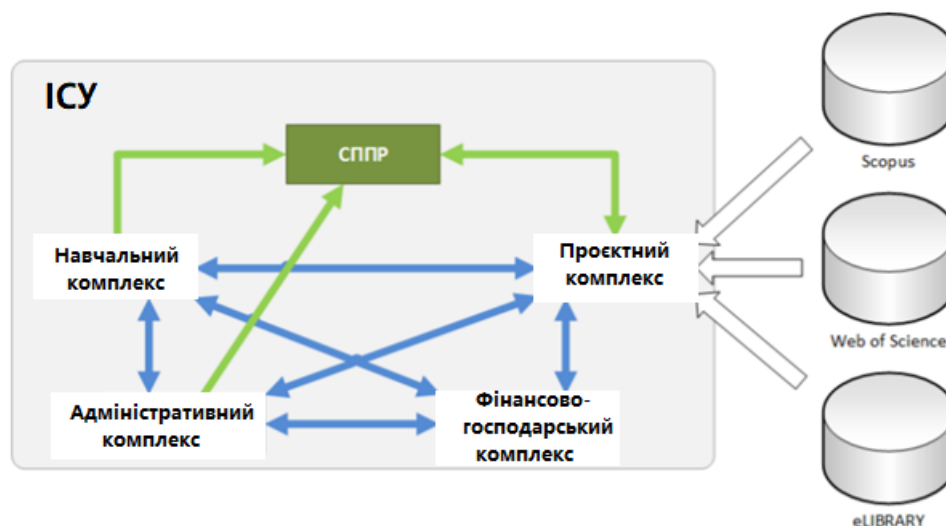


Рис. 3.2 Взаємодія ІППР з компонентами ІСУ університету розроблено автором

Взаємодія ІППР здійснюється з наступними компонентами ІСУ:

- навчальний комплекс – отримання відомостей про навчання;
- адміністративний комплекс – отримання відомостей про користувачів ІСУ;

- проектний комплекс – отримання відомостей про науково-практичної діяльності користувачів ІСУ університету.

Взаємодія з проектним комплексом здійснюється і в зворотньому напрямку, шляхом автоматичного наповнення наукових інтересів користувачів ІСУ університету.

### **Структурна модель**

Система ІППР представлена у вигляді набору програмних модулів:

1. Модуль адміністрування;
2. Модуль рекомендацій.

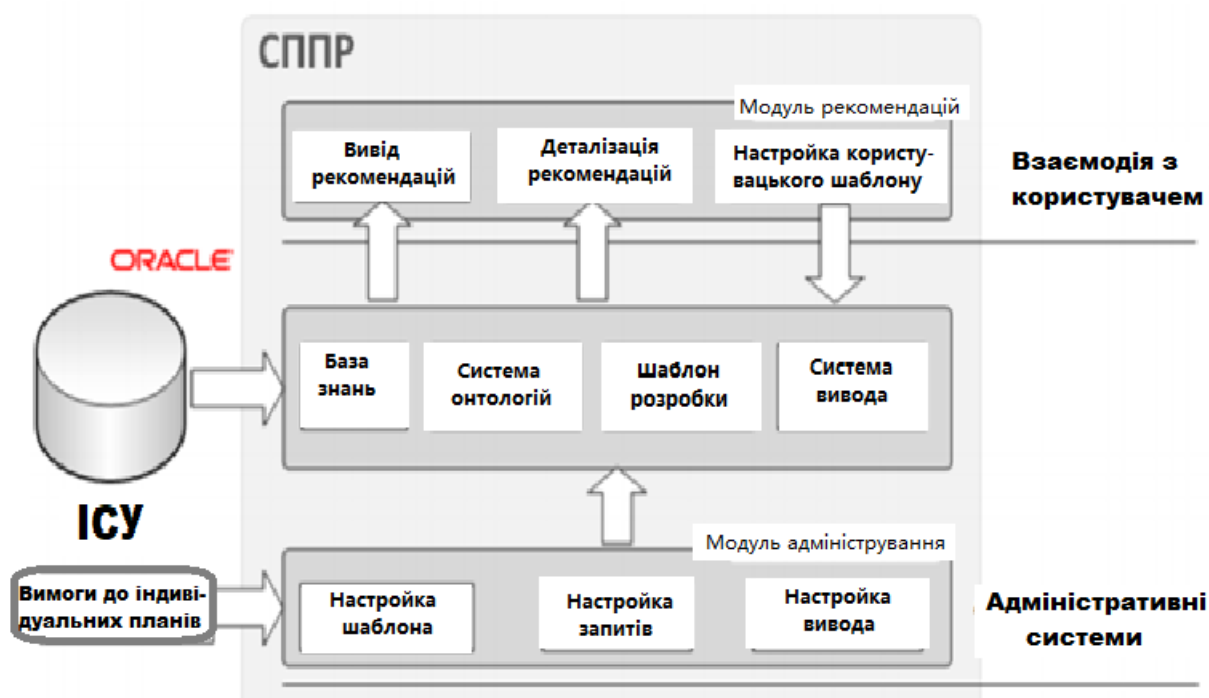


Рис.3.3 Структура СППР  
розроблено автором

Модуль адміністрування являє собою інструмент налаштування шаблону формування рекомендацій. На даний момент використовуються наступні шаблони:

- шаблон за вибором періодичного видання;
- шаблон за вибором заходів;
- шаблон за вибором конкурсу на матеріальне стимулювання;
- шаблон за вибором наукового консультанта або колег, які працюють за певної тематики.

Алгоритм налаштування шаблону здійснюється в кілька етапів:

**Крок 1.** Створення шаблону і його опису;

**Крок 2.** Створення показників і їх опису. Показники являють собою довідник, що дозволяє їх використовувати в різних шаблонах з різними настройками.

**Крок 3.** Заповнення довідника запитів. Довідник запитів містить запити двох типів, перший «число» – повертає конкретне значення (наприклад, кількість співробітників публікуються в заданому виданні), другий «список» – повертає список (список співробітників, що публікуються в заданому виданні).

**Крок 4.** Налаштування показників. На даному етапі вказується зв'язок показників з довідником запитів.

У модулі деталізації докладно описується на підставі яких критеріїв була представлена конкретна рекомендація, надається можливість подивитися детальну інформацію по кожному критерію, а також надається деталізація ключових слів і тематик на підставі яких був сформований попередній список альтернатив із зазначенням джерела появи даних ключових слів і тематик.

Початкові рекомендації формуються на основі попередньо налаштованого шаблону. У разі якщо дана установка не влаштовує користувача, він може перейти до модуля настройки призначеного для користувача шаблону.

В даному модулі здійснюється коригування попередньо настроювальних показників.

Користувачеві доступні кілька можливих варіантів настройки:

- ***Зміна ваги показників.*** Ця установка дозволяє змінити значимість показників, які будуть в подальшому використовуватися при формуванні рекомендації;
- ***Включення / відключення показника.*** Ця установка дозволяє відключити ті показники, які не є актуальними для користувача при отриманні рекомендацій з даного шаблону.



## Висновки

Аналіз проблематики підтримки прийняття рішень в освітній діяльності дозволив встановити, що до теперішнього часу в частині науково-дослідної діяльності в галузі освіти існують різні регламентуючі процеси, спрямовані на облік, а також матеріальне заохочення студентів та аспірантів за результати науково-дослідної діяльності.

Реалізація процесу досягнення даних результатів є однією з головних проблем для студентів в магістратурі і аспірантурі. Складність вирішуваних задач і багатокритеріальність оцінки їх рішень вимагає розробки СППР і її інтеграції в існуючі системи управління освітніми процесами.

У першому пункті було запропоновано методологію побудови СППР, яка дозволяє в значній ступеня вирішити проблеми студентів та аспірантів, які навчаються в процесі формування та реалізації результатів науково-дослідної діяльності.

У другому пункті представлена загальна структура методу ППР, детально описані розроблені інформаційні моделі, використовувані в СППР.

Побудовано моделі наукових інтересів учасників освітньої діяльності, модель авторського профілю, модель наукових колективів (представлена модель дозволяє спростити і підвищити точність автоматичного визначення авторських профілів за даними сторонніх наукометричних БД), модель публікацій, а так ж модель наукових заходів.

Запропоновано метод автоматичної побудови інформаційної моделі наукових інтересів учасників освітнього процесу, розроблений алгоритм аналізу відповідності індексованих періодичних видань, наукових заходів та конкурсів, як наукових інтересів користувача, що враховує множинні критерії.

У третьому пункті описана та розроблена система підтримки прийняття рішень в ІСУ яка використовується в ЗУНУ, Представлений алгоритм процесів СППР.

Всі представлені моделі та процеси були реалізовані на прикладі СППР в ІСУ університету ЗУНУ. Описана ER модель, яка побудована за допомогою

платформи Oracle Application Express і СУБД Oracle, а також представлена функціонально-логічна, інтеграційна і структурна моделі.

У результаті виконаних дослідження отримані наукові та практичні результати. Методика дозволила забезпечити співробітників і учнів інформацією, необхідною для організації та розвитку взаємодії між ними при реалізації науково-дослідної, науково-практичної діяльності, а також реалізувати інтелектуальний пошук в просторі інформаційних моделей.

Обґрунтованість і достовірність наукових положень підтверджується повнотою теоретичних та практичних досліджень, їх позитивною оцінкою є практична перевірка, отримана в ході експлуатації СІПІР по реалізації науково-інноваційної діяльності в складі ІСУ в ЗУНУ.

### **ВИКОРИСТАНА ЛІТЕРАТУРА**

1. Вареников Д.А. Підходи автоматизації обробки даних наукометричних баз даних // Комп'ютерні інструменти в освіті. – 2015. – № 2. – С. 3-14.

2. Єфімов, М.Н. Метод визначення рекомендацій для користувачів інформаційної системи на основі їх наукових інтересів і активності / М.Н. Єфімов, М.Д. Шлей, Д.А. Вареников // Збірник матеріалів конференції "Науково-освітня інформаційне середовище ХХІ століття". – 2014. – С. 71-73.

3. Горобець О. А. Методи оцінки ефективності запровадження інновацій на підприємстві / О. А. Горобець // Вісник Хмельницького національного університету. – 2009. – № 2. – Т. 1. – С. 124-127.

4. Гриньов В. М. Організаційні проблеми інноваційної діяльності на підприємствах: монографія / В. М. Гриньов, В. В. Власенко. – Х.: ВД «ІНЖЕК», 2005. – 200 с.

5. Джорж Ф. Л. Штучний інтелект. Стратегії та методи вирішення складних проблем / Ф.Л. Джорж. – СПб.: Вільямс, 2013.

6. Дорошко О. О. Особливості інноваційного розвитку України / О. О. Дорошко // Інвестиції: практика та досвід. – 2011. – № 5. – С. 21-24.
7. Дума Л.В., Данилюк І.В. Атрибут судово-експертної діяльності та класифікація послуг у сфері економічних досліджень – Science Review: RS Global Sp. z O.O., Scientific Educational Center Warsaw, Poland, – Вип.9.2 – С. 17-23.
8. Данилюк І.В. Дума Л.В. Карлаш А. В., Проблеми викладання ІТ-дисциплін у вищій школі та шляхи їх вирішення // Сучасні інформаційні технології у бізнесі та досвід їх використання: матеріали Всеукраїнської школи-семінару: Чернівці: Чернівецький нац. ун-т – 2017. – С. 28-30.
9. Закон України «Про пріоритетні напрями інноваційної діяльності в Україні» від 16.01.2003 № 433–IV з наступними змінами і доповненнями. [Електронний ресурс] // Офіційний сайт Верховної Ради України. – Режим доступу: <http://zakon.rada.gov.ua/cgi-bin/laws/main.cgi?nreg=433-15> 178.
10. Инновационный менеджмент: Многоуровневые концепции, стратегии и механизмы инновационного развития: [учебн. пос.] [Текст] / [ 180 Под ред. В.М. Аньшина, А.А. Дагаева]. – [3-е изд., перераб., доп.]. — М.: Дело, 2017. – 584 с.
11. Казін Ф.А. Система підтримки проектної діяльності в Університеті/ Ф.А. Казин, А.С. Біккулов, А.Н. Зленко, Н.Р. Тойвонен, І.А. Попова, М.Д. Шлей, Д.А. Вареників // Інновації – 2014. – № 8 (190). – С. 77-83.
12. Корнеев, С.В. Системи підтримки прийняття рішень в бізнесі / С.В. Корнеев // Мережі & Бізнес. – №6, 2015.
13. Россоха В.В. Інноваційна парадигма управлінської діяльності / В.В. Россоха // Агроінком. – 2015. – Вип. 5-6. – С. 59-61.

14. Тульчинська С.О. Функціонування організаційно-економічного механізму інноваційного процесу // Стратегічні пріоритети, №1(6), 2008. – 89-95 с.

15. Хомутский Д.Ю. Управление инновациями в компании [ текст] / Д.Ю. Хомутский. – М.: СОЛОН–ПРЕСС, 2018. – 169 с. – ISBN 978-5-91359- 031-2.

16. Benavente J. M. The Role of Research and Innovation in Promoting Productivity in Chile / J. M. Benavente // University of Chile. – Department of Economics. – 2002. – WP № 200. – 29 p.

17. Lawson B. Developing innovation capability in organizations: a dynamic capabilities approach / Benn Lawson, Danny Samson // International Journal of Innovation Management. – 2001. – Vol. 5, No. 3. – P. 377-400.

18. Noghin, V.D. An Axiomatization of the Generalized Edgeworth-Pareto Principle in Terms of Choice Functions / V.D. Noghin //Mathematical Social Sciences, 2006, v. 52, No 2, pp. 210-216.

19. Zott C. The business model: Recent developments and future research / Christoph Zott, Raphael Amit, Lorenzo Massa // Journal of Management. – 2011. – Vol. 37, No. 4. – P. 1019-1042.

20. <http://www.ukrstat.gov.ua> – офіційний сайт Державного комітету статистики України : Держкомстат України [Електронний ресурс].

#### Додаток А

#### Стадії господарської та інноваційної діяльності МП

<b>Виникнення</b>
<ul style="list-style-type: none"><li>• формування інноваційної ідеї;</li><li>• патентна літературна оцінка ідеї;</li><li>• оцінка інноваційних потреб і фінансових можливостей;</li><li>• маркетингові дослідження і підготовка до заснування МП;</li></ul>

<ul style="list-style-type: none"> <li>• визначення мети діяльності та розробка підприємницької концепції;</li> </ul>
<b>Розвиток</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• проведення та дослідження розробок;</li> <li>• патентування нововведень, захист авторам прав;</li> <li>• маркетингові дослідження і підготовка ринку;</li> <li>• організаційно-правова підготовка виробництва;</li> <li>• початкова виробництво інноваційного продукту;</li> </ul>
<b>Зростання</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• нарощування виробничої потужності;</li> <li>• збільшення обсягу продажів;</li> <li>• освоєння нових ринків;</li> <li>• формування стійкості мережі постачальників;</li> <li>• вдосконалення технології, організації виробництва і менеджменту;</li> <li>• збільшення чисельності працюючих і підвищення кваліфікації працюючих;</li> </ul>
<b>Зрілість</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• стабілізація постачальників;</li> <li>• модернізація і індивідуалізація інноваційного продукту;</li> <li>• пошук нових ринків;</li> <li>• проведення досліджень і розробок;</li> <li>• пошук нових сфер застосування інноваційних ідей;</li> <li>• модернізація підприємницької концепції;</li> </ul>
<b>Загасання</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• модернізація виробничої бази;</li> <li>• скорочення виробничої інфраструктури;</li> <li>• скорочення чисельності працівників;</li> <li>• ліквідація запасів;</li> <li>• продаж власних ноу-хау, ліцензії, патенти;</li> <li>• придбання чужих виробництв, ліцензій, патентів.</li> </ul>

Розроблено автором на основі [16]

**Мушак Андрій Ярославович, кандидат технічних наук,  
доцент кафедри економічної кібернетики та інформатики**

## **ТЕХНОЛОГІЯ КОМПОЗИЦІЙНО-СТРУКТУРНОГО МОДЕЛЮВАННЯ У СИСТЕМАХ ДИСТАНЦІЙНОГО НАВЧАННЯ**

### **1. Елементи технології композиційно-структурного моделювання**

Прикладні програмні системи (ППС), які є інтелектуалізованими засобами накопичення та застосування знань про розв'язання задач в окремих предметних областях, і до яких належать навчальні програми, набули сьогодні інтенсивного розвитку та широкого використання, як нові інформаційні технології. Цим в значній мірі пояснюється підвищений попит на ППС та природня науково-практична зацікавленість спеціалістів в автоматизації громіздких, складних технологічних процесів побудови таких систем.

Останнє здійснюється в основному в трьох напрямках:

- в операційних середовищах,
- в інтегрованих середовищах програмування,
- у спеціалізованих інтегрованих середовищах.

Сьогодні для нових класів комп'ютерної техніки на перших двох напрямках розроблені потужні й досить зручні засоби. Однак, ефект від використання цих засобів знаходиться у тісній кореляції з майстерністю розробника ППС. До того ж згадані засоби базуються на так званих простих чи оверлейних структурах ППС, що часто вимагає додаткових зусиль, щоб „побороти” дефіцит оперативної пам'яті. Останнє особливо актуально для інтелектуальних ППС (по-іншому систем, що ґрунтуються на знаннях), в яких часто виникає потреба оперативно аналізувати значні об'єми інформації, а кількість оперативної пам'яті в більшості випадків незначна.

Покращити становище, а саме збільшити продуктивність праці розробників ППС, покращити якість та надійність таких систем можна шляхом вироблення уніфікованих механізмів, моделей мов, методологій побудови ППС. Саме КСМ-технологія дозволяє проектувати прикладні програми з метою

наступного їх макромодульного програмування. Дана технологія дає змогу проектувати системи довільної складності та архітектури (лінійної, альтернативної, циклічної, рекурсивної, інтегрованої тощо).

Розглянемо концептуальні основи КСМ-технології.

### **1.1. Концептуальні основи макромодульного програмування**

На шляху розвитку та становлення технологій програмування виникає необхідність як в створенні вискоєфективних методологій побудови програмних систем, так і в створенні математичного апарату для їх обґрунтування. Широкого використання і розвитку набули методології, які ґрунтуються на процедурно-орієнтованому підході, і які дозволяють вирішувати конкретні проблеми програмування. Зокрема, композиційна методологія є засобом для побудови моделей програм, адекватних їх функціональним вимогам і адаптації програм до конкретних умов застосування. Відповідний формальний апарат методології базується на композиційній алгебрі. Методологія багаторівневого структурного проектування програм [1] використовується для проектування алгоритмів з допомогою модифікованих систем алгоритмічних алгебр – формального апарату методології. Структурна методологія [2] разом з формальним апаратом – системою алгоритмічних алгебр задовольняє багатьом вимогам схемного проектування програм.

Відтак, можна сподіватися, що створення узагальненої методології, яка охоплює як методи побудови окремих програм, так і методи побудови програмних систем уцілому і органічно поєднує найважливіші аспекти відомих технологій програмування, а також побудова якісно нового математичного апарату, як засобу математизації програмування, дозволить підняти програмологію на якісно новий рівень розвитку. Цією новітньою методологією і є КСМ-методологія, в основі якої лежить поняття макромодуля.

Метод макромодульного програмування запропонований, як засіб для побудови ефективних композиційних моделей систем (зазвичай прикладних) із програмних об'єктів-модулів за допомогою спеціальних операцій над ними. По-іншому, синтез композиційних моделей відбувається в системі, яка

задається множиною операцій  $K$  і множиною базових модулів  $B$ . Множину всіх композиційних моделей, які породжуються елементами множини  $B$  з допомогою операцій множини  $K$  позначатимемо  $[B]$ , а пару  $\langle [B], K \rangle$ , яка утворює універсальну алгебру, називатимемо алгеброю морфізмів [3,4].

Для перетворення алгебри морфізмів в алгоритмічну систему введено поняття обчислюваності морфізмів, в тому числі обчислюваності на складних структурах даних. Під обчислюваністю тут розумітимемо обчислюваність на об'єкті натуральних чисел, узагальнену лише на випадок добутку об'єктів категорії. Така інтерпретація обчислюваності, наприклад, у топосі  $Set$  є звичайною обчислюваністю  $n$ -арних функцій, заданих на натуральних числах або, іншими словами, обчислюваністю по Т'юрінгу. Тому алгебра морфізмів як алгоритмічна система за своїми зображувальними можливостями є деяким узагальненням класичних алгоритмічних систем, таких, як машини Т'юрінга, рекурсивні функції і т. п. і, таким чином, звичайна обчислюваність композиційної схеми є наслідком її категорної обчислюваності.

Відзначимо також, що досить розвинені засоби формальних перетворень композиційних моделей програм, як формул алгебри морфізмів, дозволяють здійснювати їх семантично еквівалентні перетворення з метою одержання найпридатнішої конфігурації моделей розв'язання задачі залежно від тих чи інших параметрів.

Означення обчислюваного морфізму ґрунтується на поняттях найпростіших морфізмів  $s: N \rightarrow N, !: N \rightarrow 1, p_m^n: Nx \dots xN \rightarrow N$ , які апріорі вважаються обчислюваними та задані операції композиції, рекурсії і структурної суперпозиції для утворення нових морфізмів із найпростіших. Морфізм називається обчислюваним, якщо він належить замиканню множини найпростіших морфізмів відносно вищезазначених операцій.

Дане означення обчислюваності для морфізмів одержане шляхом абстрагування від конкретних елементів категорних об'єктів. Додаючи до найпростіших морфізмів елементи  $x: 1 \rightarrow N$  і зберігаючи означення композиції, рекурсії і структурної суперпозиції, одержимо означення обчислюваності в



точці. Зрозуміло, що в точковому топосі будь-який обчислюваний морфізм буде також і обчислюваним в точці.

Проектування модульних структур (множина  $B$ ) ґрунтується на графовому зображенні алгоритмів та їх перетвореннях за допомогою класичних та спеціальних операцій відповідно до тих чи інших критеріїв якості. Цей метод побудови алгоритмів (відомий як функціональний), в значній мірі дозволяє автоматизувати процес модуляризації шляхом декомпозиції та синтезу на відповідних етапах.

Відповідно до методу макромодульного програмування наступним етапом побудови програмної системи є програмування композиційних схем над змінними предметної області і програмними модулями. Описи змінних і модулів носять декларативний характер і задаються фреймоподібними структурами [5]. Опис композиційних схем носить процедурний характер, а відповідні засоби мають операторну природу і реалізують такі функції: виклик модуля, виклик композиційної схеми, присвоєння змінним значень логічних або арифметичних виразів, ітерації, циклу, вибору, еквівалентності змінних та ін. Допоміжний характер мають оператори: прийом та видача повідомлень, установка інтервалів реального часу і т. ін.

Для програмування композиційних схем (моделей функціонування ППС при розв'язанні прикладних програм) і відповідних об'єктів-змінних і об'єктів-модулів за методом макромодульного програмування використовується спеціально розроблена мова.

Макромодульний підхід до побудови ППС допускає глибоку формалізацію процесів синтаксичного та семантичного аналізу, що зокрема дозволяє ефективно вирішити проблеми автоматизації процесів верифікації проектів ППС і коректності композиційних схем. При цьому процес верифікації зводиться до виявлення логічних формул в тілі проекту ППС і перевірці їх загальнозначимості. Перевірка коректності композиційних схем здійснюється статично і динамічно шляхом комплексного аналізу відповідностей описів об'єктів і композиційних схем. Зрозуміло, що розв'язання цих проблем

дозволяє, з одного боку, підвищити надійність створюваного програмного забезпечення, а з іншого, зменшити затрати на його розробку й супровід.

**1.1.1. Синтаксичні моделі мов макромодульного середовища програмування.** Традиційно для опису КВ-синтаксису мовних конструкцій усіх рівнів використовуються БНФ. Обмеження, які мають контекстно-залежну природу та „семантика” описуються іншими методами, втому числі й словесно. За допомогою формул ЕФС можна описувати не тільки синтаксис мовних конструкцій, а й „семантику”, яка в даному контексті означає відношення між словами вхідної та вихідної мов. Одержані описи є досить виразними й наочними й, що більш важливо, здійснюються в рамках єдиного формалізму.

Наведемо синтаксис основних конструкцій мови [6,7,8], яка використовується для опису композиційних схем в середовищі макромодульного програмування.

Подання проблемних змінних.

<змістовна інтерпретація змінної> <послідовність символів>

<тип змінної> ЦІЛА

<тип змінної> ДІЙСНА

<тип змінної> СИМВОЛЬНА

<тип змінної> ФАЙЛ

<статус змінної> ВХІДНА

<статус змінної> ВИХІДНА

<ідентифікатор>x - <ім'я змінної>x

<ім'я змінної>x → <статус змінної>y → <тип змінної>z

→ <змістовна інтерпретація змінної>v → <значення змінної>w

→ <опис проблемної змінної>xyzvw

Подання макромодулів.

<константа> “<послідовність символів>”

<змінна>x → <параметр>x

<константа>x → <параметр>x

<параметр>x → <послідовність параметрів>x

<параметр>x → <послідовність параметрів>y → <послідовність параметрів>x,y

<послідовність параметрів>x → <список параметрів>{ x }

<послідовність параметрів>x → <список параметрів>{ ;x }

<послідовність параметрів>x → <список параметрів>{ }

<ім'я модуля>x → <список параметрів>y → <опис модуля>xy

Подання операторів.

a. Оператор виконання модуля.

<опис модуля>x → <оператор виконання модуля>exes x

b. Оператор опису альтернатив.

<логічний вираз>p → <послідовність операторів>y → <послідовність операторів>z → <оператор опису альтернатив>if p then y else z

c. Оператор типу do ... while.

<логічний вираз>p → <послідовність операторів>y → <оператор опису циклу>do y while p

d. Оператор типу for.

<опис проблемної змінної>x → <значення>y → <об'єкт даних>x|y

<об'єкт даних>x|y → <опис проблемної змінної>v →

<значення>w: → <об'єкт даних>x,v|y,w

<об'єкт даних>x|y → <об'єкт даних>x|z → <об'єкт даних>x|y,z

<об'єкт даних>x|y → <блок даних><x>=<y>

<блок даних>x → <оператор опису циклу>for(x) endfor

e. Оператор присвоювання змінній значення.

<опис проблемної змінної>x → <логічний вираз>y → <оператор присвоювання змінній значення> assign(x,y)

f. Оператор виконання моделі.

<ім'я моделі>x → <оператор виконання моделі>integ x

g. Оператор затримки обчислювального процесу.

<час затримки>x → <оператор затримки обчислювального процесу> pause{ x }

h. Оператор видачі інформації на екран дисплея.

<текст>x → <оператор видачі інформації на екран дисплея>print "<текст>"

q. Оператор еквівалентних змінних.

$\langle \text{опис проблемної змінної} \rangle x \rightarrow \langle \text{опис проблемної змінної} \rangle y \rightarrow \langle \text{еквівалентні змінні} \rangle x=y$

$\langle \text{еквівалентні змінні} \rangle x \rightarrow \langle \text{еквівалентні змінні} \rangle y \rightarrow \langle \text{список еквівалентних змінних} \rangle x,y$

$\langle \text{список еквівалентних змінних} \rangle x \rightarrow \langle \text{оператор еквівалентних змінних} \rangle \text{eqv}(x)$

p. Оператор опису моделі.

$\langle \text{ім'я моделі} \rangle x \rightarrow \langle \text{послідовність операторів} \rangle y \rightarrow \langle \text{оператор опису моделі} \rangle xy$

**1.1.2. Верифікація композиційних схем.** Макромодульний підхід у програмуванні включає питання, які відносяться до семантичного аспекту програмування взагалі [9] та програмуванню описаною у пункті 1.2.1 мовою зокрема. Деякі з них розглянемо в даному пункті. При цьому увага, головним чином, приділятиметься дослідженню конструкцій, які містять логічні формули.

Розглянемо оператор цієї мови, який задається синтаксичною формулою вигляду:

do

$\langle \text{послідовність операторів} \rangle$

while( $\langle \text{логічна формула} \rangle$ )

**Означення.** Логічна формула – це ланцюжок символів, які зображаються предикатом  $\langle \text{логічна формула} \rangle$  в елементарній формальній системі з аксіомами:

1.  $\langle \text{функціональний символ} \rangle +|-|*|/;$
2.  $\langle \text{предикатний символ} \rangle \langle | \rangle | =;$
3.  $\langle \text{константа} \rangle x \rightarrow \langle \text{терм} \rangle x$
4.  $\langle \text{проблемна змінна} \rangle x \rightarrow \langle \text{терм} \rangle x$
5.  $\langle \text{функціональний символ} \rangle x \rightarrow \langle \text{терм} \rangle y \rightarrow \langle \text{рм} \rangle z \langle \text{терм} \rangle u x z;$
6.  $\langle \text{предикатний символ} \rangle x \rightarrow \langle \text{терм} \rangle y \rightarrow \langle \text{терм} \rangle z \langle \text{атом} \rangle u x z;$
7.  $\langle \text{атом} \rangle x; \rightarrow \langle \text{логічна формула} \rangle x;$

8. <логічна формула> $x \rightarrow$  <логічна формула> $y \rightarrow$  <логічна формула> $\neg(x \wedge y)$ .

Принципове питання полягає у тому, чи є довільна логічна формула загальнозначимою, чи ні. У першому випадку розглянута вище мовна конструкція призводить до „зациклювання” композиційної схеми, яка її містить. У другому випадку цикл завершується через скінченну кількість кроків.

Відомо [10], що не існує алгоритму який дозволяє розпізнати загальнозначимість довільної логічної формули. Це пов'язано з існуванням нескінченної кількості можливих інтерпретацій логічних формул. Але деякі окремі результати в цьому напрямку були одержані. Основна їх ідея полягає у тому, щоб спростити перевірку загальнозначимості формул. Це було зроблено шляхом побудови спеціальної області інтерпретації логічної формули – ербранівського базису. Він означається так:

1. Для будь-якої індивідуальної константи  $a$ , яка входить в логічну формулу  $G$ , покладемо  $a \in H_0$ . Якщо  $G$  не містить індивідуальних констант, то вважатимемо  $H_0 = \{c\}$ .

2. Для кожного  $n$ -місного функціонального символу  $f$  та індивідуальних констант  $a_1, \dots, a_n \in H_0$  вважатимемо  $f(a_1, \dots, a_n) \in H_1$ .

3. Для кожного  $n$ -місного функціонального символу  $f$  та термів  $g(a_1, \dots, a_n), \dots, h(b_1, \dots, b_n) \in H_1$  вважатимемо  $f(g(a_1, \dots, a_n), \dots, h(b_1, \dots, b_n)) \in H_a$ .

4. І так далі.

Тоді ербранівський базис  $H$  логічної формули  $G$  є об'єднанням  $H = H_0 \cup H_1 \cup \dots$ . Зрозуміло, що при відсутності функціональних та індивідуальних констант ербранівський базис зводиться до множини  $H = \{c\}$ .

Зрозуміло, що для перевірки незагальнозначимості (виконання) довільної логічної формули достатньо спростувати її на ербранівській області.

**Означення.** Основним прикладом диз'юнкта множини диз'юнктивів  $S$  називатимемо терм, отриманий підстановкою в нього елементів ербранівського базису замість змінних.

Алгоритм доведення незагальнозначимості довільної логічної формули ґрунтується на наступній теоремі.

**Теорема 1.** Множина диз'юнктивів  $S$  незагальнозначима тоді і тільки тоді, коли існує невиконувана множина  $S'$  основних прикладів диз'юнктивів  $S$ .

Нехай існує скінченна невиконувана множина  $S'$  основних прикладів диз'юнктивів  $S$ . Це значить, що в деякій інтерпретації  $I$  скінченна кількість диз'юнктивів з  $S$  спростовується. Тому і  $S$  спростовується. Тобто  $S$  – незагальнозначима.

Процедура спростування полягає у наступному.

1. Перетворимо логічну формулу в КНФ.
2. Визначимо ербранівський базис множини диз'юнктивів по рівням  $H_0, H_1, \dots$
3.  $i = 0$ .
4. Породжуємо множину основних прикладів диз'юнктивів  $S_i$  шляхом заміни змінних в  $S$  константами з  $H_i$ .
5. Якщо  $S_i$  невиконувана, незагальнозначимість  $S$  встановлена.
6.  $i = i + 1$ . Перехід на 4.

Цей алгоритм завершує роботу через скінченну кількість кроків, якщо множина диз'юнктивів  $S$  незагальнозначима, або працює нескінченно довго в протилежному випадку, при умові нескінченності ербранівського базису для  $S$ .

Розглянемо послідовність операторів мови у вигляді синтаксичної формули:

do

<послідовність операторів>

assign(<проблемна змінна>, <значення проблемної змінної>)

<послідовність операторів>

while(<логічна формула>)

Присвоєння значення проблемній змінній може призвести до “зациклювання” композиційної схеми навіть при умові незагальнозначимості логічної формули.

## **1.2. Оптимізаційні задачі в моделях системи гнучкого дистанційного навчання**

Засоби, що забезпечують підтримку технологічних процесів на всіх етапах життєвого циклу програмного забезпечення – від проектування, налагодження, документування та реалізації до впровадження і вдосконалення, широко відомі як CASE-інструментальні системи.

Розглянемо задачі оптимізації, що виникають на різних технологічних стадіях побудови ППС, зокрема КДН, в таких інтегрованих інструментальних середовищах. Основна увага при цьому приділена стадіям проектування ППС, підтримки їх функціонування та вдосконалення.

**1.2.1. Стадія проектування.** Проблеми оптимізації виникають майже в кожному технологічному процесі цієї стадії. Зокрема, важливими є глобальні проблеми мінімізації трудозатрат розробника ППС, мінімізація затрат часу на побудову ППС, мінімізація об’ємів документообігу та інші. Однак, названі проблеми важко піддаються формалізації і вирішуються, як правило, без застосування математичних методів. Виключенням є процес проектування модульної структури програмного забезпечення – модуляризація.

Модуляризація, як процес декомпозиції алгоритмів (програм) на модулі є одним з основних етапів проектування ППС. Важливу роль в цьому процесі відіграють вибрані критерії якості модуляризації. З неформальних критеріїв якості часто використовуються критерій мінімізації розміру модулів (щоб їх можливо було проглядати та запам’ятовувати). Інший критерій, навпаки, направлений на мінімізацію кількості модулів в структурі.

Визначення ж оптимальності модульної структури як мінімуму економічних витрат на розробку ППС є важко формалізованим і включає занадто багато параметрів.

Для мінімізації складності ППС прийнято програми розбивати на максимально незалежні фрагменти, шляхом послаблення взаємозв'язків між ними і посилення зв'язків усередині модулів, тобто потрібно проектувати модулі з високою міцністю і слабким зчепленням. Правда, такі характеристики модуля, як міцність і зчеплення, корисні в основному при оцінюванні альтернатив, але не визначають послідовності дій при модуляризації.

Широко застосовуються неформальні методи модуляризації, які є розвитком відомих технологічних засобів проектування програм низхідним способом, що одержав свою завершеність і популярність завдяки структурному програмуванню.

Формальні методи ґрунтуються на графовому поданні програм і розв'язуванні задач загального та спеціального виду на цих графах таких, як виявлення ізоморфних компонентів графа, розгалужених структур тощо.

Цікавим є функціональний метод модуляризації алгоритмів, який виходить з загального виду подання програм (враховуються як логічні, так і інформаційні зв'язки, допускаються альтернативні та циклічні структури) та приводить до модульної структури, що задовольняє цілому ряду неформальних критеріїв якості, серед яких: надійність, актуальність, змістовність та мінімальна надмірність системи модулів (модуль актуальний, якщо він використовується при розв'язуванні багатьох задач; модуль змістовний, якщо він розв'язує нетривіальну задачу; модуль надлишковий, якщо він дублює функцію другого модуля). ППС надійна, коли вона представлена максимально міцними та слабкими по зчепленню модулями).

Стратегічний принцип функціонального методу – аналіз найрізноманітніших алгоритмів, застосованих для розв'язування даного класу задач, з подальшою побудовою повної системи модулів, які задовольняють переліченим критеріям. Максимальна незалежність модулів та максимальний зв'язок між їх елементами, як і мінімізація числа складових елементів – модулів, забезпечується відповідними перетвореннями цього методу.



**1.2.2. Стадія функціонування.** Проблеми оптимізації, що виникають на цій стадії відносяться, в основному, до двох аспектів планування обчислень: пошуку оптимальних алгоритмів розв'язання задач і пошуку оптимальних засобів реалізації програм.

Перший аспект проблеми можна розглядати з різних точок зору, які викликають науково-практичний інтерес.

Розглянемо спочатку суть цієї проблеми в термінах простору змінних.

Простір змінних є різновидністю простору станів на випадок програмних об'єктів. Тому далі, в основному, використовуватиметься термін „стан”, маючи на увазі під цим зміст змінних.

Нехай  $P = \{P_i: i = \overline{1, h}\}$  – множина програмних модулів ППС, а  $X_i = X_i^a \cup X_i^r$  – множина параметрів модуля  $P_i$ , де  $X_i^a$ ,  $X_i^r$  – відповідно множина аргументів (входів) та результатів (виходів) модуля  $P_i \in P$ .

Усі можливі підмножини множини  $X = \bigcap_{i=1}^h X_i$  утворюють простір змінних (станів). Під станом розуміється будь-яка підмножина  $\delta_i \in X$ . Якщо  $X_k^a \subseteq \delta_i$ , то до стану  $\delta_i$  може бути застосований модуль  $P_k \in P$ , внаслідок чого буде здійснено перехід у деякий новий стан  $\delta_i \subseteq X$  такий, що  $\delta_i = \delta_i \cup X_k^r$ . Ясно, що змінним, які входять до  $X_k^a$ ,  $X_k^r$  присвоєні конкретні значення.

Типова задача планування в таких припущеннях формулюється таким чином.

У множині модулів  $P$  знайти таку їх послідовність, застосування модулів якої призведе з початкового стану  $\delta_h \subseteq X$  до деякого стану  $\delta_k \subseteq X$ , що включає цільовий стан  $\delta_{ц} \subseteq X$ . При цьому вимагається, щоб така послідовність була найдешевшою (ціна послідовності модулів приймається рівною сумі цін модулів, що її складають).

Використовувані для таких цілей методи в переважній своїй більшості є розвитком відомих методів виведення в продукційних моделях подання знань систем штучного інтелекту.

Розглянемо тепер проблему вибору оптимального алгоритму в заданій множині конкуруючих алгоритмів при різних практично важливих припущеннях про властивості, особливості та режими реалізації алгоритмів.

Нехай для розв'язання задачі  $z_j \in Z$  визначена множина алгоритмів  $A_j \subseteq A$ , за допомогою яких ця задача може бути розв'язана. Алгоритмам  $A_{ji} \in A$  поставлена у відповідність послідовність характеризуючих їх параметрів  $\alpha_{ji} = \{\alpha_{ji}^k: k=1, \dots, q\}$ . У множині  $A_j$  потрібно вибрати алгоритм  $A_{je}$  такий, щоб

$$\phi(\alpha_{je}, \gamma_{je}) = \text{ext}_i \phi(\alpha_{ji}, \gamma_{ji}) \quad (1.1)$$

при деяких обмеженнях на  $\alpha_{ji}$ .

Ця задача в загальному випадку є складною задачею багатокритеріальної оптимізації. З урахуванням потреб практики дана задача набуває різних часткових формулювань типу:

– серед усіх алгоритмів  $A$  знайти хоча б один алгоритм, за допомогою якого можна розв'язати дану задачу;

– у множині алгоритмів  $A$  знайти найефективніший по якомусь одному показнику, наприклад, по швидкодії, для розв'язування даної задачі та інше.

Практичний інтерес викликає пошук такого алгоритму, всі показники якого найбільш близько відповідали б вимогам користувача при розв'язуванні даної задачі. Якщо ці вимоги виражені в абсолютних одиницях значень інтегральних характеристик алгоритмів, то таку задачу можна подати у вигляді: у множині  $A_j$  знайти алгоритм  $A_{je}$  такий, який би забезпечував

$$\min_{1 \leq i \leq m_j} \sum_{k=1}^q \gamma_k \left( \frac{a_k}{\alpha_{j_i k}} - 1 \right)^2, \quad \sum_{k=1}^q \gamma_k = 1, \alpha_{j_i k} \neq 0,$$

$$\gamma_k > 0, k=1, \dots, q, I=1, \dots, m_j, j \in \omega_z,$$

де  $a_k, \alpha_{j_i k}$  – відповідно допустиме та поточне значення характеристик алгоритмів  $A_{ji}$ .

Прирівнюванням окремих параметрів  $a_k$  до нуля можна задавати різні часткові постановки цієї задачі.

Якщо з кожною характеристикою алгоритма зв'язати їх порогові значення, то задача вибору оптимального алгоритму може бути сформульована так: у множині  $A_j$  потрібно вибрати такий алгоритм  $A_{ji}$ , характеристики якого задовольняють критерію

$$\bar{\alpha}_{j_i} = \max_{1 \leq i \leq m_j} \{\bar{\alpha}_{j_i}\}, \bar{\alpha}_{j_e} > \tilde{\alpha}_j, j \in \omega_z, \quad (1.2)$$

де  $\bar{\alpha}_{j_i}$  – інтегральна характеристика алгоритму  $A_{ji}$ ,  $\tilde{\alpha}_j$  – порогове значення характеристики застосовуваності алгоритмів до задачі  $z_j \in Z$ .

Ясно, що більш точно застосовуваність алгоритмів  $A_{ji}$  можна описати векторами характеристик  $\{\alpha_{j_{ik}}\}$ ,  $k=1, \dots, q$ . Тоді задача (1.2) запишеться у вигляді

$$\bar{\alpha}_{j_{ik}} = \max_{1 \leq i \leq m_j} \{\bar{\alpha}_{j_{ik}}\}, \bar{\alpha}_{j_{ek}} > \tilde{\alpha}_{j_{ik}}, k=1, \dots, q, j \in \omega_z$$

Важливим в практичному відношенні є пошук оптимальних алгоритмів (з урахуванням їх модульної структури), що ґрунтуються на певних механізмах ведення пам'яті та режимах роботи системи.

Нехай  $q$ -й модуль ( $q=1, 2, \dots, v_{ji}$ ) алгоритму  $A_{ji} \in A_j$  реалізований в  $\mu_{ji}$  варіантах, а  $t(\psi_{j_i q})$ ,  $v(\psi_{j_i q})$ ,  $\omega(\psi_{j_i q})$  — час роботи, локальна та глобальна пам'ять  $\psi_{j_i q}$ -ї реалізації цього модуля відповідно. Упорядкована сукупність вигляду  $\Psi_{ji} = (\psi_{j_i 1}, \dots, \psi_{j_i v_{ji}})$  задає схему алгоритму  $A_{ji}$  з урахуванням деякого варіанту реалізацій складових його модулів,  $\Psi_{ji} \in \Psi_j$ .

Тоді шукається такий алгоритм  $A_{ji} \in A_j$ , для якого досягається

$$\min_{1 \leq i \leq m} \min_{\Psi_{ji} \in \Psi_j} \sum_{q=1}^{v_{ji}} t(\psi_{j_i q}) \quad (1.3)$$

при обмеженнях

$$\max_{q \leq q \leq v_{ji}} [v(\psi_{j_i q}) + w(\psi_{j_i q})] \leq V. \quad (1.4)$$

Він буде оптимальним по швидкодії в системі зі статичним розподілом пам'яті в режимі інтерпретації. Якщо ж пам'ять під глобальні змінні ведеться

динамічно, то задача пошуку алгоритма, оптимального по швидкодії, зводиться до попередньої заміни (1.4) на

$$\max_{q \leq v_{ji}} v(\psi_{jiq}) + \sum_{q=1}^{v_{ji}} \cup(\psi_{jiq}) \leq V, \quad (1.5)$$

де  $\sum_{\cup}$  – сумування з урахуванням теоретико-множинної операції об'єднання.

Для режиму компіляції з аналогічним механізмом ведення глобальної пам'яті, умова (1.5) матиме вигляд:

$$\sum_{q=1}^{v_{ji}} v(\psi_{jiq}) + \sum_{q=1}^{v_{ji}} \cup(\psi_{jiq}) \leq V \quad (1.6)$$

Для режиму генерації критерій (4.3) матиме вигляд:

$$\min_{1 \leq i \leq m_j} \min_{\psi_{ji} \in \Psi_{ji}} \sum_{q=1}^{v_{ji}} t(\psi_{jiq}),$$

де  $t_1(\psi_{jiq})$  — час завантаження  $\psi_{jiq}$ -ї реалізації модуля.

З урахуванням доступу алгоритмів до зовнішніх пристроїв функціонал (1.1) належить замінити на

$$\sum_{q=1}^{v_{ji}} t(\psi_{jiq}) + \sum_{q=1}^{v_{ji}} t(\psi_{jiq}) \Omega(\psi_{jiq}) \tau_l^*], \quad (1.7)$$

де  $P_1(\psi_{jiq})$  – ймовірність ініціювання обміну на  $l$ -му пристрої  $l=1, S$ ;  $\Omega_1(\psi_{jiq})$  – об'єм інформації в операціях обміну  $\psi_{jiq}$ -ї реалізації алгоритму на  $l$ -му пристрої;  $\tau_l^*$  – час вибірки з пам'яті  $l$ -го пристрою,  $l=1, \dots, s$ .

Заміною  $t(\psi_{jiq})$  на  $t_1(\psi_{jiq})$  в (1.7) ця задача буде відображати режим генерації. Для режиму інтерпретації з використанням динамічного ведення глобальної пам'яті пошук оптимального алгоритму по пам'яті забезпечує розв'язання наступної задачі.

Знайти алгоритм  $A_{je}$ , який забезпечує

$$\min_{1 \leq i \leq m_{ji}} \min_{\psi_{ji} \in \Psi_{ji}} \left[ \max_{1 \leq q \leq v_{ji}} v(\psi_{jiq}) + \sum_{q=1}^{v_{ji}} \cup \omega(\psi_{jiq}) \right] \quad (1.8)$$

при умові, що

$$\sum_{q=1}^{v_{j_i}} \cup t(\psi_{j_i,q}) \leq T; I=1, \dots, m_j, j \in \omega_z \quad (1.9)$$

де  $T$  – максимально допустимий час рахування.

Якщо в задачі (1.7), (1.8) замість (1.7) використовувати

$$\min_{1 \leq i \leq m_{j_i}} \min_{\psi_{j_i} \in \Psi_{j_i}} \left[ \sum_{q=1}^{v_{j_i}} (\psi_{j_i,q}) + \sum_{q=1}^{v_{j_i}} \cup \omega(\psi_{j_i,q}) \right], \quad (1.10)$$

то при її розв'язуванні буде враховуватись режим компіляції. Якщо в цій задачі замість (1.8) використати

$$\sum_{q=1}^{v_{j_i}} t_1(\psi_{j_i,q}) \leq T,$$

то будуть відображені особливості режиму генерації.

Якщо в задачах типу (1.3), (1.4) або (1.8), (1.10) врахувати додатково обмеження  $E[\varepsilon(\psi_{j_i,q})] \leq \varepsilon_0$ , де  $E$  – функція обчислення абсолютної похибки реалізованого на ЕОМ алгоритму, то знайдені алгоритми  $A_{j_i}$  будуть враховувати допустиму абсолютну похибку розрахунків.

Задача знаходження оптимального по точності алгоритму в множині реалізацій  $\Psi_{j_i}$  виражена критерієм

$$\min_{1 \leq i \leq m_{j_i}} \min_{\psi_{j_i} \in \Psi_{j_i}} E[\varepsilon(\psi_{j_i,q})]$$

та обмеженнями (1.4), або (1.5), або (1.8) і т. п.

Розглянуті задачі можуть бути розв'язані відомими методами математичного програмування. Відомі розв'язання задачі пошуку оптимального алгоритму по швидкодії в режимі компіляції зі статичним розподілом пам'яті методом вектора спаду, методом віток та меж і методом динамічного програмування при  $m_j = 1$ .

Розглянемо тепер цю проблему з точки зору мінімізації дублювання функцій в алгоритмах інтегрованої обробки даних. Її суть полягає в припущенні, що модель предметної області задана модульним ярусно-паралельним графом  $G^*$ , початкові вершини якого відповідають так званим  $d$ -модулям (їх множина лінійно упорядкована певним індексом  $k$ ), кінцеві його

вершини відповідають  $z$ -модулям, множина яких лінійно упорядкована індексом  $j$ , а останні вершини відповідають операційним модулям.

Підграф  $G_j^{*k} \subseteq G^*$ , що відповідає алгоритму розв'язку задачі  $z_j$  класу даних  $D_k$ , визначається співвідношенням

$$G_j^{*k} = \bigcup_{v=1}^{m_j^k} \Pi_{jv}^k, \quad (1.11)$$

де  $\Pi_{jv}^k$  –  $v$ -й шлях, що веде з вершини з іменем  $d_k$  у вершину з іменем  $z_j$ , а  $m_j^k$  – кількість таких шляхів.

Якщо потрібно інтегровано розв'язати деяку підмножину зв'язаних (між собою) задач  $\{z_{j_1}, \dots, z_{j_s}\}$  для набору початкових даних  $D_k$ , то узагальнений алгоритм їх розв'язку, що задовольняє критерію мінімального дублювання функцій, визначається відношенням:

$$G_{j_1, j_2, \dots, j_s}^{*k} = \bigcup_{i=1}^s \bigcup_{v=1}^{m_{j_i}^k} \Pi_{j_i v}^k = \bigcup_{i=1}^s G_{j_i}^{*k}. \quad (1.12)$$

Проблема планування обчислень в ППС вище висвітлювалась з точки зору „що потрібно виконати для розв'язання задачі”. Існують, однак, певні труднощі при розв'язанні цієї проблеми з іншої точки зору – „як потрібно виконувати програми на ЕОМ для того, щоб забезпечити найменші втрати часу при розв'язанні прикладних задач”. У тому випадку, коли потрібних ресурсів ЕОМ достатньо для звичайного розвитку обчислювального процесу, задача планування реалізації модулів на ЕОМ є ясною і в достатній мірі вивченою. Наведемо приклад, коли є потреба виконати модулі, зв'язки між якими задані графом  $G_j^*$  або  $G_{j_1, j_2, \dots, j_s}^*$  відповідно до (1.11), (1.12), і коли час виконання модулів не лімітований. В цьому випадку дисципліну виконання модулів можна описати правилами:

1. модулі одного ярусу виконуються в довільному порядку;
2. модулі  $n$ -го ярусу можна виконати після виконання суміжних з ними модулів  $(n-1)$ ,  $(n-2)$ , ...,  $0$  ярусів.

Якщо потрібно значно скоротити час розв'язку задач, то доцільно застосувати механізм паралельного виконання модулів. На багатопроцесорній обчислювальній системі можливе одночасне виконання модулів одного ярусу на різних процесорах. Стратегія планування реалізації модулів на багатопроцесорній розподіленій обчислювальній системі базується на результатах аналізу модулів графа  $G^*$  по вертикалі. Вона полягає у виділенні підграфів, розподілених між арифметичними процесорами системи таким чином, щоб реалізація модулів підграфів на відповідних процесорах була оптимальною в певному розумінні, наприклад, по критерію швидкодії. При цьому в ролі критерію відбору альтернатив частіше виступає співвідношення об'єму інформації обміну між процесорами та інтегрованою обчислюваною мірою складності алгоритму, заданого відповідним підграфом.

Розв'язування цієї задачі на однопроцесорній обчислювальній системі залежить від способів структурування програм (що дозволяє раціонально використовувати оперативну пам'ять при їх виконанні) та від можливості сумісництва операцій обміну і обробки даних, що дозволяє мінімізувати простої центрального процесора. Алгоритм планування реалізації модулів на такій ЕОМ частіше будується виходячи з інформаційної залежності модулів, оцінок часу чистого рахування та часу очікування (обміну).

Нехай  $G^*$  – ярусно-паралельний інформаційний модульний граф,  $P$  — множина його вершин (модулів). Припустимо, що вершини  $l$ -го ярусу ( $l=1,2, \dots, \lambda$ ) упорядковані в послідовності  $\{P_i\}_{i=1}^{l^m}$  так, щоб час очікування модуля  $P_m$  був мінімальний, а час очікування решти модулів, суміжний з часом рахування.

Наступні правила можуть бути покладені в основу алгоритму диспетчеризації модулів на однопроцесорній обчислювальній системі:

а) якщо модуль  $P_i^1$  знаходиться в стані „обмін даними”, активізувати, тобто привести в стан „рахунок”, перший модуль  $i$ -го ярусу очікуючий активізації;

б) якщо модулі  $P_1^l, \dots, P_m^l$  завершили роботу, активізувати модуль  $P^{(l+1)}$ ; якщо ж в цій послідовності модулів  $l$ -го ярусу модулі  $P_{m_1-i}^l, P_{m_1-i+1}^l, \dots, P_m^l$  знаходяться в стані „обмін даними”, активізувати модуль  $P_i^{l+1}$ , який є першим в послідовності  $P_1^{(l+1)}, \dots, P_{n_1+1}^{(l+1)}$ , який суміжний (інформаційно-залежний) з одним із модулів  $P_1^l, \dots, P_{m_1-i-1}^l$ .

Перелічені задачі можна розглядати також в умовах, коли дефіцитом є оперативна пам'ять. Найбільш загальний випадок – це ситуація, коли не вистачає оперативної пам'яті для розташування і даних і програм. В цьому плані можливі різні постановки задач планування, серед яких заслуговують на увагу наступні дві задачі, які, до речі, можуть виникати в одних і тих же проектах ППС:

- синхронізація процесу обчислень з процесом підкачування даних;
- мінімізація числа обмінів при розв'язанні задач.

Першої з них ми частково торкнулися вище. Тепер вкажемо два підходи до її практичного розв'язання. Перший з них полягає у розробці спеціального механізму синхронізації в рамках керуючої програми. Зазначимо, що в сучасних штатних ОС така задача розглядається в загальній постановці, а отже, цим можна скористатись двома способами: або пристосувати керуючу програму для передачі функцій по синхронізації процесів базовій операційній системі, або, враховуючи специфіку предметної області, реалізувати механізм в самій керуючій програмі з використанням лише окремих можливостей ОС.

Другий підхід до розв'язання цієї задачі в ППС полягає в реалізації механізмів синхронізації в самих прикладних модулях, чи у вигляді окремого процесу синхронізації з використанням відповідних можливостей системи програмування ОС.

Інший аспект проблеми „як виконувати ...” полягає в розв'язанні проблеми оптимізації за рахунок внутрішніх властивостей композиційної схеми обчислень. Формально суть розглядуваної проблеми полягає в мінімізації часу



реалізації програм за рахунок оптимізуючих перетворень їх обчислювальних моделей. Іншими словами, якщо  $t_i$  – час виконання  $i$ -го оператора композиційної схеми, то необхідно перетворити обчислювальну модель так, щоб  $\sum t_i \rightarrow \min$  при деяких обмеженнях на використовувану пам'ять і, можливо, інші ресурси.

У відповідності з технологією композиційного структурно-модульного програмування композиційна схема є програмою мовою Струмок, а в ролі оптимізуючих перетворень виступають так звані коректні трансформації, що забезпечують семантично еквівалентні перетворення програмних моделей шляхом перетворення відповідних композиційних схем. Серед таких перетворень відмітимо, наприклад, видалення надлишкового і некорисного морфізму і чистку циклу.

Зупинимось детальніше на суті цих перетворень.

Видалення надлишкового і безкорисного морфізма. В більшості випадків такі перетворення орієнтовані на лінійні композиційні моделі, які в термінології композиційного структурно-модульного програмування зображаються композицією морфізмів  $f_1 \circ f_2 \circ \dots \circ f_k$ , що задовольняє умові  $\text{Strin}(f_{i+1}) = \text{Strout}(f_i)$ , тобто „вихідна” структура даних морфізма  $f_i$  співпадає з „вхідною” структурою даних морфізма  $f_{i+1}$ , якщо такий існує.

**Означення.** Морфізм  $f_i$  композиції  $f_1 \circ \dots \circ f_i \circ \dots \circ f_k$  будемо називати безкорисним, якщо  $\text{Strout}(f_{i-1}) = \text{Strin}(f_{i+1})$  і  $f_1 \circ \dots \circ f_2 \circ \dots \circ f_k = f_1 \circ \dots \circ f_{i-1} \circ f_{i+1} \circ \dots \circ f_k$ .

Зокрема, безкорисним буде будь-який тотожний морфізм 1, що задається співвідношеннями  $1 \circ g = g$ ,  $f \circ 1 = f$ , які виконуються для довільних морфізмів  $f$  і  $g$ .

У цьому випадку трансформація композиції, що містить безкорисний морфізм, полягає в його видаленні з урахуванням проведення коректних перетворень обчислювальної моделі розв'язуваної задачі.

**Означення.** Морфізм  $f_i$  композиції  $f_1 \circ \dots \circ f_{i-1} \circ f_i \circ f_{i+1} \circ \dots \circ f_k$  будемо називати надлишковим, якщо існують морфізми  $g$ ,  $f'_{i-1}$ ,  $f'_{i+1}$  такі, що:

$$1) f_1 \circ \dots \circ f_{i-1} \circ f_i \circ f_{i+1} \circ \dots \circ f_k = f_1 \circ \dots \circ f'_{i-1} \circ g \circ f'_{i+1} \circ \dots \circ f_k$$

$$2) \text{String}(g) \leq_{\text{in}} \text{Strin}(f_i), \text{Strout}(g) \leq_{\text{out}} \text{Strout}(f_i),$$

де  $\leq_{\text{in}}, \leq_{\text{out}}$  – відношення часткового порядку на множинах структур даних, які породженні структурами даних  $\text{Strin}(f_i)$  і  $\text{Strout}(f_i)$  відповідно.

Простий приклад побудови надлишкового морфізма дає наступне твердження.

**Твердження.** Якщо  $\text{Strin}(f) \leq_{\text{in}} \text{Strin}(g)$  і  $g = \text{pr} \circ f$ , то морфізм  $h$  надлишковий в композиції  $h \circ g$ .

Дійсно, в цьому випадку існує морфізм  $h' = h \circ \text{pr}$  такий, що  $h' \circ f = h \circ \text{pr} \circ f = h \circ g$ .

Трансформація композиції, що містить надлишковий морфізм, зводиться до його перетворення, яке спрощує „вхідні” та „вихідні” структури даних з одночасним проведенням коректних перетворень обчислювальної моделі розв’язуваної задачі.

Чищення циклу. Відомо, що ефект будь-якого оптимізуючого перетворення зростає, якщо воно застосовується всередині циклів. Із достатньо великої групи перетворень, орієнтованих на оптимізацію циклічних обчислень, розглянемо так зване „чищення” циклів, яка полягає у винесенні безумовно виконуваних в ньому обчислень. Для цього використовується метод лінеаризації циклів, що зводиться до їх зображення композицією морфізмів так, що кожне виконання циклу є послідовним проходженням послідовності морфізмів композиції.

Найбільш просте перетворення циклічного морфізму  $do$ , зображеного лінеаризованою послідовністю  $f_1 \circ \dots \circ f_{i-1} \circ f_i \circ f_{i+1} \circ \dots \circ f_k$  з безкорисним морфізмом  $f_i$ , такою, що  $\text{Strout}(f_{i-1}) = \text{Strout}(f_{i+1})$  і  $\text{Strout}(f_i) = \text{Strin}(f_1)$ , полягає у „винесенні” морфізму  $f_i$  із цієї послідовності так, що  $do = f_i \circ do'$ .

Доречно відмітити, що розглянуті вище оптимізуючі перетворення композиційних моделей застосовуються у випадку, коли надлишковою чи безкорисною буде композиція морфізмів, тобто зовнішня композиційна модель. У цьому випадку перетворення трансформації зводяться до аналогічних

перетворень композиції  $f_1 \circ \dots \circ f_{i-1} \circ F_i \circ f_{i+1} \circ \dots \circ f_k$  і її зовнішньої моделі  $F_i$  по її вилученню, спрощенню чи винесенню із циклу.

Складнішими є перетворення, які пов'язані зі спрощенням дій при виконанні арифметичних операцій всередині циклів.

Зазначимо, що оптимізуючі перетворення циклів потребують достатньо глибокого аналізу їх композиційних моделей методами алгебри морфізмів і в даний час в повному обсязі не розв'язані. З іншого боку, оптимізуючі перетворення моделей обчислень під час верифікації, які пов'язані з перевіркою циклів на завершуваність, з виявленням невідповідностей в обчислювальній моделі і моделі перетворювачів, і деякі інші реалізовані в останніх версіях вищезгаданого інструментального середовища CASE APS.

**1.2.3. Стадія вдосконалення.** Розглянемо задачі, з якими пов'язане поліпшення показників якості функціонування ППС, наприклад, збільшення значення коефіцієнта корисної дії системи чи якості виданих нею результатів. Такі задачі виникають при побудові самоудосконалюваних систем.

Найбільш простою в ідейному плані є задача актуалізації програмного забезпечення (можливостей) ППС, тобто викидання з системи складових частин, які використовуються тільки при розв'язанні неактуальних прикладних (системних) задач.

Розв'язок такої задачі здійснюється покроково і ґрунтується на результатах аналізу запитів користувачів до ППС, рівня активності їх програмних компонентів. При цьому, визначаються задачі, ймовірність появи запиту на які нижче деякого порогового значення. Такі задачі виключаються зі списку задач, що можуть бути включені в нову версію системи. Даний список можна корегувати вольовим способом, тобто в нього можна включити та (або) виключити задачі з урахуванням поглядів та рекомендацій користувачів-спеціалістів з даної предметної області.

Розглянемо удосконалення ППС як задачу підвищення її коефіцієнта корисної дії за рахунок збільшення агрегації модулів. Вона зводиться до оптимізаційної проблеми вигляду.

Нехай  $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_v\}$  — повна група несумісних подій,  $\tilde{\Xi} = \{\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \dots, \tilde{\xi}_\mu\}$

– множина елементарних подій. До того ж

$$(\forall \xi_i \in \Xi) (\exists \tilde{\Xi}_i \subseteq \tilde{\Xi}) (P(\tilde{\Xi}_i / \xi_i) = 1),$$

де  $P(X)$  – ймовірність випадку  $X$ .

За формулою повної ймовірності

$$(\forall \tilde{\xi} \in \tilde{\Xi}) (P(\tilde{\xi}) = \sum_{i=1}^v P(\xi_i) P(\tilde{\xi} / \xi_i)).$$

Елементарному випадку  $\tilde{\xi}_j$  ( $j=(1, \mu)$ ) поставимо у відповідність характеристики:  $t_j$  – корисна вартість,  $\tau_j$  – додаткова вартість,  $\Omega_j$  – потрібні ресурси. При сумуванні випадків  $\tilde{\xi}_\alpha + \tilde{\xi}_\delta = \tilde{\xi}_\gamma$ :

$$t_\gamma = t_\alpha + t_\delta; \tau_\gamma = \tau_\alpha = \tau_\delta = \tau; \Omega_\gamma = \Omega_\alpha + \Omega_\delta;$$

$$P(\tilde{\xi}_\gamma) = P(\tilde{\xi}_\alpha) + P(\tilde{\xi}_\delta) - P(\tilde{\xi}_\alpha \tilde{\xi}_\delta),$$

Потрібно знайти розбиття множини  $\tilde{\Xi}: R = \{\tilde{\Xi}_1, \dots, \tilde{\Xi}_q\}$ , що мінімізує функціонал

$$F(R) = \sum_{l=1}^q P(\tilde{\Xi}_l) (\tau + \sum_{\tilde{\xi}_{l_k} \in \tilde{\Xi}_l} t_{l_k})$$

при умові, що

$$\sum_{\tilde{\xi}_{l_k} \in \tilde{\Xi}_l} \Omega_{l_k} \leq \Omega.$$

Вище припускалась постійна величина  $\tau_j$ . Практично цікавим є випадок, коли  $\tau_j = f(S_j)$ , де  $S_j$  – множина параметрів, що характеризують події  $\xi_j$ , наприклад,  $\tau_j = \tau / S_j$  ( $\tau$  – витрати на обробку одного параметра). До того ж, має зміст при сумуванні подій  $\tilde{\xi}_\alpha, \tilde{\xi}_\beta$  враховувати, що

$$\tau_\gamma = \tau / S_\alpha \cup S_\beta$$

Розглянемо далі задачу розміщення складових частин системи в багаторівневій пам'яті ЕОМ. Ця задача є актуальною, оскільки значна доля накладних витрат ППС є витратами на пошук інформації в пам'яті ЕОМ (особливо в пам'яті на дисках).

Припускаються заданими  $N$  рівнів пам'яті (однозв'язних областей) з відповідними періодами виборок  $t_j$ , модульний граф  $G^*$ , оцінка ймовірності появи задач в завданні користувача  $p(z)$ , оцінка ймовірностей застосування модулів при реалізації завдання користувача  $p_i$ ,  $\Omega_i$  – об'єм пам'яті, необхідний для розміщення  $i$ -го програмного модуля ( $i=1, \dots, m$ ).

Якщо в кожному області пам'яті можна розмістити лише один програмний модуль довільного розміру, то визначити послідовність модулів, згідно якої їх потрібно розміщувати в пам'яті, можна на основі аналізу ймовірностей  $p(z)$ ,  $p_i$  та графа  $G^*$ .

В загальнішому випадку ця задача зводиться до задачі цілочисельного лінійного програмування з булевими змінними.

Мінімізувати функціонал

$$F(X) = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^m p_i t_j \Omega_i x_{ij}$$

при обмеженнях

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \leq m, \sum_{i=1}^m \Omega_i x_{ij} \leq V_j, \sum_{j=1}^N x_{ij} = 1, x_{ij} \in \{0, 1\},$$

де  $V_j$  – однозв'язна область пам'яті  $j$ -го рівня ( $j=1, \dots, N$ ), з часом вибірки  $t_j$ ;  $p_i$  – оцінка ймовірностей використання  $i$ -ї компоненти;  $\Omega_i$  – об'єм пам'яті, необхідний для розміщення  $i$ -ї програмної компоненти ( $i=1, \dots, m$ ).

На закінчення зазначимо, що перелічені задачі не вичерпують всіх оптимізаційних проблем, що виникають при розробці програмних систем – КДН за технологією КСМ-програмування. Наукові дослідження в області формалізації технологічних процесів з наступною їх оптимізацією тривають.

## **2. Застосування елементів технології композиційно-структурного моделювання в курсах дистанційного навчання**

Основна маса дистанційних курсів, які розробляються у світі, побудовані на основі WWW-технології [11]. Існує можливість удосконалення самого підходу до проектування та побудови такого роду навчальних програм [12] з

метою, насамперед, покращення реалізації інтерактивності. Задля цього доцільно використати розглянені вище елементи КСМ-технології. За рахунок цього вдасться насамперед зробити процес проектування дистанційних курсів значно гнучкішим, а відтак, це дозволить зменшити „жорсткість” створюваного програмного забезпечення, що дозволить у майбутньому, при потребі, значно легше внести зміни у той чи інший курс. Іншою перевагою КСМ-технології в дистанційному навчанні є те, що завдяки їй реалізується конструктивістський підхід [13,14,15,16,17] у навчанні.

### **2.1. Приклади застосування технології композиційно-структурного моделювання в курсах дистанційного навчання**

Беручи до уваги природу КСМ-технології, стверджуємо, що найкраще її застосування можливе для реалізації завдань, які передбачають конструювання, зокрема для контролю отриманих студентом знань. Відтак, завдання слід розглядати як систему модулів, які взаємодіють між собою для досягнення поставленої розробниками мети в ході проектування [18].

Розглянемо приклади застосування КСМ-технології для реалізації завдань на сторінках дистанційних курсів.

1. Вивчення іноземних мов. Набори букв, складів чи слів, які подані в аудіоформі, розглядають як системи модулів. Відтак, розглядаємо тренувальні завдання, в яких студент самостійно (з метою вправлення) конструює: із букв склади, із букв слова, із складів слова, із слів речення. Далі йде автоматичне контролювання згенерованих студентом результатів, що завершується їх озвучуванням навчальною програмою задля запам'ятовування правильної вимови.

2. Дистанційний курс „Конструювання радіоелектронних пристроїв”. Модулями в даному разі виступатимуть резистори, конденсатори, діоди, індуктивності і т. ін. А параметрами, значення яких передаватимуться між модулями є, наприклад, сила струму та напруга.

3. Арифметика. Модулями виступатимуть арифметичні операції: додавання, віднімання, множення, ділення.

4. Побудова графіків функцій, функцій, що їх можна розглядати як композицію інших (простіших) функцій. Тут модулями виступатимуть побудови графіків лінійної, квадратичної функції і т. ін., а також функцій виду  $y = |g(x)|$  чи  $y = -(g(x))$ , коли графік функції  $y = g(x)$  побудований.

5. Диференціювання функцій. Модулі реалізують відшукування похідних завчасно встановлених функцій.

6. Геометрія. Задачі на побудову. Етап „Побудова”. Модулями виступають програми, які, наприклад, дозволяють:

- вибрати точку на площині;
- побудувати пряму;
- вибрати точку на прямій;
- побудувати відрізок, що дорівнює даному;
- побудувати коло з центром в даній точці й даного радіуса.

7. Вивчення хімії. У розпорядженні студента набір різних речовин і реакцій (модулів), за допомогою яких він повинен утворити задану речовину.

8. Вивчення логіки висловлювань. Знаходимо значення логічних виразів. В ролі модулів виступають логічні операції: кон'юнкція, диз'юнкція, імплікація, еквіваленція.

## **2.2. Опис реалізації прикладу застосування технології композиційно-структурного моделювання**

Розглянемо, як практично реалізується один із зазначених вище прикладів застосування КСМ-технології на сторінках дистанційних курсів. Опишемо, як проектують та програмують завдання, що передбачає побудову графіків функцій [19,20].

Ще раз повертаємося до умови завдання. Потрібно розробити таку програмну установку, яка б давала змогу студентові вправлятися у побудові графіків таких функцій, які є композицією інших (простіших). Нехай такими простими функціями є функції виду  $y = c(c - const)$ ,  $c \in R$ ; де  $y = kx + b$ , де  $k, b \in R$ ;  $y = ax^2 + bx + c$ , де  $a, b, c \in R$ ;  $y = p \sin kx$ , де  $p, k \in R$ ;  $y = p \cos kx$ , де  $p, k \in R$ ;  $y = e^{kx}$ ,

де  $k \in R$ , а можливими композиціями є функція  $y = f_1(x) + f_2(x)$ , що є сумою двох даних функцій  $f_1(x)$  та  $f_2(x)$ , а також функції, що містять знак модуля:  $y = -(f(x))$ ,  $y = f(|x|)$ ,  $y = |f(x)|$ ,  $y = |f(|x|)$ , коли  $f(x)$  задана.

Очевидним є те, що собою представлятимуть модулі для даної задачі в контексті КСМ-технології – це програми, які реалізують побудову графіка того чи іншого зазначеного вище типу функції чи композиції. До модулів відноситимемо й програму, що дозволяє відображати графіки як набори пікселів, а також подає координатну площину із необхідною інфраструктурою.

Шукане програмне забезпечення написано мовою Java [21,22]. Кожен модуль – це аплет. Для спрощення роботи послуговувалися інтегрованим середовищем програмування – Jbuilder 5 Personal.

У кінцевому випадку загальний вид програмної установки подано на рис. 2.1.

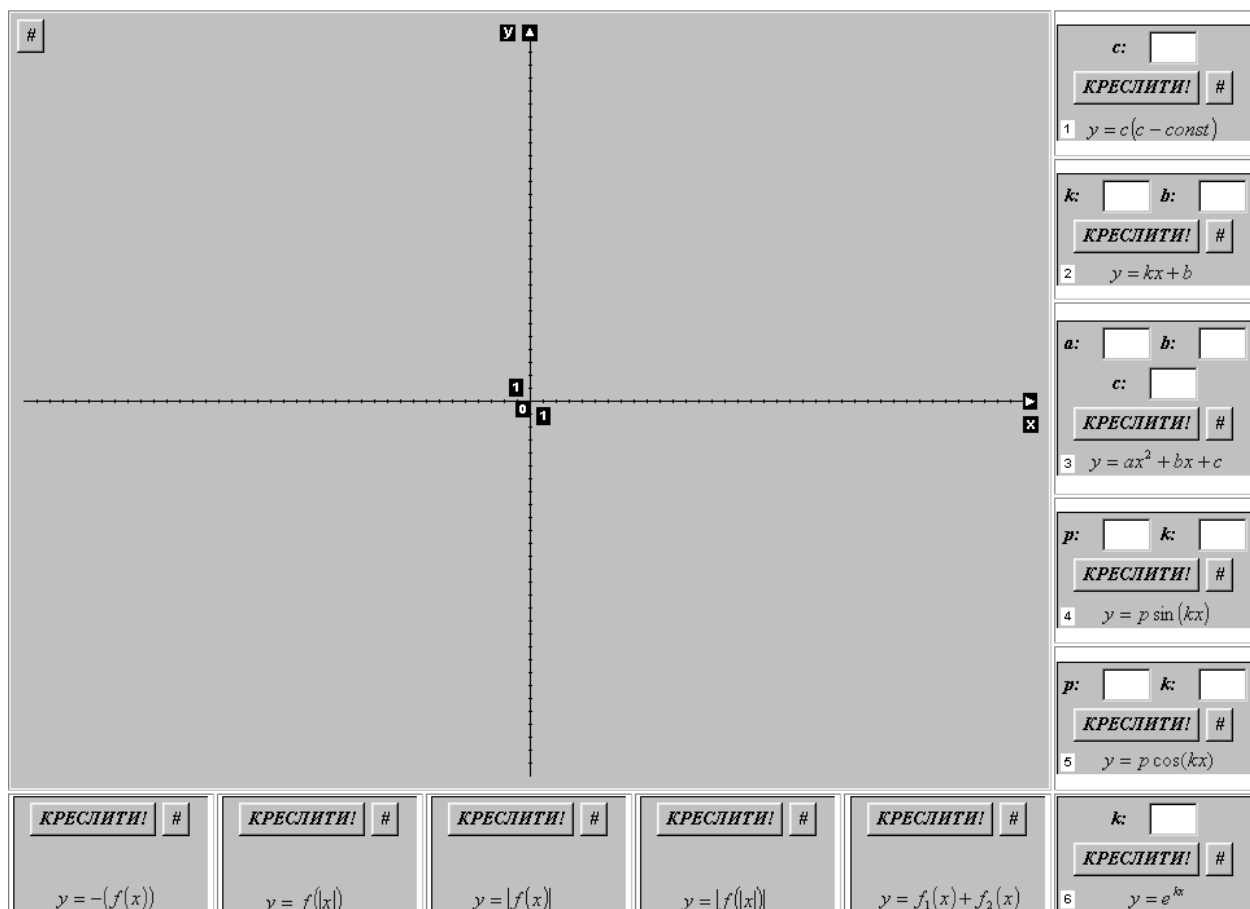


Рис. 2.1. Інтерфейс шуканої програмної установки



Нехай перед студентом стоїть завдання побудувати графік функції

$$y = -|3\sin 2x + |2x - 1||.$$

Для отримання графіка шуканої функції студент повинен послідовно побудувати графіки таких функцій:

- $y = g_1(x) = 2x - 1$ ;
- $y = g_2(x) = |g_1(x)| = |2x - 1|$ ;
- $y = g_3(x) = 3\sin 2x$ ;
- $y = g_4(x) = g_3(x) + g_2(x) = 3\sin 2x + |2x - 1|$ ;
- $y = g_5(x) = |g_4(x)| = |3\sin 2x + |2x - 1||$ ;
- $y = g_6(x) = -(g_5(x)) = -|3\sin 2x + |2x - 1||$ .

Графік функції  $y = g_6(x)$  шуканий (рис. 2.2).

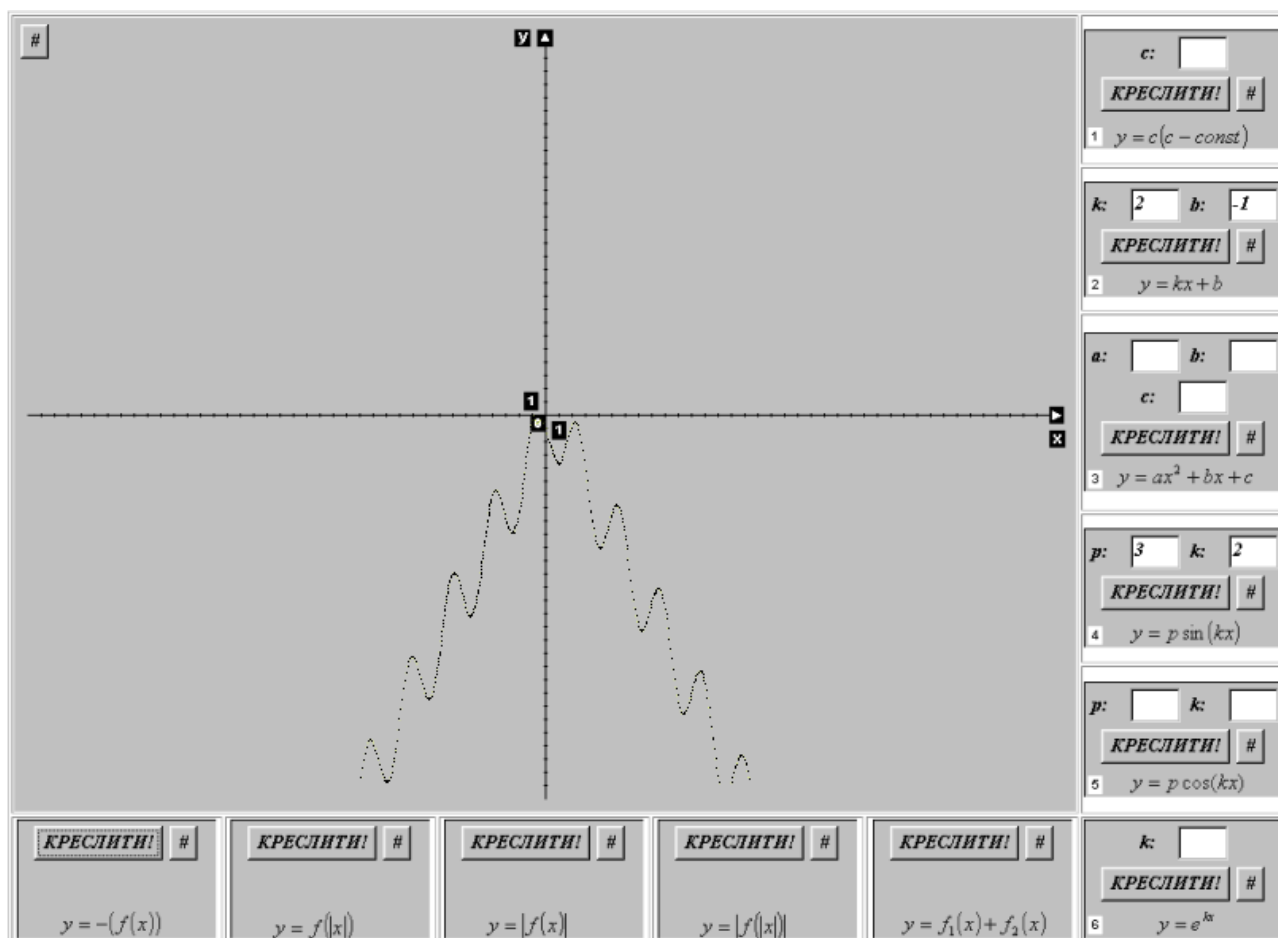


Рис. 2.2. Кінцевий вигляд програмної установки

Графік кожної функції  $g_1(x)$ ,  $g_2(x)$ ,  $g_3(x)$ ,  $g_4(x)$ ,  $g_5(x)$ ,  $g_6(x)$  студент буде, послуговуючись одним із аплетів, розташованих справа та унизу програмної установки. Результат роботи того чи іншого аплету відразу ж відображається в аплеті „Координатна площина”. Побудова графіків функцій, заданих аплетами 1-6 полягає в означенні необхідних коефіцієнтів (для цього використані рядки введення) та натискуванні кнопки „КРЕСЛИТИ!”. Кнопка „#” призначена для відміни виконання операції побудови графіка функції.

Заслуговує уваги робота аплету, котрий реалізує побудову графіка функції, що є сумою двох даних функцій. Робота програмної установки спроектована так, що в загальному випадку на координатній площині відображаються графіки двох функцій, побудованих останніми. Побудова графіка ще однієї функції передбачає „втрату” графіка функції, побудованого самим першим та заміну графіка останньої функції графіком новітньої. Отже, має місце свого роду організація даних типу „черга”. Очевидно, що в результаті побудови графіка функції  $g_1(x)$  матимемо лише один набір пікселів на координатній площині. Натискування кнопки „КРЕСЛИТИ!” в даному аплеті призводить до відображення тільки одного графіка функції — суми двох даних. Призначення кнопки „#” те ж саме, що і в аплетах 1-6.

Робота аплетів, які будують графіки функцій, що містять знак модуля, зводиться до трансформації графіка функції, побудованого останнім.

Аплет „Координатна площина” містить кнопку „#”, призначення якої — повністю „очистити” координатну площину.

### **2.3. Організація програмного коду**

Дана програмна установка – це набір аплетів, що їх зручно розглядати як кубики, спільна робота яких призводить до очікуваного результату. Вилучення одного з кубиків (окрім атлета „Координатна площина”) не впливає на роботу системи в цілому, а лише звужує клас функцій, графіки яких будує студент. Привнесення у систему ще одного кубика, що реалізує, наприклад, побудову графіка функції нового типу виконується досить легко. Це підтверджує

універсальність механізму взаємодії між аплетами. Розглянемо детальніше природу передачі даних між аплетами.

Ключовим елементом механізму взаємодії між аплетами є масив значень функції, що її графік будують. Через те, що в загальному випадку в аплеті „Координатна площина” відображаються графіки двох функцій, використовують два ідентичних за своєю природою масиви. Індеси масивів є аргументами. Обчислюються значення функції для аргументів, взятих з кроком 0,1. Кожен такий аргумент — це піксел осі абсцис.

Відомо, що взаємодія між аплетами, розташованими на одній HTML-сторінці передбачає лише звертання із одного з аплетів (аплет-клієнта) до методу, означеного в іншому аплеті (аплеті-сервері) [23,24]. В нашому випадку аплетом-сервером є аплет „Координатна площина”; всі решта аплетів є аплетами-клієнтами. У кожному із аплетів-клієнтів є звертання до методу `AddPoint(int Value_Of_Function, int red_Ingrad, int green_Ingrad, int blue_Ingrad)` аплет-сервера. Це реалізується за допомогою контекста аплету.

```
appletServer=getAppletContext().getApplet("CoordinatePlane");  
(Applet1)  
appletServer.AddPoint(y, red_Ingradient, green_Ingradient,  
blue_Ingradient);
```

Метод `AddPoint` додає у масив значень функції нову точку. Наведений вище фрагмент лістинга стверджує, що даний метод параметризований, передається не тільки значення функції, але й значення трьох величин типу `int` — складових кольору, що ним відобразатиметься графік. Після закінчення формування масиву значень виконується метод `paint()`, що є перекритий нами. Завдяки цьому висвітлюється новий графік.

Натискування кнопки „#” у будь-якому аплеті-клієнті призводить до виконання методу `ClearPoint()` аплет-сервера, який занулює кожен із масивів, встановлює біжучий колір таким, що співпадає із кольором осі абсцис

та перемальовує вікно аплету — метод `repaint()`. Відтак, фактично будуються два набори точок, що співпадають із віссю абсцис, а отже, є досяжною мета, заради якої реалізований даний метод — видалити графік функції.

Графік функції кожного типу будується завчасно визначеним кольором. У кожному з аплетів-клієнтів задаються трійки цілих, які є складовими вибраного кольору.

```
int y, red_Ingradient=255,  
green_Ingradient=100, blue_Ingradient=100;
```

Побудова графіків функцій виду  $y = -(f(x))$ ,  $y = f(|x|)$ ,  $y = |f(x)|$ ,  $y = |f(|x|)$  та  $y = f_1(x) + f_2(x)$  передбачає отримання у відповідний аплет одного

```
(Value_Of_Function_Array_Second[])
```

чи двох масивів

```
(Value_Of_Function_Array_First[],  
Value_Of_Function_Array_Second[])
```

значень функції задля наступної його (їх) обробки. Для цього в аплеті „Координатна площина” визначені наведені нижче методи.

```
public int[] get_Value_Of_Function_Array_Second() {  
return Value_Of_Function_Array_Second;  
}  
  
public int[] get_Value_Of_Function_Array_First() {  
return Value_Of_Function_Array_First;  
}
```

Природа дії цих методів тривіальна; вони повертають масиви значень функцій. Далі, використовуючи контекст аплету, зчитуються ці дані, наприклад, `appletServer=getAppletContext().getApplet("CoordinatePlane");`

```
Value_Of_Function_Array_Local=((Applet1)  
appletServer).get_Value_Of_Function_Array_Second();
```

після чого йде обробка масиву `Value_Of_Function_Array_Local`.

#### 2.4. Математична модель навчаючої системи

Підрозділ присвячений підходу до створення математичних методів дослідження навчаючих систем, організованих за модульним принципом. Відомо, що дослідження будь-якого об'єкта, в тому числі навчаючої системи, потребує в першу чергу створення його математичної моделі, яка залежить не тільки від природи реального об'єкта, а і від тих задач, для розв'язання яких вона створюється.

Об'єктом дослідження є навчаюча система для побудови графіків функцій. Формально суть питання полягає в наступному.

Нехай  $P = \{P_l: l=1, \dots, n\}$  – множина програмних модулів (аплетів),  $A_l$  і  $B_l$  – відповідно множини входів і виходів модуля  $P_l$ . Підмножини множини змінних  $X = \bigcup_{l=1}^n (A_l \cup B_l)$  утворюють простір станів. Якщо, наприклад,  $A_k \leq \sigma \subseteq X$ , то в стані  $\sigma$  простору станів  $X$  виконується модуль  $P_k \in P$ , в результаті чого відбудеться перехід в деякий новий стан  $\delta \subseteq X$  такий, що  $\delta = \sigma \cup B_k$ . Зрозуміло, що при цьому для  $A_k$  і  $B_k$  задані конкретні значення змінних.

При таких припущеннях формулюється наступна задача (її можна віднести до задач планування обчислень в складних програмних ситемах).

В множині модулів  $P$  знайти таку їх послідовність (послідовності), виконання яких приведе із деякого початкового стану  $\sigma \subseteq X$  до заключного стану  $\delta \subseteq X$ . При цьому заключним вважається стан, який включає наперед заданий цільовий стан.

Формальні моделі такого типу можуть бути використані при перевірці правильності розв'язання задач різних типів, зокрема задач побудови графіків функцій. Для цього наперед необхідно за вхідними даними та системою модулів предметної області дослідити питання існування розв'язку задачі, а потім знайти всі можливі розв'язки.

Розглянемо один із способів строгого розв'язання задач такого типу. Цей спосіб є деякою модифікацією запропонованого в [25] підходу до побудови

математичної моделі задачі планування обчислювального процесу в прикладних програмних системах.

Нехай  $Z = \{z_i: i = 1, \dots, n\}$  множина простих змінних,  $F = \{f_i: i = 1, \dots, m\}$  – множина функціональних змінних. Через  $2^{Z \cup F}$  позначимо множину всіх підмножин множини  $Z \cup F$ . Множину  $2^{Z \cup F}$  будемо називати множиною станів, а її елементи – станами. Множину значень  $D_x$  стану  $x \in 2^{Z \cup F}$  визначимо, як декартовий добуток відповідних множин значень для кожної змінної стану  $i$  назвемо простором стану  $x$ . Стан вважається невизначеним, якщо невизначена хоча б одна змінна стану.

Операцією (модулем) назвемо відображення  $G$  простору станів  $D_x$  в простір станів  $D_y$  і позначимо  $G_{\langle x, y \rangle}$ .

Зазначимо, що множина станів  $2^{Z \cup F}$  частково впорядкована за включенням ( $x \leq y$ , якщо  $x \subseteq y$ ) і є булевою алгеброю з нулем рівним порожній множині і одиницею рівною  $Z \cup F$ .

Кожній операції  $G_{\langle x, y \rangle}$  поставимо у взаємно-однозначну відповідність функцію розширення  $G_{\langle x^*, y^* \rangle}: 2^{Z \cup F} \rightarrow 2^{Z \cup F}$  з областю визначення  $Z = \{z: z \geq x^*\}$  і областю значень  $W = \{w: w \geq x^* \vee y^*\}$ , причому  $G_{\langle x^*, y^* \rangle}(x) = x \vee y^*$ . Множину функцій розширення позначимо через  $\mathfrak{Z}$ .

Для функцій розширення визначимо операції їх суми і добутку наступним чином:

1. Сума функцій розширення  $G_{\langle x^*, y^* \rangle}$ ,  $H_{\langle u^*, v^* \rangle}$  визначається як функція  $(G_{\langle x^*, y^* \rangle} + H_{\langle u^*, v^* \rangle}): 2^{Z \cup F} \rightarrow 2^{Z \cup F}$  з областю визначення  $Z = \{z: z \geq x^* \vee u^*\}$  і областю значень  $W = \{w: w \geq x^* \vee u^* \vee y^* \vee v^*\}$ , причому

$$(G_{\langle x^*, y^* \rangle} + H_{\langle u^*, v^* \rangle})(x) = G_{\langle x^*, y^* \rangle}(x) + H_{\langle u^*, v^* \rangle}(x) = x \vee y^* \vee v^*.$$

2. Добуток функцій розширення  $G_{\langle x^*, y^* \rangle}$ ,  $H_{\langle u^*, v^* \rangle}$  визначається як функція  $(G_{\langle x^*, y^* \rangle} \circ H_{\langle u^*, v^* \rangle}): 2^{Z \cup F} \rightarrow 2^{Z \cup F}$  з областю визначення  $Z = \{z: z \geq u^* \vee x^* \bar{v}^*\}$  і областю значень  $W = \{w: w \geq u^* \vee x^* \bar{v}^* \vee y^* \vee v^*\}$ , причому

$$(G_{\langle x^*, y^* \rangle} \circ H_{\langle u^*, v^* \rangle})(x) = G_{\langle x^*, y^* \rangle}((H_{\langle u^*, v^* \rangle})(x)) = x \vee y^* \vee v^*.$$

Зрозуміло, що операція добутку не комутативна. Введемо складну функцію  $R_{\langle r, s \rangle}(x)$ , визначивши її рекурсивно:

$$R_{\langle r, s \rangle}(x) = G_{\langle x^*, y^* \rangle}(x) \mid R_{\langle r, s \rangle}(x) + H_{\langle u^*, v^* \rangle}(x) \mid R_{\langle r, s \rangle}(x) \circ H_{\langle u^*, v^* \rangle}(x) \mid H_{\langle u^*, v^* \rangle}(x) \circ R_{\langle r, s \rangle}(x),$$

де  $G_{\langle x^*, y^* \rangle}(x)$ ,  $H_{\langle u^*, v^* \rangle}(x)$  – довільні функції розширення.

Систему  $C = \langle 2^{Z \cup F}, \mathfrak{F} \rangle$  будемо називати статичним комплексом.

Задачею на статичному комплексі  $C$  будемо називати пару станів  $\langle x_0, y_0 \rangle$ .

Складна функція  $R_{\langle r, s \rangle}(x)$  називається розв'язком задачі  $\langle x_0, y_0 \rangle$  на статичному комплексі  $C$ , якщо виконуються наступні умови:

1.  $x_0$  належить області визначення функції  $R_{\langle r, s \rangle}(x)$ , тобто  $x_0 \in Z = \{z: z \geq r\}$ .
2.  $R_{\langle r, s \rangle}(x_0) \geq y_0$ .

Задача розв'язна на  $C$ , якщо існує хоча б один розв'язок задачі.

**Твердження.** Для того, щоб функція  $R_{\langle r, s \rangle}(x)$  була розв'язком задачі  $\langle x_0, y_0 \rangle$ , необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова  $x_0 \geq y_0 \bar{s} \vee r$ .

Доведення цього твердження достатньо очевидне.

Алгоритм побудови розв'язку задачі  $\langle x_0, y_0 \rangle$  на статичному комплексі  $C$  зводиться до виконання наступної послідовності кроків:

1. Покласти  $W_1 = \{ G^1_{\langle x(j), y(j) \rangle}(x): G^1_{\langle x(j), y(j) \rangle}(x) \in \mathfrak{F}, x(j) \leq x_0, j = 1, \dots, m_1 \}$ .
2. Нехай  $G^1_{\langle x, y \rangle}(x) = (\sum_{j=1}^{m_1} G^1_{\langle x(j), y(j) \rangle}(x))$  і  $d_1 = G^1_{\langle x, y \rangle}(x_0)$ , де

$$x = \bigvee_{j=1}^{m_1} x(j), y = \bigvee_{j=1}^{m_1} y(j).$$

3. Організуємо ітераційний процес побудови множин  $W_i$  наступним чином:

$$W_i = \{ G^i_{\langle x(j), y(j) \rangle}(x): G^i_{\langle x(j), y(j) \rangle}(x) \in \mathfrak{F} \setminus \bigcup_{l=1}^{i-1} W_l, x(j) \leq d_{i-1}, j = 1, \dots, m_i \},$$

$$G^i_{\langle x, y \rangle}(x) = (\sum_{j=1}^{m_i} G^i_{\langle x(j), y(j) \rangle}(x)) \text{ і } d_i = G^i_{\langle x, y \rangle}(d_{i-1}), x = \bigvee_{j=1}^{m_i} x(j), y = \bigvee_{j=1}^{m_i} y(j).$$

4. Ітераційний процес зупиняється при умові  $W_i = \emptyset$ .

5. Якщо  $W_i = \emptyset$  на  $k+1$  кроці ітераційного процесу, то покласти

$$R_{\langle r, s \rangle}(x) = \left( \prod_{i=1}^k G^i_{\langle x, y \rangle} \right)(x).$$

Слід зазначити, що розв'язок задачі  $R_{\langle r, s \rangle}(x)$  задачі  $\langle x_0, y_0 \rangle$  може бути неоптимальним, тобто може містити функції які нічого не дають для обчислення стану  $y_0$ . Якщо такі функції в розв'язок не входять, то розв'язок називається правильним. Наступний алгоритм дозволяє (при умові, що відомі вищепобудовані множини  $W_1, \dots, W_k$ ) привести розв'язок до правильного вигляду:

1. Нехай  $i = k$ ,  $d_k^* = b_0$ .

2. Будуємо множини  $W_i^* \subseteq W_i$  наступним чином:

$$W_i^* = \{ G^i_{\langle x(j), y(j) \rangle}(x) : G^i_{\langle x(j), y(j) \rangle}(x) \in W_i, y(j)d_i^* \neq 0 \}.$$

3. Якщо  $W_i^*$  непуста, то покласти

$$d_{i-1}^* = d_i^* \vee \bigvee_{j=1}^{m_i^*} x(j).$$

4. Якщо  $i > 1$ , то покласти  $i = i-1$  і перейти на пункт 1. В іншому випадку – зупинитись.

5. Пронумерувавши непусті множини  $W_i^*$  від 1 до  $k^*$  неважко побачити, що складна функція

$$R^*_{\langle r, s \rangle}(x) = \left( \prod_{i=1}^{k^*} \sum_{j=1}^{m_i^*} G^i_{\langle x(j), y(j) \rangle} \right)(x)$$

буде правильним розв'язком задачі  $\langle x_0, y_0 \rangle$ .

**Твердження.** Якщо множина  $\mathfrak{Z}$  функцій розширення така, що для будь-якої пари  $G_{\langle x^*, y^* \rangle}(x)$ ,  $H_{\langle u^*, v^* \rangle}(x)$  функцій цієї множини виконується умова  $u^*v^* = 0$ , то задача  $\langle x_0, y_0 \rangle$  має єдиний правильний розв'язок.

Таким чином, твердження і приведені алгоритми дозволяють строго розв'язувати задачі контролю правильності виконання завдань, зокрема побудови графіків функцій. Це досягається шляхом визначення умов, при яких заданий графік можна побудувати, а також всіх можливих способів побудови графіка, які одержуємо як різні (відносно комутативності) розв'язки задачі на формальній моделі.



Як приклад, розглянемо комплекс для побудови графіків елементарних функцій, де компоненти функцій розширення мають вигляд:

$$\begin{array}{ll}
 x_1^* = \{k, b, x\}, & y_1^* = \{z_1 = kx+b\}, \\
 x_2^* = \{p, n, x\}, & y_1^* = \{z_2 = p \sin(nx)\}, \\
 x_3^* = \{z_1\}, & y_3^* = \{z_3 = |z_1|\}, \\
 x_4^* = \{z_2\}, & y_4^* = \{z_4 = |z_2|\}, \\
 x_5^* = \{z_3, z_4\}, & y_5^* = \{z_5 = z_3 + z_4\}, \\
 x_6^* = \{z_1, z_2\}, & y_6^* = \{z_6 = z_1 + z_2\}, \\
 x_7^* = \{z_2, z_3\}, & y_7^* = \{z_7 = z_2 + z_3\}, \\
 x_8^* = \{z_1, z_4\}, & y_8^* = \{z_8 = z_1 + z_4\}, \\
 x_9^* = \{z_5\}, & y_9^* = \{z_9 = |z_5|\}, \\
 x_{10}^* = \{z_6\}, & y_{10}^* = \{z_{10} = |z_6|\}, \\
 x_{11}^* = \{z_7\}, & y_{11}^* = \{z_{11} = |z_7|\}, \\
 x_{12}^* = \{z_8\}, & y_{12}^* = \{z_{12} = |z_8|\}.
 \end{array}$$

На цьому комплексі розв'язувалась задача побудови графіка функції

$$f(x) = |3\sin 2x + |2x-1||,$$

яка в термінах комплексу формулюється як задача  $\langle r=\{k, b, x, p, n, x\}, s=\{z_{11}\}\rangle$ .

Така задача має розв'язок. Складна функція  $R_{\langle r, s \rangle}(x) = G^{11}G^7G^3(G^1+G^2)(x)$  є розв'язком задачі, причому, такий розв'язок не єдиний.

Таким чином, для того, щоб побудувати графік заданої складної функції, необхідно побудувати графіки простіших функцій, наприклад, в такій послідовності:

$$\begin{array}{lll}
 f(x) = 2x-1, & f(x) = 3 \sin(2x), & f(x) = |2x-1|, \\
 f(x) = 3\sin 2x + |2x-1|, & & f(x) = |3\sin 2x + |2x-1||.
 \end{array}$$

## 2.5. Реалізація інтерактивності в курсі дистанційного навчання

### „Розміщення продуктивних сил України”

Курс дистанційного навчання „Розміщення продуктивних сил України” побудований на основі WWW-технології. Його базовими елементами є HTML-сторінки. Структура курсу тематична.

Розглянемо, якою є інтерактивність у курсі.

**2.5.1. Подання лекційного матеріалу.** Лекційний матеріал курсу поданий за допомогою відформатованого гіпертексту, кнопок, які дозволяють озвучити означення понять, весь набір яких поданий у словникові та графічних зображень, котрі доповнюють по змісту текстовий матеріал.

Форматування гіпертексту здійснене використовуючи набір завчасно домовленого накреслення (напівжирний, курсив, підкреслений та їх комбінації), різні розміри шрифту, списки (ненумеровані та пронумеровані), таблиці та вибрані кольори (для тексту та фону HTML-сторінки). Гіперпосилання, які зустрічаються у тексті, дозволяють перейти на відповідний запис словника, в іншу структурну одиницю курсу (тему, урок, додаток) або служать для відображення графічної інформації (карт).

Згадані вище кнопки (рис. 2.3) є Java-аплетами. Послугування ними є альтернативою сприйманню текстового матеріалу.

Графічні зображення – це карти, математичні формули або рисунки, за допомогою яких подають моделі виучуваних процесів.

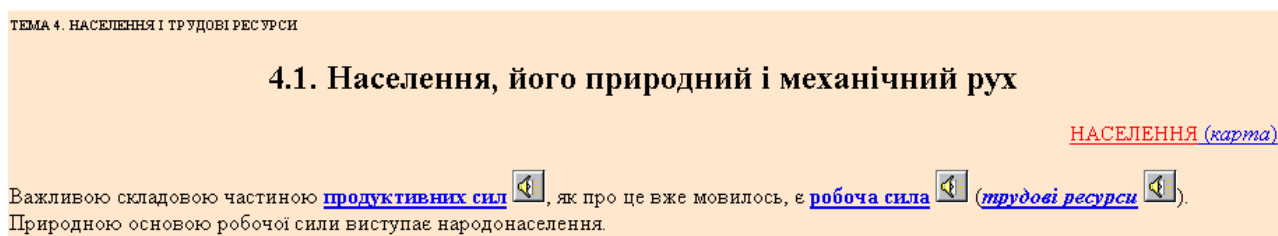


Рис. 2.3. Приклад застосування кнопок для озвучення означень понять

**2.5.2. Організація контролю отриманих студентом знань.** Вивчення студентом кожної теми курсу завершується проходженням ним контролюючого етапу, який реалізований за допомогою питань для самоперевірки, практики та тесту. Найбільший інтерес у контексті реалізації інтерактивності представляють тести. Будь-який тест (рис. 2.4) це перелік запитань, до кожного з яких дано набір відповідей, лише одна з яких є правильною. Студентові необхідно вибрати правильну на його думку відповідь.

## Тест

### Виберіть правильну відповідь.

**УВАГА!** Із запропонованих відповідей в якості правильної слід вибрати **тільки одну**.

Ваші ім'я та прізвище:

Ваша адреса електронної пошти:

#### 1. Продуктивні сили – це:

- а. засоби праці, робоча сила і предмети праці;
- б. засоби праці, виробничі відносини і предмети праці;
- в. виробничі відносини, робоча сила, і предмети праці;
- г. робоча сила, виробничі відносини і засоби праці;
- д. предмети праці, засоби праці і робоча сила;
- е. правильними є відповіді а та в;
- ж. правильними є відповіді а та г.

#### 2. Розміщення продуктивних сил – це:

- а. місцезнаходження продуктивних сил;
- б. місцезнаходження діючих і розподіл нових продуктивних сил;
- в. розподіл нових продуктивних сил;
- г. заміна діючих продуктивних сил новоствореними.

ОЦІНИТИ ПРОХОДЖЕННЯ ТЕСТУ

ОЧИСТИТИ КОМІРКИ

Рис. 2.4. Приклад тесту в курсі

Для проходження тесту обов'язковою є ідентифікація студента. Задля цього використовуються рядки введення. Набір відповідей до кожного запитання реалізований за допомогою прапорців.

Завершення роботи з тестом передбачає обов'язкове натискання студентом кнопки „ОЦІНИТИ ПРОХОДЖЕННЯ ТЕСТУ”. Відтак, відповіді студента на запитання надходять у поштову скриньку викладача, а також студент отримує HTML-сторінку, яка є результатом автоматичної обробки тесту, що реалізована за допомогою CGI-технології. Скрипти написані мовою Perl. Програмний код функціонує так, що має місце обробка даних, які знаходяться у файлах трьох типів: файли із наборами запитань, файли із наборами запропонованих відповідей і файли із наборами еталонних відповідей для кожного тесту.

**2.5.3. Дизайну курсу.** З метою забезпечення студента комфортними умовами для роботи в курсі використовують навігаційні системи двох типів. Одна із них, що призначена для переміщення між структурними частинами

курсу, як-от „Розклад”, „Список літератури”, „Об’яви” та ін., реалізована за допомогою графічної мапи (рис. 2.5).

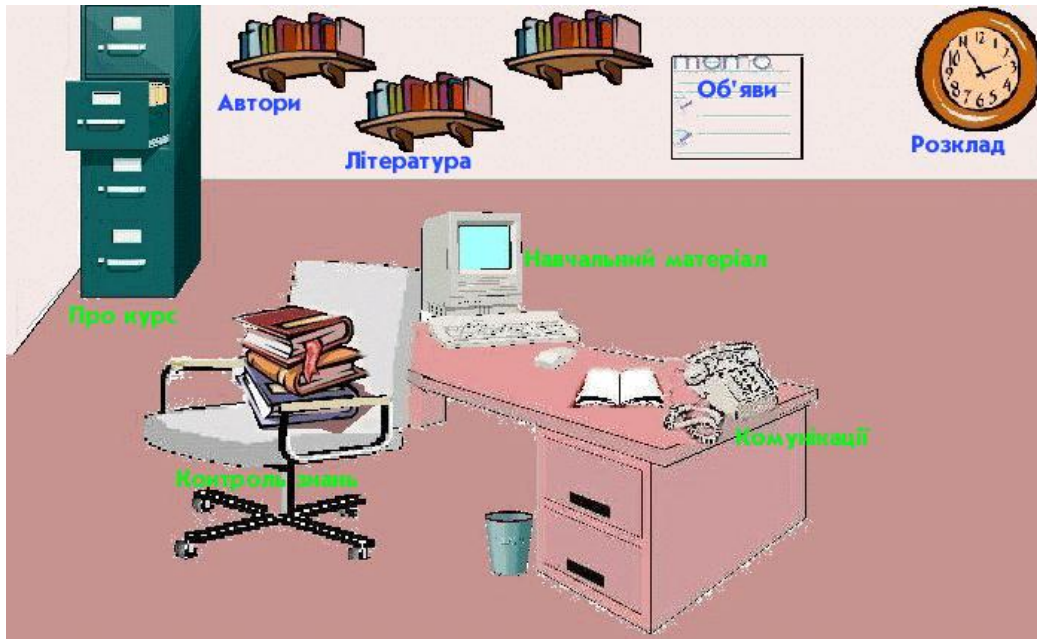


Рис. 2.5. Навігаційна система, реалізована за допомогою графічної мапи

Навігаційні системи іншого типу призначені для переміщення між темами і уроками кожної теми (рис. 2.6), а також для переходу в ту чи іншу структурну частину курсу (рис. 2.7).



Рис. 2.6. Навігаційна система, реалізована за допомогою набору графічних зображень



Рис. 2.7. Навігаційна система, реалізована за допомогою набору графічних зображень

Фонова музика, що характерна для початкової сторінки кожної теми сприяє налаштуванню студента для подальшого усвідомлення навчального матеріалу. Керування нею здійснюється за допомогою кнопки, що є Java-апплетом. З цією ж метою в курсі реалізоване звукове привітання розробника курсу та відеопривітання викладача.

### ВИКОРИСТАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Ющенко Е.Л., Цейтлин Г.Е., Грицай В.П., Терзян Т.К. Многоуровневое структурное проектирование программ. — М.: Финансы и статистика, 1989. — 256 с.
2. Дейкстра Э. Дисциплина программирования: Пер. с англ. — М.: Мир, 1978. — 275 с.
3. Проватар А.И. Теоретические аспекты композиционного структурно-модульного программирования: алгебра морфизмов // Кибернетика и системный анализ. — 1993. — №6. — С. 89-99.
4. Проватар А.И. Теоретические аспекты композиционного структурно-модульного программирования: вычислимость операций алгебры морфизмов // Кибернетика и системный анализ. — 1994. — №6. — С. 27-36.
5. Минский М. Фреймы для представления знаний: Пер. с англ. — М.: Энергия, 1979. — 152 с.
6. Парасюк И.Н., Проватар А.И., Заложенкова И.Э. О методологии композиционного структурно-модульного программирования // Кибернетика и системный анализ. — 1995. — №1. — С. 146-154.
7. Сергієнко І.В., Парасюк І.М., Калита О.В., Проватар О.І., Бартків А.Б. CASE APS — інтегроване середовище побудови прикладних програмних систем структурно-модульними методами // Управляющие системы и машины. — 1993. — №2. — С. 30-38.
8. Парасюк И.Н., Калита А.В., Проватар А.И. CASE-система структурно-модульного композиционного программирования: концептуальные основы // Кибернетика и системный анализ. — 1993. — №2. — С. 140-144.
9. Проватар А.И., Бартків А.Б. Верификация композиционных схем в CASE APS // Программно-алгоритмическое обеспечение решения задач прикладной математики. — Киев: Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова АН Украины. — 1993. — С. 43-47.
10. Чень Ч., Ли Р. Математическая логика и автоматическое доказательство теорем: Пер. с англ. — М.: Наука, 1983. — 360 с.

11. Рашкевич Ю.М., Пелешко Д.Д., Пасека Н.С., Стецюк А.Б. Проектирование Web-ориентированных распределенных учебных систем // Управляющие системы и машины. — 2002. — №3/4. — С. 72-79.
12. Мушак А., Провотар О. Дистанційне навчання: від побудови моделей до генерації програмного коду // Вісник Тернопільського державного технічного університету. — 2003. — Том 8. — Число 1. — С.107-115.
13. Азарова О.В. Современные теории обучения и учебного процесса // Управляющие системы и машины. — 2003. — №1. — С. 63-70.
14. Viens J. Web-Based Learning Environments, Beyond Technological Issues: A New Culture to Develop // Управляющие системы и машины. — 2002. — №3/4. — С. 13-20.
15. Тевелева С.В. Электронный учебник как средство дистанционного обучения // Информатика и образование. — 2000. — №8. — С. 48-50.
16. Околелов О.П. Процесс обучения в виртуальном образовательном пространстве // Информатика и образование. — 2001. — №10. — С. 66-70.
17. Kommers P., Aroyo L. Agents for Constructivistic Learning in Virtual Realities // Управляющие системы и машины. — 2002. — №3/4. — С. 92-102.
18. Мушак А.Я., Провотар О.І. Елементи КСМ-технології в програмній реалізації СГДН // Збірка тез доповідей учасників Міжнародної науково-практичної конференції студентів, аспірантів та молодих вчених «Комп'ютери. Програми. Інтернет. 2003». — Київ. — 2003. — С. 49.
19. Шунда Н.М. Функції та їх графіки: Посібник для вчителів. — К.: Радянська школа, 1983. — 190 с.
20. Андрафанова Н.В. Построение графиков функций // Информатика и образование. — 2000. — №6. — С. 16-19.
21. Томас М., Пател П., Хадсон А., Болл Д. (мл.) Секреты программирования для Internet на Java: Пер. с англ. — СПб.: Питер, 1997. — 640 с.
22. Глушаков С.В. Программирование на Java 2: Учебный курс. — Харьков: Фолио; М.: ООО «Издательство АСТ», 2001. — 536 с.
23. Смирнов Н.И. JAVA 2: Учебное пособие. — М.: Три Л, 2000. — 320 с.
24. Нотон П., Шилдт Г. Полный справочник по Java: Пер. с англ. — К.: Диалектика, 1997. — 592 с.
25. Парасюк И.Н., Сергиенко И.В. Пакеты программ анализа данных: технология разработки. — М.: Финансы и статистика, 1988. — 158 с.

**Башуцька Оксана Степанівна, кандидат економічних наук,  
доцент кафедри економічної кібернетики та інформатики**

## **МОДЕЛІ ДИНАМІКИ ЧИСЕЛЬНОСТІ ЕКОНОМІЧНО ЗАЙНЯТОГО НАСЕЛЕННЯ**

В умовах потужних викликів сучасності постає питання стійкості та розвитку національної економіки. Підвищення ефективності її функціонування та розвитку тісно пов'язане з відтворенням робочої сили та станом і тенденціями у сфері зайнятості. Проблема зайнятості населення є однією актуальних в сучасному суспільстві, оскільки вона характеризує соціально-економічний розвиток регіону та держави в цілому. Очевидним є той факт, що наявні диспропорції в цій сфері стануть стримуючим фактором зростання кількості економічно активного населення, зростання продуктивності праці, а отже і економіки в цілому.

У чинних програмах економічного і соціального розвитку України пріоритетними є завдання управління динамікою зайнятості, та удосконалення її структурних характеристик. Але цілком очевидним є той факт, що управління ринком праці має відбуватися не інтуїтивно, а на основі аналізу даних.

Економічно зайнятим населенням вважаються особи віком 15–70 років, які на протязі певного періоду забезпечують пропозицію робочої сили для виробництва товарів та послуг. Наявність вакансій, переваги роботодавців, заробітна плата, престижність роботи, графік роботи та ряд інших факторів можуть кардинально змінювати чисельність зайнятих вікових груп населення. Домінування на ринку праці однієї вікової групи може негативно вплинути на економічний і соціальний розвиток в цілому. Тому моделювання динамічних процесів чисельності економічно зайнятого населення є актуальним завданням.

Моделювання динамічних процесів є важливим завданням і дає можливість більш глибокого вивчення процесів та систем у різних областях економіки. У даній роботі у якості динамічних процесів розглядається чисельність економічно зайнятого населення.

Питання зайнятості населення та розвиток ринку праці в Україні постійно привертають увагу політиків, засобів масової інформації, є актуальними у середовищі експертів та науковців. І це є цілком очевидним фактом. Оскільки питання зайнятості населення, оплати праці та інші питання розвитку ринку праці знаходяться як у площині економічних так і у площині соціально-політичних інтересів. Стосовно функціонування та розвитку ринку праці в Україні, то слід зауважити що вони залежать не лише від стану вітчизняної економіки, але і від попиту та пропозиції робочої сили у країнах Європи.

Проблеми ринку праці доводиться розв'язувати на фоні загального старіння населення, скороченні економічно активної частини, а також анексії Росією Кримської АР і м. Севастополя та окупації частини районів Донбасу. Російська агресія внесла свої корективи у показники ринку праці. У зв'язку з тим, що починаючи з 2014 року Держстат України не проводить облік даних по АР Крим та на непідконтрольних владі територіях Донбасу та Луганська скоротилася чисельність економічно зайнятого населення України. Наслідки російської агресії позначились також і на динаміці відносних показників українського ринку праці. Ще більше загострилися регіональні відмінності розвитку вітчизняного ринку праці.

Варто зауважити, що після втрат 2014 р. ситуація на українському ринку праці потроху стабілізується. Як показують дані Державної служби зайнятості України (ДСЗУ), протягом трьох останніх років рівень економічної активності населення України у віці 15–70 років, як і його абсолютна чисельність, потроху скорочується. А за даними Державної служби статистики (Держстату) України та Пенсійного фонду України, чисельність зайнятого населення у віці 15–70 років у I півріччі 2018 р. становила 16,1 млн. осіб (у I півріччі 2016 р. – 16,2 млн. осіб). Рівень зайнятості становив 56,0% (у I півріччі 2016 р. – 56,2%). Зокрема, у міських поселеннях цей показник становив 56,9%, а у сільській місцевості – 54,0%. Рівень зайнятості серед чоловіків був вище ніж серед жінок, відповідно 61,1% та 51,4%. Найвищий рівень зайнятості спостерігався у м. Києві (61,6%), Харківській (60,5%), Київській (58,3%) та Дніпропетровській



(57,9%) областях, а найнижчий – у Волинській (48,8%), Донецькій (49,5%) та Тернопільській (50,8%) областях [0; 0].

Аналіз даних Держстату України свідчить, що останнім часом ситуація на ринку праці у I півріччі 2018 р. змінювалась несуттєво. Так, за результатами вибіркового обстеження домогосподарств з питань економічної активності кількість зайнятого населення віком 15–70 років у II кварталі 2018 р. становила 16,4 млн. осіб, а кількість безробітних – 1,6 млн. осіб. Рівень зайнятості населення віком 15–70 років становив 56,8%, що на 0,1 в.п. менше, ніж у II кварталі 2017 р., водночас серед населення працездатного віку цей показник збільшився на 0,4 в.п. і становив 65,1%. Рівень безробіття серед економічно активного населення віком 15–70 років збільшився з 9,0% у II кварталі 2016 р. до 9,1% у II кварталі 2018 р. Ці зміни скоріш всього були обумовлені сезонними коливаннями на ринку праці. У II кварталі (квітень – червень) щорічно проявляється тенденція до зростання рівня ділової активності у сільському господарстві, торгівлі, будівництві тощо.

Варто зазначити, що на ринку праці в Україні задіяно приблизно рівна кількість чоловіків і жінок. Проте чоловіки шукають роботу активніше. Відсоток чоловіків які перебувають у активному пошуку роботи за останні роки зрів на 6%. Однак і чоловіки і жінки здійснюють однаковий вклад у розвиток економіки України. Також за останні роки зазнав змін і віковий фактор пошукачів роботи. Економічно активне населення, як і раніше, складається з українців у віці від 26 до 45 років, але дедалі активніше до пошуку роботи залучається молодь до 25 років. Це свідчить про суттєві зміни у поглядах українців на ринок праці, реалістичніше ставлення до праці та побудови кар'єри. Причому у 2018 р. рівень безробіття серед молоді у віці до 25 років в Україні скоротився до 17,8 % проти 23,1 % у 2017 р. У Євросоюзі в цей період рівень безробіття серед молоді у віці до 25 років зменшився з 18,7 % до 16,9 % [0; 0]. Хоча рівень безробіття серед української молоді і наближається до рівня безробіття європейської молоді, він все одно він у два рази вищий за загальний

рівень безробіття в Україні. Це може у найближчій перспективі стати значною соціально-економічною проблемою для держави.

Звернемо увагу і на те що досить часто поза увагою урядовців залишається ситуація з попитом та пропозицією робочої сили в адміністративно-територіальному плані. У сільській місцевості та у невеликих містах ситуація вітчизняного ринку праці дуже часто є найбільш проблематичною. Зокрема у таких областях як Кіровоградська, Полтавська, Волинська і Тернопільська, де висока частка сільського населення, а міське населення проживає переважно у невеликих населених пунктах, найнижчий рівень зайнятості населення і високий рівень безробіття порівняно із середніми по Україні показниками. Наявність великих міст сприяє формуванню потужного та диверсифікованого місцевого ринку праці і ситуація із зайнятістю населення краща ніж в інших регіонах України. Прикладом таких регіонів є Дніпропетровська, Одеська, Харківська, Київська області та м. Київ.

Також слід приділити увагу стану зайнятості економічно активного населення у Донецькій та Луганській областях. У зв'язку з воєнними діями ці області втратили частину своєї території, економічного і промислового потенціалу. Крім того населення цих регіонів знаходиться в зоні економічного, соціально-економічного та гуманітарного ризиків. Як наслідок, навіть у районах контрольованих українською владою, рівень зайнятості населення значно нижчий, а рівень безробіття – значно вищий ніж в інших регіонах України.

За інформацією Державної служби зайнятості, у першому півріччі 2019 р. кількість вакансій, заявлених роботодавцями становила 705,1 тис. од., що на 98,8 тис. вакансій більше, ніж у першому півріччі 2018 р. Крім того, у базі даних ДСЗ наявна інформація про понад 35 тис. пропозицій роботодавців, отриманих з інших джерел. В 35% вакансій, які пропонувалися на кінець 2018 р., була мінімальна заробітна плата; 40% вакансій – від мінімальної до 5 тис. грн., у 18 % вакансій – від 5 до 7 тис. грн. та лише у 7% вакансій запропонована заробітна плата перевищувала 7 тис. грн. Близько 40% вакансій було

зосереджено у м. Києві, Львівській, Дніпропетровській та Київській областях. У решті регіонів частка вакансій, коливалася в межах від 1,7% до 4,5%, від загальної їх кількості по країні [0].

За видами економічної діяльності вільні робочі місця розподілені наступним чином: переробна та добувна промисловості (20%); торгівля та ремонт автотранспорту (15%); державне управління і оборона (14%); соціальне страхування (12%); освіта та транспорт (по 9% відповідно); охорона здоров'я та сільське господарство (по 5% відповідно). Якщо ж розглядати професійні групи, то найбільш затребуваними у роботодавців є кваліфіковані робітники з інструментом (19%); професіонали та робітники з обслуговування та експлуатації устаткування (по 16 % відповідно), а також працівники сфери торгівлі та послуг (14%). Тобто існує потреба у таких робітничих спеціальностях: водіях, слюсарях, швачках, мулярах електромонтерів, електрогазозварників, токарях тощо. У сільському господарстві затребуваними є агрономи, робочі для обслуговування виробництв, трактористи. Також попитом користуються працівники сфери послуг: продавці, офіціанти, перукарі, кухарі, охоронці. Залишається високим попит на професіоналів та фахівців з досвідом роботи: лікарів, фармацевтів, інженерів різних галузей, юристів, викладачів, економістів, бухгалтерів, ІТ- фахівців.

В останні роки на ринку праці активізувався попит на кваліфікованих працівників, але за таку робочу силу вітчизняний ринок праці конкурує з європейським ринком і часто вітчизняний ринок програє цю конкуренцію. Аналогічні професії на європейському ринку праці оплачуються в рази більше. Тому проблема нестачі таких працівників в Україні якщо не є ще критичною, то може загостритися найближчим часом.

В сучасній економічній науці актуальними залишаються питання стійкості економічної системи. Однією з таких систем є система регіонального ринку праці. Взаємодія між зайнятим населенням, вимогами роботодавців, престижності професії, наявності вакансій, заробітна плата і багато інших факторів можуть провокувати відхилення чисельності зайнятості між різними

віковими групами. При збереженні загальної кількості працюючого населення може виникнути ситуація при якій буде існувати безробіття осіб певної вікової групи, старіння (збільшення середнього віку) економічно зайнятого населення. Витіснення деяких вікових груп з ринку праці може бути наслідком конкуренції, досвіду роботи, професійних навичок та вмінь, віку. Витіснення деяких вікових груп економічно активного населення з регіонального ринку праці може бути наслідком конкуренції, що виникає у наслідок відмінностей рівня освіти, досвіду роботи, професійних навичок, віку. Домінування вікової складової при конкуренції може викликати сильну поляризацію ролі вікових груп в регіональній економіці, і це найвірогідніше, негативно відобразиться на якості життя, економічному розвитку і привабливості регіону [0].

Взаємодія різних вікових груп на ринку праці вивчається в рамках дослідження проявів дискримінації [0]. У ньому основна увага приділяється правовим аспектам притисненні інтересів окремих підгруп економічно активного населення. Г.С. Беккер описав економічні аспекти дискримінації і довів, що економіка несе збитки при сильній диференціації можливостей рівних по правах людей [0]. Основними методами в таких дослідженнях є соціологічне опитування, статистичне опрацювання даних і кореляційно-регресійний аналіз. Слід виокремити такий аспект дискримінації як ейджизм – дискримінація людини за віковим. За даними всеукраїнського опитування дослідницького бюро *SocioLogist*, кожен третій українець помічає наявність дискримінації при працевлаштуванні, особливо це стосується ейджизму [0]. З даним видом дискримінації можуть зустрітися як молоді люди, так і особи старшого віку. Не зважаючи на те, що проблеми ейджизму активно обговорюються як у Європі [0] так і в Україні, на нашу думку, проводиться досить мало наукових досліджень у цій сфері.

Свої корективи чисельності економічно зайнятого населення внесли і карантинні обмеження введені у зв'язку з COVID-19. Експерти визнають, що запобіжно-карантинні заходи будуть мати негативні наслідки для соціально-економічної сфери навіть у найрозвиненіших державах світу. Під особливий

удар попали сфери туризму, залізничного та авіа транспорту, дозвілля, громадського харчування. Слід пам'ятати, що в Україну повернулися заробітчани. Обмеження щодо перетину кордонів ускладнює їхнє повернення на свої робочі місця, тому найближчим часом вони шукатимуть роботу на вітчизняному ринку праці. Тож роботодавці мають унікальний шанс розробляти і втілювати нові проекти і знаходити висококваліфіковану робочу силу для їх реалізації.

Отже цілком очевидним є той факт, що COVID-19 вніс суттєві зміни в сферу зайнятості. Цими змінами неможливо знехтувати і потрібно враховувати в подальшому для оздоровлення економіки в цілому та сфери зайнятості зокрема. На нашу думку внутрішній ринок праці буде змінюватись у таких напрямках:

- **Дистанційна зайнятість.** Буде відбуватися переведення працівників на дистанційну роботу (у сферах де це можливо). Будуть удосконалюватися форми та методи такої зайнятості, а також умови такої роботи. Для роботодавців це подекуди спричинить додаткові витрати на зміну внутрішніх правил та процесів.

- **Дистанційне навчання.** Дистанційна робота підвищить попит і на дистанційне навчання.

- **Легалізація зайнятості.** Все частіше працівники будуть робити вибір на користь легального працевлаштування. Краще мати роботу з меншою, але гарантованою заробітною платою та можливістю отримати лікарняний.

- **Зростатиме роль держави.** Уже сьогодні роботодавці звертаються за підтримкою до служби зайнятості задля збереження робочих місць.

- **Затребуваність професії на ринку праці.** При виборі професії потрібно враховувати чи вона є затребуваною на ринку праці чи ні. Щоб при закінченні здобування освіти легко можна було знайти роботу за спеціальністю, а не поповнити лави безробітних.

- *Посиляться правила охорони праці.* Особливу увагу буде приділятися безпеці на виробництві та забезпечення гігієнічних вимог робітників на робочих місцях.

- *Прийняття солідарних рішень.* Зростає усвідомлення важливості солідарних замість індивідуалізованих рішень. Стає зрозуміло, що добробут одних людей залежить від добробуту тих, хто їх оточує.

Економічно активне населення складається з населення обох статей, яке впродовж певного періоду часу забезпечує пропозицію робочої сили для ринкового виробництва товарів та послуг, а також деяких видів неринкового виробництва, що входять до Системи національних рахунків і є економічною діяльністю. До складу економічно активного населення входять тільки ті особи, які займались економічною діяльністю або шукали роботу і були готові приступити до неї, тобто класифікуються як „зайняті” або „безробітні”.

Підвищення ефективності функціонування та розвитку економіки тісно пов'язані з відтворенням робочої сили і насамперед із станом та динамікою у сфері зайнятості населення. Наявність диспропорцій у цій сфері може бути стримуючим фактором зростання продуктивності праці, а отже і економіки в цілому.

У діючих програмах економічного і соціального розвитку України одним з пріоритетних завдань є завдання управління динамікою чисельності економічно зайнятого населення та її структурними характеристиками. Тому цілком зрозуміло, що таке управління має відбуватися не на інтуїтивному рівні, а на основі аналізу даних. Це актуалізує відповідні дослідження.

Проведемо аналіз змін у галузевому, професійному та освітньому складах економічно зайнятого населення України. Основною емпіричною базою стали матеріали обстежень населення (домогосподарств) з питань економічної активності (ЕАН). Нагадаємо, що у 1995–1998 рр. обстеження ЕАН в Україні проводилося раз на рік, у 1999–2003 рр. – щоквартально, а з січня 2004 р. воно впроваджено в практику постійної роботи органів державної статистики з

щомісячною періодичністю. Тож починаючи саме з 2004 р. до сьогодні – період, який відстежено задля досягнення поставленої мети [0].

Розподіл зайнятого населення за видами економічної діяльності та професіями перебуває у тісній прямо пропорційній залежності з потребами виробництв. Тобто зміни, які відбуваються в галузевій та професійній структурах зайнятих, відображають зростання чи зменшення попиту на робочу силу економіки. Але чи зміни в професійному складі зайнятого в економіці України населення слідували за змінами в їхній галузевій структурі? Можливо ці процеси відбувалися незалежно один від одного? Попри науковий інтерес, який мають такі оцінки, релевантні дослідження, виконані на прикладі української робочої сили, відсутні. Використаємо метод декомпозиції, заснований на розкладанні загального приросту результативного показника за схемою ізольованого впливу факторів [0, С. 19-40; 0, С. 106-115] .

У зв'язку із змінами, які вносилися у класифікатор видів економічної діяльності, а також через втрату частини території країни, необхідно розділити часовий ряд на два інтервали: 2004–2013 та відповідно 2013–2018 роки, хоч це дещо і зменшить чіткість картини з виявлення довгострокового тренду розподілу зайнятих за галузями, професіями та освітніми рівнями.

На основі одержаних результатів (табл. 1), у першому періоді зайнятість в економіці України зросла на 108,4 тис. осіб. Такі галузі, як сільське господарство, переробна промисловість, виробництво й розподілення електроенергії, газу і води, державне управління, а також охорона здоров'я, в сукупності втратили 1,5 млн. зайнятого населення. Відповідно в інших видах економічної діяльності були зайняті майже 1,6 млн осіб. Найбільші втрати робочих місць спостерігалися у сільському господарстві та переробній промисловості, а відповідні прирости відбулись у сферах торгівлі, будівництва та фінансової діяльності.

У цей період під впливом внутрішньогалузевих змін (табл. 2) відбулась еволюція професійної структури економічно зайнятого населення. Міжгалузеві зміни мали переважаючий вплив серед працівників сфери торгівлі та послуг

(76,6%), управлінців (55,1%), а також кваліфікованих робітників (77,6%). У перших двох випадках цей вплив (а він був у напрямі розширення) посилювався зростанням присутності цих груп професій всередині окремих галузей, в останньому ж – звужувальна дія міжгалузевих факторів доповнювалася і внутрішньогалузевими.

Таблиця 1

**Зміни чисельності та галузевої структури зайнятих  
в економіці України, 2004–2013 рр.**

Вид економічної діяльності	Чисельність зайнятих, млн. осіб				Структура зайнятих, %		Маса структурних зрушень, в. л.	Індекс структурних зрушень, %	Швидкість структурних зрушень, %/рік
	2004	2013	Абсолютне відхилення	Темп приросту, %	2004	2013			
Сільське, лісове та рибне господарства	4,510	4,083	-0,427	-9,474	22,22	20,01	-2,21	-9,96	-1,11
Добувна промисловість	0,575	0,638	0,064	11,062	2,83	3,13	0,30	10,47	1,16
Переробна промисловість	3,333	2,572	-0,760	-22,81	16,42	12,61	-3,81	-23,22	-2,58
Виробництво та розподілення електроенергії, газу та води	0,636	0,610	-0,025	-4,001	3,13	2,99	-0,14	-4,51	-0,50
Будівництво	1,057	1,240	0,184	17,370	5,21	6,08	0,87	16,75	1,86
Оптова й роздрібна торгівля	2,769	3,481	0,712	25,7	13,65	17,06	3,42	25,03	2,78
Діяльність готелів та ресторанів	0,327	0,388	0,061	18,651	1,61	1,90	0,29	18,02	2,00
Діяльність транспорту та зв'язку	1,339	1,594	0,256	19,109	6,60	7,81	1,22	18,48	2,05
Фінансова діяльність	0,199	0,333	0,134	67,393	0,98	1,63	0,65	66,50	7,39
Операції з нерухомим майном, оренда, інжиніринг, надання послуг підприємцям	0,644	0,768	0,124	19,210	3,17	3,76	0,59	18,58	2,06
Державне управління	1,140	1,016	-0,124	-10,84	5,62	4,98	-0,64	-11,31	-1,26
Освіта	1,641	1,680	0,040	2,420	8,08	8,24	0,15	1,88	0,21
Охорона здоров'я	1,394	1,279	-0,115	-8,247	6,87	6,27	-0,60	-8,73	-0,97
Інші види економічної діяльності	0,733	0,719	-0,013	-1,841	3,61	3,53	-0,09	-2,36	-0,26
<b>Усього</b>	<b>20,296</b>	<b>20,404</b>	<b>0,108</b>	<b>0,534</b>	<b>100</b>	<b>100</b>	<b>-</b>	<b>-</b>	<b>-</b>

Джерело: розраховано автором на основі [5].



Найменша залежність від зміни галузевої структури економічно зайнятого населення (а тому і економіки) була характерною для фахівців (7%) та професіоналів (8,3%). Зменшення частки перших та зростання частки других відбувалося майже повністю всередині окремих видів економічної діяльності (табл. 2). Динаміка зайнятості періоду 2013–2018 рр. (табл. 3). Для цього часового періоду характерними є значний економічний спад, втрата частини території країни, міграція населення, значним скороченням кількості робочих місць. Найшвидше втрачали працівників сфера нерухомості (-41,7%), добувна промисловість (-36,5 %) та сільське господарство (-34,4 %).

Таблиця 2

**Вплив міжгалузевих зрушень на зміну професійної структури  
зайнятості в економіці України, 2004–2013 рр.**

Показник	Зміна частки зайнятих за рахунок міжгалузевих зрушень, в. л.	Зміна частки зайнятих за рахунок внутрішньої динаміки професійної структури, в. л.	Зміна частки зайнятих за рахунок перехресної дії факторів, в. л.	Загальна зміна, в. л.	Внесок фактору міжгалузевих зрушень, %	Внесок фактору внутрішньогалузевих зрушень, %
Законодавці, вищі державні службовці, керівники, менеджери (управителі)	0,224	0,166	0,185	0,575	55,06	44,94
Професіонали	0,139	1,883	0,072	2,094	8,35	91,65
Фахівці	-0,088	-1,197	-0,005	-1,290	7,02	92,98
Технічні службовці	0,236	-0,851	0,067	-0,548	23,36	76,64
Працівники сфери торгівлі та послуг	1,898	0,516	-0,187	2,227	76,56	23,44
Кваліфіковані робітники сільського та лісового господарств, риборозведення та рибальства	-0,181	-0,898	0,099	-0,980	19,59	80,41
Кваліфіковані робітники з інструментом	-0,306	-0,058	-0,086	-0,449	77,60	22,40
Робітники з обслуговування, експлуатації та контролю за роботою технологічного устаткування, складання устаткування	-0,479	-1,753	0,092	-2,140	22,59	77,41
Найпростіші професії	-1,443	2,192	-0,238	0,511	40,32	59,68
Інтегральна оцінка					<b>35,45</b>	<b>64,55</b>

Джерело: розраховано автором на основі [5].

**Зміни чисельності та структури зайнятих в економіці  
України, 2013-2018 рр.**

Вид економічної діяльності	Чисельність зайнятих, млн. осіб			Структура зайнятих, %		Маса структурних зрушень, в. л.	Індекс структурних зрушень, %	Швидкість структурних зрушень, %/рік
	2013	2018	Темп приросту, %	2013	2018			
Сільське, лісове та рибне господарства	3,872	2,539	-34,43	20,05	15,60	-4,45	-22,19	-7,40
Добувна промисловість	0,635	0,403	-36,53	3,29	2,48	-0,81	-24,68	-8,23
Переробна промисловість	2,475	1,998	-19,28	12,82	12,28	-0,54	-4,22	-1,41
Постачання електроенергії, газу, пари та кондиційованого повітря	0,432	0,375	-13,12	2,24	2,31	0,07	3,10	1,03
Водопостачання; каналізація, поводження з відходами	0,142	0,097	-31,93	0,73	0,59	-0,14	-19,23	-6,41
Будівництво	1,151	1,073	-6,71	5,96	6,59	0,64	10,70	3,57
Оптова й роздрібна торгівля	3,302	2,906	--12,00	17,10	17,85	0,76	4,42	1,47
Транспорт, складське господарство, поштова та кур'єрська діяльність	1,203	1,057	-12,20	6,23	6,49	0,26	4,18	1,39
Тимчасове розміщування й організація харчування	0,347	0,349	0,61	1,79	2,14	0,35	19,38	6,46
Інформація та телекомунікації	0,284	0,278	-2,09	1,47	1,71	0,24	16,19	5,40
Фінансова та страхова діяльність	0,314	0,249	-20,53	1,62	1,53	-0,09	-5,70	-1,90
Операції з нерухомим майном	0,112	0,066	-41,70	0,58	0,4	-0,18	-30,82	-10,27
Професійна, наукова та технічна діяльність	0,367	0,317	-13,55	1,90	1,95	0,05	2,58	0,86
Діяльність у сфері адміністративного та допоміжного обслуговування	0,240	0,263	9,75	1,24	1,62	0,38	30,23	10,08
Державне управління й оборона; обов'язкове соціальне страхування	0,966	0,944	-2,35	5,00	5,80	0,79	15,87	5,29
Освіта	1,595	1,583	-0,73	8,26	9,73	1,47	17,79	5,93
Охорона здоров'я та надання соціальної допомоги	1,199	1,115	-6,97	6,21	6,85	0,64	10,39	3,46
Мистецтво, спорт, розваги та відпочинок	0,180	0,177	-1,74	0,93	1,09	0,15	16,60	5,53
Надання інших видів послуг	0,499	0,489	-1,99	2,58	3,00	0,42	16,30	5,43
<b>Усього</b>	<b>19,314</b>	<b>16,277</b>	<b>-15,73</b>	<b>100</b>	<b>100</b>	<b>-</b>	<b>-</b>	<b>-</b>

Джерело: розраховано автором на основі [5].

Проаналізуємо зміни структури галузевих зайнятостей. За три роки зайнятість знизилась у таких галузях як сільське господарство, добувна та переробна промисловості, сфері операцій з нерухомістю. Паралельно відбулося зростання частки зайнятого населення у торгівлі, будівництві та державному секторі.

Таблиця 4

**Вплив міжгалузевих зрушень на зміну професійної структури  
зайнятості в економіці України, 2013–2018 рр.**

Показник	Зміна частки зайнятих за рахунок міжгалузевих зрушень, в. л.	Зміна частки зайнятих за рахунок внутрішньої динаміки професійної структури, в. л.	Зміна частки зайнятих за рахунок перехресної дії факторів, в. л.	Загальна зміна, в. л.	Внесок фактору міжгалузевих зрушень, %	Внесок фактору внутрішньогалузевих зрушень, %
Законодавці, вищі державні службовці, керівники, менеджери (управителі)	0,292	-0,265	-0,029	<b>-0,001</b>	52,34	47,66
Професіонали	0,1312	1,680	0,019	<b>3,011</b>	43,89	56,11
Фахівці	0,734	-0,061	-0,112	<b>0,561</b>	87,10	12,90
Технічні службовці	0,168	-0,329	-0,049	<b>-0,209</b>	35,25	64,75
Працівники сфери торгівлі та послуг	1,169	0,442	-0,081	<b>1,530</b>	71,51	28,49
Кваліфіковані робітники сільського та лісового господарств, риборозведення та рибальства	-0,150	0,209	-0,062	<b>-0,003</b>	42,98	57,02
Кваліфіковані робітники з інструментом	-0,075	-0,002	0,095	<b>0,018</b>	71,01	28,99
Робітники з обслуговування, експлуатації та контролю за роботою технологічного устаткування, складання устаткування	-0,319	0,491	-0,274	<b>-0,103</b>	42,08	57,92
Найпростіші професії	-3,130	-2,165	0,492	<b>-4,803</b>	58,34	41,66
<b>Інтегральна оцінка</b>					<b>56,01</b>	<b>43,99</b>

Джерело: розраховано автором на основі [5].

Зміни у професійній структурі зайнятих показують нам іншу картину у порівнянні з попереднім періодом. Теперішні зрушення у професійному складі робочої сили на 56% обумовлені перебудовою галузевої структури зайнятості, на 44% визначилися впливом «незалежних» внутрішньогалузевих факторів.

За цей часовий період найпомітнішим є скорочення частки простої некваліфікованої робочої сили (-4,8) як у межах окремих галузей так і у межах міжгалузевого перерозподілу робочої сили. Також відбулось збільшення внеску в сукупну зайнятість професіоналів (+3 в.п.) та працівників сфери торгівлі й послуг (+1,5 в.п.). При цьому досліджувані фактори діяли в одному і тому ж напрямку, взаємно посилюючи один одного.

Застосуємо метод декомпозиції для з'ясування питань, у якій мірі зрушення в освітньому складі економічно зайнятого населення України слідували за змінами в галузевій (табл. 5–6) та професійній структурах (табл. 7 – 8).

У період 2004 – 2013 рр. для зайнятих з повною вищою освітою та базовою та початковою загальною середньою освітою міжгалузеві та внутрішньогалузеві фактори діяли в одному і тому ж напрямку (у першому випадку, спричинюючи розширення масштабів зайнятості, в інших двох – звуження). Для решти варіантів зазначені ефекти мали взаємно нейтралізуючий характер (табл. 5).

Загалом, зміни які відбулися у розподілі зайнятих в економіці України за рівнями освіти лише на 9,2% можна пояснити переміщенням працівників з одного виду діяльності в інший. Відповідно внесок внутрішньогалузевих факторів сягнув 90,8%. Іншими словами, зміни в освітньому складі зайнятих відбувалися майже незалежно від перебудови галузевої структури економіки України.

У 2013 – 2018 роках вплив міжгалузевих факторів значно посилювався, тому зрушення що відбулися в освітній структурі економічно зайнятого населення уже на 34,4% продиктовані ними (табл. 6).

Таблиця 5

**Вплив міжгалузевих зрушень на зміну освітньої структури зайнятості в економіці України, 2004–2013 рр.**

Показник	Зміна частки зайнятих за рахунок міжгалузевих зрушень, в. п.	Зміна частки зайнятих за рахунок внутрішньої динаміки професійної структури, в. п.	Зміна частки зайнятих за рахунок перехресної дії факторів, в. п.	Загальна зміна, в. п.	Внесок фактору міжгалузевих зрушень, %	Внесок фактору внутрішньогалузевих зрушень, %
Повна вища	0,530	5,284	0,275	<b>6,089</b>	10,97	89,03
Базова вища	0,022	-1,20	0,003	<b>-1,175</b>	1,91	98,09
Неповна вища	0,210	-2,096	-0,227	<b>-2,113</b>	12,78	87,22
Повна загальна середня	-0,258	4,627	-0,301	<b>4,068</b>	7,88	92,12
Базова загальна середня	-0,425	-5,716	0,185	<b>-5,956</b>	8,18	91,82
Початкова загальна, без освіти	-0,080	-0,899	0,065	<b>-0,913</b>	10,80	89,20
Інтегральна оцінка					<b>9,17</b>	<b>90,83</b>

Джерело: розраховано автором на основі [5].

До найпомітніших змін цього періоду слід віднести зростання частки зайнятих з повною вищою освітою (ступень магістра) +4,3 в.п., а також зменшення внеску в сукупну зайнятість працівників з базовою підготовкою (-2,9).

Що до зайнятих із повною загальною середньою освітою (в тому числі з професійно-технічною), то зростання їх частки в межах окремих галузей (+1,2 в.п.) майже компенсується міжгалузевими зрушеннями (-1,5 в.п.). Слід зауважити що це у свою чергу сприяло зростанню попиту на працівників з вищою освітою (+1,8 в.п., або 53,29%).

**Вплив міжгалузевих зрушень на зміну освітньої структури  
зайнятості в економіці України, 20013–2018 рр.**

Показник	Зміна частки зайнятих за рахунок міжгалузевих зрушень, в. п.	Зміна частки зайнятих за рахунок внутрішньої динаміки професійної структури, в. п.	Зміна частки зайнятих за рахунок перехресної дії факторів, в. п.	Загальна зміна, в. п.	Внесок фактору міжгалузевих зрушень, %	Внесок фактору внутрішньогалузевих зрушень, %
Повна вища	1,671	2,651	-0,016	<b>4,306</b>	38,70	61,30
Базова вища	0,027	0,191	-0,014	<b>0,204</b>	14,59	85,41
Неповна вища	0,368	-1,321	-0,071	<b>-1,025</b>	22,93	77,07
Повна загальна середня	-1,490	1,241	-0,220	<b>-0,469</b>	54,22	45,78
Базова загальна середня	-0,542	-2,638	0,299	<b>-2,880</b>	19,88	80,12
Початкова загальна, без освіти	-0,034	-0,124	0,022	<b>-0,137</b>	25,11	74,89
Інтегральна оцінка					<b>34,41</b>	<b>65,59</b>

*Джерело:* розраховано автором на основі [5].

Після виконання декомпозиції можемо зробити висновок (табл. 7), що ефект від переміщення працівників між різними професіями скромний – 17,2%, інші зміни, які відбулися впродовж 2004–2013 років у розподілі зайнятих за рівнями освіти, сформовані зрушеннями в їхньому освітньому складі всередині окремих професійних груп.

Ефект міжпрофесійних зрушень найвищим був для повної вищої освіти (30,9%), а найнижчим (не більше 0,5%) – для базової вищої та початкової середньої.

Найбільше зросла частка працівників з повною вищою освітою (+6 в. п.). Найпомітніше скоротили свій внесок у сукупну зайнятість працівники з базовою загальною освітою (-5,4 в.п.) в результаті односпрямованої дії як між професійних, так і внутрішньо професійних зрушень.

**Вплив міжпрофесійних зрушень на зміну освітньої структури  
зайнятості в економіці України, 2004–2013 рр.**

Показник	Зміна частки зайнятих за рахунок міжпрофесійних зрушень, в. п.	Зміна частки зайнятих за рахунок внутрішньої динаміки освітньої структури, в. п.	Зміна частки зайнятих за рахунок перехресної дії факторів, в. п.	Загальна зміна, в. п.	Внесок фактору міжпрофесійних зрушень, %	Внесок фактору внутрішньо професійних зрушень, %
Повна вища	1,756	4,078	0,255	<b>6,089</b>	30,93	69,07
Базова вища	0,005	-1,181	0,001	<b>-1,175</b>	0,44	99,56
Неповна вища	-0,383	-1,329	-0,401	<b>-2,113</b>	27,63	72,37
Повна загальна середня	-1,098	5,174	-0,008	<b>4,068</b>	17,55	82,45
Базова загальна середня	-0,281	-5,825	0,151	<b>-5,956</b>	5,70	94,30
Початкова загальна, без освіти	0,002	-0,917	0,002	<b>-0,913</b>	0,32	99,68
Інтегральна оцінка					<b>17,22</b>	<b>82,78</b>

*Джерело:* розраховано автором на основі [5].

У 2013–2018 роках дія міжпрофесійних факторів теж не перевищує внутрішньо професійні, проте стає більш значущою – 43,5% (табл. 8). У цьому періоді найбільш явно продовжила зростати частка працівників з повною вищою освітою та зменшуватися з базовою загальною.

Щодо зайнятих із повною загальною освітою, то тут більшу частку складають кваліфіковані робітники, а міжпрофесійні зрушення такі, що зменшують попит на їхні послуги. Якби була збережена професійна структура зайнятих від початку досліджуваного періоду (2013 р.), то внесок цієї категорії працівників у сукупну зайнятість був би майже на 3 в. п. більший, ніж фактичне значення в 2018 р. (в тому ж напрямі, але з меншою інтенсивністю діяв фактор міжпрофесійних зрушень й на інтервалі 2004–2013 рр., табл. 7).

**Вплив міжпрофесійних зрушень на зміну освітньої структури  
зайнятості в економіці України, 2013–2018 рр.**

Показник	Зміна частки зайнятих за рахунок міжпрофесійних зрушень, в. п.	Зміна частки зайнятих за рахунок внутрішньої динаміки освітньої структури, в. п.	Зміна частки зайнятих за рахунок перехресної дії факторів, в. п.	Загальна зміна, в. п.	Внесок фактору міжпрофесійних зрушень, %	Внесок фактору внутрішньо-професійних зрушень, %
Повна вища	2,860	1,461	-0,015	<b>4,306</b>	66,12	33,88
Базова вища	0,035	0,160	0,009	<b>0,204</b>	19,25	80,75
Неповна вища	0,106	-1,109	-0,022	<b>-1,025</b>	9,47	90,53
Повна загальна середня	-2,384	2,200	-0,285	<b>-0,469</b>	51,89	48,11
Базова загальна середня	-0,583	-2,586	0,289	<b>-2,880</b>	21,05	78,95
Початкова загальна, без освіти	-0,034	-0,126	0,023	<b>-0,137</b>	24,68	75,32
Інтегральна оцінка					<b>43,52</b>	<b>55,74</b>

*Джерело:* розраховано автором на основі [5].

Ми розуміємо, що освітня структура зайнятого у економіці України населення не перебуває у настільки тісному прямому зв'язку з потребами економіки як розподіл працівників за видами діяльності та професіями. Але не можливо нехтувати майже «автономну» динаміку освітніх процесів в Україні. Хоча у проаналізованому нами другому часовому інтервалі (2013 – 2018 рр.) вплив міжгалузевих та міжпрофесійних факторів став більш значущим, накопичені в ретроспективі дисбаланси призвели до того, що на теперішній час багато людей які отримали вищу підготовку працюють на робочих місцях які потребують нижчої кваліфікації (табл 9). До таких професійних груп можна віднести: технічних службовців (34%); працівників сфери торгівлі та послуг (18%); кваліфікованих робітників сільського, лісового господарств та рибальства (11%); працівників задіяних у простій низько кваліфікованій праці (50%, з яких 20% працівників мають різного рівня вищу освіту.



**Освітня структура професійних груп зайнятих  
в економіці України у 2018 р. (%)**

Показник	Повна вища	Базова вища	Неповна вища	Професійно-технічна	Повна загальна середня	Базова загальна середня	Початкова загальна, немає освіти	Усього
Законодавці, вищі державні службовці, керівники, менеджери (управителі)	73,1	1,4	15,1	5,5	4,8	0,1	0	100
Професіонали	94,0	1,5	3,4	0,5	0,5	0	0	100
Фахівці	24,6	2,6	64,7	4,5	3,4	0,1	0	100
Технічні службовці	31,8	2,2	27,9	18,1	19,2	0,8	0	100
Працівники сфери торгівлі та послуг	17,0	0,7	21,2	34,7	24,9	1,5	0	100
Кваліфіковані робітники сільського та лісового господарств та рибальства	10,1	1,0	14,8	27,6	39,8	6,6	0,1	100
Кваліфіковані робітники з інструментом	8,1	0,6	14,3	58,2	17,1	1,6	0,1	100
Робітники з обслуговування, експлуатації та контролю за роботою технологічного устаткування	8,0	0,9	15,4	52,6	21,9	1,1	0	100
Найпростіші професії	6,4	0,5	13,2	30,4	42,8	6,6	0,2	100
<b>Усього</b>	<b>32,2</b>	<b>1,1</b>	<b>19,8</b>	<b>26,2</b>	<b>18,6</b>	<b>1,9</b>	<b>0,1</b>	<b>100</b>

*Джерело:* розраховано автором на основі [5].

Імовірними причинами ситуації що виникла можуть бути:

- низька якість освітньої підготовки, тому працівник займає місце нижче на один чи кілька кваліфікаційних рівня, ніж міг би згідно отриманого диплому;
- невідповідність структур пропозиції робочої сили та робочих місць, зайнятий з вищою підготовкою вимушений працювати на роботах нижчої

кваліфікації через дефіцит відповідних робочих місць, як наслідок – декваліфікація та зниження конкурентоспроможності працівника на ринку праці.

Дефіцит пропозиції робочих місць які вимагають повної або базової вищої освіти можна вважати основною причиною виявлених значних масштабів *overqualified* на ринку праці України. Крім стійкого економічного зростання дану ситуацію можна виправити зацікавленістю роботодавців у створенні робочих місць, які потребують наукомістких знань, висококваліфікованої праці. Тобто мова іде не про відкриття нових торгових приміщень, торгівельних палаток, кустарних виробництв, заправних станцій, гаражних майстерень, а про поступове подолання тенденцій примітивної економіки шляхом удосконалення інституційного середовища загалом і інститутів ринку праці зокрема.

Для характеристики економічно активного населення у міжнародній практиці застосовують методи групування, які умовно можливо об'єднати за двома типами: загальнодемографічні та соціально-економічні.

*Загальнодемографічні групування* стосуються не тільки економічно активного населення (зайнятих і безробітних), але й усього населення. До цього типу групувань у національній статистичній практиці належать групування:

- за статтю та віком;
- за місцем проживання та типом місцевості (міська, сільська) на основі адміністративно-територіального устрою країни;
- за рівнем освіти.

*Соціально-економічні групування* стосуються безпосередньо економічно активного населення та характеризують його місце у процесі економічної діяльності. Характерним прикладом такого групування є Міжнародна класифікація статусу зайнятості. На основі абсолютних даних про кількість економічно активного, зайнятого та безробітного населення як за окремими статево-віковими групами, так і для всієї сукупності осіб віком 15–70 років

розраховують рівні економічної активності, зайнятості та безробіття. Названі рівні можливо розраховувати по відношенню до:

- загальної кількості населення;
- кількості економічно активного населення.

У національній статистичній практиці рівні економічної активності та зайнятості зазвичай розраховують по відношенню до всього населення відповідного віку, а безробіття – до економічно активного населення.

*Математична модель чисельності працездатного населення із урахуванням рівня освіти.*

Прогнозування балансу ринку праці у довгостроковій перспективі на різних рівнях (регіональному, галузевому тощо) може підвищити конкурентоздатність економіки країни і рівень життя її населення. Для цього необхідно побудувати модель, в якій б поєднувала прогнозування трудових ресурсів і самої економіки.

Побудована інформаційна система буде вирішувати наступні завдання:

- прогнозування потреб в працездатному населенні, виходячи із змодельованих прогнозів економічного розвитку;
- формування пропозиції стосовно покращення підготовки випускників професійної освіти і перекваліфікації працездатного населення для досягнення балансу трудових ресурсів;
- формування пропозицій зі зменшення дисбалансу попиту і пропозиції на вітчизняному ринку праці за рахунок зміни інвестиційних потоків;
- оцінка економічного розвитку.

Об'єктами вивчення в даній системі є працездатне населення, тобто населення, яке має здатність і спеціальні знання, навички та вміння які необхідні, щоб працювати у сфері послуг, або для створення матеріальних благ. На сьогоднішній момент в Україні межі працездатного віку від 15 до 64 років. Трудові ресурси мають кількісні і якісні характеристики: показники

чисельності і складу населення (вік, стать, суспільні групи, та інше), показники рівня освіти, професійно-кваліфікаційної структури та інші.

Сукупний попит, який розглянутий в моделі економіки, являє собою суму попиту всіх макроекономічних агентів (державне управління, макроекономічний вплив, міжрегіональні взаємодії) на кінцеві товари і послуги. Вихідні дані моделі: потреба регіону у трудових ресурсах, реальні грошові доходи населення, ВВП, індекс споживчих цін, заробітна плата, сукупний попит і пропозиція на продукцію ЗЕД.

На кожному кроці розрахунку моделі для кожного агента формується бюджет в залежності від його доходів, які визначають із потоків які в нього входять:

$$B_{it} = DB_{it-1} + Inc_t, \quad (1)$$

де  $B_{it}$  – бюджет  $i$ -го економічного агента за крок  $t$ ;  $DB_{it-1}$  – залишок від бюджету  $i$ -го економічного агента на кінець року  $t$ ;  $Inc_t$  - доходи отримані  $i$ -м економічним агентом в год  $t$ .

Пропозиція виробників формується виробничими можливостями конкретного агента і сукупністю попиту на конкретний товар, яке можна задати виробничою функцією:

$$Y = F(K, L) = A * K^\alpha * L^\beta \quad (2)$$

де  $Y$  – виробничий дохід;  $K$  – фонди;  $L$  – середня чисельність працівників організації;  $\alpha$  і  $\beta$  – коефіцієнти при вище перерахованих факторах формування пропозиції;  $A$  – коефіцієнт технічного прогресу.

Значення виробничої функції  $Y$  показує виробництво товарів, і надання послуг за одиницю часу (год). Параметри  $\alpha$  і  $\beta$  потрібні для корегування, тобто мінімум квадратів помилок отриманих значень:

$$\left( \sum_{i=1}^k e_i^2 \right) \rightarrow \min, \quad (3)$$

де  $k$  – кількість спостережень;  $e_i$  – елементи матриці відхилень обчислюваних значень від фактичних.

Виробництво з однієї сторони формує бюджет організації, а з іншого є продуктом споживання. Розрахунок пропозиції товару представлений у вигляді наступної формули:

$$S_{yjrt} = Y_{jrt} * Distr_{yjrt}, \quad (4)$$

де  $S_{yjrt}$  – пропозиція  $j$ -им виробникам товару  $y$  в регіоні  $r$  в році  $t$ ;  $Y_{jrt}$  – випуск  $j$ -им виробником в регіоні  $r$  в році  $t$ ;  $Distr_{yjrt}$  – частка виробленої продукції.

Попит на продукцію формується по статтях розходів бюджету виробника, заснований на статистичних даних частки споживання. Для розрахунку попиту на продукцію або послугу розраховуються частки бюджету. Отримані частки є статистичними параметрами. Формула формування попиту:

$$DX_{jrt} = \frac{B_{jrt} * OX_{jrt}}{PX}, \quad (5)$$

де  $DX_{jrt}$  – попит  $j$ -го агента на продукцію  $X$  в регіоні  $r$  в році  $t$ ;  $B_{jrt}$  – бюджет агента;  $OX_{jrt}$  – частка бюджету для купівлі продукції  $X$ ;  $PX$  – ціна на продукцію  $X$ .

Формування цін в середині регіону описується наступним чином:

$$PT_{rt} = PY_{rt-1} + \frac{\sum_{j=1}^4 DY_{jrt} - \sum_{j=1}^3 SY_{jrt}}{C}, \quad (6)$$

де  $PY_{rt}$  – ціна продукції  $Y$  в регіоні  $r$  в році  $t$ ;  $DY_{jrt}$  – сукупний попит  $j$ -го агента в регіоні  $r$  в році  $t$ ;  $SY_{jrt}$  – сукупна пропозиція  $j$ -го агента в регіоні  $r$  в році  $t$ ;  $C$  – константа інтеграції.

При зменшенні константи інтеграції економічна система швидше врівноважується, але збільшується шанс на появу від'ємних цін.

Після встановлення рівноважних цін можна знайти прогнозовані значення ринку праці. Розглянемо кадрову потребу організації:

1) Наступні значення потреби в кадрах визначається через попередні і індекс її росту:

$$PT_t = PT_{t-1} * IndPT_t, \quad (7)$$

де  $PT_t$  – потреба у працездатному населенні в році  $t$ ;  $IndPT_t$  – індекс потреби.

2) Індекс потреби визначається із різниці індексу приросту випуску товару, індексу приросту продуктивності праці і інфляції:

$$IndPT_t = IndY_t * \Delta IndPrTr_t - \Delta inf_t \quad (8)$$

де  $IndPT_t$  – індекс випуску товару (відношення поточного і попереднього показників випуску товару);  $\Delta IndPrTr_t$  – індекс продуктивності праці;  $\Delta inf_t$  – значення інфляції.

Даний показник інфляції змінюється в межах 5-7%. Хоча фактичні межі більші використовуваних, але вони мають свою похибку. А також невеликі межі зміни цього показника можуть запобігти скороченню співробітників організації, викликаного економічною кризою.

3) Індекс продуктивності праці:

$$IndPrTr_t = IndInv_v * IndInn_t, \quad (9)$$

де  $IndInv_v$  – індекс інвестиційної привабливості регіону (відношення поточного і попереднього значення отриманих інвестицій);  $IndInn_t$  – індекс запровадження інновацій (відношення поточного і попереднього обсягу використовуваних інновацій).

4) Розрахунки побудовані на основі обсягу населення в регіонах, таких факторах як: народжуваність, смертність, міграція та інших. А також враховують рівень освіти:

$$N_{it} = N_{it-1} + \sum_j b_{ijt} + \sum_{j=n+1}^{n+k} r_{ijt} + \sum_{j=1}^n d_{ijt} + \sum_{j=n+1}^{n+k} l_{ijt} \quad (i = \overline{1, n}), \quad (10)$$

де  $N_{it-1}$  – чисельність населення в стані  $i$  на кінець періоду  $t$ ;  $b_{ijt}$  – кількість переходів зі стану  $i$  в стан  $j$  за період  $t$ ;  $r_{ijt}$  – чисельність мігрантів, які перейшли зі стану  $i$  в стан  $j$  за період  $t$ ;  $d_{ijt}$  – кількість переходів зі стану  $j$  в  $i$ ;  $l_{ijt}$  – кількість вибуттів із  $i$  в  $j$ ;  $n$  – кількість станів (рівень освіти);  $k$  – кількість зовнішніх джерел поповнення відносно до  $n$ .

Таким чином, за допомогою даної моделі можна прогнозувати економічні і соціальні явища, дає можливість виявити причинно-наслідкові зв'язки безробіття і розмір заробітної плати, дисбаланс ринку праці.

### ***Математична модель регіональної зайнятості і безробіття.***

Одним із найважливіших завдань стійкого розвитку регіону є аналіз динаміки економічно активного і безробітного населення.

Розглянуті підходи до моделювання динаміки чисельності економічно зайнятого населення (особи, що мають роботу яка оплачується)  $x$ , безробітного населення (особи, які не мають роботи, мають роботу і готові приступити протягом 2-х тижнів)  $y$  і економічно неактивне населення (ті що навчаються, особи які отримують пенсію за віком, інвалідністю та інші)  $z$ , засновані на парних взаємодіях. Ці взаємодії  $xu, xz, uz$  описують обмін інформацією між різними групами населення, котрі призводять до зміни чисельності даних груп.

Дану модель можна записати у вигляді формул (11):

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f_1x + \eta_{12}xy + \eta_{13}xz, \\ \frac{dy}{dt} &= f_2x + \eta_{21}yx + \eta_{23}yz, \\ \frac{dz}{dt} &= f_3x + \eta_{31}zx + \eta_{32}zy,\end{aligned}\tag{11}$$

де  $\eta_{ij}$  – коефіцієнти, що описують ступінь впливу однієї групи на іншу;  $f_1x, f_2x, f_3x$  – функціональні залежності, що описують динаміку населення ( $i, j = 1, 3, i \neq j$ ).

Функціональні залежності повинні описувати динаміку чисельності розглянутих груп, а взаємодія груп населення моделюватися нелінійними членами.

Відповідно, функціональні залежності будуть мати наступний вигляд:

$$\frac{du}{dt} = p - Hu,\tag{12}$$

де  $u$  – змінна, яка вказує певну групу населення;  $t$  – змінна модельного часу (год);  $p$  – показник міграції;  $H$  – параметр швидкості зміни чисельності групи.

Для кожної розглянутої групи населення параметр  $H$  буде мати свій сенс. В одному випадку, він буде більше відображати такі показники як: народжуваність і смертність, для економічно неактивного населення. У іншому випадку узагальнено описувати баланс переходу населення між розглянутими групами. Для інших груп (економічно зайняте і безробітне населення) він «відстежує» зміни економічної ситуації. Так, соціально-економічне становище залежить від потреби в трудових кадрах, рівня заробітної плати і т.д.

В підсумку можна отримати просту систему рівнянь для узагальненого опису динаміки груп населення:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= p_1 - H_1 + \eta_{12}y + \eta_{13}zx, \\ \frac{dy}{dt} &= p_2 - H_2 + \eta_{21}x + \eta_{23}zy, \\ \frac{dz}{dt} &= p_3 - (H_3 + \eta_{31}x + \eta_{32}y)z,\end{aligned}\tag{13}$$

де  $x$  – чисельність економічно зайнятого населення;  $y$  – чисельність безробітних;  $z$  – чисельність економічно неактивного населення;  $t$  – змінна модельного часу (год);  $p_i$  – показник міграції;  $H_i$  – параметр швидкості зміни чисельності групи (при  $i = 3$  враховуючи народжуваність);  $\eta_{ij}$  – коефіцієнти, котрі описують взаємодію груп ( $i, j = 1, 3, i \neq j$ ).

В розглянутому випадку, якщо зміна чисельності буде відбуватися хаотично, то це буде наслідком несприятливої ситуації на ринку праці або міграції (наприклад, через бажання отримати освіту в іншому населеному пункті).

Таким чином отримана модель дозволяє оцінити соціально-економічну ситуацію регіону за допомогою соціальних взаємодій таких груп населення, як безробітні, економічно неактивні і зайняті. Допоможе покращити стратегію по регулюванню безробіття і зайнятості [0].



## *Математична двокомпонентна модель, що описує динаміку чисельності населення із урахуванням вікової зрілості*

В наш час існує достатньо велика кількість математичних моделей для прогнозу динаміки чисельності населення.

При побудові даних математичних моделей, різні автори використовують свої ідеї і принципи їх побудови. Так, наприклад, аналізуючи динаміку населення всієї Землі, часто використовують принцип замкнутої системи. Даний принцип використовується тоді, коли на систему не діють зовнішні фактори, а тільки ті, що використовуються в моделі. Принцип замкнутої системи використовують не тільки для опису чисельності всієї Землі, але й для країни чи окремого регіону. Але окрім неврахованих факторів, в таких системах не використовуються показники міграції. Це пояснюється тим, що облік міграційних процесів в моделі динаміки чисельності відповідає принципу відкритої системи.

Інші науковці використовують біологічні моделі, де динаміка чисельності популяції визначається процесами відтворення. В таких моделях фактори, що впливають на демографічні процеси (наприклад, рівень життя населення), враховуються шляхом введенням відповідних коефіцієнтів моделі, характерних тільки для біологічних популяцій (такі як, народжуваність смертність та інші). Іноді в таких моделях динаміка чисельності (народжуваність і смертність) враховується не коефіцієнтами, а функціями.

В моделях світової динаміки використовують також принцип обмеженості ресурсів. В необхідні для опису наслідків росту чисельності населення, недостачі їжі чи ресурсів, забруднення навколишнього середовища.

Іноді описані моделі збільшення населення Землі залежать тільки від внутрішніх властивостей системи, такі системи відповідають принципу відсутності зовнішніх факторів.

Часто моделі опису динаміки чисельності населення є комплексними, тобто у моделі використовується декілька принципів одночасно.

Для опису динаміки чисельності населення використовують диференціальні або різницеві рівняння, або навіть систему таких рівнянь. В таких моделях із самого початку вводяться основні фактори, які впливають на демографічні процеси. Це робиться з метою, щоб відстежити, які фактори впливають на динаміку чисельності населення.

Поділимо чисельність населення на дві групи «статеві не зрілу» і «статеві зрілу». Такий поділ необхідний для врахування репродуктивної здатності людини, тобто здатності людини до відтворення. В статеві не зрілу групу входять діти, тобто люди у віці 0-18 років, а в статеві зрілу – входять дорослі, тобто старші 18 років. Хоча такий поділ вельми умовний, тому що люди у віці молодше 18 років і старші 45 років роблять не великий внесок у збільшення чисельності населення.

За один крок модельного часу (рік) частина населення із групи дітей переходить в наступну групу (дорослішання). Динаміка чисельності групи дорослих визначається смертністю дорослих і поповненням чисельності групи дорослих дітьми, тобто переходом людей із групи дітей в групу дорослих. Основними факторами, які впливають на чисельність населення є народжуваність і смертність. Вважатимемо, що рівень смертності постійний, а на процес народжуваності впливає як чисельність групи дорослих, так і дітей. Отже, динаміка чисельності може бути описана наступною системою рівнянь:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= ax_n y_n y_n + dx_n, \\y_{n+1} &= sx_n + vy_n,\end{aligned}\tag{14}$$

де  $x$  – чисельність групи дітей;  $y$  – чисельність групи дорослих (економічно зайняті);  $n$  – показник часу (год);  $a(x, y)$  – коефіцієнт народжуваності;  $d$  – коефіцієнт, що описує частину групи дітей, яка залишається у своїй групі;  $s$  – коефіцієнт переходу з групи дітей у групу дорослих;  $v$  – коефіцієнт смертності дорослих.

Сформуємо наступні обмеження для коефіцієнтів системи:

$$a_{x,y} > 0, 0 < d \leq 1, 0 < s \leq 1, 0 < v \leq 1. \quad (15)$$

Окрім цього, будемо вважати, що в моделі використовується принцип замкненої системи, тому справедливо  $s + d \leq 1$ . Дане рівняння призводить до того, що в моделі не беруться до уваги процеси міграції.

Функція  $a$  виглядає наступним чином:

$$a_{x,y} = a \cdot e^{-\alpha \cdot x - \beta \cdot y} \quad (16)$$

де  $a$  – максимальне значення репродуктивної здатності людей;  $\alpha$  – коефіцієнт, що відображає зниження народжуваності через ріст чисельності групи людей.

Збільшення значення  $x$  показує, що більшість людей і у великій кількості із групи дорослих мають дітей. А також знижується репродуктивність людей, тобто знижується значення функції народжуваності  $a$ . Подібну поведінку функції  $a$  можна описати так, що все більша кількість дорослих, маючи одну або дві дитини, направляють всі сили і увагу на виховання нащадків і відмовляються народжувати нових. Величина  $\beta$  описує ситуацію, коли сімейна пара відмовляється народжувати дитину через будь які причини. Вона визначається такими факторами як: стан здоров'я відношення кількості чоловіків до кількості жінок, а також соціальними, економічними і психологічними факторами (наприклад, нестача коштів).

Дана модель хоч і проста, але цілком може бути використана для опису демографічних процесів  $[0, 0]$ .

Аналіз і прогноз рівня зайнятості важливий для розробки підходів соціально-економічного розвитку територій. Він може бути здійснений при умові наявності відповідних тимчасових рядів чисельності економічно зайнятого населення по вікових групах і загальної чисельності цих груп. Також включає в себе окрім зайнятих - безробітних і економічно неактивне населення. В основі даної моделі лежить ідея природнього переходу частини населення із однієї групи в іншу (процес старіння). Взаємодія спеціалістів різного віку відбувається аналогічно до взаємодій популяцій: конкуренція, партнерство

(симбіоз), допомога (коменсалізм), дискримінація (хижак-жертва), пригнічення (аменсалізм), відсутність впливу (нейтралізм).

Частка робітників певного віку до загальної чисельності відповідної групи не є сталою величиною, як і її усереднене значення. Дана складність полягає у розбіжностях динаміки демографічних і економічних процесів. Проте, ці два процеси пов'язані із рівнем соціально-економічного розвитку. Чисельність робітників формується виходячи із потреб виробництва у трудових ресурсах. А рух населення залежить від якості життя: рівня доходів, охорони здоров'я, тощо. Тому аналіз і прогнозування чисельності економічно зайнятого населення можуть бути зведені до комбінації моделей динаміки чисельності всього населення і взаємодії груп економічно зайнятих.

Сформулюємо припущення, які будемо використовувати для побудови моделі конкуренції економічно зайнятих різновікових груп населення [19, 20]:

- міграційний рух населення в середині груп враховується введенням вільних членів;
- смертність, перетік із економічно активного населення в неактивне або навпаки, а також перехід в іншу вікову групу, описуються лінійними членами;
- взаємодія спеціалістів різних вікових груп, враховуються нелінійними членами другого порядку.

Для побудови базової моделі взаємодії працівників різного віку які зайняті в економіці, із урахуванням соціальних взаємодій можна розділити на три основні вікові групи: молоді спеціалісти (16-29 років), робітники зі стажем (30-49 років), зайняті передпенсійного та пенсійного віку (50 років і старші). Визначення групи відповідає трьом категоріям зайнятого населення: працівники з малим досвідом роботи; працівники зі значним досвідом роботи; працівники передпенсійного та пенсійного віку. З урахуванням пропозицій схема моделі має вигляд (рис. 1):

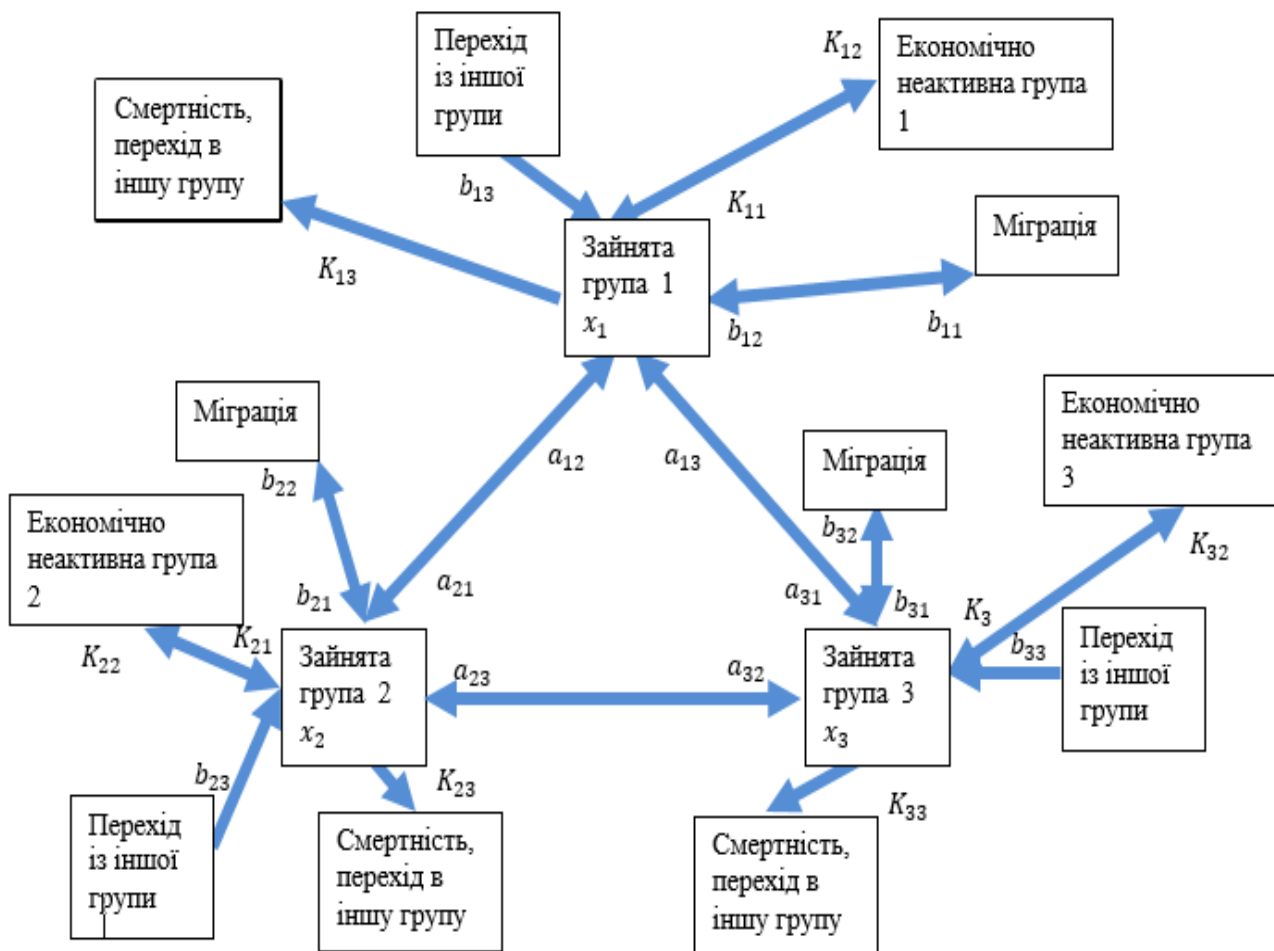


Рис. 1. Схема моделі динаміки спеціалістів різного віку в економіці регіону

В результаті математичну модель можна представити у вигляді системи диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = b_{11} - b_{12} + b_{13} + (K_{11} - K_{12} - K_{13} + a_{12}x_2 + a_{13}x_3)x_1, \\ \frac{dx_2}{dt} = b_{21} - b_{22} + b_{23} + (K_{21} - K_{22} - K_{23} + a_{21}x_1 + a_{23}x_3)x_2, \\ \frac{dx_3}{dt} = b_{31} - b_{32} + b_{33} + (K_{31} - K_{32} - K_{33} + a_{31}x_1 + a_{32}x_2)x_3, \end{cases} \quad (17)$$

де  $x_i$  – чисельність економічно зайнятих спеціалістів  $i$ -ї групи;  $t$  – момент часу;  $b_{ij}$  – коефіцієнт міграційних рухів  $i$ -ї групи в групу  $j$ ;  $K_{ij}$  – коефіцієнт смертності, переходу в іншу групу і перетікання чисельності населення між економічно зайнятими і економічно неактивними групами;  $a_{ij}$  – коефіцієнт впливу групи  $i$  на групу  $j$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ).

При наступних умовах:

$$b_1 = b_{11} - b_{12}, b_2 = b_{21} - b_{22}, b_3 = b_{31} - b_{32},$$

$$K_1 = K_{11} - K_{12} - K_{13}, K_2 = K_{21} - K_{22} - K_{23}, K_3 = K_{31} - K_{32} - K_{33} \quad (18)$$

Отримуємо наступну систему:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = b_1 + (K_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3)x_1, \\ \frac{dx_2}{dt} = b_2 + (K_2 + a_{21}x_1 + a_{23}x_3)x_2, \\ \frac{dx_3}{dt} = b_3 + (K_3 + a_{31}x_1 + a_{33}x_2)x_3. \end{cases} \quad (19)$$

Отримана модель може описувати наступні типи взаємодій груп різного віку:

Таблиця 10

Класифікація взаємодій працівників різних вікових груп, зайнятих в економіці

Вплив групи $i$ на групу $j$	Тип взаємодії в біології	Тип взаємодії на ринку праці
$a_{ij} > 0$ і $a_{ji} > 0$	мутуалізм	партнерство
$a_{ij} > 0$ і $a_{ji} = 0$ ,	комменсалізм	допомога
$a_{ij} > 0$ і $a_{ji} < 0$ ,	жертва-експлуататор	дискримінація
$a_{ij} < 0$ і $a_{ji} = 0$ ,	Аменсалізм	пригнічення
$a_{ij} < 0$ і $a_{ji} < 0$ ,	конкуренція (інтерференція)	конкуренція
$a_{ij} = 0$ і $a_{ji} = 0$ ,	Нейтралізм	відсутність впливу

*Партнерство* – взаємний позитивний вплив двох груп. У цьому випадку збільшення чисельності однієї групи призводить до збільшення чисельності іншої.

*Допомога* – позитивний вплив однієї групи на іншу, але група яка отримує допомогу, сама не здійснює ніякого впливу на групу, що їй допомагає. Це ситуація при якій, наприклад, батьки пенсійного віку беруть на себе вирішення побутових проблем молоді. Таким чином молодь отримує більше часу і може не тільки навчатися, а й працювати.

*Дискримінація* – збільшення чисельності однієї групи призводить до зменшення чисельності іншої. Пригнічення і паразитизм певних вікових груп в

економіці є аспектом такого соціального явища як ейджизм. Ейджизм можна спостерігати в економіках з швидким розвитком нових технологій, які вимагають швидкого навчання. Обернена ситуація є доволі рідкісним явищем на ринку праці і свідчить про віддалення молоді від традиційних суспільних цінностей.

*Пригнічення* – чисельність однієї групи зменшується через вплив другої, при цьому остання група не здійснює впливу на першу. Дана ситуація може статися, наприклад, при взаємодії середньої вікової групи і старшої. Пенсіонери, які продовжують працювати можуть витіснити з ринку праці більш молодше покоління.

*Конкуренція* – взаємне від’ємне відношення між групами, коли збільшення однієї групи призводить до зменшення іншої. Конкуренція є частою ситуацією для ринкової економіки і по своїй суті є наслідком рівноправ’я вікових груп на ринку праці. Однак в крайніх випадках вона може перерости в пригнічення.

Важливим показником розвитку ринку праці є рівень зайнятості певної вікової групи відносно до загальної чисельності населення. Для оцінки демографічних тенденцій і знаходження прогнозованого рівня зайнятості можна використовувати модель динаміки чисельності населення, зайнятого в економіці. Врахуємо у системі групи дітей, що розглядаються працюючими, тобто чисельність населення у віці 0-15, котрі будуть поповнювати чисельність економічно зайнятих, а саме групи молодих спеціалістів:

$$\begin{cases} \frac{dp_0}{dt} = m_0 - g_0 p_0 + r_1 p_1 + r_2 p_2 \\ \frac{dp_1}{dt} = m_1 - d_1 p_1 - g_0 p_0 + g_1 p_1 + (K_1 + a_{12} p_2 + a_{13} p_3) p_1 \\ \frac{dp_2}{dt} = m_2 - d_2 p_2 - g_1 p_1 + g_2 p_2 + (K_2 + a_{21} p_1 + a_{23} p_3) p_2 \\ \frac{dp_3}{dt} = m_3 - d_3 p_3 + g_2 p_2 + (K_3 + a_{31} p_1 + a_{32} p_2) p_3 \end{cases} \quad (20)$$

де  $p_0$  – чисельність групи 0-15 років;  $p_1$  – чисельність зайнятих в економіці групи 16-29 років;  $p_2$  – чисельність зайнятих в економіці групи 30-49 років;  $p_3$  – чисельність зайнятих в економіці групи 50 років і старші;  $m_j$  – міграційний

приріст;  $d_j$  - коефіцієнт смертності;  $g_j$  - коефіцієнт переходу певної групи в наступну групу;  $r_j$  - середня чисельність дітей, що народилися від відповідної репродуктивної групи ( $p_1$  і  $p_2$ ) ( $j = 1,2,3,4$ );  $K_i$  - коефіцієнт переходу між економічно не активним населенням і зайнятим ( $i = 1,2,3$ );  $a_{il}$  - коефіцієнт взаємодії певної когорти з  $l$ -тою когортою ( $l = 1,2,3$ ).

А також врахуємо шлюбні пари, запропоновані в роботі [16, 17]. Так як чисельність групи дітей залежить не від чисельності всіх економічно зайнятих репродуктивних груп, а від чисельності всіх людей репродуктивного віку, а точніше від утворених шлюбних пар (чоловік-жінка). Розділимо систему на дві. Перша система, що вираховує чисельність групи дітей:

$$\begin{cases} \frac{db}{dt} = m_b - g_F b - g_M b + \frac{SFM}{(vF+M)}, \\ \frac{dF}{dt} = m_F - d_M F + g_F b - g_1 F, \\ \frac{dM}{dt} = m_M - d_M M + g_M b - g_2 M. \end{cases} \quad (21)$$

де  $F$  і  $M$  - кількість жінок і чоловіків репродуктивного віку, що відповідають віковій групі;  $s$  - коефіцієнт шлюбної народжуваності, тобто скільки новонароджених доводиться на одну шлюбну пару;  $v$  - коефіцієнт, що враховує асиметрію статей (гендерний дисбаланс) і в певній мірі характеризуючий тим шлюбних відносин;  $m$  - міграційний приріст;  $d$  - коефіцієнт смертності;  $g_F$  і  $g_M$  - коефіцієнт переходу із групи дітей в групи жінок і чоловіків, відповідно;  $g_1$  і  $g_2$  - коефіцієнт переходу із груп жінок і чоловіків в пострепродуктивні групи, відповідно.

Друга система визначає на основі вирахованої чисельності дітей, чисельність економічно зайнятого населення:

$$\begin{cases} \frac{dp_1}{dt} = m_1 - d_1 p_1 + g_0 b - g_1 p_1 + (K_1 + a_{12} p_2 + a_{13} p_3) p_1, \\ \frac{dp_2}{dt} = m_2 - d_2 p_2 + g_1 p_1 + g_2 p_2 + (K_2 + a_{21} p_1 + a_{23} p_3) p_2, \\ \frac{dp_3}{dt} = m_3 - d_3 p_3 + g_2 p_2 + (K_3 + a_{31} p_1 + a_{32} p_2) p_3. \end{cases} \quad (22)$$

де  $b$  - чисельність групи дітей [17-18].



Чисельність населення постійно змінюється і залежить від багатьох факторів, котрі не всі можна врахувати. Тому коефіцієнти системи необхідно пристосовувати до змінних фактичних даних, щоб зробити більш точний прогноз. Для цього використовується метод стохастичної апроксимації. Даний метод коректує коефіцієнти системи для врахування значень прогнозу найближчих до фактичних даних, наскільки довший період, за який відома інформація про динаміку чисельності населення. Адже успіх прогнозу залежить більше не від того наскільки добре описана модель, а від того наскільки вірно визначені коефіцієнти системи. Так як від них залежить напрямок і швидкість змін прогнозованих значень.

Адаптація полягає у зміні коефіцієнтів системи, поки обчислювані значення  $Y$  не наблизяться до оптимальних (заданих статистичними даними)  $U$  на деяку точність  $\eta$ .

Для отримання очікуваного результату адаптації, варто враховувати, що показник формується за допомогою трьох складових:

- детермінованою  $Y$ ;
- випадковою  $\varepsilon$ ;
- невизначеною  $\mu$ .

Формула для знаходження шуканого показника, із урахуванням введених позначень:

$$Y_t = Y_t + \varepsilon_t + \mu_t. \quad (23)$$

Але виділити всі три складові неможливо, тому доводиться використовувати два доданки: регулярна складова (модель) і помилки апроксимації, яка характеризує невідомі фактори, що впливають на модель:

$$Y_t = Y_y + \varepsilon_t. \quad (24)$$

Точність обчислень визначає помилка апроксимації  $\varepsilon$ . В свою чергу помилка не повинна перевищувати деяке допустиме значення (точність адаптації)  $\eta$ :

$$\varepsilon_t > \eta. \quad (25)$$

Таким чином, адаптація потрібна для зміни коефіцієнтів моделі, щоб обчислювані значення не розходились з реальними значеннями більше, ніж на задану точність, які можуть виникнути через невраховані фактори.

Для адаптації моделі існує декілька алгоритмів, але найкращим варіантом для нашої моделі буде використання алгоритму адаптації з постійним кроком, через свою простоту і прийнятним результатом обчислювальних значень:

$$y_{it} = k_i \frac{\varepsilon_t - \eta}{\varepsilon_t}, \quad (26)$$

де  $k_i$  – ваговий коефіцієнт, що відображає ступінь адаптації обчислюваного коефіцієнта в порівнянні із іншими коефіцієнтами;  $t$  – модельний час (год) ( $i = 1, m$ );  $m$  – кількість обчислюваних коефіцієнтів у рівнянні.

Обмеження вагового коефіцієнта має наступне вираження:

$$k_i = 1. \quad (27)$$

Адаптація коефіцієнтів моделі повинна здійснюватися однаково. Тому ваговий коефіцієнт  $k_i$  повинен бути однаковим для всіх коефіцієнтів, тоді значення параметру демпфірування коливань розраховується наступним чином:

$$y_{it} = y_t = \frac{1}{m} \frac{\varepsilon_t - \eta}{\varepsilon_t}. \quad (28)$$

Визначене таким чином значення параметрів демпфірування коливань є оптимальними, так як адаптація відбувається не за багато ітерацій, а за один крок.

Адаптація відбувається за допомогою алгоритму стохастичної апроксимації Робінса-Монро:

$$a_{it}n = a_{it}n - 1 + y[n](a_{it} - a_{it}[n - 1]), \quad (29)$$

де  $a$  – значення коефіцієнта;  $n$  – останній крок адаптації.

Виразимо коефіцієнти моделі за допомогою фактичного значення рівняння системи  $Y_t$ , і обчислюваного значення  $x_t$ , отримаємо:

$$a_{0t} = Y_t - a_{1t}x_t, \quad (30)$$

$$a_{1t} = \frac{Y_t - a_{0t}}{x_t}, \quad (31)$$

де  $a_{0t}$  – значення вільного коефіцієнта;  $a_{1t}$  – значення коефіцієнта, що біля обчислюваного значення.

Підставимо формули обчислення коефіцієнтів в алгоритм Робінса-Монро:

$$a_{0tn} = a_{0tn-1} + y_t(Y_t - a_{1t-1}x_t - a_{0tn-1}), \quad (32)$$

$$a_{1tn} = a_{1tn-1} + y_t\left(\frac{Y_t - a_{0tn-1}}{x_t} - a_{1tn-1}\right). \quad (33)$$

В даному випадку використовуємо коефіцієнти  $a_{0t-1}$  і  $a_{1t-1}$  як коефіцієнти на початковому кроці адаптації  $a_{0t0} = a_{0t-1}$  і  $a_{1t0} = a_{1t-1}$ .

Зробивши дану заміну, отримуємо наступне:

$$a_{0tn} = a_{0tn-1} + y_t(Y_t - a_{1t-1}x_t - a_{0t-1}), \quad (34)$$

$$a_{1tn} = a_{1tn-1} + y_t\left(\frac{Y_t - a_{0t-1} - a_{1t-1}x_t}{x_t}\right). \quad (35)$$

Вираз, отриманий в дужках, представляє собою поточну помилку апроксимації  $\varepsilon_t$ . Оскільки адаптація моделі відбувається за один крок, отримуємо наступну просту формулу:

$$a_{0t} = a_{0t-1} + y_t\varepsilon_t, \quad (36)$$

$$a_{1t} = a_{1t-1} + y_t\frac{\varepsilon_t}{x_t}. \quad (37)$$

Отримані формули є кінцевими формулами адаптації коефіцієнтів системи до фактичних даних на відстані допустимої похибки  $\eta$  [20, 21, 22].

Для обчислення значень системи використаємо алгоритм Рунге-Кутти 4-го порядку (похибка порядку  $-h^4$ ,  $h$  – крок (точність)):

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}k_0 + 2k_1 + 2k_3 + k_3, \quad (38)$$

де

$$k_0 = hF(x_i, y_i), \quad (39)$$

$$k_1 = hF\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_0}{2}\right), \quad (40)$$

$$k_2 = hF\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right), \quad (41)$$

$$k_3 = hF(x_i + h, y_i + k_2). \quad (42)$$

Метод Рунге-Кутти називається однокроковим методом, так як використовує значення функції на одному попередньому кроці. Точність рішень, можна збільшити, якщо використовувати для знаходження рішень інформацію про значення функції, отриманих в декількох  $k$  попередніх точках інтегрування ( $x_{i-1}, x_{i-2} \dots x_{i-k}$ ).

Для підвищення точності обчислень скористаємось багатокроковим методом, який використовує  $k$  значень, вирахованих в  $k$  попередніх точках. Таким методом є явний багатокроковий метод Адамса (метод Адамса-Башфорта):

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{\lambda=0}^k u_{-\lambda} f(x_{n-\lambda}, y_{n-\lambda}), \quad (43)$$

де  $u_{-\lambda}$  – деяка стала.

Даний метод потребує попереднього обчислення  $k$  попередніх точок. Для цього на першому кроці використовується метод Рунге-Кутти 4-го порядку [20].

Таким чином, модель було доповнено врахуванням народжуваності і утворенням шлюбних пар.

На основі отриманої моделі побудуємо схему алгоритму прогнозування динаміки чисельності економічно зайнятого населення (рис 2).

У цій схемі першим кроком є введення початкових даних. Тобто значення груп, кількість економічно зайнятих людей для кожної вікової групи: I група - 16-29 років; II група 30-49 років; III група – люди старші 50 років. Також вводяться кількість дітей віком від 0 до 14 років, яка у майбутній перспективі поповнить I групу (працівники 15-29 років). Коефіцієнти взаємодії груп: народжуваність; смертність; частки групи, які через рік перейдуть з одної групи в іншу (в силу дорослішання), міграційний приріст. Також вводяться статистичні дані: фактичні значення чисельності груп.



Рис. 2. Схема алгоритму прогнозування динаміки економічно активного населення

Дальше для обчислення першого прогнозного кроку використовуємо метод Рунге-Кутти 4-го порядку. Для подальших обчислень застосовується метод Адамса-Башфорта, який використовує раніше обчислені значення. Таким чином ми реалізували модель динаміки чисельності економічно активного населення з урахуванням народжуваності на мові програмування Java.

У результаті роботи програми, яка реалізує модель (20) та використавши дані нами отримано наступні оцінки коефіцієнтів моделі:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dp_0}{dt} = 0.57 - 0.038p_0 - 0.018p_0 + 0.015p_1 + 0.008p_2; \\ \frac{dp_1}{dt} = 0.51 - 0.007p_1 + 0.013p_0 - 0.006p_1; \\ \frac{dp_2}{dt} = 0.565 - 0.018p_2 - 0.005p_1 - 0.023p_2; \\ \frac{dp_3}{dt} = 3.247 - 0.079p_3 + 0.024p_2. \end{array} \right. \quad (44)$$

Статистичні оцінки якості моделі динаміки різновікових груп економічно активного населення отримано такі (табл. 11):

Таблиця 11

Коефіцієнт кореляції	Все населення	Група I (16-29 років)	Група II (30-49 років)	Група III (>= 50 років)
<i>R</i>	0.98	0.97	0.96	0.97

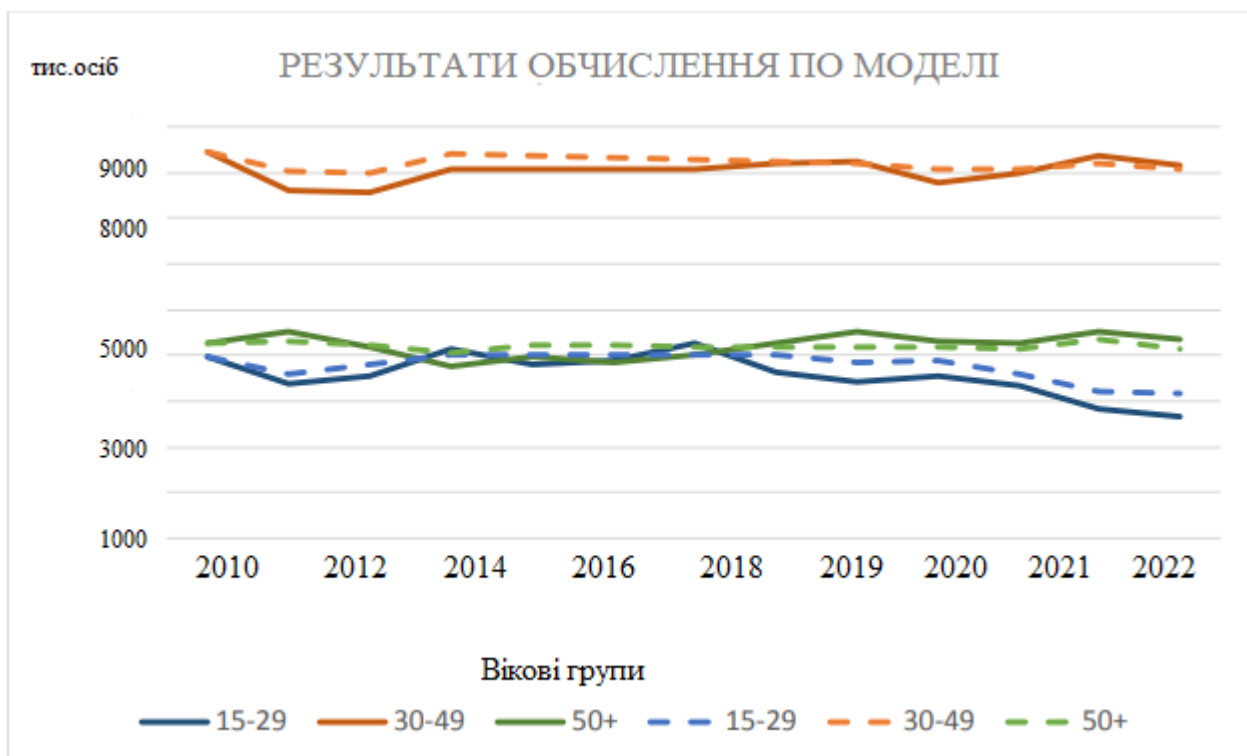


Рис. 3. Фактична і змодельована динаміка чисельності економічно зайнятого населення України по вікових групах

Використаємо прогностні значення кількості економічно активного населення ( $N_i$ ) і кількості по кожній віковій групі ( $p_i$ ) та обчислимо рівень зайнятості по кожній віковій групі. Прогнозну динаміку цих показників подано в табл. 12.

## Прогнозні значення економічно активного населення

## України по вікових групах (у %)

Вікова група	2021	2022	2023
Група I (16-29 років)	19.7	18.6	18.3
Група II (30-49 років)	45.9	46.3	46.6
Група III ( $\geq 50$ років)	34.4	35.1	35.1

Отримані результати показують, що в Україні відбуваються зміни у віковій структурі чисельності економічно зайнятого населення. Насамперед це стосується зменшення зайнятості молоді (вікова група 16-29 років). На нашу думку у цій віковій групі чітко проявляється криза праці. Змінюються ціннісні орієнтири і мотивації. Для цієї вікової групи гроші (заробітна плата) подаються як єдиний критерій успіху. Трудова поведінка молоді є пасивною, пристосованою до ситуації, коли праця далеко не завжди оплачується адекватно.

Хоча, з іншого боку і ринок праці не здатний забезпечити молодь роботою згідно отриманої професії, забезпечити професійну кар'єру та можливість реалізувати свої таланти та здібності. Сучасна молодь орієнтована в основному лише на офісні професії, а праця робітника та інженера у промисловості вважається непрестижною.

Найбільш стабільною і з тенденцією до збільшення зайнятості є вікова група II (30-49 років). Відбувається інтенсивне включення цієї групи в трудову діяльність. Але і у цій групі є наявні ознаки кризи праці. Про це свідчать велика кількість псевдотрудових відносин тіньового сектора господарювання. Він досяг загрозливих масштабів. У цій групі перебувають працівники основного працездатного віку і у структурі економічно активного населення вона б мала займати більший відсоток відносно загальної чисельності. Однією з вагомих причин цього негативного явища є потік трудових мігрантів з України, який не припиняється багато років.

Стабільною є і третя група економічно активного населення з тенденцією до несуттєвого збільшення. У цій групі перебувають працівники зрілого працездатного віку та літні люди. Досить великий відсоток цієї групи у загальній структурі економічно активного населення вказує на старіння населення. Однією з причин також є низький рівень пенсійного забезпечення, що спонукає до продовження трудової діяльності після виходу на пенсію.

Питання зайнятості населення та розвиток ринку праці в Україні постійно привертають увагу політиків, засобів масової інформації, є актуальними у середовищі експертів та науковців. Стосовно функціонування та розвитку ринку праці в Україні, то слід зауважити що вони залежать не лише від стану вітчизняної економіки, але і від попиту та пропозиції робочої сили у країнах Європи.

Очевидним є той факт, що COVID-19 вніс суттєві зміни в сферу зайнятості. Цими змінами неможливо знехтувати і потрібно враховувати в подальшому для оздоровлення економіки в цілому та сфери зайнятості зокрема. На нашу думку внутрішній ринок праці буде змінюватись у таких напрямках: дистанційна зайнятість; дистанційне навчання; легалізація зайнятості; зростатиме роль держави; затребуваність професії на ринку праці; посиляться правила охорони праці; прийняття солідарних рішень.

На даному етапі розвитку ринку праці України існує потреба у таких робітничих спеціальностях: водіях, слюсарях, швачках, мулярах електромонтерах, електрогазозварниках, токарях тощо. У сільському господарстві затребуваними є агрономи, робочі для обслуговування виробництв, трактористи. Також попитом користуються працівники сфери послуг: продавці, офіціанти, перукарі, кухарі, охоронці. Залишається високим попит на професіоналів та фахівців з досвідом роботи: лікарів, фармацевтів, інженерів різних галузей, юристів, викладачів, економістів, бухгалтерів, IT-фахівців.

Проаналізувавши зміну чисельності та галузевої структури зайнятого в економіці України населення ми прийшли висновків: за три останні роки



зайнятість знизилась у таких галузях як сільське господарство, добувна та переробна промисловості, сфері операцій з нерухомістю; паралельно відбулося зростання частки зайнятого населення у торгівлі, будівництві та державному секторі; багато людей які отримали вищу підготовку вимушені працюють на робочих місцях які потребують нижчої кваліфікації.

Отримані результати показують, що в Україні відбуваються зміни у віковій структурі чисельності економічно зайнятого населення. Насамперед це стосується зменшення зайнятості молоді (вікова група 16-29 років).

### **ВИКОРИСТАНА ЛІТЕРАТУРА**

1. Беккер Г. С. Человеческое поведение: экономический подход. Избранные труды по экономической теории. – М.: ГУ ВШЭ, 2003. – 672 с.

2. Дискриминация в сфере труда: теория и практика: Научно-практический сборник. – М., 2008. – 272 с.

3. <https://interfax.com.ua/news/general/341296.html>

4. Equality at work: The continuing challenge. Global Report under the follow-up to the ILO Declaration on Fundamental Principles and Rights at Work // International Labour Conference. 100th Session. International Labour Office. – Geneva, 2011. – 86 p.

5. Український ринок праці: імперативи та можливості змін : колективна монографія / за наук. ред. д.е.н., проф. І.Л. Петрової, к.е.н. В.В. Близнюк ; НАН України, ДУ «Ін-т екон. та прогнозув. НАН України». – Електрон. дані. – К., 2018. – 356 с. – Режим доступу: <http://ief.org.ua/docs/mg/306.pdf>

6. Адамов В.Е. Факторный индексный анализ (Методология и проблемы). Москва: Статистика, 1977. – 200 с.; Капелюшников Р.И. Структура российской рабочей силы: особенности и динамика. – Вопросы экономики. 2006. № 10. – С. 19-40.

7. Шестаков М.А. Структурные изменения в экономике и их влияние на занятость молодежи. Вестник научноисследовательского института труда и социального страхования. 2010. – № 2-3 (3-4). – С. 106-115.

8. Кулицький С. Проблеми розвитку ринку праці в Україні [Електронний ресурс] / С. Кулицький // Україна: події, факти, коментарі. – 2017. – № 21. – С. 56-69. – Режим доступу: <http://nbuviap.gov.ua/images/ukraine/2017/ukr21.pdf>
9. Державна служба статистики України (<http://www.ukrstat.gov.ua>)
10. Державна служба зайнятості України. Офіційний веб-сайт (<http://www.dcz.gov.ua>)
11. Хавинсон М.Ю. Моделирование динамики численности занятых, безработных и экономически неактивного населения в регионе с учетом социальных связей / М.Ю. Хавинсон, 2016. – [Электронный ресурс]: <http://www.vestnik.vsu.ru/pdf/econ/2016/04/2016-04-26.pdf>
12. Курбат В.В. Моделирование миграционных процессов в Республике Беларусь / В.В. Курбат, А.В. Полторабатько, 2015. [Электронный ресурс]: [http://ics.khstu.ru/media/2010/N26\\_03.pdf](http://ics.khstu.ru/media/2010/N26_03.pdf)
13. Неверова Г.П. Применение двухкомпонентной модели к описанию демографической динамики / Г.П. Неверова, 2015. [Электронный ресурс]: <https://moluch.ru/archive/81/14730/>
14. Lotka A.J. Elements of Physical Biology / A.J. Lotka. – 1925.
15. Baigent S. Lotka-Volterra Dynamics - An introduction / S. Baigent, 2017. – [Электронный ресурс]: [http://www.ltcc.ac.uk/media/london-taught-coursecentre/documents/Bio-Mathematics-\(APPLIED\).pdf](http://www.ltcc.ac.uk/media/london-taught-coursecentre/documents/Bio-Mathematics-(APPLIED).pdf)
16. Ревуцкая О.Л. Модель динамики численности двухвозрастной популяции: устойчивость, мультистабильность и хаос / О.Л. Ревуцкая, Г.П. Неверова, М.П. Кулаков, Е.Я. Фросман, 2016. – [Электронный ресурс]: <http://www.mathnet.ru/links/f181809af8a05bbd8f0ffd8f141404db/nd540.pdf>
17. Лібанова Е.М. Людський розвиток регіонів України: аналіз та прогноз / Е.М. Лібанова. – К.: Ін&т демографії та соціальних досліджень НАН України, – 2007. – 328 с.

18. Хавинсон М. Ю. Экономика и естественные науки: горизонт современного диалога (к статье Jean-Philippe Bouchaud «Economics Needs a Scientific Revolution») // Пространственная экономика. – 2012. – № 4. – С. 166-171.

19. Хавинсон М. Ю. Динамика факторов производства в экономике региона: эконофизический подход // Пространственная экономика. – 2014. – № 1 (37). – С. 119-137.

20. Светуньков С.Г. Методы социально-экономического прогнозирования: учебник / С.Г. Светуньков, И.С. Светуньков. – СПб.: Изд-во СПбГУЭФ, 2014. – 103 с.

21. Nyman K. Critical Transitions in Generalised Lotka-Volterra Systems with Random Interaction Strengths and Positive Self-Growth / K. Nyman, 2015. – Электронный ресурс]:

<http://publications.lib.chalmers.se/records/fulltext/221160/221160.pdf>

22. Pescitelli M. Lotka Volterra Predator-Prey Model with a Predating Scavenger / M. Pescitelli, 2017. [Электронный ресурс]:

<https://www.gcsu.edu/sites/files/pageassets/node-808/attachments/pescitelli.pdf>

**Данилюк Ірина Вадимівна, кандидат економічних наук,  
доцент кафедри економічної кібернетики та інформатики**

## **ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ В ПРОЦЕСІ УПРАВЛІННЯ ПІДПРИЄМСТВОМ**

### **1. Управління підприємством як економічна категорія**

Управління підприємством – складна, багатоаспектна економічна категорія, науково-практична значущість якої не викликає сумнівів, еволюціонує, якісно змінюється і розвивається у відповідь на динамізм та ускладнення соціального виробництва, а також ринкових відносин.

Якщо проаналізувати історію розвитку процесів управління підприємством, початок 20-го століття, включно до тридцятих років, характеризується переходом до розвитку консолідації виробничої інфраструктури. Основним принципом того часу – пропозиція стандартного продукту за найнижчою ціною, відповідно, реклама та прибутки підприємству, що його запропонувало. В той час держава фактично не втручалась у справи вільного підприємництва, продукція не мала особливих відмінностей та характеристик, ціна успіху була гарантована досягненням найменшої собівартості одиниці продукції.

У тридцятих роках ринок був перенасичений товарами, споживачі стають більш вимогливими, компанії починають створювати ринок послуг («Дженерал моторе» США). Головними завданнями компаній стають: просування моделей на ринок, організація збуту, вживання різних важелів впливу на споживача.

З орієнтацією на ринок послуг змінилися і завдання управління, акцент був спрямований вже ні на внутрішні, а на зовнішні характеристики. Крім того, нові умови вимагали опанування:

- новими навичками;
- новими підходами до вирішення різних завдань.

Певні галузі, які застосовували складні технології, з метою переорієнтації, вимагали створення лабораторій для наукових досліджень. Це поклало початок для впровадження різних практик нововведень усередині підприємств.

У п'ятдесяті роки починає змінюватися структура та динаміка підприємництва, які мають такі складові:

- інфляція;
- вплив обмежень зі сторони держави;
- вторгнення іноземних конкурентів;
- зміни у технології виробництва;
- зміни трудової моралі;
- незадоволення споживачів.

Минулий досвід не міг бути придатний для подальшого розвитку, оскільки найчастіше ігнорував зміни, що відбувалися у суспільстві в області розвитку технологій. Відбувся перерозподіл соціальних пріоритетів економічного розвитку:

- забруднення навколишнього середовища;
- нестійкість економічної кон'юнктури;
- монополістичне обмеження ринку;
- неповна інформація щодо продукту (послуги) та неякісне обслуговування;
- нахабна реклама;
- маніпуляція поведінкою споживача шляхом спеціально організованого старіння товарів.

Зазначені передумови призвели до виникнення корпоративного управління. Корпоративна система управління – система взаємовідносин та

взаємодії між власниками (власником) підприємства, радою директорів, правлінням, менеджерами всіх рівнів, акціонерами. Функціонування системи визначено установчими документами та спрямоване на виконання певного завдання, забезпечення конкурентоспроможності підприємства в умовах невизначеності, нестабільності зовнішнього середовища, досягнення високої ефективності та інвестиційної привабливості.

Розвиток корпоративних систем управління являє собою ланцюг складних нововведень, зумовлених здебільшого впливом зовнішніх факторів на фінансово-господарську діяльність підприємства, що у свою чергу, вимагає від останнього вчасного сприйняття змін, у певній мірі – мобілізації внутрішніх резервів та застосуванні певних заходів щодо внутрішньої перебудови всередині підприємства з метою пошуку шляхів ефективного існування.

Американським вченим А. Чандлером було проведено дослідження провідних компаній Америки в галузі реорганізації управління шляхом внесення змін у стратегію, структуру, організаційну культуру, поведінку персоналу та завдяки цьому з'явилася нова еволюційна теорія управління. Згодом ця теорія отримала назву еволюційної концепції та знайшла свій розвиток у працях таких вчених, як І. Ансофф, П. Дракер, Б. Карлофф, Р. Нильсон, К. Тохиро, Д. Пирс, Л. Якокка та інші, суть якої у наступному: на кожному етапі зміни стратегії підприємства повинен бути присутніми фактори успіху, які адекватні рівню зовнішньої нестабільності [49]. На думку П. Друккера, еволюційна теорія у найближчі 30 – 50 років буде визначати шляхи розвитку економічної теорії та практики, допомагаючи здійснювати необхідний перехід від статистичних методів до динамічних [17, 18]. Перехід до динамічних методів підтверджується науковцем І. Ансоффом: «Чим складніше та не відоміше стає майбутнє, тим частіше відбуваються зміни у стандартній системі управління, причому кожна наступна система доповнює попередню. Системи, що змінювали одна одну були більше орієнтовані на черговий

зростаючий рівень нестабільності, і в особливості, на все більшу незвичність і все меншу передбачуваність майбутнього».

Підприємства середини сімдесятих років двадцятого століття стикнулися з проблемами, пов'язаними з нестачею ринків збуту, сировини, виникненням ТНК. При таких умовах могли вижити лише ті, що вміють швидко з орієнтуватися у таких умовах. 70 – 80 роки супроводжуються інтенсивним пошуком взаємозв'язків та різними формами управління на підприємствах. Отже, усунення невизначеності – було основним тезисом в той час та основним фактором успіху, і поступовим переходом від корпоративного управління до стратегічного. Крім того, необхідно зазначити, що еволюційний розвиток управління здійснювався в умовах застосування ТНК нових підходів в управлінні, які залежали від впливу зовнішніх факторів на фінансово-господарську діяльність.

У шістдесяті роки минулого століття розробки в галузі менеджменту здійснювалися за такими напрямками:

- класичний;
- людські взаємовідносини;
- поведінкові науки;
- кількісний підхід;
- процесний підхід;
- системний підхід.

Таку різноспрямованість можна було пояснити активним формуванням підприємницьких різнопланових структур. Кожний підхід мав свій специфічний інструментарій, що використовувався для розв'язання завдань управління, які формувалися суспільством в різні періоди становлення останнього.

Якщо проаналізувати динаміку розвитку та становлення компаній можна виділити п'ять основних організаційних форм з притаманними для них характеристиками:

- функціональна (виробнича реакція);
- дивізійна (конкурентна реакція);
- матриця проектів (інноваційна реакція);
- багатонаціональна (міжнародна) матрична структура (стратегічна реакція);
- множинна структура (реакція на різні вимоги можливих стратегічних зон господарювання).

В останні роки багато підприємств різних країн здійснили внутрішню перебудову у великих масштабах з використанням різних важелів впливу, відповідно, значно отримав розвиток корпоративний менеджмент у країнах з ринковою економікою і надалі компанії продовжують свій розвиток на відміну від вітчизняних підприємств.

Взагалі, управління підприємством – багатоаспектна економічна категорія, науково-практична значимість якої не викликає сумнівів, еволюціонує, змінюється, розвивається у відповідь на динамізм і ускладнення суспільного виробництва та ринкових відносин.

Як бачимо, разом з поняттям «управління» доволі широко вживають поняття «менеджмент». Одні науковці ототожнюють ці поняття у своїх працях (І.М. Герчикова, Б.З. Зельдович [24, с. 9], Р.Б. Казначевська, І.М. Чуєв, О.В. Матросова [30, с. 21], З.П. Румянцева, М.А. Саломатін, Р.З. Акбердін та ін. [50, с. 130]), інші ж пропонують розмежовувати ці поняття (А.С. Большаков, З.І. Михайлов, О.М. Модюк, Л.В. Горьканова, О.С. Янгічер) [50, с. 130].

В таблиці 1.1 подано порівняльну характеристику визначень понять «управління» та «менеджмент».



Таблиця 1.1

Порівняльна характеристика понять «управління» та «менеджмент» [50, с. 131]

Визначення	Характеристика
Управління – це процес розподілу й руху ресурсів в організації з наперед заданою метою, за наперед розробленим планом і з безперервним контролем за результатами діяльності	Цілеспрямований, планомірний і контрольований процес руху ресурсів на підприємстві
Менеджмент – сукупність методів, принципів, засобів і форм управління організаціями з метою підвищення ефективності їх діяльності	Науково - практичний інструментарій управління підприємством, що забезпечує ефективність його діяльності
Управління – свідомо, цілеспрямована дія з боку держави, економічний суб'єктів на людей і економічні об'єкти, здійснювана з метою спрямувати їхні дії в потрібне русло й отримати бажані результати	Усвідомлена, цілеспрямована дія суб'єкта управління на об'єкт
Менеджмент – раціональне управління сучасним виробництвом, тісно пов'язане з поліпшенням організації на основі постійного впровадження нових принципів, форм, структур і методів управління з метою підвищення ефективності виробництва, бізнесу. Основна мета менеджменту – досягнення високої ефективності виробництва, кращого використання ресурсного потенціалу підприємства	Раціональне управління, що спирається на управлінські інновації щодо відповідних принципів, форм, структур і методів, націлене на досягнення високої ефективності виробництва
Управління – елемент, функція організаційних систем, що забезпечує збереження певної структури, збереження підтримки режиму діяльності, реалізація програми, цілей діяльності. Управління складається з двох основних компонентів: уміння організовувати, включаючи здатність делегувати повноваження і підприємницької інтуїції	Функція (вид діяльності) у межах підприємства, що забезпечує цілеспрямованість, стійкість і стабільність його функціонування
Менеджмент – сукупність принципів. Методів, засобів і форм управління підприємством в умовах ринкових відносин. Мета менеджменту – підвищення ефективності виробництва й збільшення прибутку	Науково-практичний інструментарій управління як виду діяльності підприємства, що сприяє підвищенню ефективності виробництва в умовах ринкової економіки

<p>Менеджмент – це самостійний вид професій здійснюваної діяльності, спрямованої на досягнення в ході будь-якої господарської діяльності фірми, що діє в ринкових умовах, певної поставленої мети шляхом раціонального використання матеріальних і трудових ресурсів із застосуванням принципів, функцій та методів економічного механізму менеджменту</p>	<p>Вид професійної діяльності в межах господарюючого суб'єкта ринкової економіки, націлений на ефективність його діяльності</p>
<p>Управління – усвідомлена, цілеспрямована дія суб'єктів (економічних, соціальних, політичних та інших відносин) на окремих людей, трудові колективи й більш широкі спільноти, а також на економічні об'єкти з метою досягнення цими суб'єктами цілей і забезпечення стабільності та динамічності розвитку керованого об'єкта [19]</p>	<p>Усвідомлена, цілеспрямована, інформаційна дія суб'єктів управління на економічні об'єкти, що забезпечує досягнення цілей, стабільність і динамічність розвитку керованого об'єкта. Сукупність функцій управління, необхідних для досягнення поставлених цілей</p>
<p>Менеджмент – наука про управління сучасним підприємством, основним змістом якої є комплекс наукових принципів, методів стимулювання й організаційних важелів дії на поведінку людей, використання різноманітних ресурсів з метою досягнення тактичних і стратегічних цілей організації [19]</p>	<p>Наука про управління, що визначає науково – методичний інструментарій управлінської діяльності</p>
<p>Управління – це процес організації, мотивації й контролю, необхідний для формулювання та досягнення цілей організації</p>	<p>Процес реалізації функції управління підприємством</p>
<p>Менеджмент – наука про управління, особливий вид діяльності, змістом якої є цілеспрямована дія на працівників, на управління й координацію операцій фірми в умовах ринку для досягнення цілей, поставлених перед підприємством</p>	<p>Наука про управління. Вид діяльності, який передбачає цілеспрямовану дію на об'єкти управління підприємства, що функціонує в ринкових умовах</p>
<p>Менеджмент – це професійно здійснюване управління будь-якою господарською діяльністю підприємства в ринкових умовах, спрямоване на отримання прибутку шляхом раціонального використання ресурсів [24, с. 14]</p>	<p>Вид професійної діяльності в межах суб'єкта підприємництва, націлений на ефективність його діяльності</p>

Управління – процес переведення керованої системи в наперед заданий стан за допомогою інформаційної дії, що спрямовується від керуючої системи [30, с. 10]	Трансформаційний процес об'єкта управління внаслідок цілеспрямованої інформаційної дії на нього суб'єкта управління
--	---

Досліджуючи розвиток підприємницького стилю управління необхідно враховувати соціальні аспекти.

Сьогодні відбувається посилення міжнародного характеру управління через перехід від міжнаціонального до глобального менеджменту. З'явилися такі категорії як глобальний ринок, глобальна компанія, глобальна конкуренція, глобальна кооперація. Кооперація, співробітництво компаній, на відміну від конкуренції, стає основою для співробітництва та розвитку.

Сучасна філософія управління характеризується визнанням та практичною реалізацією в системі корпоративного управління концепції «підприємницького менеджменту». Це такий стиль роботи, дій, орієнтований на підтримку конкурентоспроможності фірми за рахунок створення гнучкої системи управління не лише на короткостроковий період, а й в майбутньому.

Виходячи з практики та аналізуючи думку фахівців, можна зробити висновок, що підприємницький підхід до управління дозволяє створити організація, яка має можливість адаптуватися до постійних змін та впливів на останню елементів зовнішнього середовища. Такий підхід дає можливість створити умови для централізації в середині підприємства, створення та розвитку підприємницьких підрозділів, поширенню дивізіональних структур, партисіптивних методів управління, що стимулюють розвиток внутрішнього підприємництва.

В умовах нестабільної економіки була сформульована концепція реінжинірингу бізнесу (реорганізація підприємства), що, у свою чергу, стимулює та спонукає до пошуку нових, найбільш вигідних економічних шляхів у бізнесі. Особливо актуальною ця концепція є в умовах світової кризи.

Посилаючись на американський та японський досвід управління реорганізаціями, можна відмітити поступовий, плавний перехід від старих методів управління до нових, перетворюючи останні у звичайний елемент повсякденної роботи персоналу. Великі перебудови в управлінні здійснюються один раз у п'ять років, більш дрібні – щорічно. Лише 20 % нововведень є життєздатними. Найбільший ефект можна досягти якщо забезпечити досягнення управлінської синергії на основі оптимізації організаційних структур та системи внутрішньо фірмового менеджменту.

Враховуючи специфіку промислових підприємств, зрозуміло, що реорганізація внутрішньо фірмового управління не може містити стандартні процедури (уніфікований підхід). Повинен здійснюватися диференційований підхід до визначення напрямів і моделей структурних перетворень. Отже, має бути застосований комплексний підхід до радикальних структурних змін якісного характеру в самій управлінській системі в тісній інтеграції зі сучасними інформаційними технологіями. У зв'язку з цим, зростає роль формалізованих бізнес – процесів та інструментальних систем моделювання бізнес – процесів, як засобів удосконалення системи управління підприємством. Власне, на цій основі можна здійснити реалізацію єдності дій всіх ланок і процесів управління у зовнішній та внутрішній політиці підприємства.

## **2. Аналіз та дослідження методів моделювання бізнес – процесів**

Існує велика кількість формалізованих моделей бізнес – процесів. Розглянемо основні. IDEF0, в якості стандарту, був розроблений у 1982 році під час масової автоматизації промислових підприємств та мала початкову назву ICAM (Integrated Computer Aided Manufacturing) і була запропонована департаментом Військово – Повітряних Сил США. Крім функцій для опису бізнес – процесів, однією з вимог до цього стандарту було наявність системи взаємодії «аналітик – спеціаліст». Новий метод повинен був забезпечити групову співпрацю всіх аналітиків та спеціалістів, що задіяні у розробці моделі.

Методологія функціонального моделювання та графічні нотації призначені для формалізації та опису бізнес – процесів. Особливістю IDEF0 є наявність підпорядкованості об'єктів та логічний зв'язок між різними виконаними роботами, а не їх тимчасова послідовність (WorkFlow). Основними елементами діаграми є блоки робіт (підпроцесів), що мають зв'язок за допомогою стрілок (матеріальні та інформаційні потоки). Блоки робіт відображені діаграмами. Зліва – вхід, зверху – управління, знизу – ресурс, справа – вихід.

На відміну від IDEF0, IDEF3 – моделювання діяльності у вигляді послідовних подій (WorkFlow). IDEF3 використовує такі типи об'єктів: робота (Unit of Work, Activity), стрілка (Arrow), коннектор (Junction), контрольний об'єкт (Referent). В IDEF3 розрізняють три типи стрілок, що відображують зв'язок: головна – суцільна лінія, що об'єднує одиниці робіт (UOW), її малюють зліва - направо або зверху – вниз. Вона показує на те, що робота – джерело повинна закінчитися швидше ніж має розпочатися робота – мета. Відносини відображує штрихова лінія, яка показує зв'язок між одиницями робіт (UOW).

Що стосується потоків об'єктів - це стрілка з двома наконечниками, яка свідчить про застосування об'єкту в двох і більше одиницях роботи.

Діаграми роботи даних (Data Flow Diagram) використовують для документування механізмів передачі та обробки матеріальних потоків й інформації в системі, що моделюють. Діаграми DFD переважно будують для відображення поточної роботи системи документообігу організації. Найбільше їх застосовують в якості доповнення моделі бізнес – процесів, що виконана в IDEF0 – форматі. Хоча DFD діаграми можуть також використовуватися як самостійний засіб моделювання бізнес – процесів.

DFD використовує чотири основні елементи: прямокутники робіт (функції/процеси, що обробляють та змінюють інформацію); стрілки між роботами (інформаційні потоки); зовнішні посилання (інформаційні потоки); сховища даних (може бути надано кілька копій одного і того ж сховища даних

на діаграмі). Розрізняють нотації Йодан (Yurdona) і Гейна – Сарсона (Gane – Sarson), в яких по різному представлені окремі елементи.

SADT (Structural Analysis and Design Technique) – методологія структурного аналізу та проектування, що інтегрує процес моделювання, управління конфігурацією проекту, використовує додаткові мовні засоби, а також керівництво проектом за допомогою графіків. Процес моделювання може бути поділений на декілька етапів:

- опитування експертів;
- створення діаграм та моделей;
- розповсюдження документації;
- оцінка адекватності моделей та прийняття рішення щодо

подальшого їх застосування.

Зазначений процес добре налагоджений, кожен фахівець виконує свої обов'язки, інформація до спеціалістів поступає у короткий термін. На початок 70 – х років методологія SADT була реалізована у вигляді чіткої формальної процедури, в ході реалізації SADT – аналітики використовували бланки діаграм та титульні аркуші. Унікальний та ефективний метод кодування зв'язків між композиціями з використанням ICOM – кодів, а також спосіб організації рецензування за допомогою автор/читач, суттєво спрощують паперову реалізацію. Завдяки цьому SADT має значні переваги перед іншими методами структурного аналізу. Подальший розвиток методологія отримала у вигляді нотації IDEF0.

eEPC (extended Event Driven Process chain) – опис ланцюжка процесу, керуемого подіями. Нотація була розроблена спеціалістами компанії IDS Prof. Scheer GmbH. Нотація відноситься до класу WorkFlow та призначена для опису діяльності в динаміці (як і нотація IDEF3).

Додаткові елементи синтаксису дозволяють з'ясувати деталі кожної функції. Пов'язуючи послідовно функції та події (або за допомогою операторів), вибудовується повний опис логічної послідовності процесу та його оточення.

Основними об'єктами нотації eEPC є:

- функції опису діяльності (процедур, робіт) підрозділів та співробітників підприємства. Кожна функція має бути ініційована певною подією та завершуватися подією; вона відображається лише однією стрілкою, що «запускає» виконання функції та виходити не більше однієї стрілки, яка свідчить про завершення виконання функції;

- події відображують реальні події;
- організаційна одиниця;
- документацію відображують реальні носії інформації;
- кластер інформації;
- зв'язок між об'єктами описує вид відносин між останніми.

До основних переваг нотації eEPC можна віднести: гнучкість (за рахунок можливості додавання власних елементів); наявність в нотації елементів логіки (дозволяє будувати схеми за умовами); простота елементів; не складна у навчанні.

Недоліками нотацій eEPC та IDEF3 є відсутність засобів опису керуючих впливів, зворотних зв'язків з управління та інформації, які можна усунути застосовуючи методи моделювання.

UML (Unified Modeling Language – уніфікована мова моделювання) – мова графічного опису об'єктного моделювання та невід'ємна частина процесу розробки програмного забезпечення. UML є мовою широкого застосування, відкритий стандарт, який містить графічні зображення для створення абстрактної моделі системи. UML була створена з метою визначення, візуалізації, проектування та документування програмних систем. Всі конструкції мови представлені трьома великими пакетами (packages): утворюючий (Foundation), поведінковий (Behavioral Elements) та основні механізми (General Mechanisms). У перший пакет входять: ядро (Core), механізм розширення (Extension Mechanisms) та типи даних (Data Types). Ядро – формальний опис всіх конструкцій мови (за винятком даних, що використовуються для запису атрибутів та які доповнюють графічні елементи

мови), а також три механізми розширення мови новою семантикою (Constraints, Stereotypes. TaggedValues). Суть основних механізмів полягає у визначенні таких понять:

- пакет (package);
- підсистема (subsystem);
- модель (model) та яким вони підпорядковуються.

Поведінковий пакет містить діаграми декількох видів:

- послідовності дій (use case diagram);
- класів (class diagram);
- поведінки (behavior diagram);
- реалізації (implementation diagram).

Перший тип діаграм описує послідовність взаємовідносин та залежностей між особами, що приймають участь у процесі. Вони слугують для упорядкування взаємовідносин з майбутніми користувачами системи та необхідні для визначення характеристик останньої. До другого виду діаграм належать системи, які повинні працювати, не акцентуючи уваги на методи. Діаграми станів і діаграми послідовності дій конкретизують поведінку окремих компонентів системи та учасників процесів. Діаграми класів описують архітектуру класів модельованої системи, їх дослідження, види комбінацій. UML доволі часто піддається критиці за складність та велику кількість невикористаних діаграм. Крім того має не точну семантику, що негативно відбивається на користувачах у зв'язку зі складним трактуванням наявних специфікацій.

Нотація моделювання бізнес – процесів (Business Process Modeling Notation, BPMN) – графічна нотація для моделювання бізнес – процесів. BPMN – була розроблена Business Process Management Initiative (BPMI) і підтримується Object Management Group, плоточна версія 2.0 [25]. BPMN підтримує лише концепції, що необхідні для моделювання бізнес – процесів. Незважаючи на те, що BPMN дозволяє моделювати потоки даних та потоки повідомлень, поєднувати інформацію з діями, вона не є схемою інформаційних



потоків. Моделювання здійснюється за допомогою діаграм у поєднанні з невеликою кількістю графічних елементів. Існує чотири категорії елементів:

- об'єкти потоку управління (події, дії та логічні оператори);
- з'єднувальні об'єкти (потік управління, потік повідомлень, асоціації);
- роли (пули та доріжки);
- артефакти (данні, групи та текстові анотації) [11].

Базова область застосування BPMN версія 2.0 при розробці процесно-орієнтованих систем, для яких пріоритет має система, людина ж виконує вторинну функцію. Правильно побудовані моделі BPMN 2.0 є фактично виконуваними, процес в них описаний до рівня елементарних дій. Що стосується недоліків – важкість сприйняття, оскільки схеми занадто деталізовані.

Основою ІТ сервісу є орієнтована архітектура (SOA, service – oriented architecture), що представляє модульний підхід до розробки програмного забезпечення та використовує сервіси (служби) зі стандартними інтерфейсами. SOA містить принципи багатократного використання функціональних елементів інформаційних технологій, ліквідації дублювання функціональності в програмному забезпеченні, уніфікації типових операційних процесів, забезпеченні переведення операційної моделі компанії на централізовані процеси та функціональну організацію. Компоненти програми можуть бути розподілені у різних вузлах мережі та мають незалежні, взаємозамінні сервіси – додатки. Програмні комплекси, що розроблені відповідно до SOA, можуть бути реалізовані як веб – сервіси, що інтегровані за допомогою стандартних протоколів SOAP. SOAP – це протокол обміну структурованими повідомленнями у розподіленому обчислювальному середовищі. SOAP може бути використано з будь-яким протоколом прикладного рівня: SMTP, FTP, HTTP.

Інтерфейс компонентів SOA – програми надає інкапсуляцію деталей реалізації окремих компонентів. SOA являє собою гнучкий спосіб комбінування

та багаторазового використання компонентів з метою формування складних розподілених програмних комплексів.

Сервісно-орієнтована архітектура складається з трьох елементів: постачальник сервісу, споживач сервісу, реєстр (рис. 2.1).

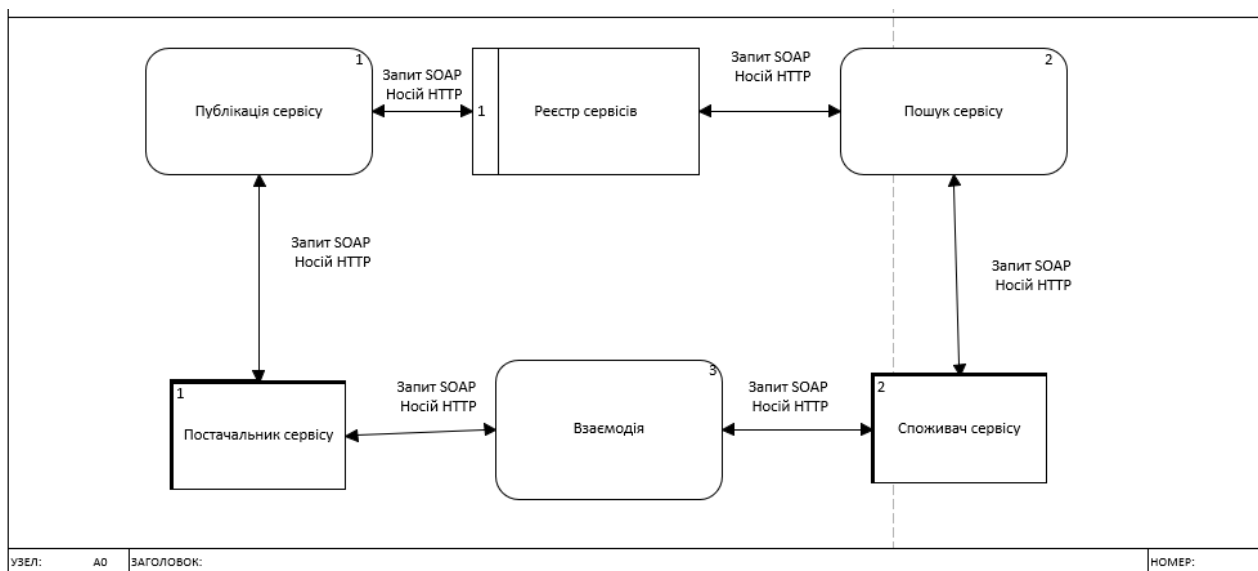


Рис. 2.1. Загальна схема сервісно-орієнтованої архітектури

Для того щоб сервіс був доступним, постачальник сервісу реєструє в реєстрі і тоді споживач через запит до реєстру може працювати з такою програмою. Як правило, запити – це XML документи. SOA дозволяє збільшувати кількість сервісів, проводити їх модернізацію. Принципи SOA були сформовані ще до появи Web – сервісів. Але, на сьогодні, Web – сервіси – це одна з технологій, що підтримують SOA. Цьому сприяють відкриті стандарти, що містять опис XML та Web – сервісів і дають можливість застосовувати SOA до будь-яких технологій, додатків, якими користуються компанії. Web – сервіси з відкритими протоколами: HTTP, XML, UDDL, WSDL та SOAP – забезпечують реалізацію основних вимог SOA (встановлення, пошук, запит сервісу (UDDL, WSDL та SOAP), використання незалежно від платформи інтерфейсу (XML). HTTP забезпечує функціональну сумісність.

В таблиці 2.1. зазначені переваги від застосування SOA на підприємстві.

## Переваги застосування SOA

Стратегічні	Тактичні
<ul style="list-style-type: none"> <li>- суттєве скорочення часу реалізації проектів;</li> <li>- підвищення продуктивності;</li> <li>- швидка та маловартісна інтеграція додатків, інтеграція B2B</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- спрощення розробки та впровадження програм;</li> <li>- використання поточних інвестицій;</li> <li>- зменшення ризику, що пов'язаний з реалізацією проектів з автоматизації послуг та процесів;</li> <li>- можливість постійного покращення послуги, що надається;</li> <li>- скорочення кількості запитів з технічної підтримки;</li> <li>- підвищення показників повернення інвестицій (ROI)</li> </ul>

Проведений аналіз застосування та використання формалізованих моделей бізнес – процесів дозволив сформувавши класифікацію моделей за двома параметрами:

- аналіз моделювання складних структурованих бізнес – процесів;
- автоматизація бізнес процесів.

Аналіз діаграм дозволив зробити висновок щодо переваг формалізованих моделей (IDEF0, eEPC, IDEF3) у вирішенні завдань з моделювання об'єктно-структурованих бізнес – процесів та переваги формалізованих моделей (UML, workflow, SOA) при розв'язанні завдань, пов'язаних з автоматизацією бізнес – процесів. Побудова інтегральної моделі бізнес – процесів в нотації IDEF0, IDEF3, DFD – дозволяє отримати не лише якісну модель, а й розв'язати ряд завдань з автоматизації бізнес – процесів.

Аналізуючи історію розвитку та управління бізнес – процесами, можна виокремити три напрямки:

- автоматизація стандартів з групової роботи над великими проектами;
- автоматизація управління бізнес – процесами;

- розвиток мережевих технологій.

У кінці 60 – х років двадцятого століття прогрес у галузі структурного програмування привів до необхідності інтеграції ресурсів на основі формалізованого підходу при створенні великомасштабних систем. Дослідження в цьому напрямку призвели до створення SADT, що є основою сучасних бізнес – процесів. Оскільки SADT та нотації IDEF були закріплені національними стандартами та успішно застосовувались у багатьох проектах, розповсюдженість IDEF при структурному аналізі досить висока.

Наступним потужним досягненням у цій галузі є стандартизація UML у 1996 році, методологія раціонального проектування та засоби якої дозволили використовувати додатки на базі об'єктно-орієнтованого підходу. Зазначена методологія суттєво усунула розбіжності у поглядах на бізнес як зі сторони учасників процесу так і зі сторони проектувальників. UML – орієнтована на розробку об'єктних додатків для бізнесу, що стосується SADT, вона орієнтована на структурну організацію проектів у цілому.

В управлінні організацією відбулась переорієнтація на концепцію «управління якістю» у зв'язку з перенасиченням ринку збуту, глобальною міжнародною конкуренцією. Отже, процесний підхід до управління доволі впевнено себе зарекомендував і залишається одним з найкращих. Цьому сприяли ще ряд факторів, зокрема: особливістю цього класу є тотальне документування процесів організації та наявність сховища готових рішень (шаблонів управління).

З точки зору бізнесу, розвиток мережевих технологій дозволяє зменшити ризик втрати інформації між споживачами останньої. Розвиток інформаційних технологій призвело до поступової переорієнтації від взаємодії людей до взаємодії систем. Це також стосується великих компаній, де відбулося застосування складних розподілених систем (переважно класу WorkFlow). Економічний ефект від застосування таких систем підштовхує до розвитку сервіс – орієнтованої архітектури (SOA) та впровадження останніх на малих

підприємствах. Передовою технологією у цьому напрямку є BPM execution (пряме виконання системою алгоритму бізнес – процесу. Якщо додаток в основі містить BPM execution, тоді для зміни автоматизованого бізнес – процесу буде достатньо оновити алгоритм процесу.

Що стосується Європейського ринку інструментальних систем моделювання бізнес – процесів полягає в тому, що основна увага приділяється аналізу (65 %) та опису (57 %) бізнес – процесів.

Інтерес до бізнес – аналітики (Business Intelligence) пов'язаний також з процесом удосконалення бізнес – процесів, оскільки ВІ як раз і забезпечує якість процесної оптимізації. Business Intelligence – це методи збору і обробки інформації, оцінка ризиків, моделювання і прогнозування за допомогою інформаційних та телекомунікаційних технологій [7].

З метою підвищення гнучкості корпоративних інформаційних систем та швидкості реагування на вимоги бізнесу більшість компаній починають застосовувати сервісно-орієнтовну архітектуру. Інвестування у сервісно-орієнтовну архітектуру займає четверту позицію у пріоритетах компаній (38 %).

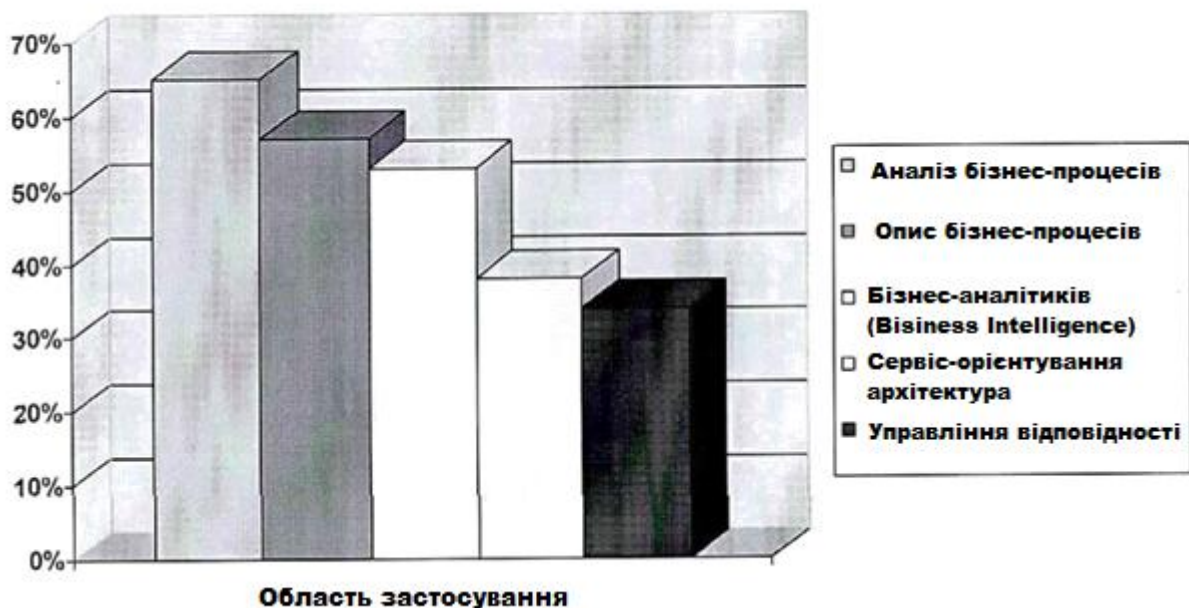


Рис. 2.2. Інвестування в інструментальні системи за три останні роки [84]

Інтерес до управління якістю (сертифікації, вимог) пов'язаний з необхідністю міжнародної співпраці та відповідності законодавству різних країн. Доволі жорсткі вимоги щодо дотримання законодавства містить документ Sarbanes – Oxley (SOX). Однак, і інші нормативні документи та стандарти також висувають перелік численних обмежень, зокрема: Basel II, Solvency II, Європейський акт 8th EU directive (euro – SOX), GwG, KonTraG, MaRisk, Corporate, Governance, ISO Standards. Вимоги стосуються корпоративного управління та управління бізнес – процесами. В результаті тема управління зовнішнім вимогам перетворилась у затребувану на ринку послуг (Compliance Management), що заснована на процесному підході.

Результати застосування процесного підходу в управлінні свідчать про те, що лише 10 % компаній не отримали позитивного результату від застосування процесного підходу. Більше 40 % підтвердили власне задоволення від впровадження процесного управління. Більшість компаній переконані у значних перевагах при використанні в управлінні інструментальних систем модулювання бізнес – процесів (рис. 2.3).

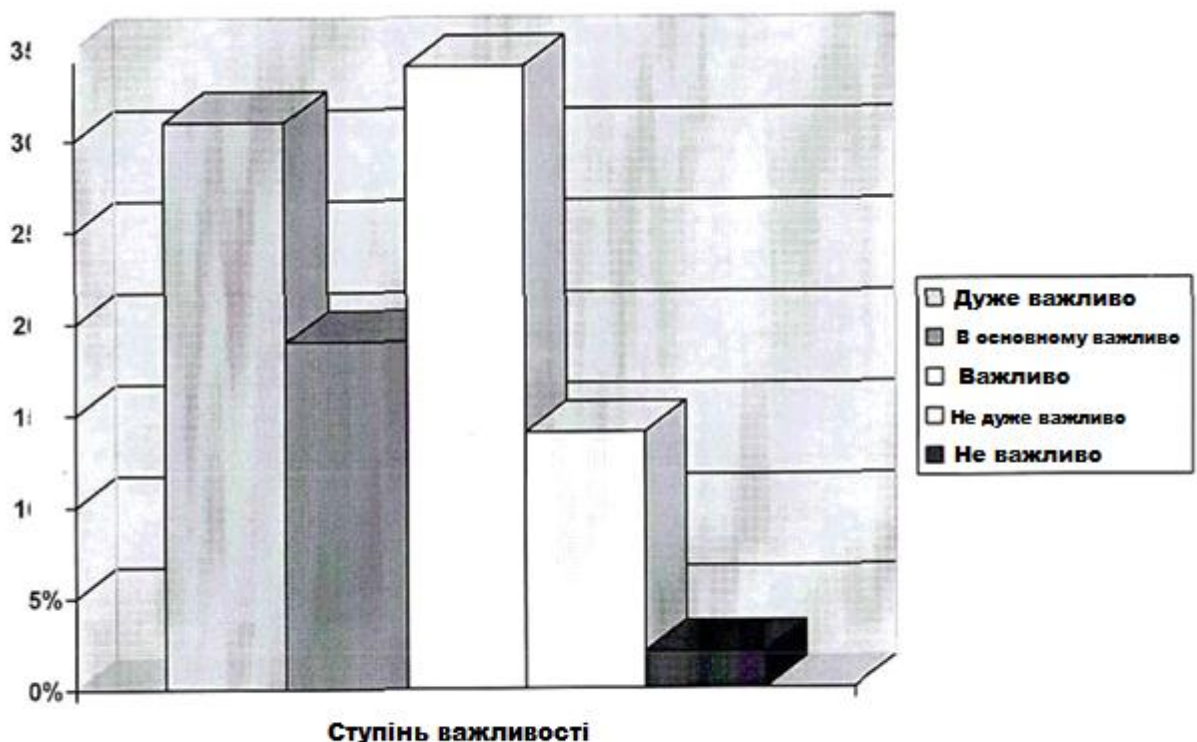


Рис. 2.3. Значимість інструментів для управління процесами [44]

Незважаючи на те, що за даними опитування, 23 % компаній не застосовують впровадження бізнес – процесів, позитивна динаміка є – 42 %.

Для більшості компаній основною метою використання бізнес – процесів – це впровадження інформаційних систем (77 %) (рис. 2.3).

Друге місце по застосуванню бізнес – процесів на підприємстві – це регламентація діяльності (73 %). 65 % робіт пов’язане з умовами (показниками) вдосконалення самих бізнес – процесів, що свідчить про прояв зацікавленості до процесного управління.

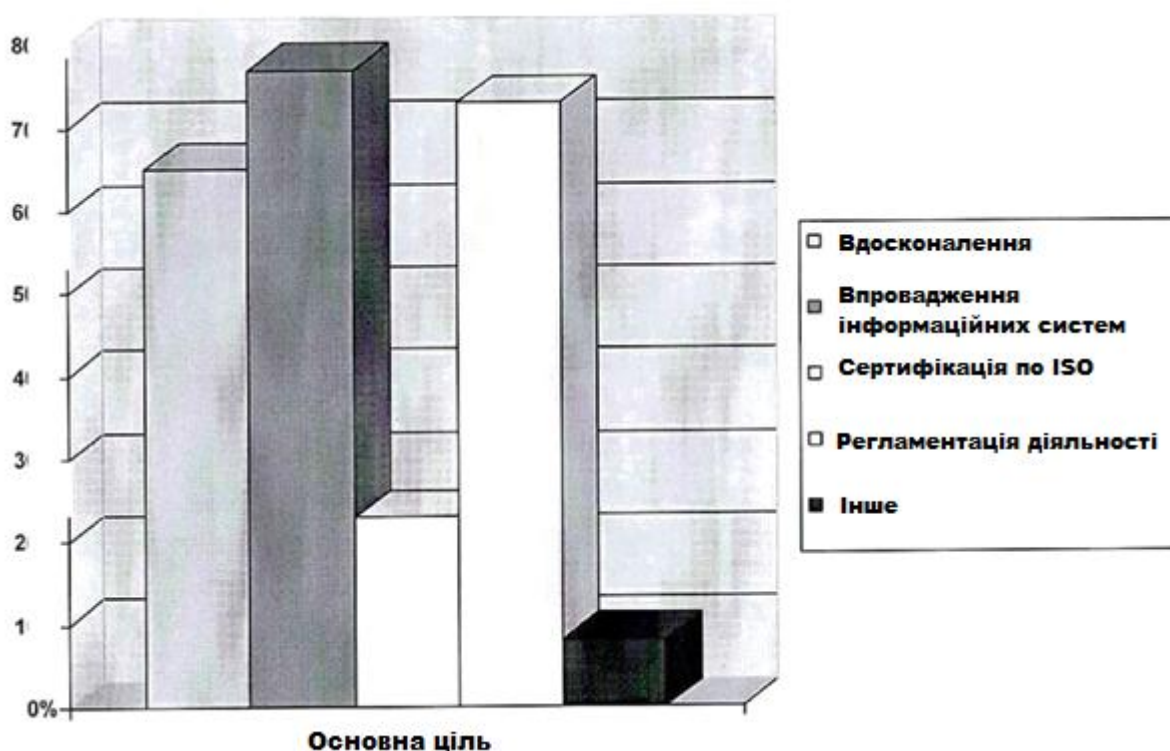


Рис. 2.4. Основна мета застосування бізнес – процесів [44]

Відносно низький відсоток моделювання бізнес – процесів з метою проведення сертифікації за стандартами ISO. Пояснення цьому - формальний підхід до впровадження системи менеджменту якості (СМЯ). Отже, все частіше моделі процесів системи менеджменту з якості та сертифікації за ISO, що створені на підприємствах, далекі від реальності. Останнім часом більше можна спостерігати за неформальним підходом до СМЯ та вдосконаленням останніх.

Найбільше застосування для опису бізнес – процесів отримала програма MS Visio. Крім того, також до масового використання, належать програми: MS Office – Word, Excel, Power Point (рис. 2.5).

В процесі моделювання бізнес – процесів важливим є дотримання єдиної методології, зокрема основ моделювання, нотацій, зв'язків. Без дотримання таких норм кожен фахівець буде вибудовувати свої моделі, що, відповідно може завадити подальшому їх впровадженню.

В процесі моделювання бізнес – процесів важливим є дотримання єдиної методології, зокрема основ моделювання, нотацій, зв'язків. Без дотримання таких норм кожен фахівець буде вибудовувати свої моделі, що, відповідно може завадити подальшому їх впровадженню.

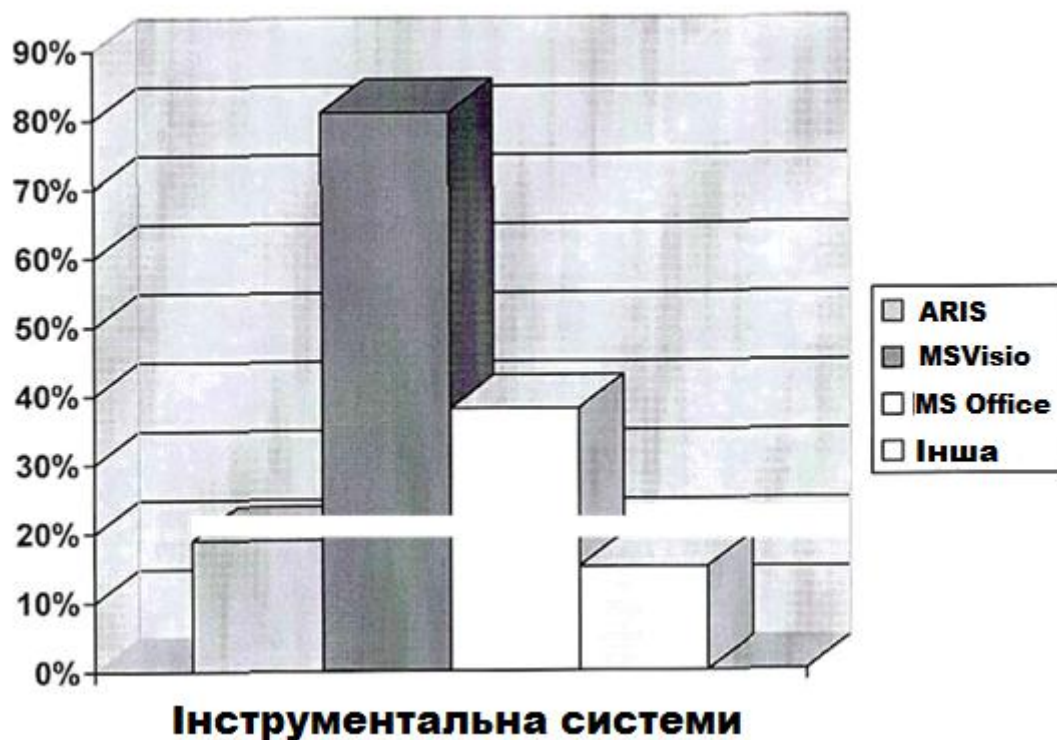


Рис. 2.5. Програми опису бізнес – процесів [44]

За даними дослідження, 54 % компаній не дотримуються стандартної методології побудови бізнес – процесів (рис. 2.6). І все ж такі 46 % компаній її використовують.



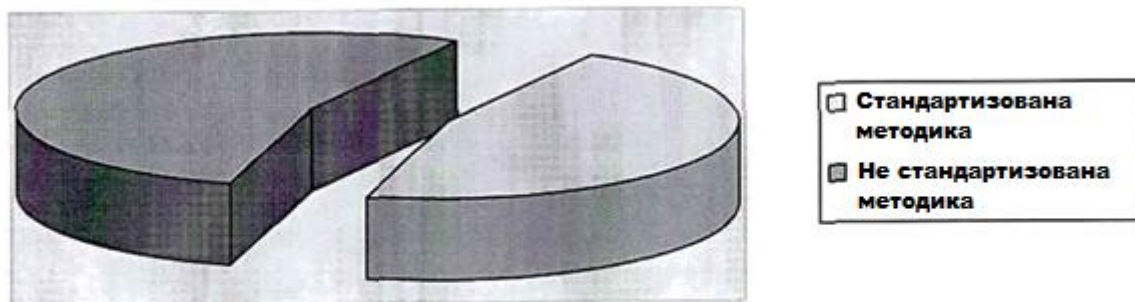


Рис. 2.6. Використання стандартної методики моделювання бізнес–процесів [44]

Останнім часом збільшилась кількість фахівців з підготовки щодо управління бізнес – процесами (рис. 2.7).

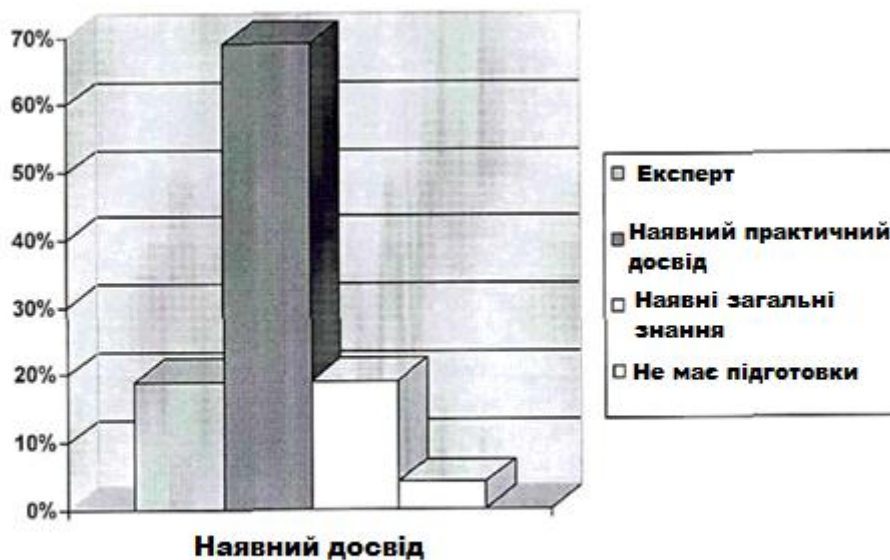


Рис. 2.7. Рівень підготовки фахівців у галузі управління бізнес–процесами [44]

Проведений аналіз, у певній мірі, відображує невідповідність у самооцінці рівня підготовки фахівців та можливостями, якими можна оперувати з різними програмними продуктами. Так, 19 % та 69 % вважають себе за експертів (або мають певний досвід). Одночасно, 81 % опитаних

спеціалістів при моделюванні бізнес – процесів використовують MS Visio, а 38 % - MS Office. Зазначені продукти не пристосовані для моделювання складних структурованих бізнес – процесів, що призводить до не якісної реалізації проектів з впровадження процесного управління.

Отже, питання поєднання різних методів моделювання і процесного підходу до аналізу діяльності підприємства потребує постійного дослідження та розвитку.

### **3. Впровадження CASE – технологій в систему управління підприємством**

В умовах нестабільної економіки проблеми вдосконалення системи управління підприємством набуває особливого значення з метою підвищення конкурентних переваг. Ринок постійно потребує розширення управлінських завдань, вдосконалення наявних та розроблення нових прийомів/методів управління. Для вирішення багатьох завдань застосовують спеціальні інформаційні технології, відомі як CASE – технології, які дозволяють детально проаналізувати всі зв'язки в системі, розробити моделі вирішення проблем, використати ці моделі для прийняття конкретних управлінських рішень. Для практичного використання CASE – технологій розроблені різні програмні продукти, кожен з яких охоплює певне коло завдань, тому засоби останніх об'єднують в комплекси та видають разом.

Комп'ютерні моделі є не просто діаграмами, вони передбачають подальше використання для відтворення динаміки роботи системи, для створення систем керування, розробки баз даних та ін. SADT – моделі дають відповіді на запитання: як функціонує система, які процеси проходять у системі, як покращити роботу системи.

Функціональна модель системи будується на основі функціональної діаграми. Крім чисто функціональних діаграм IDEF0 ця модель може включати діаграми DFD та IDEF3.

Функціональна модель має певний недолік, зокрема, вона залежить від попередньої історії розвитку бізнес – процесу. Модель процесу можна

конкретизувати, якщо ввести поняття стану  $q$  процесу  $P$ . Під станом  $q$  процесу  $P$  будемо розуміти завершальний етап обробки вхідних даних та формування вихідних. Для простоти можна вважати, що стан може змінюватися у дискретні моменти часу, що розділені рівними проміжками  $t_1, t_2, \dots, t_i, \dots$ , а кількість станів  $n \in \mathbb{N}$  для кожного процесу буде виглядати таким чином:

$$q_i^p \in Q^p; Q^p = \{q_i^p \mid i = \overline{1, n}\}, \quad (3.1)$$

Розуміння поняття стану процесу можна охарактеризувати наступним твердженням: вихідні дані в даний момент часу однозначно визначаються вхідними даними та станом системи у даний момент часу; стан системи у наступний момент часу визначається вхідними даними та станом на даний момент часу.

Інтуїцію та розуміння стану системи, в даному випадку, можна вважати одним з етапів роботи. В основі самого поняття бізнес – процесів є перетворення входів у виходи. Введення поняття стану у формалізовану модель дозволяє моделювати ситуацію.

Автором пропонується модифікована модель автомату, особливістю якого є наявність структурованого входу, що відповідає структурі входів бізнес – процесу.

Формалізована модель процесу може бути представлена:

$$P = \{I, C, M, Q^p, \mu, \lambda\}, \text{ де} \quad (3.2)$$

$I = \{(i_1, i_2, \dots, i_{kj}) \mid j = 1, \dots, K_i\}$  – множина входів;

$C = \{(c_1, c_2, \dots, c_{kj}) \mid j = 1, \dots, K_c\}$  – множина управлінь;

$M = \{(m_1, m_2, \dots, m_{kj}) \mid j = 1, \dots, K_m\}$  – множина ресурсів;

$I \times C \times M$ , де  $I \times C \times M = \{(i, c, m) \mid i \in I, c \in C, m \in M\}$  – множина передумов;

$Y = \{(y_1, y_2, \dots, y_{kj}) \mid j = \overline{1, K_y}\}$  – множина виходів;

$Q^p$  – множина станів процесу  $P$ ;

$\mu$  – функція переходів;

$\mu : I \times C \times M \times Q^p \longrightarrow Q^p$ ;

$\lambda : I \times C \times M \times Q^p \longrightarrow Y$ .

Елементи множин  $(i_1, i_2, \dots, i_{kj})$ ,  $(c_1, c_2, \dots, c_{kj})$ ,  $(m_1, m_2, \dots, m_{kj})$  – структури елементів, що мають значення як для процесу, так і для оточення (постачальники та споживачі процесу).

Необхідно відмітити, що потужність алфавіту компонентів структурного входу для реальних бізнес - процесів переважно менше формальної оцінки  $N = M^t$ , де  $M$  – різні дані на вході, а  $T$  – кількість входів, оскільки окремі зв'язки процесу складаються з елементів, а тому, не можуть мати довільні величини. Ця особливість дає можливість спростити складність автомату, що відповідає бізнес – процесу та дозволяє уникнути помилок.

Дія функцій  $\mu$  та  $\lambda$  визначається такими співвідношеннями:

$$q_{t+1} = \mu((i_t \times c_t \times m_t), q_t) \quad (3.3)$$

$$y_t = \lambda((i_t \times c_t \times m_t), q_t) \quad (3.4)$$

В результаті отримуємо модель кінцевого автомату. Ця теорія є ефективним інструментом дослідження властивостей бізнес – процесів, оскільки дозволяє конструктивно подати функціонування процесу до моменту його деталізації.

Автоматні функції бізнес – процесів можуть подані у вигляді таблиць, графів або матриці, кожна з них має свої переваги.

Функції  $\mu$  та  $\lambda$ , що визначені рівняннями (3.3; 3.4), можуть бути подані у вигляді таблиці переходів, яка містить перелік значень цих функцій для всіх можливих аргументів (впорядкованих пар  $((i_t \times c_t \times m_t), q_t)$ , де  $(i_t \times c_t \times m_t)$  належить вхідному алфавіту  $I \times C \times M$ , а  $q_t$  – множина станів  $Q^P$ . Отже, елементи вхідної множини  $X = I \times C \times M$  позначимо  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_i\}$ .

Таблиця переходів для автомату з вхідним алфавітом  $X$ , вихідним алфавітом  $Y$  та множиною  $Q^P$  відображено на рисунку 3.1. Вона складається з двох під таблиць  $y_v$  – під таблиця та  $q_{v+1}$  – під таблиці, які визначають значення функцій  $\lambda$  та  $\mu$ .

Пів таблиці мають загальний основний стовпець, в якому подані можливі стани з безлічі станів  $Q^P$ . Кожному можливому значенню вхідного символу в даний момент  $x_v$  відповідає в пів таблиці свій стовпець. Отже, в клітинці, на

перетині строки  $q_j$  та стовпця  $x_r$ , у пів таблиці  $y_v$  розташоване значення  $\lambda((i_t \times c_t \times m_t), q_t)$ , а у пів таблиці  $q_{v+1}$  розміщене значення  $\mu((i_t \times c_t \times m_t), q_t)$ . Символи, що знаходяться у клітинках під таблиць  $y_v$  та  $q_{v+1}$ , належать вихідному алфавіту  $Y$  та множині станів  $Q^P$ . Узагальнюючи, можна стверджувати, що дві під таблиці містять у кожній клітинці один елемент відповідних множин.

		$y_v$				$q_{v+1}$			
$x_v$		$x_1$	$x_2$		$x_l$	$x_1$	$x_2$		$x_l$
$q_v$		У клітинках таблиці значення з множини виходів $Y$ процесу				У клітинках таблиці значення з множини станів $Q^P$ процесу			
$q_1$									
$q_2$									
.....									
$q_n$									

Рис. 3.1. Загальний вигляд таблиці переходів автомату

Опис станів є корисним для інтуїтивного розуміння, а також при визначенні співвідношення вхід – вихід при визначенні функцій  $\lambda$  та  $\mu$ .

В якості прикладу застосування автоматної моделі розглянемо бізнес – процес, що виконує обслуговування запиту.

Автомат P1, що моделює бізнес – процес, може мати два стани:  $q_1$  – обслуговування запиту та  $q_2$  – очікування запиту. На вхід автомату можуть надходити два вхідних сигнали:  $x_1$  – запит,  $x_2$  – відсутність запиту. Автомат на виході може формувати чотири сигнали:  $y_1$  – результат запиту;  $y_2$  – процес вільний;  $y_3$  – запит прийнятий;  $y_4$  – запит відхилено. Початковим станом є стан  $q_2$ .

Таблиця переходів представлена на рисунку 3.2.

		$y_v$		$q_{v+1}$	
$x_v$		$x_1$	$x_2$	$x_1$	$x_2$
$q_v$					
$q_1$		$y_4$	$y_1$	$q_1$	$q_2$
$q_2$		$y_3$	$y_2$	$q_1$	$q_2$

Рис. 3.2. Таблиця переходів автомату P1

Граф переходів являє собою структуру з вершин та дуг, що вказують напрямком від однієї вершини до іншої. Граф переходів описує автомат, який має  $n$  станів, містить  $n$  вершин, кожна з них відповідає одному стану автомату, та відповідне позначення, що відповідає певному стану. Орієнтовані дуги проводяться та визначаються наступним чином. Припустимо  $X_{i,j} = \{x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kr}\}$  множина значень  $x_v$ , для котрих  $q_j = \mu(x_v, q_i)$ ,  $y_\sigma = \lambda(x_{kv}, q_i)$  для  $h = 1, 2, \dots, r$ . Якщо  $X_{i,j}$  не порожня множина, дугу ведуть від вершини  $q_i$  до вершини  $q_j$ , стрілка вказує на той же напрямком, а визначення дуги записують у вигляді  $(x_{k1} / y_{\sigma1}) \vee (x_{k2} / y_{\sigma2}) \vee \dots \vee (x_{kr} / y_{\sigma r})$ . Кожен елемент  $(x_{k2} / y_{\sigma2})$ , визначає вхідний сигнал, що свідчить про зміну стану та відповідний вихідний.

Правила побудови графів переходів автомату відображено на рисунку 3.3.

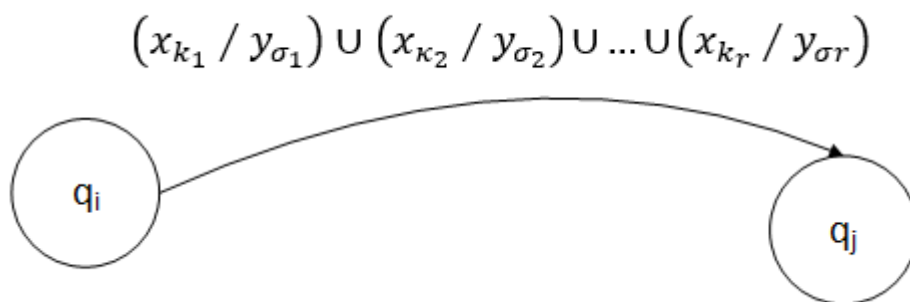


Рис. 3.3. Правила побудови графа переходів

Зазначено правило встановлює відповідність між графом переходів та таблицею переходів для одного і того автомату.

Для детермінованого автомату, що не має обмежень на вході, кожен вхідний сигнал викликає перехід з одного стану в інший, відповідно, кількість дуг, які виходять з будь-якої верхівки графа збігається з потужністю вхідного алфавіту. Граф переходів полегшує реакцію автомата на вхідну послідовність будь-якої довжини. Якщо автомат знаходиться у початковому стані  $q_i$ , а на вхід подається послідовність  $x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kr}$ , тоді реакція автомата визначається дослідженням безперервної послідовності  $r$  дуг, що бере початок у вершині  $q_i$ .  $\tau$  – я дуга послідовності ( $\tau = 1, 2, \dots, r$ ) відповідає парі вхід – вихід  $(x_{k1} / y_{\sigma r})$ .

Вихідна послідовність, яку видає автомат при надходженні вхідної послідовності  $x_{k1} x_{k2} \dots x_k$ , буде  $y_{\sigma 1} y_{\sigma \dots 2} y_{\sigma r}$ , а стан, у який перейде автомат, визначається відповідно до вершини, у який закінчується послідовність з  $r$  дуг.

Граф автомата  $P1$  відображено на рисунку 3.4.

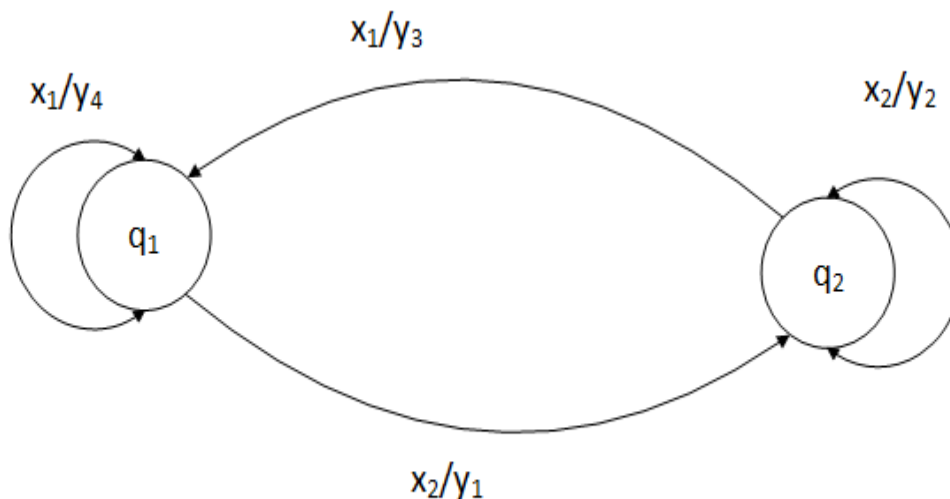


Рис. 3.4. Граф автомата  $P1$

Іншою формою представлення автоматів є матриця переходів. Матриці дозволяють автоматизувати операції з дослідження та перетворення автоматів.

Позначимо  $[P]$  матрицю переходів автомату  $P$ , який має  $n$  кількість станів. Матриця складається з  $n$  рядків та  $n$  стовпців. Нехай  $Q_p = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}$  – множина станів автомату  $P$ , що спрямована від  $q_i$  до  $q_j$ . Позначимо  $e_{ij}$  елементом матриці, що знаходиться на перетині  $i$  – го рядка та  $j$  – го стовпця. Значення елемента  $e_{ij}$  визначається:

$$e_{i,j} = \begin{cases} \alpha_{i,j}, & \text{якщо } \alpha_{ij} \text{ існує} \\ 0, & \text{якщо } \alpha_{ij} \text{ не існує} \end{cases}$$

Якщо  $|X|$  є потужністю вхідного алфавіту автомата  $P$ , тоді кожен рядок у  $[P]$  повинен містити однакою кількість  $|X|$  пар вхід – вихід, при цьому кожна пара має вхідний символ, що відрізняється від вхідного символу іншої пари.

Дуги, які знаходяться в стані  $q_i$  – недіагональні елементи стовпця  $q_i$ , петля стану  $q_i$  є діагональним елементом у рядка  $q_i$  або стовпця  $q_i$ .

Матриця переходів автомату  $P_I$  відображена на рисунку 3.5.

	$q_1$	$q_2$
$q_1$	$x_1 / y_4$	$x_2 / y_1$
$q_2$	$x_1 / y_3$	$x_2 / y_2$

Рис. 3.5. Матриця переходів автомату  $P_I$

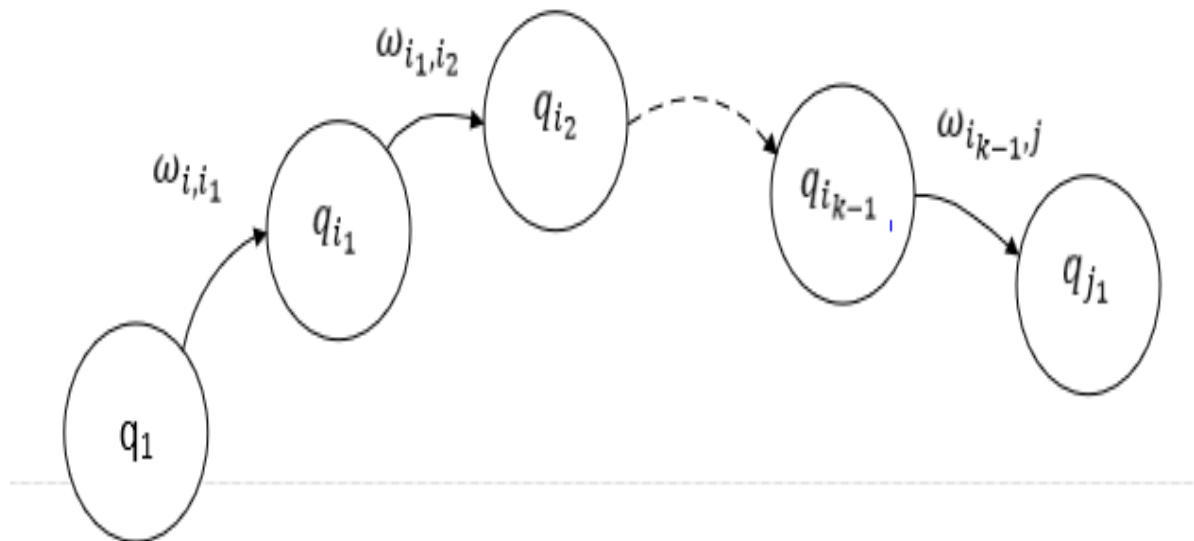


Рис. 3.6. Шлях довжини  $k$

Послідовність  $k$  дуг, що веде у графі переходів від одного стану до іншого, має назву – шлях, а  $k$  – довжина шляху. Позначимо  $\omega^k_{i,j}$  множиною всіх шляхів довжини  $k$ , що ведуть від стану  $q_i$  до стану  $q_j$ . Множина  $\omega^1_{i,j}$ , яка складається з однієї дуги та веде від стану  $q_i$  у стан  $q_j$  позначимо  $\omega_{i,j}$ . Множині  $\omega^1_{i,j}$  дамо значення нуль, якщо жодна з дуг не призведе від стану  $q_i$  до стану  $q_j$ .

Шлях довжини  $k$  – це упорядкована послідовність дуг  $\omega_{i,j1}, \omega_{i1,j2}, \dots, \omega_{ik-1,j}$  (рис. 3.6).

Якщо одна з дуг шляху відсутня, тоді елемент співвідношення дуг  $\omega_{i,j1}, \omega_{i1,j2}, \dots, \omega_{ik-1,j}$  приймає нульове значення, а добуток дорівнює нулю, що свідчить про відсутність відповідного шляху.



Велику кількість шляхів  $\omega_{i,j}^k$  записують в якості невпорядкованої суми добутоків, кожен добуток є елементом цієї множини. Отже, нульові компоненти висловлення інтерпретуються як не існуючі шляхи.

$$\omega_{i,j}^k = \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \dots \sum_{i_{k-1}=1}^n \omega_{i,i_1}, \omega_{i_1,i_2}, \dots, \omega_{i_{k-1},j}.$$

Фізична природа станів кінцевого автомату не має значення. Стан лише бере участь у визначенні залежностей між вхідними та вихідними сигналами автомату. Тому, будь-яка множина станів, що виконують цю функцію, має право на існування незалежно від того висловлюють ці стани інтуїтивний зміст чи ні. Такий підхід до визначення множини станів дозволяє підмінити одну множину на іншу. Процедура мінімізації автомату заснована на понятті «еквівалентності».

Використовуємо позначення  $P/q$  для позначення автомату  $P$ , що знаходиться у стані  $q$ .

Будемо вважати, що стан  $q_i$  автомату  $PX$  та стан  $q_j$  автомату  $PY$  еквівалентні, якщо  $PX/q_i$  і  $PY/q_j$  під впливом будь-якої вхідної послідовності мають на виході однакові послідовності. Якщо  $q_i$  та  $q_j$  не еквівалентні, тоді вони різні.

Таким чином, стани  $q_i$  та  $q_j$  еквівалентні тоді, коли спостерігаючи за зовнішніми виходами, неможливо відрізнити автомат  $P1$ , що знаходиться у початковому стані  $q_i$  від автомату  $P2$ , який знаходиться в початковому стані  $q_j$ . При існуванні вхідної послідовності, що формує на виходах автоматів  $P1/q_i$  та  $PY/q_j$  різні вихідні послідовності, тоді стани  $q_i$  та  $q_j$  різні.

Розглянемо без доведення наступну теорему [9]. Якщо стан  $q_i$  та  $q_j$  є  $k$  – еквівалентними, а їх послідовники по відношенню до будь-якої вхідної послідовності довжини  $k$  є еквівалентними, тоді  $q_i = q_j$ .

Вищезазначена теорема може бути використана для встановлення еквівалентності станів, коли еквівалентність інших станів вже встановлена.

Нехай, наприклад, відомо, що пари станів  $\{1,5\}$  та  $\{3,7\}$  автомату  $P2$ , що зображено на рисунку 3.7, є еквівалентними. Тоді пара  $\{4,8\}$  повинна бути

також парою еквівалентних станів внаслідок того, що 4 та 8 є 1 – еквівалентними, а їх наступними парами будуть пари {1,5} і {3,7}.

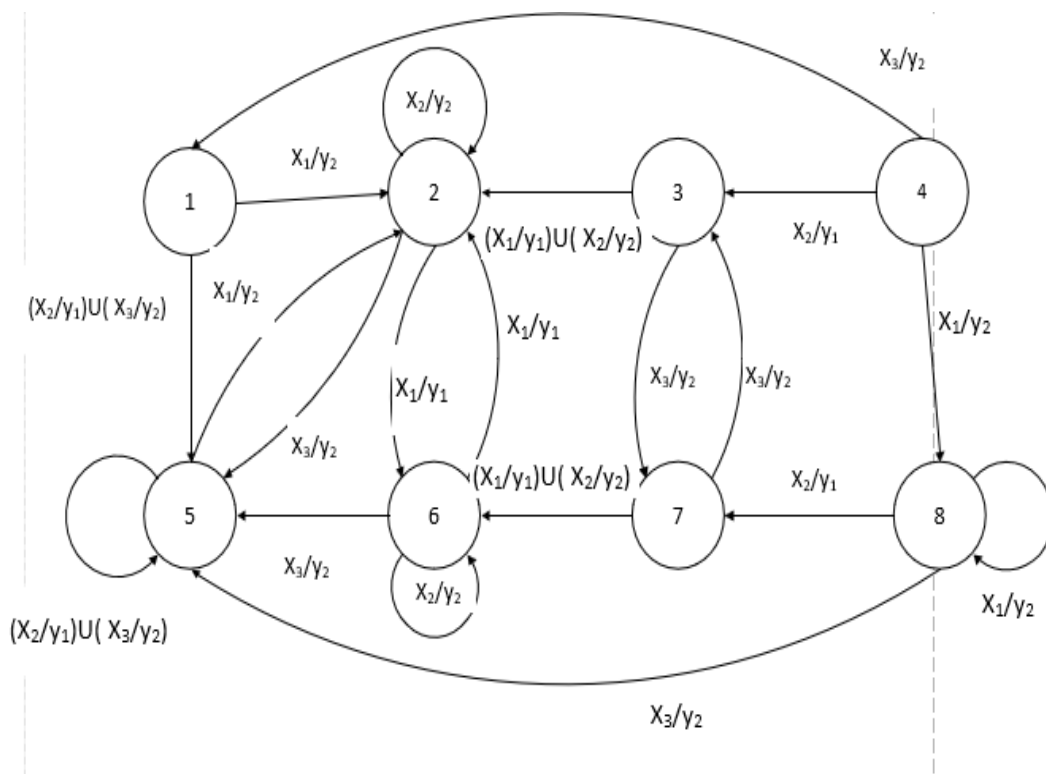


Рис. 3.7. Граф автомату P2

Якщо відомо, що стани пари {4,8} еквівалентні, тоді стани в парах {1,5}, {2,6} та {3,7} повинні бути також еквівалентними, оскільки вони утворюють пари відповідних станів на шляхах, що починаються зі станів 4 і 8.

Базуючись на понятті еквівалентності станів, існує можливість побудови мінімального автомату, що моделює бізнес – процес.

Впровадження процесного управління неможливе без використання інструментальних систем моделювання та управління бізнес – процесів. Ринок програмного забезпечення містить велику кількість подібних систем. Тому, основним завданням для менеджера є вибір оптимальної інструментальної системи, яка б відповідала заданим критеріям та максимальним споживчим якостям.

Необхідно звернути увагу на таку важливу особливість при виборі інструментальних засобів моделювання та управління бізнес – процесами, як регулювання критеріїв оцінки по мірі впровадження процесного управління підприємством. На початкових етапах впровадження процесного управління, у більшості випадків звертають увагу на функціонал, що пов'язаний з описом, документуванням, моделюванням процесів, їх якісним аналізом, перепроектуванням. Вирішуючи зазначені завдання, поступово переходять до вирішення завдання щодо кількісної оцінки бізнес – процесів (розглядають декілька варіантів бізнес – процесів, з метою обрання оптимального). А це, у свою чергу, вимагає застосування коригування моделей та застосування інструментарію динамічного моделювання.

На останньому етапі впровадження процесного управління збільшується значимість застосування інструментарію бізнес – процесів, а це вимагає в інструментальній системі наявності автоматизованого перетворення побудованих та оптимізованих моделей бізнес – процесів в елементи інформаційної системи.

Оскільки впровадження процесного управління свідчить про збільшення функціональних можливостей інструментальних систем, необхідно провести аналіз технічних можливостей останніх з метою придбання та підключення додаткових модулів.

Оцінку інструментальних систем подаємо, посилаючись на стандарти оцінки якості програмного забезпечення. Якість програмного забезпечення – це набір необхідних властивостей; сукупність характеристик програмного забезпечення, що здатні задовольнити встановлені та передбачувані вимоги [29].

Зазначені стандарти пропонують багаторівневу модель якості програмного забезпечення, де верхній рівень моделі містить шість основних характеристик якості програмного забезпечення, кожна з яких визначається певними атрибутами (таблиця 3.1).

## Характеристики якості програмного забезпечення

№ з/п	Характеристика	Її зміст
1.	Функціональність (Functionality)	Здатність програмного забезпечення розв'язувати завдання, які ставить користувач. Найважливіша характеристика, від якої залежить визначення наступних стандартних показників якості.
2.	Надійність (Reliability)	Здатність програмного забезпечення виконувати необхідні завдання в обмежених умовах (зокрема: обмеження у часі, кількості операцій). Атрибутами даної характеристики є завершеність та цілісність всієї системи, здатність самостійно, коректно відновлюватися після збоїв у роботі, відмово стійкість. Зазначені властивості можуть бути визначені шляхом багато чисельних вимірювань.
3.	Зручність у використанні (Usability)	Цей показник відображує трудомісткість та час, які необхідні для вивчення й опанування функцій, технологій щодо застосування програмного забезпечення. Визначається за допомогою експертних оцінок.
4.	Ефективність (Efficiency)	Здатність системи забезпечувати необхідний рівень продуктивності відповідно до наявних ресурсів, встановленого часу та інших обмежень. Параметри ефективності можуть бути зазначені у специфікації замовника.
5.	Зручний супровід (Maintainability)	Свідчить про зручність виконання таких функцій, як: проведення аналізу, внесення змін у програму з метою усунення дефектів, реалізація нових вимог, покращення обслуговування, адаптація до різних умов.
6.	Мобільність (Portability)	Характеризує програмну систему з точки зору «легкого перенесення» з однієї платформи на іншу (software/hardware). Мобільність оцінюють за такими критеріями: відмінно, добре, задовільно, незадовільно. Оцінку здійснюють експерти.

Крім того, стандартами подані різні додаткові якісні характеристики.

Здійснюючи оцінку якості програмного забезпечення необхідно орієнтуватися на конкретні завдання та конкретних користувачів.

В таблиці 3.2 подана експертна оцінка показників якості інструментальних систем управління бізнес – процесів. Експертні оцінки подані у межах від [0,1]. Кращі показники наближаються до величини 1.

Результати оцінки інструментальних систем сформовані із застосуванням стандарту ISO 9126-4 і наведені у таблицях 3.2 – 3.7.

Таблиця 3.2

Якість використання

	Вага	ARIS		BPWIN		Business Studio		OPГ Майстер	
		значення	зважене значення	значення	зважене значення	значення	зважене значення	значення	зважене значення
<b>Зрозумілість:</b>	0,25	0,63	0,16	0,70	0,18	0,83	0,21	0,63	0,16
- чіткість концентрації ПС;		0,60		1,00		1,00		0,80	
- демонстраційні можливості;		0,50		0,30		0,50		0,40	
- наочність та повнота документації		0,80		0,80		1,00		0,70	
<b>Простота використання:</b>	0,15	0,50	0,08	0,80	0,12	0,90	0,14	0,70	0,11
- простота керування функціями;		0,30		1,00		1,00		0,70	
- комфортність експлуатації		0,70		0,60		0,80		0,70	
<b>Опанування:</b>	0,15	0,23	0,03	0,58	0,09	0,75	0,11	0,35	0,05
- трудомісткість дослідження застосування;		0,20		0,50		0,80		0,30	
- тривалість вивчення;		0,20		0,60		0,60		0,40	
- обсяг експлуатаційної документації;		0,30		0,80		0,80		0,40	
- обсяг електронних посібників		0,20		0,40		0,80		0,30	

<b>Відповідність методичі управління бізнес – процесами:</b>	0,35	0,85	0,30	1,00	0,35	0,85	0,30	0,90	0,32
- інтеграція з методологіями управління бізнес-процесами		1,00		1,00		1,00		1,00	
- формування методологій управління бізнес-процесами		0,70		1,00		1,00		1,00	
<b>Привабливість</b>	0,1	0,80	0,08	0,60	0,06	0,90	0,09	0,50	0,05
<b>Всього:</b>			0,64		0,79		0,84		0,68

При дослідженні специфіки застосування інструментальних систем для моделювання бізнес – процесів можна додати показник, що відображує відповідність останніх методологіям управління бізнес – процесами та формування цих методологій. Це необхідно для здійснення опису бізнес – процесів у системі ARIS, коли існує проблема інтерпретації мовних елементів. З одного боку це дозволяє покращити виразність мовних конструкцій, з іншого – ускладнює роботу над проектом.

Наступні таблиці (3.3 – 3.5) відображають ступінь відповідності інструментальних систем актуальним завданням на різних етапах «процесної зрілості» за шкалою Gartner [9].

Таблиця 3.3

Відповідність поточним завданням

	Вага	ARIS		BPWIN		Business Studio		OPГ Майстер	
		значення	зважене значення	значення	зважене значення	значення	зважене значення	значення	зважене значення
Можливості з опису бізнес – процесів	0,3	1	0,3	0,8	0,24	0,8	0,24	0,6	0,18

Можливості аналізу бізнес – процесів	0,2	0,8	0,16	0,8	0,16	0,6	0,12	0,7	0,14
Підтримка документації для сертифікації організації за ISO,GMP	0,2	0,4	0,08	0,4	0,08	0,8	0,16	0,8	0,16
Можливість колективної роботи над моделлю бізнес - процесів	0,1	0,8	0,08	0,8	0,08	0,8	0,08	0,8	0,08
Можливості з проведення функціонального – вартісного аналізу бізнес - процесів	0,1	1	0,1	0,8	0,08	0,8	0,08	0,8	0,08
Можливості з аналізу структури організації	0,1	0,8	0,08	1	0,1	0,8	0,08	0,8	0,08
Всього:			0,80		0,74		0,76		0,72

Таблиця 3.4

Відповідність завданням найближчої перспективи

	Вага	ARIS		BPWIN		Business Studio		OPГ Майстер	
		значення	зважене значення	значення	зважене значення	значення	зважене значення	значення	зважене значення
Можливості засобів імітаційного моделювання	0,33	0,8	0,26	0,8	0,26	0,8	0,26	0,1	0,03
Можливості системи формування звітів	0,33	0,4	0,13	0,2	0,07	0,8	0,26	0,7	0,23
Можливості з корегування моделей	0,34	1	0,34	0,8	0,27	0,7	0,24	0,7	0,24
Всього:			0,73		0,6		0,76		0,5

Таблиця 3.5

## Відповідність майбутнім (далека перспектива) завданням

	Вага	ARIS		BPWIN		Business Studio		ОРГ Майстер	
		значення	зважене значення	значення	зважене значення	значення	зважене значення	значення	зважене значення
Генерація програмного коду	0,33	0,4	0,13	0,8	0,26	0	0	0	0
Середовище виконання	0,33	0,8	0,26	0	0	0	0	0	0
Готові рішення	0,34	0,8	0,27	0,8	0,27	0,7	0,24	0,7	0,24
Всього:			0,66		0,53		0,24		0,24

В таблиці 3.6 зазначені оцінки цін інструментальних систем, що містять як основні так і додаткові модулі.

Таблиця 3.6

## Ціна інструментальних систем

	Вага	ARIS		BPWIN		Business Studio		ОРГ Майстер	
		значення	зважене значення	значення	зважене значення	значення	зважене значення	значення	зважене значення
Базова ціна	0,70	0,00	0,00	0,89	0,62	0,95	0,66	1,00	0,70
Ціна додаткових модулів	0,30	0,00	0,00	0,29	0,09	0,82	0,25		0,00
Всього:	1,00		0,00		0,71		0,91		0,70

Відсутність значення свідчить про відсутність певного компоненту системи.

У таблиці 3.7 розраховано інтегральний показник.



## Інтегральний показник

	Вага	ARIS		BPWIN		Business Studio		OPГ Майстер	
		значення	зважене значення	значення	зважене значення	значення	зважене значення	значення	зважене значення
Ціна	0,30	0,00	0,00	0,71	0,21	0,91	0,27	0,70	0,21
Якість використання	0,20	0,64	0,13	0,79	0,16	0,84	0,17	0,68	0,14
Відповідність поточним завданням	0,20	0,80	0,16	0,74	0,15	0,76	0,15	0,72	0,14
Відповідність завданням найближчої перспективи	0,20	0,74	0,15	0,60	0,12	0,77	0,15	0,50	0,10
Відповідність завданням далекої перспективи	0,10	0,67	0,07	0,54	0,05	0,24	0,02	0,24	0,02
Інтегральний показник	1,00		0,50		0,69		0,77		0,61

Проведений аналіз інструментальних систем дозволив зробити висновок, що найбільше застосування знайшли системи BPwin та Business Studio (рис. 3.8).

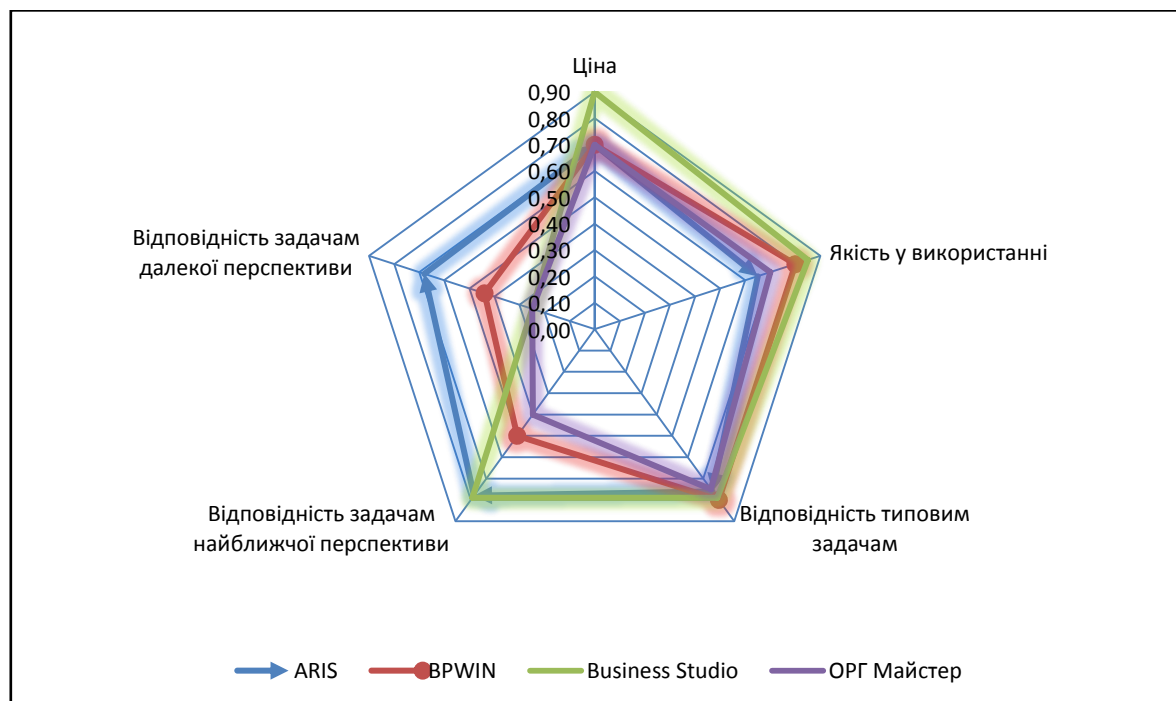


Рис. 3.8. Порівняльна характеристика інструментальних систем

Зазначені системи є специфічними, мають певні обмеження щодо впровадження але, у подальшому їх використанні в процесі управління підприємство буде мати значні переваги перед іншими системами.

Таблиця 3.8

Характеристики інструментальних систем BPwin та Business Studio

Характеристики	BPwin	Business Studio
Генерація документів за шаблонами	Лише базові	Створення звітів та документів за допомогою редактору звітів
Імітаційне моделювання	За допомогою додаткового засобу ARENA	Немає
Проектування ПЗ	Підтримка СУБД через модуль ERwin	Немає
Графічний інструмент	Власний редактор	Використання MS Visio
Діаграми	SADT (IDEF0, IDEF3, DFD)	Комбінування IDEF0, BPflowChart
Рівень	Повна методологія системного аналізу	Інструмент побудови моделі та документів
Область застосування	Моделювання та аналіз складних систем	Моделювання бізнес - процесів
Збереження шаблонів моделей	Репозиторій Model Mart	Microsoft SQL – сервер
Вимоги	Мінімальні	Високі (використано технологія .NET)

Характеристики інструментальних систем BPwin та Business Studio наведені в таблиці 3.8.

Розвиток сучасної системи управління підприємством не може обійтися без впровадження інформаційних технологій та математичного інструментарію, які надають бізнесу нові можливості.

**ВИКОРИСТАНА ЛІТЕРАТУРА**

1. Анісімов Б.А. Інформаційні системи та бази даних: Навчальний посібник для студентів факультету комп'ютерних наук та кібернетики /А.В. Анісімов, П.П. Кулябко. – Київ. – 2017. 110 с.

2. Антоненко в В.М. сучасні інформаційні системи і технології управління знаннями: навч. посібник /В.М. Антоненко, С.М. Мамченко, Ю.В. Рогущена. – Ірпінь: Нац. Університет ДПС, 2016. – 212 с.

3. Ареф'єва, О. В. Бізнес-процеси підприємств сфери послуг: фактори, формування, конкурентноспроможність [Текст] : [монографія] / О. В. Ареф'єва, Т. В. Луцька; Європейський ун-т. – К.: Вид. Європейського ун-ту. - 2009. – 96 с.
4. Биннер Х. Ф. Управление организациями и производством: от функционального менеджмента к процессному [Текст] / Хартмут Ф. Биннер; пер. с нем. – М.: Альпина Бизнес Букс (Альпина Паблишерз), 2009(2010). – 282 с. – (Серия «Производственный менеджмент»).
5. Бігдан І.А. Фінансовий менеджмент: елект. навч. посібник / І.А.Бігдан, Л.І. Лачкова, В.М. Лачкова, О.В. Жилякова – Х.:ХДУХТ, 2017. 197с.
6. Буйницька О.П. Інформаційні технології та технічні засоби навчання: навч. посібн. / О.П. Буйницька. – К.: ЦУЛ, 2018. – 240 с.
7. Вікіпедія. Бізнес – аналітика. [Електронний ресурс]. Режим доступу: <https://ru.wikipedia.org/wiki>
8. Вовкодав О.В. Сучасні інформаційні технології: навч. посіб. /О.В. Вовкодав. – Тернопіль: ТНЕУ. – 2017. – 501 с.
9. Гилл А. Введение в теорию конечных автоматов. — М.: Наука, 2016. [Электронный ресурс]. Режим доступу: [http://stu.alnam.ru/book\\_inau.php](http://stu.alnam.ru/book_inau.php)
10. Губко М.В. Классификация моделей анализа и синтеза организационных структур / М.В. Губко, Н.А. Коргин // Управление большими системами: сборник трудов Института проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН. – 2004. – № 6. – С. 5–21 [Электронный ресурс]. – Режим доступу: <http://cyberleninka.ru/article/n/klassifikatsiya-modeleyanaliza-i-sinteza-organizatsionnyh-struktur>
11. Данчук В.Д. Побудова моделей бізнес – процесів концентру, як інтегрованої частини компанії\_E-COMMERCE та розробка на їх основі концептуальної архітектури та прототипів інтерфейсів користувача. /В. Д. Данчук. [Електронний ресурс]. Режим доступу: <http://www.economy.nayka.com.ua>
12. Davenport T. H., Short J. E. The New Industrial Engineering: Information Technology and Business Process Redesign // Sloan Management Review, 1990,(Summer), 11–27.
13. Davenport T. H. Process innovation: reengineering work through information technology. – Boston, Mass.: Harvard Business School Press, 1993. – 337.
14. В.В. Демиденко. Управління бізнес – процесами як складова процесного підходу до управління підприємством. /В.В. Демиденко //

Електронний журнал «Ефективна економіка» включено до переліку наукових фахових видань України з питань економіки. [Електронний ресурс]. Режим доступу: <http://www.economy.nayka.com.ua>

15. Deming W. E. Quality, productivity, and competitive position. – Cambridge, MA: Massachusetts Institute of Technology, Center for Advanced Engineering Study, 1982. – 373.

16. Дилигенский Н.В. Системный анализ и совершенствование организационных структур управления деятельностью генерирующего предприятия / Н.В. Дилигенский, А.Г. Салов // Вест. Самарского госуд. ун-та. Серия «Технич. науки». – 2009. – № 1(31). – С. 17–24.

17. Друкер Питер Ф. Д76 Энциклопедия менеджмента. : Пер. с англ. — М.: Издательский дом "Вильямс", 2004. — 432 с. [Электронный ресурс]. Режим доступу: <http://flightcollege.com.ua>

18. Друкер Питер Ф., Макьярелло, Джозеф А. Бизнес и новации.: Пер. с англ. — М.: ООО "И.Д. Вильямс", 2010. — 704 с. [Электронный ресурс]. Режим доступу: <http://socioline.ru/files/5/51/drucker.pdf>

19. Елиферов В. Г. Бизнес-процессы: Регламентация и управление / Елиферов В. Г., Репин В. В. – М.: ИНФРА-М, 2005. – 319 с.

20. Економічний енциклопедичний словник. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://subject.com.ua/economic/slovník>

21. Ефимов, В. В. Описание и улучшение бизнес-процессов [Текст] : учеб. пособие / В. В. Ефимов; ред. Н. А. Евдокимова; Ульяновский государственный технический ун-т. – Ульяновск: Изд. УлГТУ, 2005. – 84с.

22. Elliott, J. J. Design of a product-focused customer-oriented process [Text] / J. J. Elliott // Information and Software Technology: 42(14), 2000. – 973–981.

23. ENAPS. Deliverable Fi-4: A Set of Refined and Agreed Performance Indicators Defined by Business Processes. ENAPS, Galway. Ireland. - 1997. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://subject.com.ua/economic/slovník>

24. Зельдович Б.Ч. Менеджмент : учебник / Б.З. Зельдович. – М. : Экзамен. – 2007. – 571 с.

25. Зиндер Е. З. Новое системное проектирование: информационные технологии и бизнес-реинжиниринг // Системы управления базами данных. – 1996. – № 1. – 55–67.

26. Лізунов П.П. Інформаційні системи і технології в управлінні організацією: навчальний посібник./П.П. Лізунов, М.В. Коханович, В.О. Недін. – К.: КНУБА. – 2018. – 156 с.

27. В. В. Ильин Моделирование бизнес-процессов. Практический опыт разработчика. — Вильямс, 2006. — (Практика реального бизнеса). — ISBN 5-8459-1063-3.

28. ISO 9001:2000. Quality management systems – Requirements [Электронный ресурс]. – Режим доступа: [http://www.iso.org/iso/catalogue\\_detail?csnumber=21823](http://www.iso.org/iso/catalogue_detail?csnumber=21823).

29. ISO/IEC. Оценка и аттестация зрелости процессов создания и сопровождения программных средств и информационных систем (ISO/IEC TR 15504-CMM). – М.: Книга и Бизнес, 2001. – 348.

30. Казначевская Г.Б. Менеджмент : учеб. пособие для студ. вузов / Г.Б. Казначевская И.Н. Чуев, О.В. Матросова. – 3-е изд. – Ростов н/Д. : Феникс, 2007. – 378 с.

31. Коваленко И.И. Моделирование и анализ структур организационных систем: [учебное пособие] / И.И. Коваленко, С.К. Чернов. – Николаев : В.В. Торубара, 2015. – 124 с.

32. Лейбкинд А.Р. Модели формирования организационных структур (обзор) / А.Р. Лейбкинд, Б.Л. Рудник, А.И. Чухнов // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. – 1980. – Том XVI. – Вып. 1. – С. 39–59.

33. Мінеєв Є.І. Моделювання бізнес-процесів [Електронний ресурс] / Мінеєв Є.І – Режим доступу до ресурсу: <http://zavantag.com/docs/663/index-1248743.html>. – Назва з екрану.

34. Мясоедова Л.В. Позиционирование экономического управления в общей системе управления предприятием / Л.В. Мясоедова // Модернизация экономики и эффективность управления социально-экономическим развитием : сб. науч. статей по материалам 2-й междунар. конф. (Новочеркасск, 14–15 мая 2010 г.) ; Юж.-Рос. гос. техн. ун-т (НПИ). – Новочеркасск : ЮРГТУ (НПИ). – С. 209–210.

35. Ойхман, Е. Г. Реинжиниринг бизнеса: реинжиниринг организаций и информационные технологии [Текст] / Е. Г. Ойхман, Э. В. Попов. – М. : Финансы и статистика, 1997. – 336 с.

36. Пономоренко Л.А. Основи економічної кібернетики : [підручник] / Л.А. Пономаренко. – К. : Київ. нац. торг.- екон. ун-т, 2002. – 432 с.

37. Попков Е.Ю. Методы анализа и совершенствования организационных систем управления предприятиями / Е.Ю. Попков // Труды ИСА РАН. – 2012. – Том 62. – Вып. 2. – С. 12–22 [Электронный ресурс]. – Режим доступа:

[http://www.isa.ru/proceedings/images/documents/2012-62-2/t-2-12\\_12-22](http://www.isa.ru/proceedings/images/documents/2012-62-2/t-2-12_12-22)

38. Пост ІТ директора компанії. [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: <https://dou.ua/lenta/articles/chief-information-officer/>
39. Porter, M. E. The Competitive Advantage: Creating and Sustaining Superior Performance [Text] / M. E. Porter. – NY: Free Press, 1985. – 540 p.
40. Ramus [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: <http://ramussoftware.com>. - Назва з екрану.
41. Рассел Л. Акофф, Фредерик Э. Эмери. О целеустремлённых системах. — Перевод с английского: Г. Б. Рубальский, под редакцией И. А. Ушакова. — М., 1974. // Электронная публикация: Центр гуманитарных технологий. — 08.10.2014. URL: <https://gtmarket.ru/library/basis/7083>
42. Репин, В. В. Процессный подход к управлению. Моделирование бизнес-процессов [Текст] / В. В. Репин, В. Г. Елиферов. – М. : РИА «Стандарты и качество», 2004. – 408с. – (Серия «Практический менеджмент»). (2 книги)
43. Сергеева Л.Н. Нелинейная экономика: модели и методы: [монография] / Л.Н. Сергеева. – Запорожье : Полигар, 2003. – 218 с.
44. Сколько иностранных инвестиций поступило в Украину в 2010-2018 годах. [Електронний ресурс]. Режим доступу: <https://ru.slovoidilo.ua/2018/08/31/infografika/jekonomika/skolko-inostrannyh-investicij-postupilo-ukrainu-2010-2018-godax>
45. Tele Management Forum. Telecom Operations Map. Evaluation Version 2.1. – Morristown, NJ: TMForum, 2000. – 82 с.
46. Хаммер, М. Реинжиниринг корпорации. Манифест революции в бизнесе [Текст] / Майкл Хаммер, Джеймс Чампи; пер. с англ. Ю. Е. Корнилович. – [2-е изд.] – М. : Манн, Иванов и Фербер, 2007. – 288 с.
47. Харрингтон Дж., Эсселинг К. С. Оптимизация бизнес-процессов: документирование, анализ, управление, оптимизация – СПб.: Азбука, БМикро, 2003. – 317 с.;
48. Шкіль Р.А. Аналітичний огляд методів моделювання бізнес – процесів в електронній комерції /Р.А. Шкіль [Електронний ресурс]. Режим доступу: <http://zavantag.com/docs/663/index-1248743.html>. – Назва з екрану.
49. Якокка Л., Куда подевались все лидеры? 2008 p. – 320 с. [Електронний ресурс]. Режим доступу: <https://mybook.biz.ua/ua/biznes-psihologiya/kuda-podevalis-vse-lidery/>
50. Яркіна Н.М. Управління підприємством як економічна категорія (теоретичні аспекти). /Н.М. Яркіна //Держава та регіони. Серія: Економіка та підприємництво, 2014 p., № 1 (76). – С. 130 – 136.

**Хома Надія Григорівна, кандидат фізико-математичних наук,  
доцент кафедри економічної кібернетики та інформатики**

**ІНФОРМАЦІЙНА МОДЕЛЬ СІТКОВОГО ПЛАНУВАННЯ  
У ФОРМУВАННІ СТРАТЕГІЇ ПІДПРИЄМСТВА**

Технологічні зміни у базисі виробництва, зумовлені впливом НТР та якісно новими вимогами до його розвитку в умовах ринкового середовища, підвищують інтерес до дослідження форм та методів системи управління підприємством. У період розвитку ринкових відносин радикально змінилися умови господарювання, у зв'язку з чим виникла необхідність пошуку найбільш ефективних форм, методів та інструментів управління підприємством.

Дана проблема вже тривалий час знаходиться в центрі уваги теоретиків і практиків, які займаються проблемами управління.

При розробці інформаційної моделі підприємства слід врахувати заходи щодо поліпшення властивостей товару і розширення його асортименту, а також щодо оптимізації каналів товароруку, організації збуту і технічного сервісу.

Одним із найважливіших питань, які виникають при конкретному економічному аналізі виробництва, є питання про вибір і розподіл виробничих програм. Звичайною тому є задача вибору такої виробничої програми для кожного підприємства, яка б враховувала його специфіку, тобто підприємство використовувалося б для виготовлення виробів, які на ньому вигідно випускати і в результаті загальний ефект був би найбільшим або загальні затрати були б найменшими. Для ряду прикладних задач ефективно використовувати спеціальні методи теорії графів, які враховують особливості структури сітьових постановок. Сучасний стан комп'ютерних систем дозволяє успішно використовувати теорію графів для створення програмних засобів застосування сіткових графіків в управлінні. Методи розв'язування задач у сітьовій постановці мають форму рекурсивних обчислювань, що легко піддається процесу алгоритмізації та реалізації.

Основною виробничо-господарською ланкою національної економіки є підприємство. Визначення поняття підприємства та правові засади його

функціонування сформульовано у главі 7 Господарського кодексу України (далі - ГКУ) №436-IV від 16.01.2003 р., чинного з 01.01.2004 р. у ГКУ встановлює відповідно до Конституції України правові основи господарської діяльності (господарювання), яка базується на різноманітності суб'єктів господарювання різних форм власності.

Його метою є забезпечення зростання ділової активності суб'єктів господарювання, розвитку підприємництва і на цій основі підвищення ефективності суспільного виробництва, його соціальної спрямованості відповідно до вимог Конституції України, утвердження суспільного господарського порядку в економічній системі України, сприяння гармонізації її з іншими економічними системами.

У практиці господарювання кожне підприємство представляє собою складну економічну систему, що здійснює багато видів діяльності.

Основним завданням діяльності підприємства є забезпечення потреб суспільства товарами (послугами) відповідного асортименту та належної якості. Виконання основного завдання підприємства вимагає вирішення таких окремих завдань:

- постійне підвищення ефективності виробництва;
- своєчасне і термінове впровадження досягнень науково-технічного прогресу у виробництво;
- постійне зростання культурно-технічного та професійно-кваліфікаційного рівня працівників підприємства і залучення їх до творчої діяльності (винахідництво, раціоналізаторство, новаторство).

У ринковій економіці підприємство самостійно планує основні напрямки та умови своєї діяльності, розпоряджається трудовими, матеріальними та фінансовими ресурсами [7]. Воно саме вибирає ділових партнерів, вступає в договірні відносини з ними, здійснює зовнішньоекономічну діяльність. Організаційні форми управління також визначаються підприємством. Воно вільне у виборі видів господарської діяльності та реалізує останню в межах чинного законодавства.



Важливою відмітною рисою підприємства як суб'єкта господарювання є його виробничо-технічна, організаційна та економічна єдність.

Управління підприємством – це постійний і системний вплив на діяльність його структур для забезпечення узгодженої роботи і досягнення кінцевого позитивного результату.

Головною особливістю управління підприємством за сучасних умов є те, що ефективна система управління – це, перш за все, система, що здатна забезпечити швидку адаптацію підприємства до змін його бізнес-середовища за умов максимально можливого врахування запитів і задоволення потреб потенційних споживачів [19]. Отримання прибутку має розглядатися виключно як результат ефективного функціонування такої управлінської системи. Проблема управління та функціонування підприємств в умовах ринку – мікроекономіці – присвячені більшість сучасних праць іноземних науковців. Так, на думку, Я. Корнаї, “економіка є реальною наукою, завдання якої полягає в тлумаченні економічної дійсності, а критерієм її достовірності є порівняння отриманих результатів з реальною практикою господарювання” [20].

На сьогоднішній день для успішного входження вітчизняних підприємств на світовий ринок необхідно використовувати сучасні технології, пов'язані не лише з процесом управління виробництвом, а й з управлінням діяльністю підприємства. Застосування новітніх підходів, принципів, методів, інструментів в управлінні підприємством для забезпечення його успішного функціонування в конкурентному ринковому середовищі є головною складовою успіху підприємства як на внутрішньому ринку так і на зовнішньому. Дослідження і вдосконалення системи управління, як в рамках окремого підприємства, так і держави, суспільства в цілому сприяє швидкому та ефективному впровадженні нових механізмів управління, які відповідають сучасним потребам.

Вдосконалення управління підприємством можна через такий аспект його діяльності, як управління витратами.

Стратегічне планування вносить суттєві корективи в методи управління, визначаючи план розвитку на майбутнє. Ця управлінська концепція робить

акцент на умови ринку, особливо на умови конкуренції та збуту, як на критерій управління. Використання системи стратегічного управління на підприємстві може призвести до таких результатів:

- створення системного потенціалу для досягнення цілей організації. Цей потенціал складається: з фінансових, сировинних і людських ресурсів, що входять в організацію; виробленої продукції(послуг), що затребуються ринком; сформованого позитивного іміджу організації;

- визначення структури організації та її внутрішніх змін, що забезпечують чутливість до змін зовнішнього середовища і відповідну адаптацію. Шлях удосконалення управління виробничими ресурсами і запасами означає раціональне використання всіх видів матеріальних ресурсів, застосування енергозберігаючих технологій, регулювання використання виробничих запасів згідно з прогресивними нормами.

Цільовими об'єктами управління є ресурси: матеріальні, трудові, фінансові, а також основні засоби виробництва, готова продукція та інші активи. Увесь процес управління тим чи іншим ресурсом розглядається як одне ціле, в рамках якого діють взаємозалежні інформаційні потоки, що проходять через усі функції управління (планування, облік, контроль тощо). Заходи щодо вдосконалення управління підприємством дозволять значно скоротити апарат управління шляхом поліпшення його організаційної структури, визначити відповідальність працівників, чітко визначити організаційну та виробничу структуру підприємства. Тому, з огляду на вище зазначені особливості, для більш ефективного функціонування вітчизняним підприємствам в сучасних умовах, при побудові системи управління слід враховувати наступні фактори:

- виробничий процес має бути достатньо гнучким, що дозволить швидко змінювати асортимент продукції. Це фактор, насамперед, зумовлений застосуванням у виробництві нової техніки, впровадження прогресивних технологій виробництва та охорони навколишнього середовища;

- бути адекватною, складною технологією виробництва, яка вимагає більш нових форм контролю, організації та розподілу праці;

– враховувати серйозну конкуренцію як на внутрішньому так і на зовнішньому ринку продукції та покращувати якість продукції, що надається;

– приймати до уваги необхідність врахування невизначеності зовнішнього середовища;

– враховувати вимоги до рівня якості обслуговування споживачів та часу виконання договорів, які регулярно підвищують вимоги по умовам упаковки, транспортування, а також більш вигідні бази поставки;

– враховувати зміну структури попиту.

Беручи до уваги велику кількість шляхів вдосконалення управлінської системи українських підприємств, існує ряд перешкод, що заважають їх впровадженню в діяльність суб'єктів підприємницької діяльності, таких як:

– складність одержати високо кваліфіковану допомогу і консультації, та висока вартість таких послуг;

– недостатність фінансових можливостей для формування якісного управлінського потенціалу;

– низький рівень розвитку фінансового ринку;

– невисокий рівень підготовки персоналу;

– неготовність персоналу та керівництва до змін;

– високий рівень бюрократичних процедур;

– складність отримання інформації про нововведення у сфері управління.

Отже, з метою вдосконалення та створення й ефективного функціонування сучасної системи управління підприємством чи організацією слід: застосовувати сучасні засоби і методи керування в межах обраної концепції управління, зосередитись на цілях розвитку і порядку удосконалення комплексної системи управління підприємством і його складовими частинами для забезпечення прийняття ефективних рішень, а також організаційних, кадрових і технічних рішень; удосконалювати організаційну структуру підприємства; покращення інформаційної системи управління підприємством, для можливості швидкого доведення рішень до виконання; використовувати світовий досвід, а також шукати шляхи співпраці всередині країни з

іноземними партнерами для забезпечення необхідного рівня якості розвитку системи управління на підприємстві.

Розглядаючи теоретичні основи стратегічного аналізу і планування є доцільним вказати на загальне слабе місце в теоретичних конструкціях всіх цих моделей. Не одна з моделей стратегічного планування не звертається до основ бізнесу. Фактично вихідним пунктом аналізу і планування стратегії є констатація того стану, в якому опинився бізнес/організація без глибокого опрацювання причин цього стану. Для кожного стану є свій рецепт дій. Важливо виявляється тільки правильно оцінити стан бізнесу у визначеній параметричній системі (позиціонувати бізнес), а потім обрати однозначно відповідну цьому положенню систему дій. Відповідь на очевидне і в той же самий час ключове питання стратегічного аналізу “Чому організація опинилась нездатною (або здатною) досягти кращого (або даного) стану ?” залишається як би за межами дослідження.

Відбувається це тому, що здатності, якими володіє організація і на яких вона будує свій бізнес, не знаходять відображення у “класичних” моделях стратегічного аналізу і планування. Адже саме відмінні здатності організації складають основу будь-якого її бізнесу: і поточного, і потенційного. Вихідною ідеєю, що відображає сутність концепції стратегічного управління, є ідея необхідності врахування взаємозв'язку та взаємовпливу зовнішнього та внутрішнього середовища при визначенні цілей підприємства; стратегії в цьому випадку виступають, як інструменти досягнення цілей, а для реалізації стратегій необхідно, щоб усе підприємство функціонувало у стратегічному режимі.

Запорукою успішного функціонування підприємства в конкурентному ринковому середовищі є ефективна виробнича діяльність підприємства.

Особливості функціонування підприємства в ринковому середовищі згідно з напрямками здійснюваних ним видів діяльності можна зобразити у вигляді схеми, наведеної на рис. 1.1.



**Рис. 1.1. Схема діяльності підприємства в конкурентному ринковому середовищі**

Джерело:[12]

Головне завдання підприємства – визначити необхідні обсяги та співвідношення витрат, які дали б змогу установлювати таку ринкову ціну на продукцію, яка максимізувала б прибуток.

Управління підприємствами здійснюється суб'єктами управління, визначеними у законодавчому або адміністративному порядку повноважень з метою досягнення власником цих підприємств певних економічно – соціальних, фінансових, екологічних та інших результатів в інтересах суспільства та держави. В політекономічному сенсі управління підприємством слід розглядати як управління процесом реалізації власності. Управління охоплює всі фази виробничого процесу.

За час незалежності України відбувалися певні реформування. Аналіз досвіду зарубіжних країн щодо реформування підприємств показав відсутність готових моделей реформування, важливість здійснення моніторингу усіх перетворень, а також необхідність розробки власної стратегії розвитку підприємств з урахуванням їх специфіки.

Підприємство – це самостійна господарська одиниця з правами юридичної особи, яка функціонує на основі державної форми власності у різних галузях народного господарства [3, 2; 1].

Оскільки Закони України «Про підприємства в Україні» [1, 11] та «Про підприємництво» [2, 8] втратили свою чинність з введенням в дію «Господарського Кодексу України» [5], то у відповідності з останнім діяльність підприємства будується на поєднанні прав власника майна (держави) та принципів самоуправління трудового колективу [21].

Практична реалізація функцій управління здійснюється за допомогою системи методів управління. Привести в дію організовану систему, щоб одержати потрібний результат, можна лише через вплив на неї керуючого органу чи особи. При цьому необхідні певні інструменти погодженого впливу, які й забезпечують досягнення поставлених цілей. Такі інструменти заведено називати методами управління.

Особлива роль методів управління полягає у тому, щоб створити умови для чіткої організації процесу управління, використання сучасної техніки і прогресивної технології організації праці і виробництва, забезпечити їх максимальну ефективність при досягненні поставленої мети. Таким чином, зміст поняття «методи управління» витікає із суті і змісту управління і належить до основних категорій теорії управління.

Управління фірмою (підприємством, організацією) спрямоване на людей, коло їхніх інтересів, передовсім матеріальних. Тому основою класифікації методів управління є внутрішній зміст мотивів, якими керується людина у процесі виробничої чи іншої діяльності. За своїм змістом мотиви діяльності можна поділити на матеріальні, соціальні та мотиви примусового характеру.

Відповідно до цього розрізняють економічні, соціально-психологічні та організаційні методи управління діяльністю підприємств [25, с. 53–55].

Усі названі методи управління діяльністю підприємств органічно взаємозв'язані й використовуються не ізольовано, а комплексно. Проте провідними треба вважати саме економічні методи. Організаційні методи створюють передумови для використання економічних методів. Соціально-психологічні методи доповнюють організаційні та економічні й утворюють у сукупності необхідний арсенал засобів управління діяльністю підприємства, будь-якого суб'єкта підприємницької чи іншої діяльності.

Ефективність застосування методів управління в основному залежить від рівня кваліфікації керівних кадрів, що зумовлює потребу систематичної і цілеспрямованої підготовки та повсякденного використання всіх зазначених напрямів впливу на колектив і окремих людей.

Економічні методи управління посідають центральне місце в системі наукових методів управління трудовою діяльністю людей, оскільки на їх основі встановлюється цільова програма господарського розвитку окремих підприємств і організацій і визначається такий режим роботи і такі стимули, які об'єктивно спонукають і зацікавлюють колективи і окремих працівників в ефективній праці.

Таким чином, впливом на безпосередні інтереси об'єкта управління створюється механізм його орієнтації на найбільш ефективний режим роботи без повсякденного і безпосереднього втручання зверху. До складу економічних методів управління належать організаційно-виробниче планування, метод комплексних цільових програм, комерційний розрахунок, система економічних регуляторів господарської діяльності [22, с. 45; 52].

Економічні методи управління – це такі методи, які реалізують матеріальні інтереси участі людини у виробничих процесах (будь-якій іншій діяльності) через використання товарно-грошових відносин. Ці методи мають два аспекти реалізації.

Перший аспект характеризує процес управління, зорієнтований на використання створеного на загальнодержавному рівні економічного сегмента зовнішнього середовища. Суть цього аспекту:

- формування системи оподаткування суб'єктів господарювання;
- визначення дійової амортизаційної політики, яка сприяла б оновленню (відтворенню) матеріальних активів підприємства;
- належне формування і здійснення митної політики;
- встановлення державою мінімального рівня заробітної плати та пенсій.

Другий аспект економічних методів управління зв'язано з управлінським процесом, орієнтованим на використання різноманітних економічних важелів, таких як фінансування, кредитування, ціноутворення, штрафні санкції тощо.

Реалізація економічних методів управління здійснюється в рамках системи виробничих відносин між людьми, що входять до складу трудового колективу. Ця система взаємовідносин надзвичайно складна і включає в себе економічні, соціальні, психологічні та організаційні відносини. Останні знаходять своє вираження у вертикальних та горизонтальних зв'язках, що виявляються у формі зацікавленості працівників в організації спільної праці. Для виконання будь-яких робіт виробничого характеру кожен працівник має свої обов'язки, права, відповідальність, які формуються у процесі здійснення функції менеджменту «Організація» [12].

Соціально-психологічні методи управління реалізують мотиви соціальної поведінки людини. Адже рівень сучасного виробництва, зростання загальноосвітнього і професійно-кваліфікаційного рівня працівників зумовлюють суттєві зміни в системі ціннісних орієнтацій та структурі мотивації трудової діяльності людей. Традиційні форми матеріального заохочення поступово втрачають свій пріоритетний стимулюючий вплив.

Під соціальними методами управління розуміють систему засобів і важелів впливу на соціально-психологічний клімат у колективі, на трудову і соціальну активність колективу і його окремих працівників. Методи



соціального управління спрямовані на гармонізацію соціальних відносин у колективі задоволенням соціальних потреб працівників – розвитку особистості, соціального захисту та ін.

До методів соціального управління належать соціальне прогнозування, соціальне нормування, соціальне регулювання та соціальне планування [26, с. 34–35].

Організаційні методи управління базуються на мотивах примусового характеру, їхнє існування й практичне застосування зумовлене заінтересованістю людей у спільній організації праці. Організаційні методи управління – це комплекс способів і прийомів впливу на працівників, заснованих на використанні організаційних відносин та адміністративній владі керівництва. Усі організаційні методи управління поділяють на регламентні й розпорядчі.

Реалізація організаційних відносин у системі відбувається застосуванням організаційно-розпорядчих методів управління, які ще називаються адміністративними. Однак поняття «організаційно-розпорядчі методи управління» більш широке, оскільки адміністративні методи ґрунтуються на застосуванні нормативних актів (постанов, наказів, інструкцій органів влади і управління), а організаційно-розпорядчі методи охоплюють усю суть організаційної складової механізму управління.

Організаційно-розпорядчі методи тісно пов'язані з і економічними методами управління, оскільки вони спрямовані на вирішення єдиних завдань з досягнення цілей господарської діяльності.

Організаційно-розпорядчі методи управління слід застосовувати з врахуванням вимог економічних законів.

Тільки у цьому випадку вони є науково обґрунтованими. Якщо орган управління в своїй діяльності не враховує" або недостатньо враховує вимоги економічних законів, то організаційно-розпорядчі методи можуть перетворитися на адміністративні, бюрократичні, волонтаристські, суб'єктивні методи впливу.

До складу організаційно-стабілізуючих методів управління входять регламентування, нормування й інструктування. Регламентування являє собою досить жорсткий тип організаційного впливу і полягає у розробці та введенні в дію організаційних положень, обов'язкових для виконання протягом певного, визначеного цими положеннями часу. Можна конкретизувати склад регламентуючих організаційних положень. Це, по-перше, положення загальноорганізаційного характеру, яке встановлює організаційну відокремленість і порядок функціонування соціально-економічної системи в цілому. По-друге, це положення, яке визначає і встановлює внутрішній порядок роботи, організаційний статус різних ланок, їх завдання, функції, повноваження та ін. По-третє, це типові структури, які визначають основні риси побудови внутрішніх організаційних основ.

Професійно вміле застосування економічних, соціально-психологічних та організаційних методів управління здебільшого забезпечує достатньо ефективне господарювання [15, с. 81–83].

Практична реалізація функцій управління здійснюється за допомогою системи методів управління. Привести в дію організаційну систему та одержати потрібний результат можна лише за допомогою впливу на неї керівної системи чи особи. Таким чином, необхідні певні інструменти узгодженого впливу, які забезпечують досягнення мети. Такі інструменти називаються методами управління.

Умовно всю сукупність методів управління, залежно від змісту закладених у них інструментів (важелів) та інтересу, можна поділити на економічні й організаційно-правові. До економічних слід віднести методи, способом впливу яких є такі інструменти: ціна, податок, платежі, штрафи, дивіденди, заробітна плата, нормативи тощо, а інтересами – різні економічні результати. Організаційно-правові методи як способи впливу використовують різноманітні дозвільні, установчі та заборонні правові норми. Разом з цим економічні методи діють в органічній єдності з організаційно-правовими методами. Застосування економічних методів повинно підкріплюватися

нормами права: положеннями закону, вказівками, пунктами постанов, наказів та розпоряджень. Тільки так вони набувають юридичної форми.

Усі названі методи управління діяльністю підприємств органічно взаємозв'язані й використовуються не ізольовано, а комплексно. Проте провідними треба вважати саме економічні методи. Економічні методи управління – це такі методи, які реалізуються через матеріальні інтереси участі людини у виробничих процесах (будь-якій іншій діяльності), через використання товарно-грошових відносин. Ці методи мають два аспекти реалізації [14, с. 153–154].

Перший аспект характеризує макроекономічний рівень процесу управління і зорієнтований на використання зовнішнього середовища. Суть цього аспекту полягає у формуванні системи оподаткування суб'єктів господарювання; визначенні дієвої амортизаційної політики, яка сприяла б оновленню (відтворенню) матеріальних і нематеріальних активів підприємства; встановленні державою мінімального рівня заробітної плати та пенсій тощо. Інший аспект економічних методів управління пов'язаний з управлінським процесом, орієнтованим на використання різноманітних економічних важелів – фінансування, кредитування, ціноутворення, штрафні санкції тощо.

Умови розвитку ринкової економіки висувають у свою чергу вимоги до економічних та організаційно-правових методів управління, формуючи основу організаційно-економічного механізму діяльності підприємства. До таких вимог слід, на нашу думку, віднести: максимальну доступність отримання фінансових ресурсів із різних джерел фінансування для підприємств різних форм власності; оптимізацію системи оподаткування; застосування примусових адміністративних заходів, які створюють несприятливі умови діяльності для підприємств у випадку їхньої неефективної роботи.

Оцінюючи стан системи управління підприємством, особливу увагу слід приділяти вмінню управлінського персоналу здійснювати контроль, оцінку і прогнозування економічної ефективності випуску продукції, проводити необхідні розрахунки для обґрунтування рішень, оснащеності управлінського

персоналу необхідним інструментарієм (методами, моделями), забезпечення інформацією та документацією.

Враховуючи багатоманітність типів підприємств, їхні відмінності за масштабами, неможливо розробити єдину типологізовану методика для збору, обробки та аналізу виробничої і фінансової інформації з метою визначення рівня ефективності підприємства. Але без виконання такої роботи складно забезпечити ефективне управління виробничою та комерційною діяльністю кожного підприємства.

Складні взаємозв'язки між елементами економічної діяльності підприємства (обсягом випуску продукції, змінними та постійними витратами, ціною, безбитковістю, прибутком, платоспроможністю, наявністю власних та позикових коштів тощо) не завжди можуть простежуватися персоналом управління підприємством, особливо тією частиною, яка не має достатнього досвіду роботи у ринкових умовах та не володіє сучасним інструментарієм оцінки цих взаємозалежностей. Щоб персонал управління чітко розумів ці взаємозв'язки, їх необхідно подати у вигляді математичних залежностей – моделей, а також проілюструвати ці зв'язки графічно. Застосування управлінським персоналом аналітичних та графічних моделей взаємозв'язків, перерахованих вище параметрів, прискорить процес оцінки ефективності виробництва [22, с. 64–65].

На жаль, складний економічний стан більшості підприємств, скорочення обсягів виробництва нижче точки безбитковості значною мірою обумовлюють невідповідність методів управління, які застосовуються на українських підприємствах, сучасним вимогам. Одним із важливих напрямів прискорення виходу підприємства з кризового стану є спеціальне навчання персоналу ефективним методам управління.

Кризовий стан значної кількості виробничих підприємств обумовлений переважно недостатнім застосуванням на практиці економічного управління індикаторами якості економічного функціонування підприємства, які б своєчасно просигналізували про істотні відхилення від його нормального стану.

Під нормальним економічним функціонуванням підприємства [15, с. 26] слід розуміти такий стан його економічних показників, за якого не порушуються основні економічні закони виробництва (відшкодування або покриття витрат, закон масового виробництва тощо), а економічні показники – рівень прибутку, рентабельність, оборотність тощо – не виходять за певні межі.

Для аналізу причин порушення економічної рівноваги на підприємстві можуть активно використовуватися різні моделі функціонування підприємства, серед яких найінформативнішими, наочними і простими у користуванні є графічні моделі. Графічні моделі, порівняно з аналітичними, наочні, нетрудомісткі і здатні забезпечувати достовірною інформацією про реальний стан підприємства. Їхні переваги полягають у тому, що моделі у вигляді графіків ілюструють розв'язок завдання нормального функціонування підприємства у вигляді графічної лінії взаємної відповідності вхідних координат на вертикальних та горизонтальних осях, за яких досягається задане нормальне (прибуткове) і незадовільне (збиткове) функціонування. Аналізуючи відхилення графічної лінії фактичного стану від нормальної лінії, можна визначити джерела цих відхилень.

Основні графічні моделі, які бажано застосовувати з метою управління ефективністю, повинні мати входи у вигляді відносних економічних змінних і не повинні прив'язуватись до певного виду продукції. Це дасть змогу розглядати їх як універсальний інструментарій при економічній діагностиці, за допомогою якого можна визначати як відносні, так і абсолютні величини відхилення керованих змінних.

Крім економічної діагностики підприємства, можна проводити діагностику його підсистем управління – економічної та організаційної, тому що прорахунки функціонування цих систем можуть викликати відхилення від нормального економічного функціонування підприємства.

Першочерговим практичним завданням у наш час є перетворення методів і моделей економічного управління на форму, пристосовану до оснащення робочих місць персоналу у вигляді універсальної типової документації для

контролю, діагностики, прогнозування економічної поведінки підприємства, підготовки, обґрунтування і прийняття рішень з економічного управління. Але універсальність такої документації забезпечується за допомогою двох методів подання інформації: методу нормування та методу еталонів.

Метод нормування полягає у перетворенні абсолютних економічних змінних у відносні значення порівняльних величин. Метод еталонів базується на застосуванні універсальної аналітичної або графічної функції відповідності взаємних співвідношень між основними економічними змінними випуску чи реалізації продукції, при яких забезпечується фіксований рівень прибутку або збитковості у частках чи процентах собівартості. Завдяки застосуванню цих методів графічно можна зобразити велику кількість можливих сполучень основних економічних змінних, за допомогою яких отримуємо один і той же рівень прибутковості чи збитковості [15, с. 32–35].

### **Загальні відомості про сіткове планування у виробництві**

Одним із найважливіших питань, які виникають при конкретному економічному аналізі виробництва, є питання про вибір і розподіл виробничих програм [8]. Це питання може бути розв'язане дуже багатьма способами – один і той же виріб можна виробляти на різних підприємствах, можна змінювати на кожному з них об'єми планових завдань і т.п. Задачі такого типу розглядаються в літературі багатьма авторами [10; 17; 18]. Звичайною тому є задача вибору такої виробничої програми для кожного підприємства, яка б враховувала його специфіку, тобто підприємство використовувалося б для виготовлення виробів, які на ньому вигідно випускати і в результаті загальний ефект був би найбільшим або загальні затрати були б найменшими [6; 13; 16]. Такий математичний підхід може і повинен замінити механічну розверстку програми, яка ще дуже часто зустрічається; випадковий розподіл, рішення – науково-обґрунтованим розподілом виробничої програми між підприємствами [23; 24]. Для ряду прикладних задач ефективно використовувати спеціальні методи теорії графів, які враховують особливості структури сітьових постановок. Сучасний стан комп'ютерних систем дозволяє успішно використовувати теорію

графів для створення програмних засобів застосування сіткових графіків в управлінні. Методи розв'язування задач у сітьовій постановці мають форму рекурсивних обчислювань, що легко піддається процесу алгоритмізації та реалізації розв'язування таких задач з допомогою комп'ютерних систем.

Система планування і керування – одна з нових форм наукового методу планування складних робіт, у здійсненні яких може брати участь велика кількість виконавців (окремих осіб і організацій). Ця система дозволяє не тільки оцінити складений план і скоригувати його, забезпечивши скорочення термінів роботи і зниження матеріальних витрат, але і дає можливість у процесі виконання плану знаходити «вузькі» ділянки всього комплексу робіт і вносити поправки в організацію роботи в цілому.

У галузі застосування математичних методів до розв'язання економічних задач склалася своєрідна ситуація. Необхідність врахування надмірної кількості вихідних даних і, з іншого боку, неможливість розглянути в потрібні строки всі можливі варіанти, потребує нового підходу до розв'язання таких задач. Цей новий підхід полягає в відшуканні таких впорядкованих послідовностей елементарних обчислювальних операцій, що вели б найкоротшим шляхом до поставленої мети без необхідності «перебору» усіх можливих варіантів.

Чимало задач прикладного характеру пов'язується з упорядкованою множиною точок, під якою розуміються об'єкти, агрегати та інші дискретні елементи, з побудовою конструкцій, які складаються із взаємозв'язаних елементів, з транспортними проблемами тощо.

Такі задачі зручно відображувати схемою, яка складається з точок і відрізків, які з'єднують будь-яку пару точок, якщо такий зв'язок має місце.

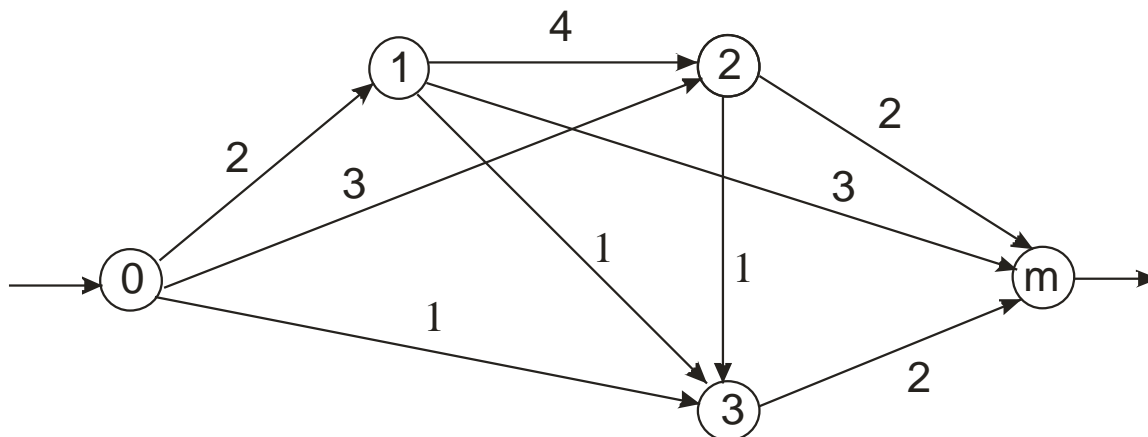
Схема, що має таку структуру, називається графом, а задачі з такими графами зараховують до задач теорії графів. За допомогою цієї теорії розв'язуються задачі, які пов'язані з будуванням схем, з плануванням послідовності виконання робіт, з функціонуванням підсистем, балансові процеси тощо.

Для того, щоб могла відбутися деяка подія (у змісті даного вище визначення), *обов'язково* повинні відбутися деякі інші події. Наприклад, для того, щоб агрегат був зібраний, необхідно, щоб було закінчено виготовлення тих вузлів, із котрих цей агрегат повинен складатися. Таким чином, події – «закінчення складання агрегату» – повинні передувати такі події, як закінчення робіт із виготовлення тих вузлів, що доручено окремим виконавцям. Виняток складає тільки одна подія, яка завжди виділяється при упорядкуванні мережевого графіка, це – «початок робіт даного комплексу» – найперша подія, що визначає момент початку робіт, що входять у дану «велику роботу». Якщо які-небудь дві події володіють такою властивістю, що одна з них (скажімо, перша) *обов'язково* повинна передувати іншій (другій), причому, якщо між цими двома подіями ми не включили більше ніяких проміжних подій, то перша подія називається *попередньою* стосовно іншої, а друга називається наступною стосовно *першої*.

Граф є одним із способів графічного представлення інформації про склад та структуру деякої системи. Розглянемо додаток лінійного програмування для розв'язку так званих *сіткових задач*. Нехай нам задана деяка транспортна мережа (трубопровід, залізна дорога, телефонна мережа та ін.), по якій ми хочемо переміщувати деякі однорідні одиниці (нафту, автомобілі, повідомлення та ін.) з однієї точки мережі (пункт відправлення) в іншу (пункт призначення). Крім них мережа включає в себе множину проміжних вузлових пунктів, з'єднаних між собою з першими двома. Вузлові пункти при цьому можна інтерпретувати, як роздоріжжя транспортних шляхів. Домовимось позначити пункт відправки цифрою 0, пункт призначення – літерою  $m$ , а вузлові пункти – їх порядковими номерами, тоді загальна кількість вузлів може бути від 0 до  $m$ . Домовимось позначати шлях, який зв'язує вузлові пункти (наприклад, 2 і 3), записом  $(2,3)$  або, в загальному випадку,  $(i, j)$ . Звернемо увагу, що зв'язки, зображені в такій мережі, є направленими, тобто потік вантажу вздовж кожного з цих шляхів відбувається в напрямку, вказаному стрілкою. Причому їх пропускна здатність обмежена (трубопровід може пропускати тільки конкретну



кількість нафти за годину, лінія зв'язку обслуговує конкретну кількість викликів в день і т.д.). Позначимо максимальну пропускну здатність кожного з шляхів через  $f_{ij}$ , наприклад на рис. 1.2, максимальний потік  $f_{23}$ , який пропускається шляхом (2, 3), рівний 1.



**Рис. 1.2. Сіткова модель завдання (потік мінімальної вартості)**

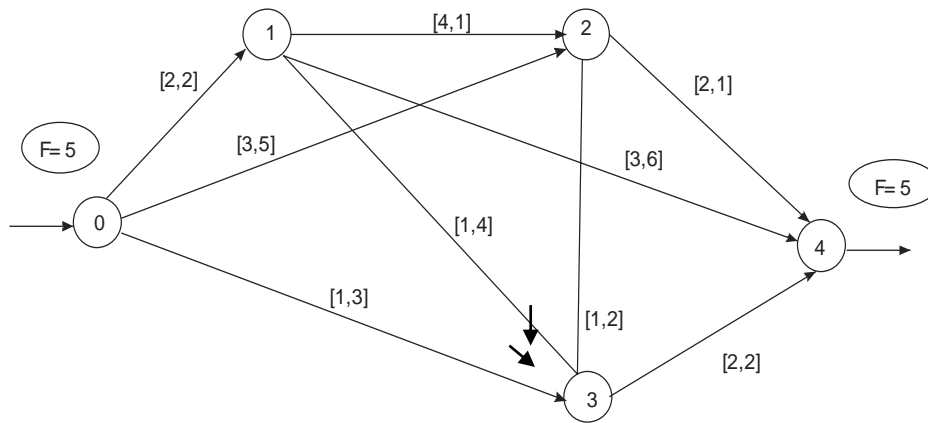
При транспортуванні потік деякого вантажу прямує з пункту 0 по різних шляхах через вузлові пункти в пункт призначення до тих пір, поки весь цей вантаж не попаде в пункт  $m$ . Це означає, що ми накладаємо на мережу умову збереження потоку в проміжних вузлах: все, що потрапляє в такий вузол, повинно повністю залишити його.

### **Задача (сіткова модель) про потік мінімальної вартості**

Нехай задана деяка мережа, яка відображає процес доставки однорідного вантажу з пункту відправки 0 в пункт призначення  $m$ . З кожним шляхом  $(i, j)$  зв'язана вартість  $C_{ij}$  транспортування одиниці вантажу з пункту  $i$  в пункт  $j$ . Всього з пункту відправки 0 в пункт призначення  $m$  повинна бути доставлена певна кількість  $(F)$  одиниць вантажу таким чином, щоб зальна вартість транспортування була мінімальною. Припустимо, що у вузлах виконується умова збереження потоку і що потік  $X_{ij}$  вздовж шляху  $(i, j)$  – кількість вантажу, доставленого з вузлового пункту  $i$  в пункт  $j$ , невід'ємний і обмежений, тобто  $0 \leq X_{ij} \leq f_{ij}$ .

Нехай загальний потік  $F = 5$  при  $m = 4$ . Вартість транспортування  $C_{ij}$  і верхню границю  $f_{ij}$  для кожного шляху записуватимемо у вигляді пари чисел

$[f_{ij}, C_{ij}]$ , наприклад на рис.1.3. для шляху (2, 3) позначення  $[1, 2]$  відповідає  $f_{23} = 1$  і  $C_{23} = 2$ .



**Рис. 1.3. Сіткова модель доставки однорідного вантажу**

Вихідні дані, представлені на рис. 1.3, можна зобразити у табличній формі:

Таблиця 1.1

**Вихідні дані для перевезення вантажу**

Верхня границя потоку вантажу		Вартість $C_{ij}$		Фактичний потік вантажу вздовж шляху $(i, j)$
$F_{01}$	2	$C_{01}$	2	$X_{01}$
$F_{02}$	3	$C_{02}$	5	$X_{02}$
$F_{03}$	1	$C_{03}$	3	$X_{03}$
$F_{12}$	4	$C_{12}$	1	$X_{12}$
$F_{13}$	1	$C_{13}$	4	$X_{13}$
$F_{14}$	3	$C_{14}$	6	$X_{14}$
$f_{23}$	1	$C_{23}$	2	$X_{23}$
$f_{24}$	2	$C_{24}$	1	$X_{24}$
$f_{34}$	2	$C_{34}$	2	$X_{34}$

Суть цієї задачі полягає у мінімізації сумарної вартості перевезення вантажу, тобто дана цільова функція повинна досягнути мінімуму.

Побудуємо математичну модель для заданої мережі. Цільова функція:

$$2 X_{01} + 5X_{02} + 3 X_{03} + X_{12} + 4 X_{13} + 6X_{14} + 2 X_{23} + X_{24} + 2 X_{34}.$$

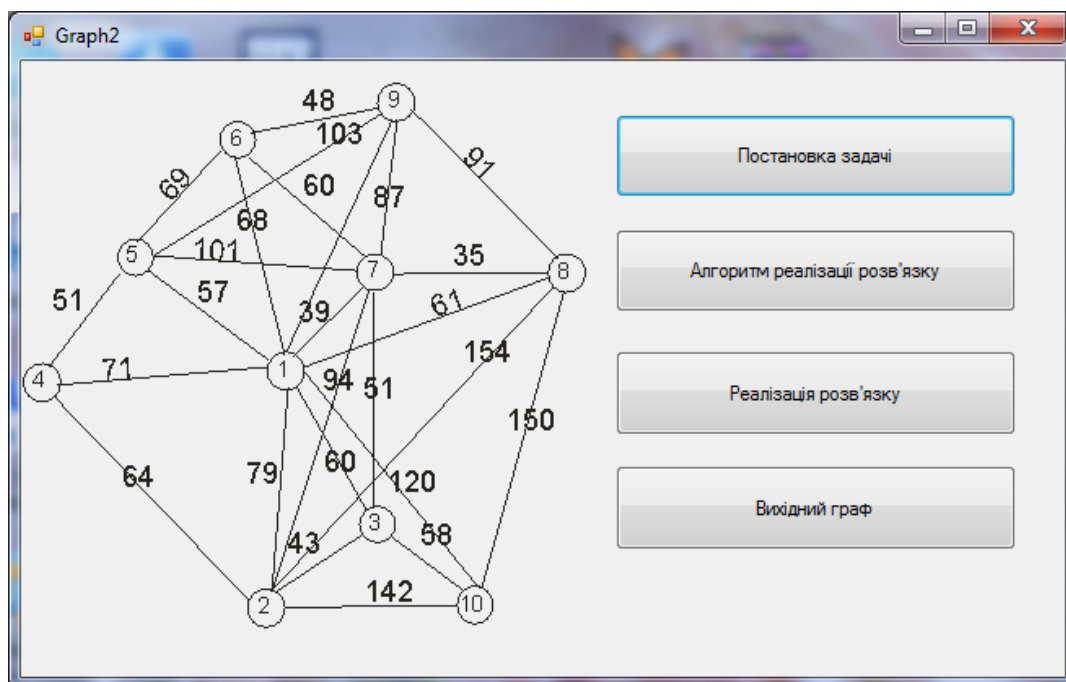
Граничні умови (впливають з накладених обмежень):

## Обмеження, що накладаються

$X_{01}$	$+ X_{02}$	$+ X_{03}$							$= 5$
$X_{01}$			$+ X_{12}$	$+ X_{13}$	$+ X_{14}$				$= 0$
	$- X_{02}$		$- X_{12}$			$+ X_{23}$	$+ X_{24}$		$= 0$
		$- X_{03}$		$- X_{13}$		$- X_{23}$		$+ X_{34}$	$= 0$
				$- X_{14}$		$- X_{24}$	$- X_{34}$		$= - 5$
$X_{01}$									$\leq 2$
	$X_{02}$								$\leq 3$
		$X_{03}$							$\leq 1$
			$X_{12}$						$\leq 4$
				$X_{13}$					$\leq 1$
					$X_{14}$				$\leq 3$
						$X_{23}$			$\leq 1$
							$X_{24}$		$\leq 2$
								$X_{34}$	$\leq 2$

Продемонструємо розв'язок цієї задачі з допомогою системи програмування C++ (для часткової реалізації розв'язку і побудови графа) і складової офісного пакету MS Excel (яка частково може використовуватися для моделювання розв'язків задач лінійного програмування).

- 1) Головна форма, з якої стартують всі підрозділи розв'язку, має вигляд



2) По черзі відкриваємо постановку задачі

Постановка задачі

Нехай задана деяка мережа, яка відображає процес доставки однорідного вантажу з пункту відправки 0 в пункт призначення  $m$ . З кожним шляхом  $(i, j)$  зв'язана вартість  $C_{ij}$  транспортування одиниці вантажу з пункту  $i$  в пункт  $j$ . Всього з пункту відправки 0 в пункт призначення  $m$  повинна бути доставлена певна кількість ( $F$ ) одиниць вантажу таким чином, щоб загальна вартість транспортування була мінімальною. Припустимо, що у вузлах виконується умова збереження потоку і що потік  $X_{ij}$  вздовж шляху  $(i, j)$  - кількість вантажу, доставленого з вузлового пункту  $i$  в пункт  $j$ , невід'ємний і обмежений, тобто  $0 \leq X_{ij} \leq f_{ij}$ .

Нехай загальний потік  $F = 5$  при  $m = 4$ . Вартість транспортування  $C_{ij}$  і верхню границю  $f_{ij}$  для кожного шляху записуватимемо у вигляді пари чисел  $[f_{ij}, C_{ij}]$ , наприклад на рис.2.6. для шляху  $(2, 3)$  позначення  $[1, 2]$  відповідає  $f_{23}=1$  і  $C_{23}=2$ .

Верхня границя потоку вантажу		Вартість $C_{ij}$		Фактичний потік вантажу вздовж шляху $(i, j)$
$f_{ij}$	$C_{ij}$	$f_{ij}$	$C_{ij}$	
$F_{01}$	2	$C_{01}$	2	$X_{01}$
$F_{02}$	3	$C_{02}$	5	$X_{02}$
$F_{03}$	1	$C_{03}$	3	$X_{03}$
$F_{12}$	4	$C_{12}$	1	$X_{12}$
$F_{13}$	1	$C_{13}$	4	$X_{13}$
$F_{14}$	3	$C_{14}$	6	$X_{14}$
$f_{23}$	1	$C_{23}$	2	$X_{23}$
$f_{24}$	2	$C_{24}$	1	$X_{24}$
$f_{34}$	2	$C_{34}$	2	$X_{34}$

Суть цієї задачі полягає у мінімізації сумарної вартості перевезення вантажу, тобто дана цільова функція повинна досягнути мінімуму.

3) Представляем граф маршрутов и реализацию развязки

The image displays a software interface for solving a routing problem. It consists of three main components:

- GraphDraw:** A window showing a graph with 6 nodes (labeled 1-6) and several edges connecting them. Nodes 1, 2, 3, and 4 are highlighted in cyan.
- Excel Spreadsheet:** A window titled "Алгоритм розв'язку" showing a table with columns A, B, C, D and rows 1-13. The table contains data for flow limits and costs.
 

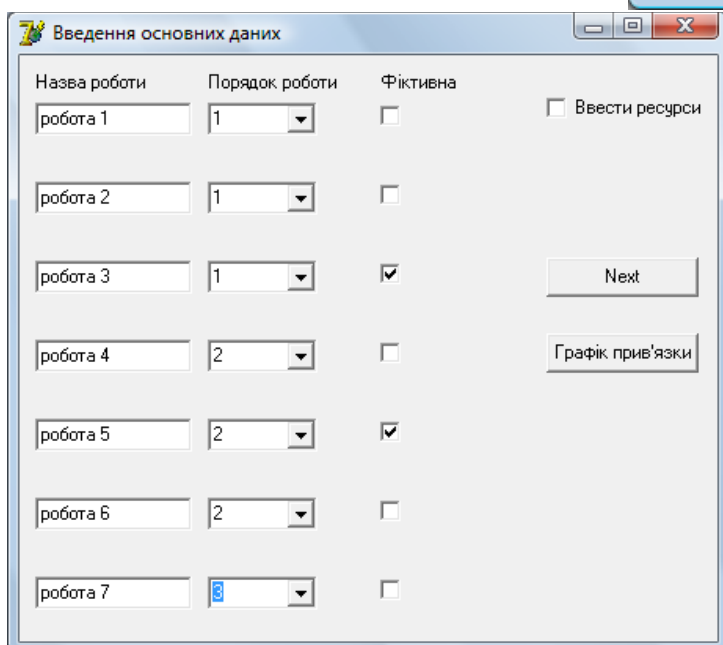
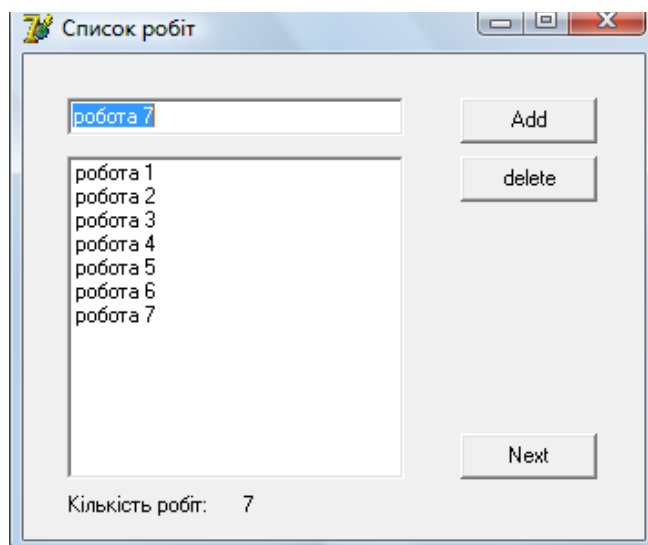
	A	B	C	D
1				
2	F <sub>01</sub>	2	C <sub>01</sub>	2
3	F <sub>02</sub>	3	C <sub>02</sub>	5
4	F <sub>03</sub>	1	C <sub>03</sub>	3
5	F <sub>12</sub>	4	C <sub>12</sub>	1
6	F <sub>13</sub>	1	C <sub>13</sub>	4
7	F <sub>14</sub>	3	C <sub>14</sub>	6
8	f <sub>23</sub>	1	C <sub>23</sub>	2
9	f <sub>24</sub>	2	C <sub>24</sub>	1
10	f <sub>34</sub>	2	C <sub>34</sub>	2
11				
12				
13				
- Dialog Box:** A window titled "Алгоритм розв'язку" with the subtitle "Параметры поиска решения". It contains the following settings:
  - Optimize objective function:  $SH\$4$
  - To:  Maximum  Minimum  Values of: 0
  - Change variable cells:  $SE\$2:SE\$10$
  - Subject to the constraints:
    - $SE\$10 \leq SB\$10$
    - $SE\$2 \leq SB\$2$
    - $SE\$2:SE\$10 = \text{integer}$
    - $SE\$2:SE\$10 \geq 0$
    - $SE\$3 \leq SB\$3$
    - $SE\$4 \leq SB\$4$
    - $SE\$5 \leq SB\$5$
    - $SE\$6 \leq SB\$6$
    - $SE\$7 \leq SB\$7$
    - $SE\$8 \leq SB\$8$
    - $SE\$9 \leq SB\$9$
    - $SH\$5 = 5$
    - $SH\$6 = 5$
  - Make variables without constraints non-negative
  - Choose solving method: Поиск решения нелинейных задач методом ОПГ

## Використання систем програмування для моделювання розв'язків задач сіткового планування

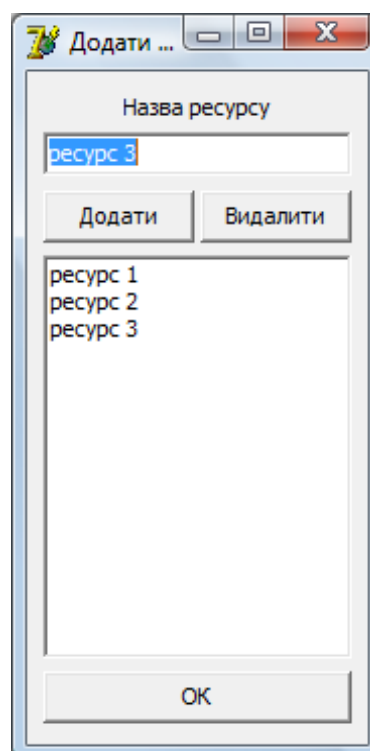
Створено проект в Delphi, який  
дозволяє:

1. Вводити всі наявні  
роботи у потрібній кількості

2. Задавати порядок для  
кожної роботи і зазначати її  
фіктивність/нефіктивність



3. Вводити кількість ресурсів



4. Для кожної роботи задавати загальну ресурсоемність і затрати для кожного ресурсу кожної роботи на одиницю часу, а також задавати дату початку проекту.

Введення основних даних

Назва роботи: робота 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7  
 Порядок роботи: 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3  
 Фіктивна: , , , , , ,

Ввести ресурси

Дата початку проекту: 21.11.2016

Next

Затрати ресурсів на один день

	ресурс 1	ресурс 2	ресурс 3
робота 1	1	2	4
робота 2	5	1	5
робота 3	0	0	0
робота 4	2	0	3
робота 5	0	0	0

Загальна ресурсоемність робіт

	ресурс 1	ресурс 2	ресурс 3
робота 1	34	55	12
робота 2	52	56	32
робота 3	0	0	0
робота 4	56	0	62
робота 5	0	0	0

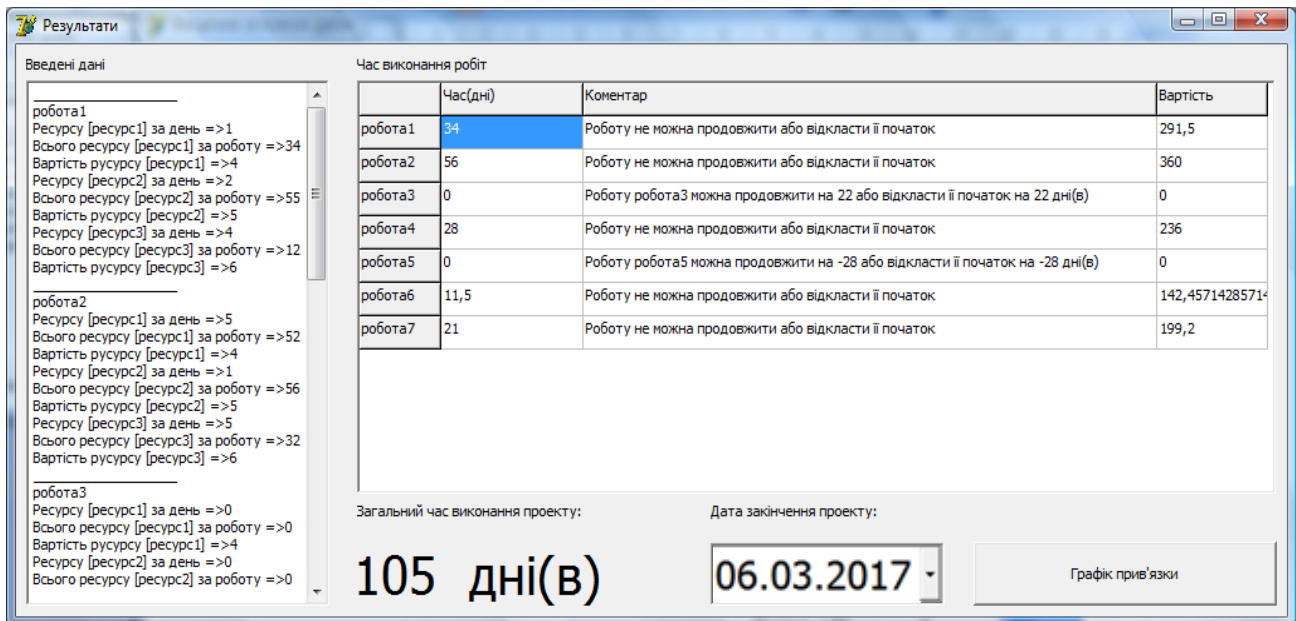
Вартість ресурсів

Вартість	4	5	6

Відповідно до затрат кожного ресурсу для певної роботи, знаючи загальну ресурсоемність цієї роботи визначати тривалість виконання цієї роботи. Якщо деякі роботи будуть виконуватись паралельно, то їх тривалість виконання може не співпадати. Отже ми можемо визначити, яку роботу можна продовжити по тривалості (якщо вона не використовує затрат ресурсів), або відкласти її початок (якщо для неї потрібні затрати ресурсів).

Результатом роботи програми є інформація про:

- 1) тривалість проекту в цілому;
- 2) тривалість кожної роботи окремо;
- 3) можливість перенесення строку виконання окремої роботи;
- 4) дату завершення проекту.



Основними параметрами графіка є ті або інші часові оцінки. Справді, усі вони виражалися через довжини різноманітних шляхів, що є, у свою чергу, сумами довжин дуг – тривалостей окремих робіт.

У результаті аналізу графіка керівництво «великою» роботою одержувало зведення про те, які роботи є самими напруженими за часом, які мають резерви часу. За рахунок збільшення тривалості «другорядних» (із точки зору термінів) робіт можна перекинути ресурси на критичні (по термінах) роботи і тим самим забезпечити виконання графіка в термін або навіть достроково.

Але ми цілком не торкалися питання про те, як це треба робити, тобто скільки і яких ресурсів варто передати з одних робіт на інші, щоб розподілити всі ресурси найбільше вигідно – оптимальним чином з погляду, наприклад, якнайшвидшого виконання всієї «великої» роботи. Справа в тому, що при будь-якому перекиданні ресурсів змінюється графік.

Занадто великі затримки «другорядних» робіт можуть перетворити їх у критичні і навіть не скоротити а, навпаки, уповільнити виконання графіка в цілому. При цьому самою головною обставиною є той факт, що в переважній більшості випадків усі види ресурсів – робоча сила, устаткування, енергетика,



фінанси і т.п., у кожній даній роботі *обмежені*, тобто по кожному виду ресурсів існує межа, більше якої даний ресурс витратити не можна.

Задачі оптимального розподілу обмежених ресурсів по роботах мережевого графіка являють собою складні математичні задачі, характер яких залежить як від складності самого графіка, так і від тої величини, що ми намагаємося оптимізувати. Ця величина знову може бути часом – тоді задача ставиться так: треба розподілити ресурси таким чином, щоб виконати графік у мінімальний термін. Але ця величина може бути і вартістю: треба розподілити ресурси так, щоб при заданій тривалості проведення всієї роботи одержати мінімальну вартість її виконання.

Нарешті, це можуть бути і самі ресурси: треба мінімізувати споживання ресурсів при заданому часі проведення «великої» роботи. При цьому щоразу необхідно виходити з того логічного взаємозв'язку черговості виконання всіх робіт, що задана вихідним мережевим графіком. Саме ця остання обставина накладає на задачі оптимізації при сітковому плануванні характерні специфічні обмеження.

Пояснимо сказане наступним прикладом. Припустим, що ресурси надходять щодня, у різноманітних кількостях. Тоді, якщо ряд робіт, занумерованих на графіку з правильною нумерацією «великими» цифрами, потребує якогось специфічного виду ресурсу, то до початку цих робіт, тобто до виконання всіх попередніх їм робіт, даний вид ресурсу цілком непотрібний. Ніякий перерозподіл ресурсу тут не може допомогти, необхідно перерозподілити терміни постачань різноманітних ресурсів.

Задачі оптимального розподілу ресурсів у самому загальному виді – при наявності  $k$  видів різноманітних обмежених ресурсів, які споживаються на  $N$  різних роботах, швидкості виконання яких є деякими довільного виду функціями від кількості ресурсів, причому роботи пов'язані в мережевий графік настільки складні, що до їхнього рішення ще і не приступали. До теперішнього часу розв'язаний ряд окремих, часткових задач, у які введені дуже серйозні

математичні обмеження на залежності часу виконання робіт від кількості наявних ресурсів.

У більшості випадків подібні задачі або вирішуються спеціальними напівграфічними алгоритмами, або зводяться до відомих в математиці задач лінійного (або опуклого) програмування. Ми розглянемо тут декілька задач по оптимізації мережевих планів методами лінійного програмування.

Насамперед, нагадаємо суть методу лінійного програмування.

Задачами лінійного програмування називаються задачі, у яких потрібно відшукати значення невідомих змінних величин  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , які задовольняють лінійним обмеженням виду:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &< b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &< b_2; \\ \dots &\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &< b_m, \end{aligned} \quad (1)$$

(усього  $m$  обмежень;  $m < n$ ) і які володіють тією властивістю, що деяка лінійна функція (названа «цільовою функцією»)

$$y = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \quad (2)$$

досягає при цьому свого максимального або мінімального значення.

Сукупність невід'ємних чисел  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , які задовольняють умовам (1, 2), називається *допустимим розв'язком задачі* лінійного програмування. Допустимий розв'язок, при якому досягається максимум (або мінімум) цільової функції  $y$ , і називається *оптимальним розв'язком*.

У реальних задачах лінійного програмування, у тому числі й у задачах, що ставляться до мережевих графіків, є десятки і навіть сотні обмежень і невідомих. Тому перебір усіх допустимих розв'язків, кількість яких дуже велика навіть у задачах із вимогою цілочисельності всіх невідомих, не під силу навіть ПК. Єдиними прийнятними засобами розв'язання таких задач є різноманітні алгоритми, що дозволяють шляхом послідовних «кроків» – переходу від одного допустимого розв'язку до іншого, порівняно коротким шляхом добиратися до оптимального розв'язку, минаючи безліч непотрібних варіантів.

Пояснимо суть подібних алгоритмів. З погляду «n-мірної геометрії» обмеження задачі лінійного програмування представляються рівнянням площин у n-мірному евклідовому просторі. Сукупність обмежень виділяє в цьому просторі деякий опуклий многогранник, аналогічний опуклому многокутнику на площині. Якщо це не так, тобто якщо не існує опуклого многогранника, точки якого задовольняють обмеженням задачі, то задача нерозв'язна, тому що умови несумісні.

Якщо ж існує, то підстановка значень  $x_1, x_2, \dots, x_n$  у цільову функцію дає число, пропорційне «відстані» від точки  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  до площини, рівняння якої є цільовою функцією. Задача лінійного програмування полягає в тому, щоб знайти, принаймні, одну вершину многогранника, найбільше близьку (у випадку пошуків мінімуму) або найбільше віддалену (у випадку пошуків максимуму) від «площини», що описується рівнянням цільової функції.

Суть алгоритмів полягає в тому, що, рухаючись від вершини многогранника до вершини, потрапляють, зрештою, у вершини, що володіють зазначеними «екстремальними» властивостями. При цьому немає ніякої необхідності перевіряти різноманітні внутрішні точки многогранника і, взагалі, усі точки, відмінні від його вершин.

Якщо обмеження, що накладаються на змінні, мають різноманітний характер, а саме:

одні нерівності мають вид

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n < b_k,$$

а інші –

$$a_nx_1 + a_nx_2 + \dots + a_nx_n > b_1,$$

то шляхом відповідних заміन змінних задача зводиться до попередньої, якщо тільки вона має допустимі розв'язки.

Покажемо тепер, яким чином деякі задачі оптимізації мережевих планів можуть бути сформульовані в такому вигляді, що припускає їхнє зведення до відомих задач лінійного програмування.

Найбільше природньо це вдасться зробити в задачах про оптимізацію вартості комплексу робіт, поданого мережевим графіком. Ми зараз розглянемо подібну задачу, проте, заздалегідь обмовимося, що заради зведення її до задачі лінійного програмування прийдеться вводити не дуже природне допущення про те, що вартість виконання кожної роботи графіка в залежності від її тривалості задається *лінійною* формулою виду:

$$c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}t_{ij}, \quad (3)$$

де  $c_{ij}$  – вартість роботи, а  $a_{ij}$  і  $b_{ij}$  – деякі позитивні константи. Якщо прийняти це припущення, то виникає така задача: при знайденому критичному шляху так використовувати резерви, наявні в некритичних роботах, щоб одержати план робіт, мінімальний по вартості.

Задача ця зводиться до задачі лінійного програмування в такий спосіб.

Позначимо сукупність критичних робіт через  $L_{кр}$ . Тоді в оптимальному по вартості плані некритичні роботи необхідно «затягти» на такий термін (заради зниження вартості), щоб усі вони стали критичними. Проблема полягає в тому, як розподілити між різноманітними некритичними роботами наявні резерви часу, щоб одержати найбільший вигаш у грошах. Оскільки усі роботи оптимального плану критичні, то для усіх них справедливе співвідношення:

$$t_{ij} = T(j) - T(i) \quad (4)$$

оскільки усі  $T_p(i) = T_n(i)$ .

З іншого боку, якщо тривалості некритичних робіт до оптимізації складали величини  $t_{ij}^{(0)}$ , то оптимальні тривалості можуть бути тільки більшими, ніж  $t_{ij}^{(0)}$  тобто

$$T(j) - T(i) > t_{ij}^{(0)}. \quad (5)$$

Так як здешевлення проводиться тільки за рахунок некритичних (спочатку) робіт, то задача зводиться до відшукування *мінімуму* цільової функції

$$y = \sum (a_{ij} - b_{ij} t_{ij}) = \sum \{a_{ij} - b_{ij} [T(j) - T(i)]\} \quad (6)$$

при обмеженнях

$$\begin{aligned} T(j) - T(i) &\geq t_{ij}^{(0)} h_j h_i, \\ T(i) &= T^{(0)}(i) \end{aligned} \quad (7)$$

(перше для всіх робіт, що не входять у  $L_{kp}$ ; друге для всіх подій, що входять в  $L_{kp}$ .)

Легко бачити, що це – типова задача лінійного програмування. Те, що нам досить швидко вдалося її сформулювати, пояснюється в даному випадку прозорим змістом цільової функції, яка із самого початку задана умовами задачі.

Якщо припустимо, заради здешевлення вартості всіх робіт, закінчити «велику» роботу за час, більший довжини критичного шляху, скажемо, за час  $T > T_{kp}$ , то в якості змінних можуть бути використані і терміни настання подій, що лежать на критичному шляху, так як критичні роботи також можуть бути збільшені по тривалості, якщо це економічно вигідно. У цьому випадку задача дещо змінюється, тому що потрібно знайти мінімум цільової функції:

$$y = \sum \{a_{ij} - b_{ij} [T(j) - T(i)]\}, \quad (8)$$

де сумування поширене на всі роботи мережевого графіка при обмеженнях:

$$\begin{aligned} T(j) - T(i) &> t_{ij}^{(0)} \text{ для усіх } (i, j); \\ T(n) &= 0 \text{ і } T(n) \leq T. \end{aligned} \quad (9)$$

У обох розглянутих прикладах роль змінних відіграють величини, на які і накладені лінійні обмеження.

Тепер звернемося до більш складного прикладу – до задачі про розподіл обмежених ресурсів, що забезпечує виконання великої роботи в мінімально можливий термін. Задача ця формулюється так.

Сукупність робіт мережевого графіка виконується з витратою  $k$  видів ресурсів. У найпростішому випадку кількість кожного ресурсу протягом усього терміна виконання плану постійна, у більш загальному – по-різному в різноманітні дні (тижні або місяці), тобто складає функцію часу. Ми

розглянемо найбільш простий випадок, коли всі роботи мережевого графіка виконуються за допомогою того самого ресурсу (скажемо, робочої сили) і щоденна кількість цього ресурсу (тобто число робітників) постійна і дорівнює розміру  $c$  (у даному випадку, зрозуміло,  $c \in \mathbb{Z}$ ).

Завдання полягає в тому, щоб так визначити час початку кожної роботи (у межах можливих зсувів, що допускаються всією структурою мережевого графіка), щоб виконати всю «велику» роботу в мінімально можливий термін.

При цьому тривалість кожної роботи буде залежати від того, яка кількість ресурсу буде нами виділена для проведення цієї роботи. Так як, взагалі кажучи, тривалість виконання даної роботи залежить від кількості її виконавців нелінійно, то така задача ніяк не може бути зведена до задачі лінійного програмування. Тому нам доведеться ввести додаткове спрощення. А саме, нам доведеться припустити, що кожна робота повинна виконуватися строго визначеною, постійною кількістю робітників.

Математично це означає, що щоденне споживання даного ресурсу, так звана інтенсивність споживання ресурсу, що позначається символом  $B_{ij}$ , для кожної роботи є величина постійна. Таким чином, кожна  $B_{ij} = \text{const}$  для всіх робіт  $(i,j)$  нашого мережевого графіка. Назвемо обсягом роботи (по дану виду ресурсу) добуток її інтенсивності на її тривалість, тобто величину  $V_{ij} = B_{ij}t_{ij}$ . Тепер ми можемо математично висловити ту обставину, що мережевий графік не може бути виконаний раніше, ніж дозволяє наявність даного ресурсу. Так як обсяг усіх робіт графіка в наших позначеннях дорівнює

$$V = \sum V_{ij}, \text{ людино-днів,} \quad (10)$$

то величина

$$T_{\text{рес}} = \frac{1}{c} \sum V_{ij} \text{ днів} \quad (11)$$

визначає мінімально допустиму тривалість усієї «великої» роботи через обмеженість ресурсу. Але, з іншого боку, ця тривалість не може бути меншою довжини критичного шляху нашого мережевого графіка, тобто величини

$l_{kp} = l_{\max}^{0,n}$ . Таким чином, при оптимальному розподілі ресурсу (тобто при оптимальному виборі допустимих моментів початку кожної роботи) мінімальна тривалість усієї «великої» роботи не може бути меншою ніж найбільша з цих двох оцінок, тобто

$$T_{\max} \geq \max\{l_{kp}, T_{\text{рес}}\}. \quad (12)$$

Задача лінійного програмування буде полягати в тому, щоб намагатися можливо ближче наблизитися до цієї нижньої межі за рахунок єдиної допустимої процедури – вибору дозволених графіком термінів початку і закінчення кожної із робіт, тобто термінів настання подій мережевого графіка.

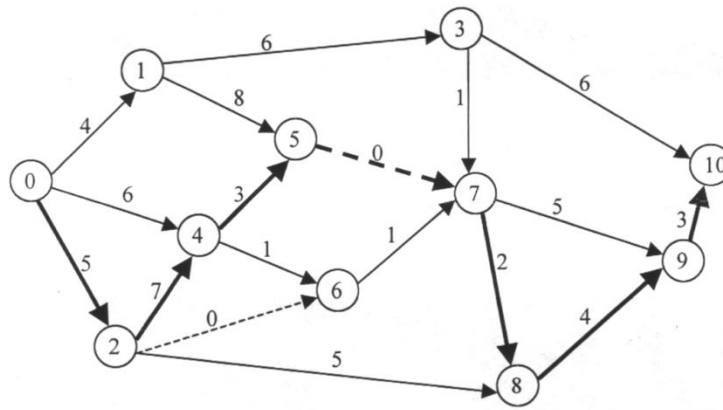
Перед тим, як перейти до математичного формулювання цієї задачі, необхідно буде ввести ще декілька визначень і позначень.

Ми бачимо, що навіть така спрощена постановка задачі потребує дуже значної формалізації.

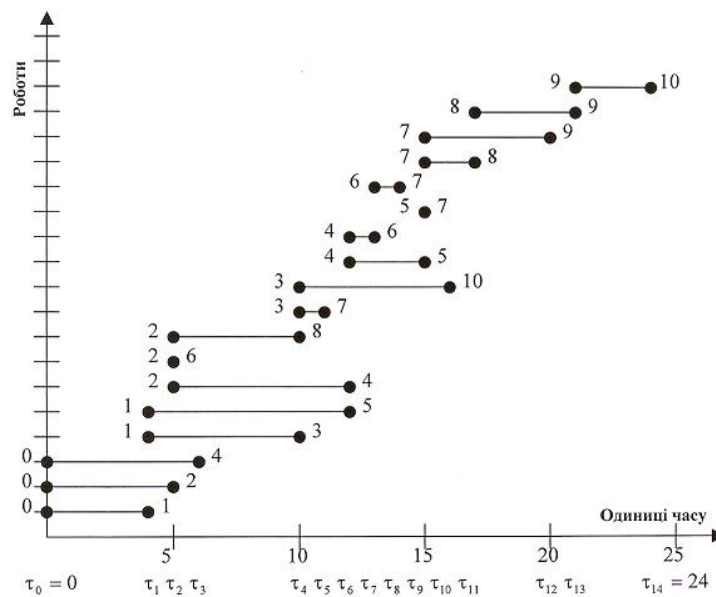
Це не випадково. Труднощі, пов'язані з необхідністю урахування всіх логічних взаємозв'язків між подіями і роботами, як ми вже говорили, роблять математичне формулювання (навіть формулювання, не говорячи вже про розв'язання) оптимальних задач сіткового планування справою значної складності. Обмежимося цим зауваженням і продовжимо наші міркування далі.

Назвемо фронтом робіт деяку сукупність робіт графіка, які графік дозволяє вести *одночасно*. Наприклад, на графі рис. 1.4 роботи (0, 7), (0, 4) і (0, 2) утворюють фронт робіт. Зручніше усього пояснити це поняття на так званій «лінійній діаграмі». На рис. 1.5. побудована лінійна діаграма для графа на рис. 1.4. По осі абсцис на цій діаграмі відкладені одиниці часу, прийняті на графіку, скажемо – дні.

По осі ординат розміщені роботи (у «словниковому порядку»), причому, як очевидно з діаграми, початок кожної роботи  $(i, j)$  віднесено до найбільш раннього терміну настання події  $i$ , тобто до  $T_p(i)$ . Тоді всі роботи, що перетинають якусь вертикальну пряму, утворять те, що ми назвали фронтом робіт.



**Рис. 1.4. Сіткова модель завдання**



**Рис. 1.5. Лінійна діаграма сіткового графіка**

З рис. 1.5. очевидно, що наступним за фронтом робіт  $F_1$  (0, 1), (0, 2), (0, 4) буде фронт  $F_2$  робіт (0, 2), (0, 4), (1, 3), (1, 5), тривалість якого по осі абсцис складає усього одну одиницю часу. Наступним фронтом  $F_3$  буде фронт робіт (0, 4), (1, 3), (1, 5), (2, 4) і (2, 8), що продовжується також тільки одну одиницю часу (оскільки закінчується робота (0, 4)) і т.д. Буквами  $t_m$  на діаграмі позначені моменти, на які припадають початки або кінці робіт.

Таким чином, кожний фронт робіт на даній конкретній лінійній діаграмі продовжується між двома сусідніми значеннями  $\tau_T$ .

Так як інтенсивності всіх робіт постійні, якщо проводити роботи відповідно до діаграми, тобто почати їх у моменти  $T_p(i)$ , то «велика» робота



буде закінчена за час, обумовлений у точності довжиною критичного шляху. Так було б, якби ресурс не був обмежений. Проте обмеження, що накладається на ресурс, може привести до того, що для виконання деякого фронту робіт не вистачить наявного ресурсу і тоді частину робіт цього фронту неминуче прийдеться відсувати на більш пізні терміни, тобто на нашій лінійній діаграмі вправо.

Пересування будь-якої роботи, що не має вільного резерву часу, спричинить пересування інших робіт, розташованих на графіку вправо від даної. Тільки ті роботи, що мають вільний резерв часу, наприклад, робота  $(0,4)$ , можуть бути посунуті на величину свого  $r_c(i,i)$ , не викликаючи інших змін на графіку. Проте коли ми зобов'язані враховувати обмеження ресурсу, можливо прийдеться відсувати і такі роботи, що призведуть до зсуву навіть кінцевої події  $10$ , тому що формула (12) може зажадати вибору  $T_{min}$ , що перевершує довжину критичного шляху.

Вищенаведене міркування показує, яким шляхом ми маємо право оптимізувати наш графік у даній задачі. Існують алгоритми подібної оптимізації, що складаються в правилах пересування «вправо», крок за кроком робіт кожного фронту, що перед цим щораз упорядковують у залежності від резервів часу, які виявляються в них у даний момент. Подібні «евристичні» алгоритми дають часто непогане наближення до оптимального розв'язку. Але тут ми поставили перед собою мету – звести дану задачу до задачі лінійного програмування.

Сумарний ресурс, необхідний для виконання робіт кожного фронту

$$F_x \in U_k = \sum B_{ij}. \quad (13)$$

Цей ресурс – інтенсивність фронту робіт – зберігається постійним між кожними двома «відзначеними» на нашій лінійній діаграмі сусідніми моментами  $t_m$  і  $t_{m+1}$ . А моменти  $t_m$  є не що інше, як моменти *фактичного* початку або закінчення всіх робіт нашого мережевого графіка. Якщо деякі  $B_k > c$ , то такий фронт робіт нездійснений, тому що для нього не вистачає

ресурсу. Розглядаючи даний мережевий графік, побудуємо всі можливі фронти робіт, нехай це будуть  $F_1, F_2, \dots, F_N$ .

Наприклад, діаграма на рис. 1.5. дає можливість побудувати двадцять чотири різноманітних фронти робіт. Проте цими двадцятьма чотирма фронтами робіт не вичерпуються усі варіанти фронтів, дозволені нашим мережевим графіком. Справа в тому, що початки робіт можуть бути переміщені вправо на діаграмі, якщо у робіт є резерви часу. Проводячи всі такі можливі переміщення і розглянувши на різноманітних лінійних діаграмах усі фронти робіт, що утворюються при цьому, ми можемо всі різноманітні фронти робіт виписати в один рядок. Це і буде необхідна сукупність  $F_1, F_2, \dots, F_N$ .

Частина з цих фронтів принципово нездійсненна через те, що для одночасного проведення всіх робіт, що входять у даний фронт, не вистачає ресурсу (скажемо, робочої сили). Знаючи ресурс, викинемо з рядка всі нездійсненні фронти, для яких  $B_k > c$ . Тривалість кожного з  $M$  фронтів робіт, що залишилися, тобто відстані між сусідніми точками  $t_m$  і  $t_{m-1}$ , позначимо через  $x_m$ :  $x_m = t_m - t_{m-1}$ ;  $m = 1, 2, \dots, M$  (на рис. 1.5. маємо:  $t_0 = 0, t_1 = 4, t_2 = 5, t_3 = 6, t_4 = 10$  і т.д.).

Тепер ми повинні вибрати таку сукупність фронтів робіт, щоб, по-перше, у ній містилися цілком усі роботи нашого мережевого графіка, щоб, по-друге, усі ці фронти були здійсненні з погляду наявності ресурсу, і щоб, нарешті, сумарна тривалість усіх фронтів робіт була *мінімально можливою*, тому що ми шукаємо розподіл ресурсу, що мінімізує час виконання всієї нашої великої роботи. При цьому необхідно, щоб ні в якому разі не була порушена логічна черговість виконання робіт, що визначена нам вихідним мережевим графіком. Сутужніше усього виконати саме цю додаткову умову. Для її виконання припустимо спочатку, що на нашому графіку з впорядкованою, правильною нумерацією подій існує деякий шлях, що *проходить через усі події*. (У нашому прикладі, на графіку такого шляху немає). Якщо такий шлях є, то він обов'язково має вид  $0, 1, 2, \dots, n$ , оскільки нумерація на графіку, по припущенню,

правильна. У тому випадку, коли такий шлях є, наша задача може бути тепер математично сформульована в такий спосіб: необхідно знайти сукупність значень  $x_1, x_2, \dots, x_n$  таку, що вона мінімізує лінійну форму

$$T = \sum_{m=1}^M x_m \quad (14)$$

за умови  $x_m > 0$  і при обмеженнях

$$\sum_{F_m \in (i,j)} x_m = t_{ij} \quad (15)$$

для всіх робіт  $(i,j)$  мережевого графіка.

Останнє обмеження означає, що всі роботи повинні бути виконані. Що стосується першого обмеження  $x_m > 0$ , то воно дозволяє навіть не відкидати спочатку нездійсненні фронти, а просто відразу покласти для них  $x_k = 0$ , якщо  $B_k > c$ . У написаній вище сумі підсумовування поширене на усі фронти, що містять дану роботу  $(i,i)$ , що і позначено символом  $F_m \in (i,j)$ .

Отримана задача є вже задача лінійного програмування, оскільки шукається екстремум (у даному випадку мінімум) цільової лінійної функції (14) при лінійних обмеженнях.

Умова наявності шляху, що проходить через усі події графіка, забезпечує неможливість порушення логічної черговості робіт при підсумовуванні тривалості фронтів.

Проте досить часто на сітковому графіку відсутній шлях, що проходить через усі події. У цьому випадку приходиться додатково будувати такий шлях, вводючи необхідні фіктивні роботи. Проте при цьому може утворитися рівно стільки різноманітних мережевих графіків, скільки є способів додати фіктивні роботи для побудови потрібного нам шляху. Для оптимізації розподілу ресурсів необхідно тоді розглянути всі отримані варіанти таких графіків і вибрати той, для якого розв'язок задачі лінійного програмування дає мінімальне значення часу  $T$ .

Розглянутий приклад показує, наскільки складне зведення специфічних задач сіткового планування до вже вирішених проблем математики.

Дотепер ми розглядали тільки такі задачі, у яких тривалість кожної роботи або взагалі не могла бути змінена (приклад із розподілом обмеженого ресурсу), або могла бути тільки збільшена (приклади з пошуками мінімальних по вартості планів). Проте найважливішою задачею сіткового планування є відшукання оптимального розподілу ресурсів за рахунок подовження термінів виконання некритичних робіт і скорочення термінів виконання критичних робіт. Взагалі з цього погляду ідеально збалансований графік повинний бути весь від початку до кінця критичним, тому що тільки в цьому випадку можна вважати, що всі наявні в нашому розпорядженні можливості використані до кінця. Правда, це навіть теоретично не завжди можливо зробити, тому що, по-перше, ресурси можуть бути істотно обмежені, а, по-друге, ресурси можуть не бути взаємозамінними. Останнє означає, що різноманітні роботи споживають різноманітні ресурси, що неможливо перекинути, таким чином, з однієї роботи на іншу. Повне врахування всіх подібних залежностей навіть для порівняно простих графіків представляє задачі, на сьогоднішній день, не вирішені.

Звичайно підходи до розв'язання подібних, більш складних задач, шукаються на шляху створення тих або інших алгоритмів.

Ми зупинимося коротенько на одному такому алгоритмі, призначеному для розв'язання задачі про оптимальний розподіл ресурсу при роботах, проведених із змінною інтенсивністю.

На відміну від задачі, розглянутої вище, тут вважається, що кожна робота має постійний *об'єм*, а тривалість їй обернено пропорційна інтенсивності, тобто

$$t_{ij} = \frac{V_{ij}}{U_{ij}}. \quad (16)$$

Зокрема, якщо перекинути частину ресурсу з роботи  $(i_1, j_1)$ , що не є критичною, на роботу  $(i_2, j_2)$ , що лежить на критичному шляху, то тривалість некритичної роботи зросте (тому що інтенсивність ведення її зменшиться), а тривалість критичної роботи скоротиться (тому що інтенсивність ведення її

збільшиться). Питається: якщо при цих умовах задане щоденне обмеження, що накладається на ресурс, то як розподілити ресурс якнайкраще, забезпечивши виконання усієї великої роботи в найкоротший допустимий термін?

Виявляється, що навіть для такої простої задачі, дотепер не існує точного розв'язку. Алгоритм (один із можливих) полягає в тому, що в кожний даний момент роботи даного фронту робіт впорядковуються в порядку зростання наявних у них резервів часу. Ресурс виділяється в першу чергу роботам із мінімальним резервом часу. Робиться це за рахунок робіт із великими резервами доти, поки кількість ресурсу це дозволяє, поки резерви часу не зрівняються. Таким чином, ідея алгоритму полягає в тому, щоб забезпечити в кожний даний момент, «рівнокритичність» робіт мережевого графіка. Безпосередній розподіл ресурсів по роботах кожного фронту при наявності на графіку декількох тисяч робіт представляє задачу, яка під силу тільки ПК. Відсутність загального підходу до розв'язання таких задач є серйозним гальмом для подальшого удосконалення математичних методів планування. Безсумнівно, що пошуки нових вдаливих алгоритмів щораз, у випадку успіху, приносять суттєву користь практиці.

Але очевидно, що відсутність єдиного теоретичного підходу до всього кола оптимальних задач сіткового планування ніяк не полегшує, а надзвичайно утрудняє розв'язання основних його питань.

Є програми, створені у вигляді веб-додатку, які дозволяють моделювати виробничі процеси, створювати сіткові графіки, та оптимізувати виробничий процес. По суті виконання програми у вигляді веб-додатку має як свої переваги так і недоліки. Ось деякі з них:

переваги:

- не потрібно інсталювати та оновлювати програму;
- доступ за допомогою мережі Internet де б Ви не знаходились;
- дані зберігаються віддалено;
- немає потреби в потужних комп'ютерах та дисковому просторі;

- кросплатформеність (можливість роботи в різних системах Windows, Linux, та ін.);

недоліки:

- потребує доступ до інтернету;
- сервер може бути атакований, що може призвести до витоку приватної інформації;
- у користувачів більший досвід роботи із Desktop програмами;

Основною ідеєю веб-додатку є надання користувачам можливості планувати виконання складних стратегічних комплексних проєктів, слідкувати за процесом виконання довготривалого проєкту, вносити корективи в свої проєкти.

Застосування системи сіткового планування сприяє розробці оптимального варіанту стратегічного плану розвитку підприємства, який слугує основою оперативного управління комплексом робіт в ході його здійснення. Основним плановим документом в цій системі є сітковий графік, який представляє інформаційно-динамічну модель, в якій відображаються всі логічні взаємозв'язки та результати виконуваних робіт, необхідних для досягнення кінцевої мети стратегічного планування. Одержання розв'язків задач оптимізації принесе подальші економічні вигоди, а це дозволить більш ощадливо витратити ресурси і у той же час значно скорочувати терміни виконання великих і складних робіт. При аналізі сіткових графіків вважається, що тривалість кожної роботи не залежить від моменту її початку, що в дійсності не завжди так. Слід відзначити, що подальше ускладнення проблем шляхом введення певних залежностей представляється доцільним і створює шляхи для подальшого дослідження. Система планування і керування дозволяє не тільки оцінити складений план і скоригувати його, забезпечивши скорочення термінів роботи і зниження матеріальних витрат, але і дає можливість у процесі виконання плану знаходити «вузькі» ділянки всього комплексу робіт і вносити поправки в організацію роботи в цілому.

## ВИКОРИСТАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Закон України “Про підприємства в Україні” від 27.03.1998 р.  
□ <http://www/zakon.rada.gov.ua/laws/show/887-12>
2. Закон України “Про підприємництво” від 7.02.1998 р. <http://www/zakon.rada.gov.ua/laws/show/698-12>
3. Закон України “Про власність” від 7.02.1996 р. <http://www/zakon.rada.gov.ua/laws/show/697-12>
4. Закон України “Про господарські товариства” від 19.09.1991 р.  
<http://www/zakon.rada.gov.ua/laws/show/1576-12>
5. Господарчий Кодекс України // Відомості Верховної Ради України – 2003. – № 18 – 224 К: Право, 2003. – 196 с.
6. Алексеев А. М. Сетевые модели в перспективном планировании развития производства / А. М. Алексеев, Л. А. Козлов, Н. В. Крючков, Новосибирск: Наука, 1974. – 110 с.
7. Ансофф И. Стратегическое управление: пер. с англ. / И. Ансофф. – М. : Экономика, 2004. – 519 с.
8. Басакар Р. Конечные графы и сети: пер. с англ. / Р. Басакар, Т. Саати. – М. : Наука, 1974. – 386 с.
9. Беляева Э. С., Монахов В. М. Экстремальные задачи / Э. С. Беляева, В. М. Монахов. – М.: Просвещение, 1977. – 64 с.
10. Беруина Л. Ю. Графы помогают решать логически задачам / Л. Ю. Беруина // Математика в школе. – 1972. – № 2 – С. 62–65.
11. Васильев В. Н. Организационно-экономические основы гибкого производства / В. Н. Васильев, Т. Г. Садовская. – М. : Высшая школа, 1988. – 272 с.
12. Герчикова И. Н. Менеджмент: Учебник для вузов / И. Н. Герчикова. – 4-е изд., перераб. и доп. – М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2010. – 512 с.
13. Глазман И. М. Основы сетевого планирования и управления / И. М. Глазман, В. Г. Новиков. – Харьков ХУ, 1966. – 96 с.
14. Економічна енциклопедія: В 2 т. / Б. Д. Гаврилишин, С. В. Мочерний, О. А. Устинко, О. І. Амоша. – К., 2000. – Т. 1. – 864с.

15. Жданов С. А. Механизмы экономического управления предприятием: учеб. пособие / С . А. Жданов. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002. – 319 с.
16. Калихман И. Л. Динамическое программирование в примерах и задачах / И. Л. Калихман, О. А. Войтенко. – М. : Высшая школа, 1968. – 182 с.
17. Кодман А. Сетевые методы планирования и их применение / А. Кодман, Г. Дебазей. – М. : Прогресс, 1968. – 184 с.
18. Кравцов А. М. Сетевое планирование и управление / А. М. Кравцов, В. В. Шеховцов. – М. : Экономика, 1969. – 152 с.
19. Кулакова М. В. Особливості управління підприємством в умовах ринкового господарювання / М. В. Кулакова // Студентський науковий журнал – 2008. – Т. 6 – С.96–97.
20. Масютин С. Совершенствование системы управления предприятием / С. Масютин, С. Леонтьев // Аудит и финансовый анализ . – 2006. – № 5 . – С. 26.
21. Мельник А. Ф. Муніципальний менеджмент: Навч. посіб. / А. Ф. Мельник. – К. : Знання, 2006. – 420 с.
22. Монден Я. Тоета. Методы эффективного управления [Текст : пер. с англ.] / Я. Монден – М. : Экономика, 1989. – 288 с.
23. Парубэ Г. Э. Сетевое планирование и управление / Г. Э. Парубэ. – М. : Экономика, 1967. – 143 с.
24. Пищулин И. П. Анализ организации и управления производством с помощью графических методов / И. П. Пищулин. – М. : Экономика, 1967. – 45 с.
25. Покропивний С. Ф. Підприємництво: стратегія, організація, ефективність: навч. посібник / С. Ф. Покропивний, В. М. Колот. – Київський національний економічний ун-т. – К. : КНЕУ, 1998. – 350 с.
26. Ребрин Ю. И. Основы экономики и управления производством: Конспект лекций. /Ю. И. Ребрин. – Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2000. – 145 с.
27. Хміль Ф. І. Управління персоналом: Підручник для студентів вищих навчальних закладів. / Ф. І. Хміль. – К. : Академвидав, 2006. – 488 с.



**Буяк Леся Михайлівна, доктор економічних наук,  
професор кафедри економічної кібернетики та інформатики**

**МОДЕЛІ ПІДТРИМКИ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ  
В УПРАВЛІННІ МАЛИМ ПІДПРИЄМСТВОМ  
В КОНКУРЕНТНОМУ СЕРЕДОВИЩІ**

На сучасному етапі відновлення економіки України особливо актуальною постає проблема розвитку й ефективної діяльності малих підприємств, які відіграють важливу роль не лише в економіці країни, а також у вирішенні багатьох соціальних проблем, насамперед забезпечують зайнятість населення, насичують ринок необхідними товарами і послугами, створюють здорову конкуренцію, забезпечують країні мобільність, гнучкість та інноваційний потенціал, що сприяє розширенню ринкових відносин і забезпечує стабільність держави в цілому. Ефективне управління малим підприємством реалізується через постійне впровадження інтенсивних змін, що якісно перетворюють технології, спосіб організації виробництва. Тому проблема підтримки прийняття рішень в управлінні малим підприємством у вітчизняній економіці набуває нині особливої ваги.

Методологічні, методичні та математичні підходи до економіко-математичного моделювання підтримки прийняття рішень в управлінні малим підприємством нині формуються під впливом наукових праць вітчизняних і зарубіжних учених, серед яких І. Благун, В. Вітлінський, В. Вовк, В. Єлейко, Т. Клебанова, Р. Лепа, Ю. Лисенко, А. Мельник, І. Огірко, О. Піскунова, Л. Сергеева, В. Ситник, О. Стефанишин, Г. Цегелик, О. Черняк тощо.

Особливої уваги дослідників потребують питання застосування і поглибленого дослідження як у науковому, так і в практичному аспектах оптимізаційних методів та моделей для вирішення цілого комплексу задач управління діяльністю малого підприємства.

Метою дослідження є розроблення комплексу математичних методів і моделей підтримки прийняття рішень в управлінні малими підприємствами, які б дали змогу оптимізувати діяльність малого підприємства у сучасних умовах конкурентного середовища. З огляду на особливості управління малим підприємством (обов'язки з управління виконує керівник, який є власником підприємства; як правило відсутні планові відділи, що займаються довгостроковим плануванням; малі масштаби діяльності підприємства; гнучка організаційна структура та методи контролю; специфікою комунікацій є усне вербальне спілкування; готовність до змін в умовах конкурентного середовища) та мінливі умови функціонування малих підприємств в Україні, значну кількість факторів, які впливають на цей процес в сучасних умовах конкурентного середовища, потрібно розробити комплексний підхід до дослідження процесу підтримки прийняття управлінських рішень на малому підприємстві. Цей комплексний підхід повинен включати дослідження сучасного стану і тенденцій розвитку малих підприємств на основі статистичних даних, оскільки неможливо приймати ефективні управлінські рішення не маючи уяви про сутність та результати діяльності підприємств на макрорівні, побудову економіко-математичних моделей, які зможуть описати існуючий процес розвитку малих підприємств в конкурентному середовищі та спрогнозувати майбутній, а також розробку низки оптимізаційних моделей для підтримки прийняття рішень в управлінні малим підприємством. Для цього потрібно обґрунтувати концептуальні положення щодо підтримки прийняття рішень в управлінні малим підприємством в сучасних умовах їх функціонування в конкурентному середовищі.

Досліджувати процес підтримки прийняття рішень в управлінні малим підприємством можна застосовуючи різні методи та підходи.

Запропонована нами концепція щодо підтримки прийняття рішень в управлінні малим підприємством за допомогою математичних методів та моделей може служити вирішенням поставлених завдань (рис. 1).

Дослідження підтримки прийняття рішень в управлінні малим підприємством за допомогою математичних методів та моделей в сучасних умовах господарювання повинно охоплювати наступні три етапи:

1) вивчення конкурентного середовища та дослідження факторів впливу на діяльність малого підприємства в Україні;

2) розроблення підходу до оцінювання впливу конкуренто-спроможності підприємства малого бізнесу на формування його прибутку;

3) розроблення комплексу оптимізаційних моделей та методів управління малим підприємством у сучасних умовах його функціонування в конкурентному середовищі.

На першому етапі реалізації концепції на основі статистичних даних проводиться економічний аналіз сучасного стану та тенденцій розвитку малих підприємств, оцінюється стан конкурентного середовища їх функціонування.

Для вивчення тенденцій розвитку малих підприємств в Україні протягом 2006 – 2019 рр. використано трендовий аналіз, який доцільно застосовувати на початку дослідження для складання першого враження про тенденції розвитку процесу та з'ясування, які моделі для апроксимації даного процесу потрібно застосовувати надалі. За досліджувані показники було вибрано: кількість малих підприємств України на 10 тис. осіб наявного населення, кількість малих підприємств України, обсяг реалізованої продукції (робіт, послуг), кількість найманих працівників на малих підприємствах, середньомісячну заробітну плату. Для оцінки тенденцій розвитку малих підприємств на основі вибраних показників побудовані моделі трендів за даними України.

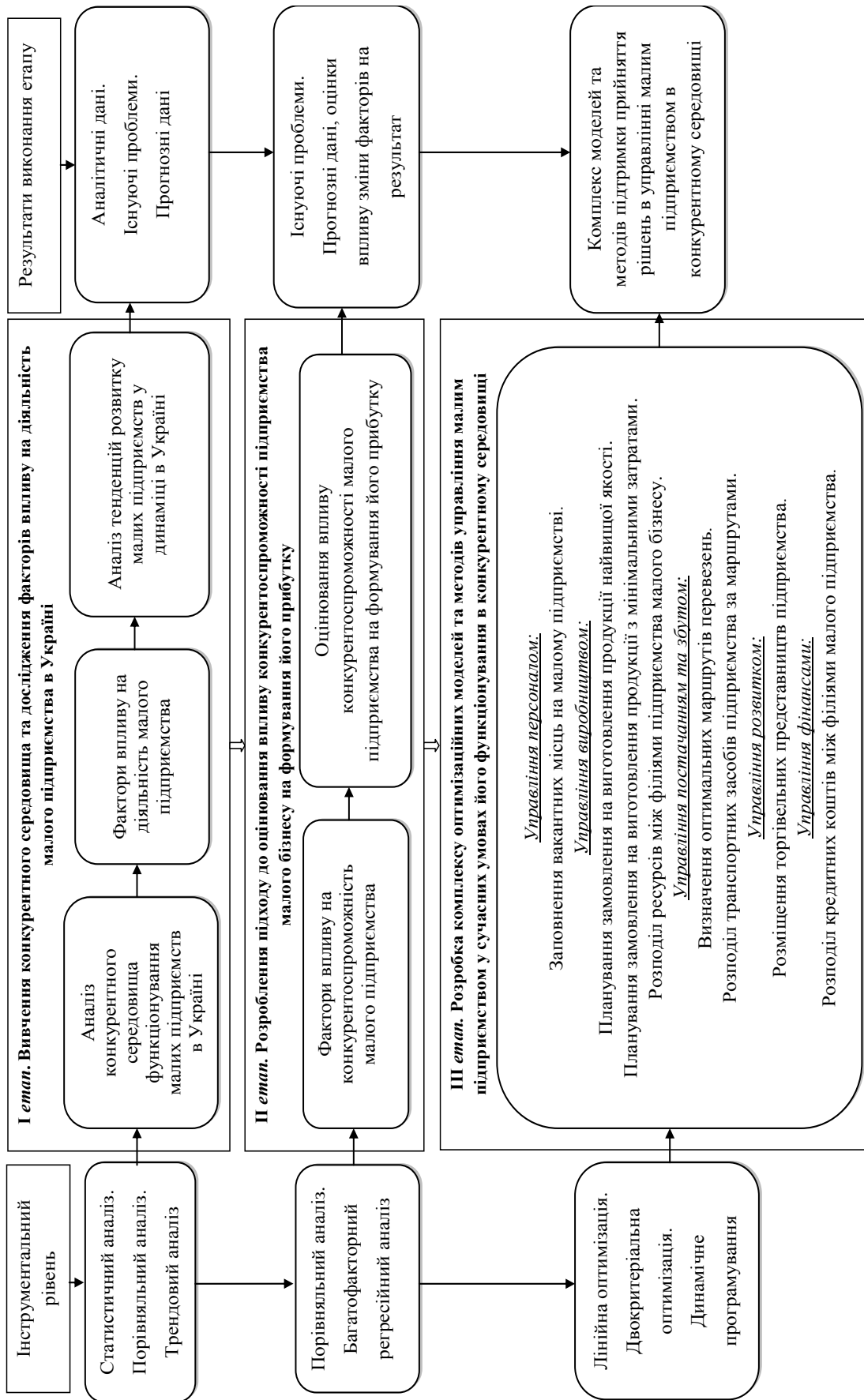


Рис. 1. Концепція дослідження підтримки прийняття рішень в управлінні малим підприємством на основі застосування математичних методів та моделей  
Джерело: розроблено автором самостійно

Незважаючи на певну активізацію розвитку вітчизняних малих підприємств, мають місце негативні тенденції, а саме: уповільнення темпів приросту малих підприємств; невисокі обсяги виробництва та реалізації продукції у розрахунку на одне діюче підприємство; скорочення частки малих підприємств в обсягах реалізованої продукції; скорочення питомої ваги діючих підприємств та зростання частки збиткових; погіршення показників ефективності фінансово-господарської діяльності та використання ресурсного забезпечення підприємств; низький рівень легальної заробітної плати; збільшення обсягів тінізації підприємницької діяльності. Тому, для позитивної динаміки цих показників, необхідно шукати ефективні методи управління малим підприємством, які б давали змогу розвиватись підприємству в умовах конкурентного середовища.

Враховуючи думку, що мале підприємство як організація контактує постійно із зовнішнім середовищем, а врахування факторів даного середовища є необхідною умовою ефективного функціонування, в роботі реалізовано завдання – дослідити вплив факторів макросередовища на розвиток малих підприємств.

В результаті реалізації першого етапу концепції проаналізовано конкурентне середовище функціонування малих підприємств України та отримано моделі, які добре (про це свідчать коефіцієнти кореляції та детермінації) описують процес розвитку малих підприємств в Україні за 2000 – 2013 рр., а також побудовано прогнози вибраних показників діяльності вітчизняних малих підприємств. Ми дійшли висновку, що динаміка розвитку малих підприємств зумовлює необхідність прогнозування їх діяльності з урахуванням протидії негативному впливу та стимулювання позитивних зрушень. Таким чином, висновки та рекомендації, отримані в результаті реалізації цього етапу можна використовувати в процесі формування

ефективних управлінських рішень для малого підприємства з метою підвищення його конкурентоспроможності.

На другому етапі реалізації концепції пропонується розглянути конкурентоспроможність підприємства, як одну з найважливіших категорій ринкової економіки, що характеризує можливість та ефективність адаптації підприємства до умов конкурентного середовища. Вагомою є роль малих підприємств у забезпеченні конкурентного середовища, гнучкості національної економіки, зайнятості та доходів населення. Тому проблеми підвищення конкурентоспроможності малого підприємства на вітчизняному та міжнародних ринках є важливими як сьогодні, так і у майбутньому. Конкурентоспроможність бізнесу впливає на ефективність виробництва товарів і послуг, на якість бізнес-мережі всієї країни, а також на якість окремих дій і стратегій підприємств.

До факторів впливу на конкурентоспроможність малого підприємства відносимо: виробництво та якість продукції, її положення та просування на ринку, постачання та збут. Динамічний розвиток економіки України, високі темпи змін зовнішнього середовища та посилення конкуренції обумовлюють зростання ролі та значення персоналу як фактора підвищення конкурентоспроможності підприємства.

Аналізуючи та порівнюючи оцінки рівня конкурентоспроможності малого підприємства відомими методами, зазначимо, що для його визначення найчастіше використовують коефіцієнти, що узагальнюють балові експертні оцінки або техніко-економічні показники. Оскільки, метою конкурентоспроможного підприємства є отримання вигоди, прибутку від своєї діяльності, то для оцінки рівня конкурентоспроможності підприємства доцільно використовувати вартісні показники ефективності роботи підприємства такі як: прибуток, рентабельність, чиста поточна вартість тощо. Тому, нами розглянуто можливість використання економетричного підходу до визначення рівня

конкурентоспроможності малого підприємства. Для цього використовувався регресійний аналіз, як найпотужніший та найпростіший в практичній реалізації інструмент, що дає змогу вимірювати щільність зв'язку між ознаками, відстежити існуючі тенденції та особливості досліджуваного процесу, будувати прогнози на майбутні періоди, а також розробляти стратегії впливу на конкретні фактори з метою зміни результуючого показника.

Побудована багатофакторна модель, яку використано для оцінки впливу кожного з обраних чинників на досліджуваний процес. Залежною змінною при побудові моделі вибрано прибуток малого підприємства, а також фактори, які мають найтісніший зв'язок із залежною змінною: обсяг реалізованої продукції, загальні витрати (зокрема, відсотки по кредитах, транспортні витрати, заробітна плата та інші витрати) та відрахування з прибутку на розвиток.

Для знаходження невідомих параметрів багатофакторної лінійної регресійної моделі застосовано метод найменших квадратів, який є простим у реалізації, і є вбудований у програмні пакети, що призначені для обробки статистичних даних.

В результаті реалізації другого етапу концепції, отримана сукупність факторів впливу на конкурентоспроможність малого підприємства та регресійна модель, яка дає змогу враховувати чинники, які впливають на прибуток підприємства і визначають його конкурентоспроможність.

На третьому етапі реалізації концепції розробляється комплекс оптимізаційних методів та моделей управління малим підприємством у сучасному конкурентному середовищі.

Спираючись на дослідження відомих учених, визначено, що для розробки ефективних методів управління малим підприємством доцільно використовувати оптимізаційні моделі. Нами наведено складові системи управління малим підприємством, в напрямку яких будуть розроблятися ефективні управлінські рішення (рис. 2).



Рис. 2. Складові системи процесу прийняття управлінських рішень  
*Джерело: розроблено автором самостійно*

Для кожної складової системи управління малим підприємством (фактори, що визначають конкурентоспроможність підприємства) обґрунтовано необхідність вироблення ефективних управлінських рішень з метою отримання прибутку підприємства та успішного його функціонування.

Тому в малому бізнесі для підтримки прийняття науково обґрунтованих управлінських рішень важлива роль відводиться економіко-математичному моделюванню.

Прогнозування економічних показників є нагальною потребою в умовах ринкової економіки. У процесі прийняття рішень можливість передбачити майбутню ситуацію є суттєвим моментом для правильного вибору.

Малі підприємства – це переважно або торговельні, або виробничі підприємства, або такі, що поєднують виробничу і торговельну функції, оскільки однією з основних функцій малого підприємства є насичення ринку потрібними споживачам товарами та послугами. Малі підприємницькі структури випускають невеликий асортимент продукції, зазвичай, орієнтуються на індивідуальний попит, вузьке коло споживачів із особливими вимогами до якості товарів і послуг. Тому найефективнішими є малі підприємства, зайняті у



оптовій та роздрібній торгівлі, громадському харчуванні, легкій промисловості, ремісництві, побутовому обслуговуванні, будівництві, транспорті.

Кінцевим результатом, який забезпечує малому підприємству стабільність і конкурентоспроможність на ринку товарів і послуг, формує його фінансові ресурси, є прибуток. Тому основною метою діяльності малого підприємства, як і будь-якого підприємства, є отримання максимального прибутку за оптимального управління (складний керований динамічний процес, спрямований на досягнення поставленої мети) основними напрямками його діяльності, що формують конкурентоспроможність малого підприємства.

Розглянуто задачі управління малим підприємством за основними напрямками його діяльності:

*Управління виробництвом.* Якщо фінанси, устаткування, сировину й робочу силу уявити ресурсами, то значну кількість задач в економіці можна розглядати як задачі виробничого планування. Зазначимо, що ефективне управління усіма можливими ресурсами, а також раціональне використання витрат дозволить підприємству одержати бажаний рівень прибутковості.

Тому побудовано оптимальний розподіл ресурсів серед  $m$  філій підприємства як однокроковий, двокроковий та  $n$  – кроковий процес, який дає змогу покращити якість управління та здійснити розподіл ресурсів з максимальною ефективністю від їх використання на певний період. Це дозволить підприємству підвищити економічну ефективність використання власних ресурсів, та більш раціонально їх використовувати.

Основною задачею підприємства-виробника є раціональне планування випуску продукції заради отримання максимального прибутку. З огляду на це, нами запропоновано дві оптимізаційні моделі, одна з яких дає змогу забезпечити максимальний випуск продукції, яка має найбільшу якість, а інша – максимальний випуск продукції з мінімальними затратами.

Запропоновано двокритеріальну оптимізаційну модель, яка дає змогу скласти план випуску продукції таким чином, щоб максимально використати наявні ресурси і в той же час забезпечити максимальний прибуток і одночасний

випуск продукції з мінімальними затратами. Для розв'язання цієї задачі з двома цільовими функціями і лінійними обмеженнями застосовано ідею методу послідовних поступок, яка полягає у відшуканні компромісного розв'язку, який забезпечує певний прибуток з невеликими затратами.

У випадку, коли мале підприємство не виробляє продукцію, а тільки реалізує її, замовляючи у виробників, перед підприємством постає проблема вибору постачальників продукції та розподілу замовлення між ними.

Тому побудовано оптимізаційну модель, яка забезпечує такий розподіл замовлень різнотипної продукції торговельного підприємства на виготовлення продукції серед виробників, при якому досягається максимальна сумарна якість придбаної продукції.

Для більшості підприємств з метою їх стабільного функціонування та розвитку необхідно розробляти стратегічні та тактичні плани. Стратегічні плани містять параметри діяльності об'єктів, які характеризують їх віддалене майбутнє. Отже, вони мають розроблятися на основі динамічних моделей, для знаходження розв'язків яких застосовуються методи динамічного програмування.

*Управління розвитком.* Більшість малих підприємств для утримання конкурентних позицій прагне адаптуватися до вимог і змін середовища. Активна поведінка підприємства можлива за умови ефективного менеджменту, інформаційної прозорості та інноваційної спрямованості бізнесу. Його розвиток відбувається завдяки прагненню досягти у майбутньому певного бажаного стану. Швидкі зміни зовнішнього середовища вимагають з боку підприємства прискореного темпу реагування на них. Тому для підприємства є важливою задача про оптимальне розміщення та експлуатацію торгових представництв підприємства у регіонах. З огляду на це побудовано оптимізаційну модель розміщення торговельних представництв малого підприємства в регіонах України, яка ґрунтується на використанні теорії динамічного програмування та представлена як багатокрокова задача. Це дало змогу виконати розподіл торговельних представництв однакової потужності малого підприємства у

регіонах, який забезпечує максимум прибутку та підвищення конкурентоспроможності.

*Управління фінансами.* В умовах виходу країни з кризової ситуації розвиток малого підприємства певною мірою залежить від надання йому фінансової підтримки (через мікрокредитування, лізинг, спілки взаємного кредитування, страхування інвестицій та ін.). Як торговельним, так і виробничим підприємствам доводиться вирішувати проблему обмеженості фінансових ресурсів. Часто підприємцям доводиться залучати кредитні кошти для розвитку своєї справи, а після отримання цих коштів ефективно їх розподілити, щоб мати можливість повернути кредит та отримати прибуток.

Тому нами запропонована модель такого розподілу кредитних коштів між філіями малого підприємства з урахуванням їхніх потреб, яка базується на теорії динамічного програмування, і яка дозволить вирішити проблеми недостатності у підприємців коштів для розвитку власної справи та забезпечить прибуток підприємству від вкладених коштів.

В результаті реалізації третього етапу концепції побудовано комплекс оптимізаційних моделей та методів, які можна використати для підтримки прийняття рішень в управлінні малим підприємством для збільшення його прибутку, скорочення транспортних витрат на постачання сировини та готової продукції, розподілу кредитних коштів, розміщення торговельних представництв, а також підвищення якості їх продукції та задоволення попиту на неї, ефективного заповнення вакантних посад на підприємстві (рис. 3).

Реалізація концепції щодо підтримки прийняття рішень в управлінні малим підприємством у сучасних умовах його функціонування в конкурентному середовищі дозволяє здійснювати ефективне управління на малому підприємстві, що сприятиме покращенню рівня життя та добробуту підприємцям, персоналу та населенню України загалом, дозволить підприємствам вистояти у загостреній конкурентній боротьбі та забезпечить їм конструктивний розвиток.



Рис. 3. Схема реалізації третього етапу дослідження підтримки прийняття рішень в управлінні малим підприємством  
*Джерело: розроблено автором самостійно*

### **Комплекс оптимізаційних моделей для підтримки прийняття рішень щодо діяльності малих підприємств**

Третій етап запропонованої концепції дослідження підтримки прийняття рішень в управлінні малим підприємством за допомогою математичних методів та моделей передбачає розробку комплексу оптимізаційних моделей та методів управління малим підприємством у сучасних умовах його функціонування в конкурентному середовищі.

Аналізуючи фактори впливу на конкурентоспроможність малого підприємства, виявлено, що ними є складові системи управління малим підприємством, в напрямку яких необхідно розробляти ефективні управлінські рішення з метою забезпечення йому прибутку, а саме:

- управління виробництвом; управління персоналом; управління розвитком;
- управління фінансами;
- управління постачанням та збутом.

Зважаючи на виділені фактори, нами запропонований комплекс

оптимізаційних методів і моделей для підтримки прийняття рішень щодо діяльності малих підприємств.

Розглянемо задачі управління малим підприємством за основними напрямками його діяльності.

Оскільки основною задачею підприємства-виробника є раціональне планування випуску продукції заради отримання максимального прибутку, то розглянемо двокритеріальну модель планування замовлення на виготовлення продукції.

Для виробництва продукції (товарів) використовуються різні ресурси (сировина, знаряддя, праця тощо). Відомо, скільки одиниць кожного ресурсу використовується для виробництва одиниці кожної продукції, запас кожного ресурсу, затрати (в грошах) на виготовлення одиниці кожної продукції, а також прибуток від реалізації одиниці кожної продукції. Задача полягає в такому складанні плану виробництва продукції, за якого при використанні наявних ресурсів рентабельність виробництва була б найбільшою.

Для складання математичної моделі задачі введемо такі позначення:

$R$  – рентабельність виробництва;

$m$  – кількість ресурсів, що використовуються у виробництві;

$n$  – кількість видів різної продукції, яку можна виготовляти з наявних ресурсів;

$a_{ij}$  – кількість одиниць  $i$ -го ресурсу, що використовується для виробництва одиниці  $j$ -ї продукції;

$b_i$  – кількість одиниць  $i$ -го ресурсу, що можна використати у виробництві продукції;

$p_j$  – прибуток від реалізації одиниці  $j$ -ї продукції;

$c_j$  – затрати на виготовлення одиниці  $j$ -ї продукції;

$x_j^{(1)}$  – кількість одиниць  $j$ -ї продукції, що планується виготовити (шукані величини).

Тоді математична модель задачі матиме вигляд:

$$R = \frac{\sum_{j=1}^n p_j x_j^{(1)}}{\sum_{j=1}^n c_j x_j^{(1)}} \rightarrow \max \quad (1)$$

за умов

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^{(1)} \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad (2)$$

$$x_j^{(1)} \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (3)$$

Модель (1)–(3) еквівалентна такій двокритеріальній моделі:

$$P = \sum_{j=1}^n p_j x_j^{(1)} \rightarrow \max, \quad (4)$$

$$C = \sum_{j=1}^n c_j x_j^{(1)} \rightarrow \min \quad (5)$$

за умов

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^{(1)} \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (6)$$

$$x_j^{(1)} \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (7)$$

Зрозуміло, що одночасно забезпечити максимальний прибуток і мінімальні затрати у виробництві неможливо. Тому для розв'язування задачі використаємо ідею методу послідовних поступок [3], відшуковуючи компромісний розв'язок, який забезпечує певний прибуток з невеликими затратами.

Позначимо через  $M$  множину допустимих розв'язків задачі (4)–(7), тобто множину точок  $X = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)})$ , що задовольняють умовам (6)–(7). Тоді алгоритм методу послідовних поступок для розв'язування задачі (4)–(7) полягає в наступному.

Спочатку розв'язуємо однокритеріальну модель

$$P = \sum_{j=1}^n p_j x_j^{(1)} \rightarrow \max \quad (8)$$

за умови

$$X \in M. \quad (9)$$

Нехай  $X_1 = (x_1^{(1*)}, x_2^{(1*)}, \dots, x_n^{(1*)})$  – оптимальний розв’язок цієї моделі. Тоді обчислюємо прибуток  $P(X_1)$  і затрати  $C(X_1)$ . Якщо затрати задовольняють виробника, то  $X_1$  приймається за компромісний розв’язок моделі (4)–(7). В протилежному випадку виробник визначає величину поступки  $\Delta P_1$ , на яку він може погодитись з метою зменшення затрат, і визначає ”уточнену” допустиму множину розв’язків  $M_1$ , де

$$M_1 = \left\{ X \in M \left| \sum_{j=1}^n p_j x_j^{(1)} \geq \sum_{j=1}^n p_j x_j^{(1*)} - \Delta P_1 \right. \right\}. \quad (10)$$

Після цього розв’язуємо модель

$$C = \sum_{j=1}^n c_j x_j^{(1)} \rightarrow \min \quad (11)$$

за умови

$$X \in M_1. \quad (12)$$

Нехай  $X_2 = (x_1^{(**)}, x_2^{(**)}, \dots, x_n^{(**)})$  – розв’язок цієї моделі, тоді обчислюємо  $C(X_2)$ . Якщо затрати  $C(X_2)$  задовольняють виробника, то  $X_2$  приймається за компромісний розв’язок моделі (4)–(7). В протилежному випадку виробник визначає величину наступної поступки  $\Delta P_2$ , на яку він може погодитись з метою зменшення затрат, і визначає ”уточнену” допустиму множину розв’язків  $M_2$ , де

$$M_2 = \left\{ X \in M \left| \sum_{j=1}^n p_j x_j^{(1)} \geq \sum_{j=1}^n p_j x_j^{(**)} - \Delta P_2 \right. \right\} \quad (13)$$

Після цього розв’язуємо модель

$$C = \sum_{j=1}^n c_j x_j^{(1)} \rightarrow \min \quad (14)$$

за умови

$$X \in M_2. \quad (15)$$

Процес розв'язування однокритеріальних задач продовжується доти, доки знайдений компромісний розв'язок не буде задовольняти виробника.

Очевидно, задача матиме розв'язок у випадку, коли із зменшенням прибутку зменшуються затрати на виготовлення продукції.

Для розв'язання однокритеріальних задач можна використати симплексний метод [4].

У випадку, коли мале підприємство не виробляє продукцію, а лише реалізує її, замовляючи у виробників, тоді перед підприємством постає проблема вибору постачальників продукції та розподілу замовлення між ними.

Мале підприємство хоче замовити на підприємствах малого бізнесу в певному обсязі продукцію декількох видів. Відомі: малі підприємства, що займаються виготовленням потрібної продукції; кількість видів продукції, потрібної замовнику; пріоритет продукції кожного виду; рейтинг продукції кожного виду кожного підприємства; максимальна потреба в замовленні продукції кожного виду; собівартість продукції кожного виду на кожному підприємстві; обсяг коштів, що може використати кожне підприємство. Задача полягає в складанні такого плану замовлення, за якого замовлена продукція була б найякіснішою.

Нехай

$K$  – показник якості замовленої продукції;

$n$  – кількість видів продукції, що цікавлять замовника;

$m$  – кількість малих підприємств, що виготовляють продукцію, потрібну замовнику;

$\alpha_i$  – пріоритет  $i$ -ої продукції;

$r_{ij}$  – рейтинг  $i$ -ої продукції  $j$ -го підприємства;

$p_i$  – максимальна потреба в продукції  $i$ -го виду;

$c_{ij}$  – собівартість одиниці продукції  $i$ -го виду на  $j$ -му підприємстві;

$v_j$  – обсяг грошових коштів, що може використати  $j$ -те підприємство;



$x_{ij}^{(2)}$  – кількість одиниць продукції  $i$ -го виду, що планується замовити на  $j$ -му підприємстві (шукані величини).

Тоді математична модель задачі матиме вигляд:

$$K = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i r_{ij} x_{ij}^{(2)} \rightarrow \max \quad (16)$$

за умов

$$\sum_{j=1}^m x_{ij}^{(2)} \leq p_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (17)$$

$$\sum_{i=1}^n c_{ij} x_{ij}^{(2)} \leq v_j, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (18)$$

$$x_{ij}^{(2)} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (19)$$

Алгоритм розв'язування задачі розглянемо у двох випадках: коли відсутня і присутня умова (18).

Перший випадок. Припустимо, що умова (18) відсутня (оскільки підприємства можуть брати кошти у потрібній кількості). У цьому випадку, якщо

$$\max_j r_{ij} = r_{ik_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (20)$$

то  $x_{ik_i}^{(2)} = p_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$  і

$$\max \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i r_{ij} x_{ij}^{(2)} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_{ik_i} x_{ik_i}^{(2)}. \quad (21)$$

Другий випадок. Умова (18) присутня. Не зменшуючи загальності, вважатимемо, що

$$\alpha_1 \succ \alpha_2 \succ \dots \succ \alpha_n. \quad (22)$$

Алгоритм у цьому випадку складається із низки кроків, на кожному з яких визначається замовлення на окрему продукцію згідно пріоритету таким чином, щоб забезпечити максимальне значення цільової функції.

На першому кроці визначаємо замовлення на продукцію з найбільшим пріоритетом, тобто продукцію з пріоритетом  $\alpha_1$

Нехай

$$\max_j r_{1j} = r_{1k_1}. \quad (23)$$

Визначимо величину  $y_{1k_1}$  з умови

$$y_{1k_1} c_{1k_1} = v_1. \quad (24)$$

Одержимо

$$y_{1k_1} = \frac{v_1}{c_{1k_1}}. \quad (25)$$

Якщо  $p_1 \leq y_{1k_1}$ , то покладаємо  $x_{1k_1} = p_1$  і на цьому перший крок завершується.

При цьому на підприємстві з індексом  $j = k_1$  ще певні ресурси залишаються у випадку  $p_1 < y_{1k_1}$ . Якщо  $p_1 > y_{1k_1}$ , то визначаємо  $\max_{j \neq k_1} r_{ij}$ . Нехай

$$\max_{j \neq k_1} r_{ij} = r_{1k_2}. \quad (26)$$

Тоді визначаємо

$$y_{1k_2} = \frac{v_2}{c_{1k_2}}. \quad (27)$$

Якщо  $p_1 - y_{1k_1} \leq y_{1k_2}$ , то покладаємо  $x_{1k_2} = p_1 - y_{1k_1}$  і на цьому перший крок завершується. При цьому на підприємстві з індексом  $j = k_2$  ще певні ресурси залишаються у випадку  $p_1 - y_{1k_1} < y_{1k_2}$ . Якщо  $p_1 - y_{1k_1} > y_{1k_2}$ , то аналогічно визначаємо

$$\max_{j \neq k_1, k_2} r_{ij} = r_{1k_3} \quad (28)$$

і  $y_{1k_3}$ . Якщо  $p_1 - y_{1k_1} - y_{1k_2} \leq y_{1k_3}$ , то покладаємо  $x_{1k_3} = p_1 - y_{1k_1} - y_{1k_2}$  і перший крок завершується. Якщо ця умова не виконується, то перший крок продовжується.

Після знаходження  $x_{1k_1}, x_{1k_2}, \dots, x_{1k_l}$ , де  $j = k_l$  індекс підприємства, на якому завершується перший крок, визначаємо множину підприємств, які ще мають ресурси для виготовлення продукції, і переходимо на другий крок. На

другому кроці, аналогічно як на першому, визначаємо замовлення на продукцію з пріоритетом  $\alpha_2$ .

Остаточний розв'язок отримаємо, коли знайдемо замовлення на продукцію з пріоритетом  $\alpha_n$ .

Оскільки фінанси, устаткування, сировину й робочу силу можна розглядати як ресурси, то значна кількість задач в економіці є задачами виробничого планування. За ефективного управління усіма можливими ресурсами та раціональним використанням витрат підприємство зможе одержати бажаний рівень прибутковості.

Розглянемо задачу про оптимальний розподіл ресурсів серед  $m$  філій підприємства як однокроковий, двокроковий і  $n$  – кроковий процес. Для цього використаємо теорію динамічного програмування.

Припустимо, що між філіями  $A_1, A_2, \dots, A_m$  підприємства треба розподілити ресурси  $x$  так, щоб загальний прибуток від вкладених ресурсів за певний період часу був максимальним.

Розглянемо спочатку цю задачу як однокроковий процес, який складається з одного періоду. Нехай філії  $A_i (i = 1, 2, \dots, m)$  підприємства виділено  $x_i^{(3)}$  ресурсів, де

$$\sum_{i=1}^m x_i^{(3)} = x \quad (29)$$

Якщо вважати, що протягом визначеного періоду вкладені ресурси  $x_i^{(3)}$  у філію  $A_i (i = 1, 2, \dots, m)$  підприємства приносять прибуток  $p_i(x_i^{(3)})$ , то загальний прибуток від вкладених ресурсів становитиме

$$r(x) = \sum_{i=1}^m p_i(x_i^{(3)}) \quad (30)$$

Тоді найбільший прибуток  $F_1(x)$ , який можуть принести ресурси  $x$  при оптимальному розподілі їх між філіями  $A_1, A_2, \dots, A_m$  підприємства дорівнює

$$F_1(x) = \max \sum_{i=1}^m p_i(x_i^{(3)}), \quad (31)$$

де максимум береться за всіма  $x_i^{(3)} \geq 0$ , для яких виконується умова (29).

Тепер цю саму задачу розглянемо як двокроковий процес, який складається з двох періодів. Оскільки прибуток одержується внаслідок випуску і реалізації продукції, то на початок другого періоду філія  $A_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) підприємства матиме  $a_i x_i^{(3)}$  ресурсів, де  $0 \leq a_i \leq 1$ . Найбільший прибуток, який можна одержати від сумарного залишку  $\sum_{i=1}^m a_i x_i^{(3)}$  протягом другого періоду, дорівнює  $F_1\left(\sum_{i=1}^m a_i x_i^{(3)}\right)$ . Тоді найбільший прибуток, який може бути одержаний від суми  $x$  за обидва періоди дорівнює

$$F_2(x) = \max \left\{ \sum_{i=1}^m p_i(x_i^{(3)}) + F_1\left(\sum_{i=1}^m a_i x_i^{(3)}\right) \right\}, \quad (32)$$

де максимум береться за всіма  $x_i^{(3)} \geq 0$ , для яких виконується умова (29).

Якщо цю задачу розглядати як  $n$  – кроковий процес, який складається з  $n$  періодів, то найбільший прибуток, який може бути одержаний від суми  $x$  за  $n$  періодів, виражається формулою

$$F_n(x) = \max \left\{ \sum_{i=1}^m p_i(x_i^{(3)}) + F_{n-1}\left(\sum_{i=1}^m a_i x_i^{(3)}\right) \right\}, \quad (33)$$

де максимум береться за всіма  $x_i \geq 0$ , для яких виконується умова (29);

$F_{n-1}\left(\sum_{i=1}^m a_i x_i^{(3)}\right)$  – прибуток, який одержується від  $n-1$  останніх кроків за умови, що ресурси, які залишилися після першого кроку, на  $n-1$  кроках розподілились найкращим чином.

Демократизація в економіці України, що сприяє розвитку підприємництва, розширює можливості впровадження нових підходів до управління. Майбутнє процвітання малих підприємств залежить від забезпечення їх потужним

трудова потенціалом, який впливатиме на конкурентоспроможність підприємства, визначатиме напрями його подальшого розвитку.

На сьогодні до особливостей малого підприємства відносять суміщення одним працівником виконання декількох функцій чи робіт, зокрема, поширеним явищем є те, що водій є одночасно експедитором, а ІТ-спеціаліст – бухгалтером, або, навіть, виконання функцій працівника, бухгалтера і управлінця однією особою тощо.

Кожне мале підприємство прагне забезпечити себе працівниками відповідної кількості (кількісні характеристики кадрового потенціалу: чисельність персоналу, професійно-кваліфікаційний склад, статево-віковий склад, укомплектованість за посадами, спеціальностями та професіями і т.п.) та якості (якісні характеристики кадрового потенціалу: здоров'я, моральність, творчий потенціал, активність, організованість, знання, професіоналізм, адаптація та здатність до навчання, комунікативні здібності, висока трудова мобільність, вільне володіння сучасними комп'ютерними технологіями), раціонально розподілити їх по робочих місцях; встановлювати та обирати найбільш оптимальні для підприємства шляхи покриття потреби в персоналі (наприклад, вміння поєднувати декілька професій працівником, зокрема, регіональний менеджер повинен вміти водити авто, таким чином підприємство економить на послугах водія); підтримувати постійний взаємозв'язок із зовнішніми джерелами, які забезпечують підприємство відповідними кадрами; створювати найбільш сприятливі умови для розкриття здібностей працівників, їх розвитку та використання тощо.

Динамічний розвиток економіки України, високі темпи змін зовнішнього середовища та посилення конкуренції обумовлюють зростання ролі та значення персоналу як фактора підвищення конкурентоспроможності. Для вітчизняних підприємств проблема формування персоналу, який би відповідав сучасним вимогам, був зацікавлений у зростанні продуктивності праці та досягненні цілей, є надзвичайно актуальною.

Серед зарубіжних та вітчизняних учених дотепер не існує єдиного підходу щодо вибору персоналу підприємства. У зв'язку з цим формування нових форм і методів є актуальним науково-практичним завданням.

На малих підприємствах функції підбору персоналу, як правило, покладаються на власника цього підприємства або його директора (якщо власник використовує для загального управління підприємством найманого менеджера).

На середніх підприємствах функції підбору персоналу виконує спеціальний кадровий менеджер або загальний центр управління персоналом, що є в складі економічної служби підприємства [6].

На великих підприємствах підбором персоналу здійснюють центри управління кадровою діяльністю, які сформовані у складі кожного дивізіону (відділення компанії).

Для вирішення проблеми заповнення вакантних посад якісними працівниками використовують такі методи: спостереження, бесіда, експеримент, експертні оцінки, тестування та ін. Однак, ці методи не завжди приносять бажаний результат.

Розглянемо використання математичного моделювання для обґрунтування рішення щодо заповнення вакантних посад. При цьому вважатимемо, що відома експертна оцінка відповідності кожного кандидата на ту чи іншу посаду, яка враховує його особисті якості та кваліфікацію. Існують різні методи, що використовуються при експертному оцінюванні. Так, наприклад, ранжування являє собою процедуру впорядкування об'єктів, що виконується експертом. В якості експертів, може виступати управлінський персонал підприємства. Задача полягає в такому розподілі кандидатів на вакантні місця, щоб заповнення вакантних посад відбулося найякіснішим.

Нехай

$L$  – показник якості заповнення вакантних посад;

$n$  – кількість вакантних посад;

$m$  – кількість кандидатів на посади;

$c_{ij}$  – експертна оцінка відповідності  $i$ -го кандидата на  $j$ -ту посаду;

$$x_{ij}^{(4)} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i - \text{тий кандидат рекомендується на } j - \text{ту посаду,} \\ 0, & \text{в протилежному випадку.} \end{cases}$$

Якщо  $m = n$ , то математична модель матиме вигляд:

$$L_1 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}^{(4)} \rightarrow \max \quad (34)$$

за умов

$$\sum_{i=1}^n x_{ij}^{(4)} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (35)$$

$$\sum_{j=1}^m x_{ij}^{(4)} = 1, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (36)$$

$$x_{ij}^{(4)} \in \{0, 1\}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (37)$$

Якщо  $m > n$ , то модель є такою:

$$L_2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}^{(4)} \rightarrow \max \quad (38)$$

за умов

$$0 \leq \sum_{i=1}^n x_{ij}^{(4)} \leq l, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (39)$$

де  $l$  – максимально можлива кількість посад, які можуть бути суміщені.

$$\sum_{j=1}^m x_{ij}^{(4)} = 1, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (40)$$

$$x_{ij}^{(4)} \in \{0, 1\}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (41)$$

Якщо  $m < n$ , то матимемо наступну модель:

$$L_3 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}^{(4)} \rightarrow \max \quad (42)$$

за умов

$$\sum_{i=1}^n x_{ij}^{(4)} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (43)$$

$$0 \leq \sum_{j=1}^m x_{ij}^{(4)} \leq 1, j = 1, 2, \dots, n, \quad (44)$$

$$x_{ij}^{(4)} \in \{0, 1\}, i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n. \quad (45)$$

Розглянемо тепер випадок, коли на кожну посаду існує декілька місць.

Нехай

$L$  – показник якості заповнення вакантних посад;

$n$  – кількість груп вакантних посад;

$m$  – кількість кандидатів на посади;

$k_j$  – кількість вакантних посад в  $j$  – й групі;

$c_{ij}$  – експертна оцінка відповідності  $i$  – го кандидата на посаду в  $j$  – й групі;

$$x_{ij}^{(4)} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i - \text{ тий кандидат рекомендується на } j - \text{ ту посаду,} \\ 0, & \text{в протилежному випадку.} \end{cases}$$

Якщо  $m = \sum_{j=1}^n k_j$ , то математична модель матиме вигляд:

$$L_4 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}^{(4)} \rightarrow \max \quad (46)$$

за умов

$$\sum_{i=1}^n x_{ij}^{(4)} = 1, i = 1, 2, \dots, m, \quad (47)$$

$$\sum_{j=1}^m x_{ij}^{(4)} = k_j, j = 1, 2, \dots, n, \quad (48)$$

$$x_{ij}^{(4)} \in \{0, 1\}, i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n. \quad (49)$$

Якщо  $m > \sum_{j=1}^n k_j$ , то модель є такою:

$$L_5 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}^{(4)} \rightarrow \max \quad (50)$$



за умов

$$0 \leq \sum_{i=1}^n x_{ij}^{(4)} \leq l, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (51)$$

$$\sum_{j=1}^m x_{ij}^{(4)} = k_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (52)$$

$$x_{ij}^{(4)} \in \{0, 1\}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (53)$$

Якщо  $m < \sum_{j=1}^n k_j$ , то матимемо наступну модель:

$$L_6 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}^{(4)} \rightarrow \max \quad (54)$$

за умов

$$\sum_{i=1}^n x_{ij}^{(4)} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (55)$$

$$\sum_{j=1}^m x_{ij}^{(4)} \leq k_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (56)$$

$$x_{ij}^{(4)} \in \{0, 1\}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (57)$$

Одержані математичні моделі є задачами про призначення.

З аналітичного вигляду математичної моделі задачі про призначення видно, що вона є частковим випадком транспортної задачі. Відомі алгоритми розв'язування транспортної задачі, такі як метод потенціалів, можуть бути використані для знаходження розв'язку, але специфіка задачі стимулювала пошук інших методів розв'язування. Одним з них є угорський метод [14]. Суть цього методу полягає в послідовному поліпшенні початкового плану доти, доки не буде знайдено оптимальний розподіл вакантних посад. Угорський метод швидко збігається, він забезпечує мінімізацію кількості кроків ітераційного процесу.

Часто малому підприємству з метою його стабільного функціонування та розвитку доводиться розробляти стратегічні та тактичні плани. Оскільки ці плани містять параметри діяльності об'єктів, які характеризують їх віддалене

майбутнє, то вони мають розроблятися на основі динамічних моделей, для знаходження розв'язків яких найчастіше застосовують методи динамічного програмування.

Активна поведінка малого підприємства можлива за умови ефективного менеджменту, інформаційної прозорості та інноваційної спрямованості бізнесу з метою утримання підприємством конкурентних позицій та прагненням адаптуватися до вимог і змін середовища. Розвиток підприємства відбувається завдяки прагненню і вмінню досягати у майбутньому певного бажаного стану. Тому зміни зовнішнього середовища вимагають з боку підприємства прискореного темпу реагування на них. З огляду на це виникає задача оптимального розміщення та експлуатації торгових представництв малого підприємства у регіонах.

Мале підприємство планує розмістити  $m$  представництв однакової потужності в  $n$  регіонах. Відомі обсяги доходів від діяльності представництв в кожному регіоні. Задача полягає в такому розподілі будівництва представництв серед регіонів, який забезпечив би максимальний загальний прибуток від їх діяльності.

Нехай  $g_i(x_j^{(5)})$ ,  $i=1,2,\dots,n$ , – обсяг прибутку від діяльності  $x_j^{(5)} = j$ ,  $j=1,2,\dots,m$ , представництв в  $i$ -му регіоні. Позначимо  $F_i(x_j^{(5)})$ ,  $i=1,2,\dots,n$ , – прибуток при розміщенні в перших  $i$  регіонах  $x_j^{(5)}$  представництв,  $F_i^*(x_j^{(5)})$ ,  $i=1,2,\dots,n$ , – прибуток при оптимальному розміщенні в перших  $i$  регіонах  $x_j^{(5)}$  представництв (максимальний прибуток). Процес розв'язування задачі розіб'ємо на  $n$  кроків.

На першому кроці визначимо максимальний прибуток при розміщенні в першому регіоні  $x_j^{(5)}$ ,  $j=0,1,\dots,m$ , представництв. На другому кроці визначимо максимальний прибуток при розміщенні  $x_j^{(5)}$ ,  $j=0,1,\dots,m$ , представництв в перших двох регіонах і так далі. І, нарешті, на  $n$ -му кроці визначимо максимальний прибуток при розміщенні  $m$  представництв в  $n$  регіонах.

На першому кроці

$$F_1(x_j^{(5)}) = g_1(x_j^{(5)}), F_1^*(x_j^{(5)}) = g_1(x_j^{(5)}), j = 0, 1, \dots, m. \quad (58)$$

На другому кроці

$$F_2(x_j^{(5)}) = \begin{cases} g_2(0) + F_1^*(x_j^{(5)} - 0) \\ g_2(1) + F_1^*(x_j^{(5)} - 1) \\ \dots \\ g_2(x_j^{(5)}) + F_1^*(0) \end{cases}, \quad (59)$$

i

$$F_2^*(x_j^{(5)}) = \max_{0 \leq k \leq j} \{g_2(k) + F_1^*(x_j^{(5)} - k)\}, \quad (60)$$

для  $j = 0, 1, \dots, m$ . І т. д.

Взагалі, на  $s$ -му кроці ( $s = 3, 4, \dots, n-1$ )

$$F_s(x_j^{(5)}) = \begin{cases} g_s(0) + F_{s-1}^*(x_j^{(5)} - 0) \\ g_s(1) + F_{s-1}^*(x_j^{(5)} - 1) \\ \dots \\ g_s(x_j^{(5)}) + F_{s-1}^*(0) \end{cases} \quad (61)$$

i

$$F_s^*(x_j^{(5)}) = \max_{0 \leq k \leq j} \{g_s(k) + F_{s-1}^*(x_j^{(5)} - k)\} \quad (62)$$

для  $j = 0, 1, \dots, m$ .

На останньому  $n$ -му кроці досить обчислити  $F_n(m)$  і  $F_n^*(m)$ , де

$$F_n(m) = \begin{cases} g_n(0) + F_{n-1}^*(m) \\ g_n(1) + F_{n-1}^*(m-1) \\ \dots \\ g_n(m) + F_{n-1}^*(0) \end{cases} \quad (63)$$

i

$$F_n^*(m) = \max_{0 \leq k \leq m} \{g_n(k) + F_{n-1}^*(m-k)\}. \quad (64)$$

Оптимальний план розміщення  $m$  представництв в  $n$  регіонах визначаємо, виходячи з наступних міркувань.

Нехай  $F_n^*(m)$  досягає максимуму при  $k=l_1$ , тоді в  $n$ -й регіон треба розмістити  $l_1$  представництв. Далі потрібно розподілити  $m-l_1$  представництв між першими  $n-1$  регіонами. Припустимо, що  $F_{n-1}^*(m-l_1)$  досягає максимуму при  $k=l_2$ . Це означає, що  $l_2$  представництв треба розмістити в  $(n-1)$ -му регіоні. Якщо  $F_{n-2}^*(m-(l_1+l_2))$  досягає максимуму при  $k=l_3$ , то  $l_3$  представництв треба розмістити в  $(n-2)$ -му регіоні. І т.д. Нехай  $F_2^*(m-(l_1+l_2+\dots+l_{n-2}))$  досягає максимуму при  $k=l_{n-1}$ . Тоді  $l_{n-1}$  представництв треба розмістити в другому регіоні. Нарешті  $l_n = m-(l_1+l_2+\dots+l_{n-1})$  представництв треба розмістити в першому регіоні.

Максимальний прибуток від розміщення та діяльності  $m$  представництв підприємства у  $n$  регіонах становитиме  $F_n^*(m)$  одиниць.

Таким чином отримуємо розв'язок моделі розподілу будівництва представництв серед регіонів, який забезпечує максимальний загальний прибуток підприємству від їх діяльності.

Малий бізнес неодмінно зацікавлений у кредитуванні, оскільки нестача грошей – це основна проблема підприємництва. Більшість кредитів надається комерційними банками України. Під кредитуванням малого бізнесу розуміють банківські грошові позики, що видаються представникам МП на певних умовах (зазвичай під відсотки). Підприємства повинні обов'язково здійснювати діяльність у сфері виробництва, торгівлі або надання послуг. Більшість кредитів видаються на поповнення обігових коштів, придбання обладнання, рухомого і нерухомого майна і т. д. Високі процентні ставки комерційних кредитів та короткі терміни кредитування, відсутність коштів під заставу унеможливають отримання коштів для ведення та започаткування бізнесу.

З огляду на складність отримання кредитних коштів малі підприємства розвиваються переважно за рахунок власних коштів. Тому розглянемо задачу

розподілу кредитних коштів між філіями малого підприємства з урахуванням їхніх потреб, який забезпечує їм максимальний прибуток та підприємству зокрема.

Припустимо, що для кредитування філій  $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_i$  малого підприємства кредитор може виділити  $m$  грошових одиниць коштів, обсяг кожної з яких становить  $s$  грошових одиниць. При цьому одній філії підприємства може бути виділено не більше одного кредиту, розмір якого становить  $k$  грошових одиниць коштів, де  $k = 1, 2, \dots, m$ . Нехай потреба  $i$ -ої філії підприємства в кредиті становить  $k_i$  грошових одиниць, а прибуток  $i$ -ої філії підприємства від використання  $j$ ,  $j = 1, 2, \dots, k_i$ , грошових одиниць становить  $g_i(j)$ . В залежності від розміру вкладених коштів в ту чи іншу філію підприємства останнє отримує відповідний прибуток. Задача полягає в такому розподілі кредитних коштів філіям підприємства, за якого сумарна величина прибутку всіх філій підприємства від використання кредитних коштів була б найбільшою.

Якщо позначити через  $x_i^{(6)}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , кількість грошових одиниць коштів, що планується виділити  $i$ -ій філії підприємства, то математична модель задачі матиме вигляд

$$P = \sum_{i=1}^n g_i(x_i^{(6)}) \rightarrow \max. \quad (65)$$

за умов

$$\sum_{i=1}^n x_i^{(6)} = m, \quad x_i^{(6)} \in \{0, 1, \dots, k_i\}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (66)$$

Для побудови алгоритму розв'язування задачі вважатимемо, що філії підприємства впорядковані за зростанням їхніх потреб в кредитах.

Нехай

$$r_i = \sum_{j=1}^i k_j, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (67)$$

$$p_i = \min(m, r_i), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (68)$$

Позначимо через  $P_i(x_j^{(6)})$ ,  $i=1,2,\dots,n$ , прибуток від використання  $x_j^{(6)} = j$ ,  $j=0,1,\dots,p_i$ , одиниць коштів першими  $i$  філіями  $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_i$  підприємства, а через  $P_i^*(x_j^{(6)})$ ,  $i=1,2,\dots,n$ , величину прибутку від оптимального (з максимальним прибутком) використання  $x_j^{(6)} = j$ ,  $j=0,1,\dots,p_i$ , одиниць коштів першими  $i$  філіями підприємства.

Використовуючи метод динамічного програмування, процес розв'язування задачі розіб'ємо на  $n$  кроків. На першому кроці визначимо величину максимального прибутку від використання в розмірі  $x_j^{(6)} = j$ ,  $j=1,\dots,p_1$ , одиниць коштів першою філією  $\Pi_1$  підприємства. На другому кроці визначимо величину максимального прибутку від використання в розмірі  $x_j^{(6)} = j$ ,  $j=1,\dots,p_2$ , одиниць коштів першими двома філіями підприємства  $\Pi_1$  і  $\Pi_2$ . І т. д. Взагалі, на  $s$ -му кроці ( $s=3, 4, \dots, n-1$ ) визначимо величину максимального прибутку від використання в розмірі  $x_j^{(6)} = j$ ,  $j=0,1,\dots,p_s$ , одиниць коштів першими  $s$  філіями підприємства  $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_s$ . На останньому  $n$ -му кроці визначимо величину максимального прибутку від використання кредиту в розмірі  $t$  грошових одиниць коштів усіма філіями підприємства.

Запишемо формули для визначення  $P_i(x_j^{(6)})$  і  $P_i^*(x_j^{(6)})$ ,  $i=1,2,\dots,n$ .

На першому кроці

$$P_1(j) = P_1^*(j) = g_1(j), \quad j=0,1,\dots,k_1. \quad (69)$$

На другому кроці визначаємо:

$$P_2(j) = \begin{cases} g_2(j) + P_1^*(0), \\ g_2(j-1) + P_1^*(1), \\ \dots \\ g_2(0) + P_1^*(j); \end{cases} \quad (70)$$

$$P_2^*(j) = \max_{0 \leq k \leq j} \{g_2(k) + P_1^*(j-k)\} \quad (71)$$

для  $j = 0, 1, \dots, k_1$ .

$$P_2(j) = \begin{cases} g_2(j) + P_1^*(0), \\ g_2(j-1) + P_1^*(1), \\ \dots \\ g_2(j-k_1) + P_1^*(k_1); \end{cases} \quad (72)$$

$$P_2^*(j) = \max_{0 \leq k \leq k_1} \{g_2(j-k) + P_1^*(k)\} \quad (73)$$

для  $j = k_1 + 1, k_1 + 2, \dots, k_2$ .

$$P_2(k_2 + l) = \begin{cases} g_2(k_2) + P_1^*(l), \\ g_2(k_2 - 1) + P_1^*(l+1), \\ \dots \\ g_2(k_2 - (k_1 - l)) + P_1^*(k_1); \end{cases} \quad (74)$$

$$P_2^*(k_2 + l) = \max_{0 \leq k \leq k_1 - l} \{g_2(k_2 - k) + P_1^*(l+k)\} \quad (75)$$

для  $l = 1, 2, \dots, k_1$ .

Взагалі, на  $s$ -му кроці ( $s = 3, 4, \dots, n-1$ ) визначаємо:

$$P_s(j) = \begin{cases} g_s(j) + P_{s-1}^*(0), \\ g_s(j-1) + P_{s-1}^*(1), \\ \dots \\ g_s(0) + P_{s-1}^*(j); \end{cases} \quad (76)$$

$$P_s^*(j) = \max_{0 \leq k \leq j} \{g_s(k) + P_{s-1}^*(j-k)\} \quad (77)$$

для  $j = 0, 1, \dots, k_{s-1}$ .

$$P_s(j) = \begin{cases} g_s(j) + P_{s-1}^*(0), \\ g_s(j-1) + P_{s-1}^*(1), \\ \dots \\ g_s(j-k_{s-1}) + P_{s-1}^*(k_{s-1}); \end{cases} \quad (78)$$

$$P_s^*(j) = \max_{0 \leq k \leq k_{s-1}} \{g_s(j-k) + P_{s-1}^*(k)\} \quad (79)$$

для  $j = k_{s-1} + 1, k_{s-1} + 2, \dots, k_s$ .

$$P_s(k_s + l) = \begin{cases} g_s(k_s) + P_{s-1}^*(l), \\ g_s(k_s - 1) + P_{s-1}^*(l + 1), \\ \dots \\ g_s(k_s - (k_{s-1} - l)) + P_{s-1}^*(k_{s-1}); \end{cases} \quad (80)$$

$$P_s^*(k_s + l) = \max_{0 \leq k \leq k_{s-1} - 1} \{g_s(k_s - k) + P_{s-1}^*(l + k)\} \quad (81)$$

для  $l = 1, 2, \dots, k_{s-1}$ .

На останньому  $n$ -му кроці визначаємо:

$$P_n(m) = \begin{cases} g_n(k_n) + P_{n-1}^*(m - k_n), \\ g_n(k_n - 1) + P_{n-1}^*(m - (k_n - 1)), \\ \dots \\ g_n(m - r_{n-1}) + P_{n-1}^*(r_{n-1}); \end{cases} \quad (82)$$

$$P_n^*(m) = \max_{0 \leq k \leq r_n - m} \{g_n(k_n - k) + P_{n-1}^*(m - (k_n - k))\}. \quad (83)$$

Оптимальний розподіл кредитних коштів визначаємо, виходячи з наступних міркувань. Якщо  $P_n^*(m)$  досягає максимуму для  $k = l_1$ , тоді  $l_1$  грошових одиниць коштів треба виділити для  $n$ -ої філії підприємства  $\Pi_n$ . Залишилось розподілити  $m - l_1$  грошових одиниць коштів серед перших  $(n - 1)$ -ої філіями підприємства. Якщо  $P_{n-1}^*(m - l_1)$  досягає максимуму для  $k = l_2$ , то  $l_2$  грошових одиниць коштів треба виділити для філії підприємства  $\Pi_{n-1}$ . Якщо  $P_{n-2}^*(m - (l_1 + l_2))$  досягає максимуму для  $k = l_3$ , то  $l_3$  одиниці коштів треба виділити філії підприємства  $\Pi_{n-2}$ . І т. д. Нехай  $P_2^*(m - (l_1 + l_2 + \dots + l_{n-2}))$  приймає найбільше значення для  $k = l_{n-1}$ . Тоді  $l_{n-1}$  одиниць коштів треба виділити філії підприємства  $\Pi_2$ . Нарешті,  $l_n = m - (l_1 + l_2 + \dots + l_{n-1})$  грошових одиниць коштів треба виділити філії підприємства  $\Pi_1$ . Сумарна величина максимального прибутку становить  $P_n^*(m)$ . Діяльність підприємства, пов'язана



з управлінням постачанням та збутом готової продукції, повинна відповідати головним напрямом господарської діяльності підприємства та забезпечувати такий зміст виробничої, збутової, транспортної, складської та іншої діяльності, за якою вчасно реалізовуватиметься продукція споживачеві. Для функціонування цієї системи, що передбачає планування, організування, мотивування та контролювання операцій з доставки необхідної споживачеві продукції відповідної кількості та якості за визначених термінів у місце його призначення, необхідно застосувати раціональні методи для прийняття обґрунтованих управлінських рішень. Результати визначення оптимального рішення задачі (1)–(7) для ТЗОВ «Дивосвіт» у 2013–2020 рр. відображено на рис. 4.

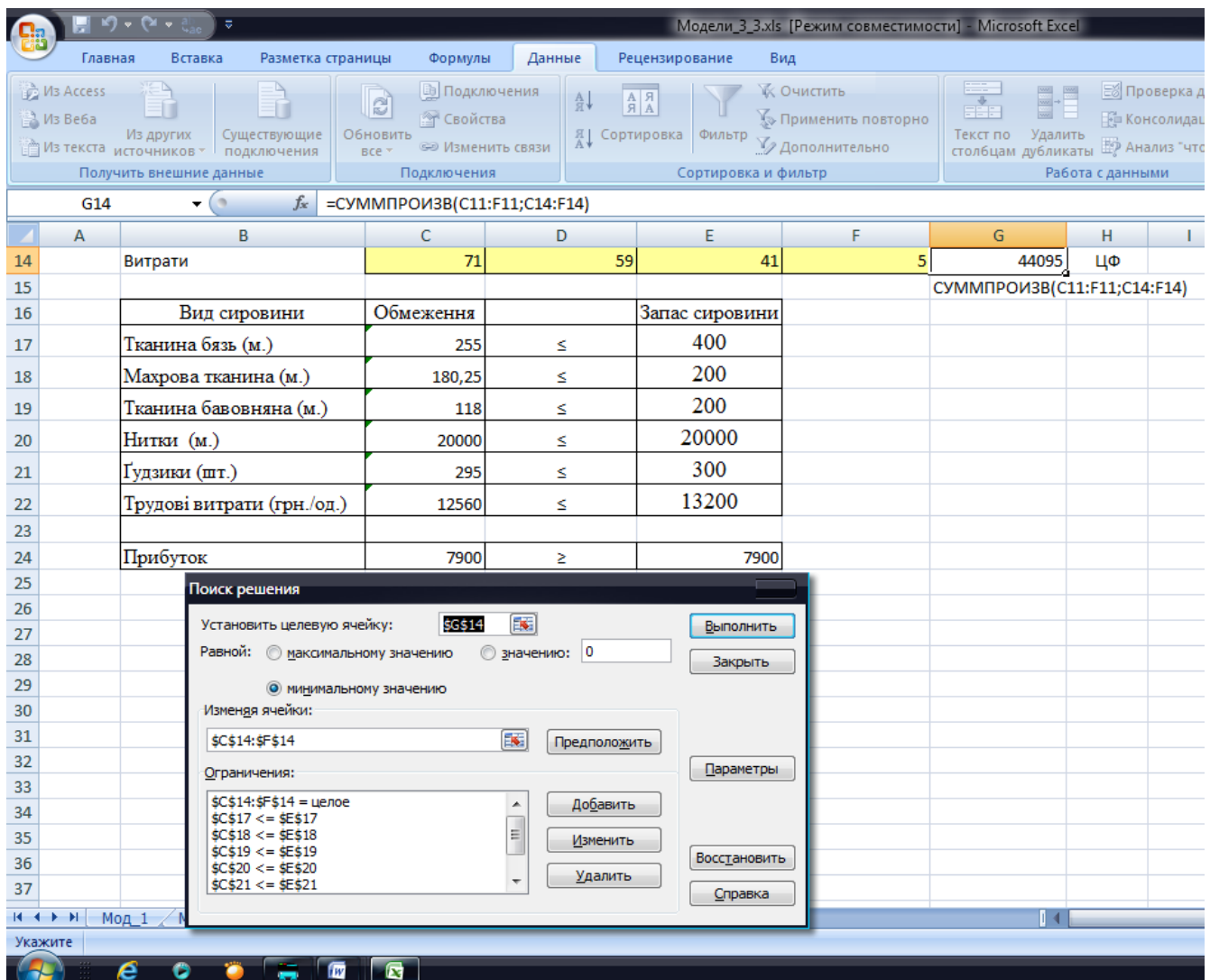


Рис. 4. Результати застосування «Пошук рішень» MS Excel для знаходження оптимального рішення задачі (1)–(7)

*Джерело: розраховано автором*

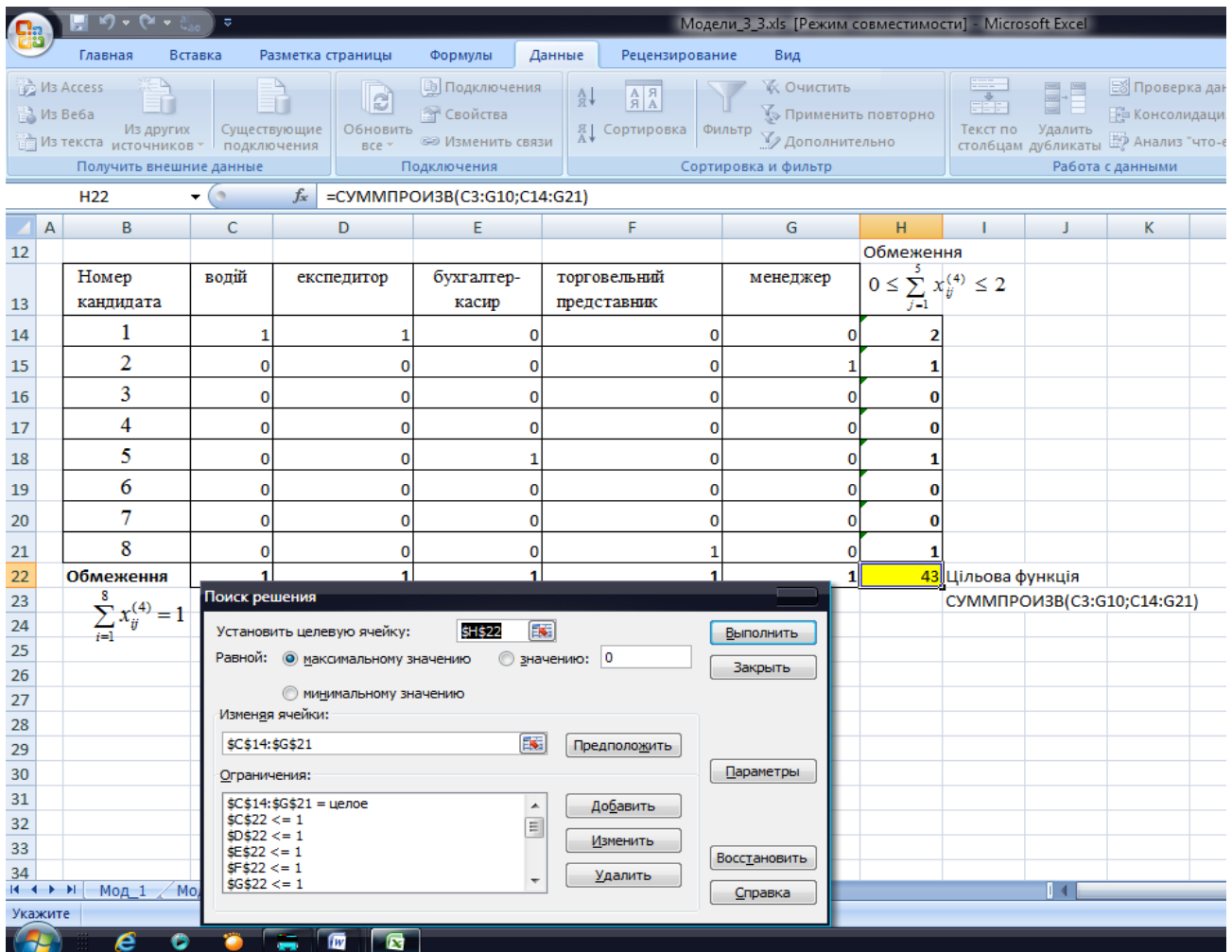


Рис. 5. Результати застосування «Пошук рішень» MS Excel для знаходження оптимального рішення задачі (16)–(19)  
*Джерело: розраховано автором*

Таким чином, на третьому етапі концепції побудований комплекс оптимізаційних моделей та методів, використання яких для підтримки прийняття рішень в управлінні малим підприємством, зокрема, дозволить збільшити прибуток підприємства, скоротити транспортні витрати на постачання сировини та готової продукції, ефективно розподіляти кредитні кошти, здійснювати оптимальне розміщення торговельних представництв, а також підвищувати якість продукції та задовольняти попит на неї, ефективно заповнювати вакантні посади на підприємстві.

## ВИКОРИСТАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Бех Н. Особливості розвитку та функціонування малого і середнього бізнесу в Україні / Н. Бех // Галицький економічний вісник. – 2020. – № 1 (22). – С. 16–18.
2. Васьків О. М. Математична модель та автоматизація ІТ розрахунку виробничо-господарської діяльності підприємства / О. М. Васьків, В. В. Здрок // Бізнес Інформ. – 2021. – № 6. – С. 81–87.
3. Вітлінський В. В. Модель розвитку малого підприємства для неперервного часу з урахуванням очікувань / В. В. Вітлінський, О. В. Піскунова // Бізнес Інформ. – 2018. – № 4 (1). – С. 15–18.
4. Гвоздецька І. В. Аналіз підходів до моделювання процесів управління промисловим підприємством / І. В. Гвоздецька, О. В. Остапчук // Бізнес Інформ. – 2017. – № 5 (1). – С. 79–80.
5. Квик М. Я. Моделювання динаміки розвитку малих підприємств у Західному регіоні України / М. Я. Квик // Вісник Львівської комерційної академії. Серія економічна. – Випуск 2. – Львів: Видавництво Львівської комерційної академії, 2021. – С. 168–172.
6. Лапшин В. І. Критеріальний метод аналітичної стохастичної процедури підтримки прийняття рішень / В. І. Лапшин, В. М. Кузніченко, Т. В. Стеценко // Бізнес Інформ. – 2013. – № 7. – С. 80–84.
7. Матусова О. М. Розвиток малого підприємства в умовах кризи / О. М. Матусова // Вісн. Хмельниц. нац. ун-ту. Економічні науки. – 2020. – № 3. – Т. 2. – С. 224–227.
8. Мошек Г. Є. Особливості вибору методів розробки і прийняття рішень в управлінні торговельними організаціями / Г. Є. Мошек // Вісн. Нац. ун-ту «Львівська політехніка». – 2016. – № 682. – С. 316–320.
9. Піскунова О. В. Моделювання управлінських рішень щодо розвитку малого підприємництва : монографія / О. В. Піскунова ; Київ. нац. екон. ун-т ім. В. Гетьмана. – К., 2015. – 334 с.

10. Потрашкова Л. В. Моделювання діяльності підприємства з урахуванням його соціально-економічних відносин як інструмент оцінки потенціалу підприємства / Л. В. Потрашкова // Бізнес Інформ. – 2013. – № 7. – С. 123–12.

11. Приймак В. І. Математичні методи економічного аналізу : навч. посіб. для студ. вищ. навч. закладів / В. І. Приймак; Львівський національний ун-т ім. Івана Франка. – К. : Центр учбової літератури, 2020. – 292 с.

12. Родіонов А. В. Роль інформаційних ресурсів в управлінні підприємством / А. В. Родіонов // Вісник Хмельницького національного університету : науковий журнал. Економічні науки. – 2021. – № 3. – Том 2. – С. 255–258.

13. Соколовська З. М. Прикладне імітаційне моделювання як аналітична основа прийняття управлінських рішень / З. М. Соколовська, Н. В. Яценко // Бізнес Інформ. – 2016. – № 6. – С. 69–76.

14. Сучасні та перспективні методи і моделі управління в економіці : монографія : у 2 ч. / за ред. д-ра екон. наук, проф. А. О. Єпіфанова. – Суми : ДВНЗ «УАБС НБУ», 2018. – Ч. 1. – 232 с.

15. Теліна В. Ю. Сучасні підходи до розробки та прийняття управлінських рішень в умовах ринкової системи господарювання / В. Ю. Теліна // Економічний вісник Донбасу. – № 1 (19). – 2015. – С. 132–134.

16. Устенко С. В. Застосування PRIME-методу для управління бізнес-процесами підприємства / С. В. Устенко, О. М. Помазун // Бізнес Інформ. – 2013. – № 5. – С. 77–86.

17. Doing Business 2019: Understanding Regulations for Small and Medium-Size Enterprises – Washington, DC: The World Bank, 2019 [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://www.doingbusiness.org/>

18. Yeleyko V. Support of Management Decisions to Fill Vacancies / Yeleyko V., Kvyk M. // *Ekonomika i Organizacja Przedsiębiorstwa* / Instytut Organizacji i Zarządzania w Przemśle «ORGMASZ». – Warszawa, 2014. – № R6(773). – P. 3–10.

**Возняк Ольга Григорівна, кандидат фізико-математичних наук,  
доцент кафедри економічної кібернетики та інформатики**

## **СИСТЕМИ ПІДТРИМКИ БІЗНЕС-РІШЕНЬ НА ОСНОВІ МОДЕЛЕЙ ОПТИМАЛЬНИХ ПЛАНІВ З ДИСКРЕТНИМИ ЗМІННИМИ**

### **1. Використання функції із аргументом під знаком модуля при побудові математичних моделей виробничих процесів**

Сучасний процес становлення інформаційної економіки, яка ґрунтується на знаннях, формує нові вимоги до ефективності функціонування соціально-економічних систем, організації виробничих процесів та процесів управління ними. За умов, коли визначальним фактором економічного розвитку є знання та інтелект, виникає потреба в інтенсифікації виробництва товарів та послуг, яка можлива за рахунок використання високих технологій, інновацій та ефективних, науково обґрунтованих методів управління соціально-економічними системами. Тобто, економіка знань актуалізує проблеми оптимізації виробництва та бізнесу, що у свою чергу потребує застосування математичного інструментарію. Багато практичних задач господарської діяльності та ряд важливих питань економічної теорії пов'язані із задачами визначення найкращого, оптимального варіанту розв'язку. Такими, наприклад, є задачі вибору оптимальної виробничої програми підприємства, транспортні задачі, задачі раціонального розподілу вантажних потоків та цілий комплекс проблем, пов'язаних з оптимальним плануванням національної економіки. Величезна кількість можливих варіантів діяльності ускладнює отримання оптимального плану емпіричним або експертним шляхом. Застосування математичних методів та обчислювальних можливостей у плануванні діяльності суб'єктів господарювання забезпечує раціоналізацію, підвищення ефективності його діяльності та економічне зростання.

Існує багато задач з економіки, які зводяться до знаходження оптимального варіанту планування тих чи інших виробничих процесів, транспортних перевезень, використання сировини, обладнання і т. д. Розв'язання таких задач, інколи, зводиться до дослідження функції вигляду:

$$f(x) = A \sum_{i=1}^n |x - a_i| + M.$$

Якщо  $i=1$ , то

$$f(x) = A|x - a_1| + M,$$

де  $A$ ,  $a_1$ ,  $M$  – задані числа,  $x \in R$ .

Важливо відмітити, що  $M$  є деяке стале число, яке не залежить від змінної  $x$ .

Якщо  $A > 0$ , то перший доданок  $A|x - a_1|$  ніколи не буде від'ємним і при  $x = a_1$  перетворюється в нуль. Тому функція  $f(x)$  має найменше значення, яке дорівнює  $M$ :  $y_{\min} = M$  і не має найбільшого значення.

Якщо  $A < 0$ , то з таких самих міркувань виходить, що  $y_{\max} = M$ , причому це значення досягається при  $x_0 = a_1$ , а  $y_{\min}$  не існує.

Теоретичною основою для знаходження найбільшого (найменшого) значення функції вигляду

$$f(x) = A \sum_{i=1}^k |x - a_i| + M, \quad (1.1)$$

яка може бути математичною моделлю виробничого процесу, можуть стати в пригоді дві теореми.

### Теорема 1. Функція

$$f(x) = \sum_{i=1}^{2n} |x - a_i|,$$

де  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2n}$  – сталі і  $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{2n}$ , має мінімум на відрізку, кінці якого є двома середніми членами послідовності  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2n}$ ;

$$f_{\min} = \sum_{i=n+1}^{2n} a_i - \sum_{i=1}^n a_i.$$

**Доведення.** Оскільки  $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{2n}$ , то при довільних значеннях  $x$  маємо:

$$x - a_1 > x - a_2 > x - a_3 > \dots > x - a_{2n}.$$

Нехай  $x \leq a_1$ , тоді

$$x - a_{2n} < x - a_{2n-1} < \dots < x - a_1 \leq 0$$

і

$$f(x) = -2nx + (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2n}).$$

Якщо  $a_1 \leq x \leq a_2$ , то

$$\begin{aligned} f(x) &= (x - a_1) - (x - a_2) - (x - a_3) - \dots - (x - a_{2n}) = \\ &= -(2n - 2)x + (-a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2n}). \end{aligned}$$

Якщо  $a_2 \leq x \leq a_3$ , то

$$\begin{aligned} f(x) &= (x - a_1) + (x - a_2) - (x - a_3) - \dots - (x - a_{2n}) = \\ &= -(2n - 4)x + (-a_1 - a_2 + a_3 + \dots + a_{2n}) \end{aligned}$$

і т. д.

При  $a_n \leq x \leq a_{n+1}$

$$f(x) = (x - a_1) + (x - a_2) + \dots + (x - a_n) - (x - a_{n+1}) - \dots - (x - a_{2n}) = -\sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=n+1}^{2n} a_i.$$

При  $a_{n+1} \leq x \leq a_{n+2}$

$$f(x) = (x - a_1) + (x - a_2) + \dots + (x - a_n) + (x - a_{n+1}) - \dots - (x - a_{2n}) = 2x - \sum_{i=1}^{n+1} a_i + \sum_{i=n+2}^{2n} a_i$$

і т. д.

Якщо  $a_{2n-1} \leq x \leq a_{2n}$ , то

$$f(x) = (x - a_1) + (x - a_2) + \dots + (x - a_{2n}) = 2nx - (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2n}).$$

Звідси випливає, що на кожному відрізку з відрізків  $[a_i; a_{i+1}]$ , починаючи з  $x \leq a_1$  і закінчуючи  $a_{n-1} \leq x \leq a_n$ , функція (1.1) збігається з лінійними функціями, кожна з яких монотонно спадає. На проміжку  $a_n \leq x \leq a_{n+1}$  вона набуває сталого значення, яке дорівнює

$$-\sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=n+1}^{2n} a_i.$$

На відрізках, починаючи з  $a_{n+1} \leq x \leq a_{n+2}$  і закінчуючи  $x \geq a_{2n}$ , функція (1.1) збігається з лінійними функціями, кожна з яких монотонно зростає. Найменше значення функції

$$y_{\min} = \sum_{i=n+1}^{2n} a_i - \sum_{i=1}^n a_i \text{ при } a_n \leq x \leq a_{n+1}.$$

Отже, для знаходження мінімуму функції

$$f(x) = \sum_{i=1}^{2n} |x - a_i|,$$

де  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2n}$  – сталі числа і  $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{2n}$ , потрібно вибрати відрізок, кінці якого зображають собою два середніх члени послідовності

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2n}.$$

Аналогічно можна довести наступну теорему.

**Теорема 2.** Функція

$$f(x) = \sum_{i=1}^{2n+1} |x - a_i|,$$

де  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2n+1}$  – сталі числа і  $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{2n+1}$ , має мінімум у точці  $x = a_{n+1}$ , яка є середнім членом послідовності  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2n+1}$ ;

$$f_{\min} = -\sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=n+1}^{2n+1} a_i.$$

В залежності від парності  $n$  екстремум функції (1.1) знаходять за допомогою відповідно першої і другої теорем.

Якщо  $n$  – непарне число, то екстремум досягається у точці  $x = a_{n+1}$ , якщо  $n$  – парне число, то екстремум досягається на відрізку  $[a_n; a_{n+1}]$ .

**Теорема 3.** Функція

$$f(x) = |x - a_1| - |x - a_2| + |x - a_3| - |x - a_4| + \dots + |x - a_{2n-1}| - |x - a_{2n}|,$$

де  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2n}$  – сталі числа і  $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{2n}$ , має найменше значення



$$f_{\min} = (a_1 + a_3 + \dots + a_{2n-1}) - (a_2 + a_4 + \dots + a_{2n})$$

і найбільше значення

$$f_{\max} = (a_2 + a_4 + \dots + a_{2n}) - (a_1 + a_3 + \dots + a_{2n-1}).$$

**Доведення.** Оскільки  $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{2n}$ , то при довільних значеннях  $x$  маємо  $x - a_1 > x - a_2 > x - a_3 > \dots > x - a_{2n}$ .

Нехай  $x \leq a_1$ . Тоді  $x - a_{2n} < \dots < x - a_2 < x - a_1 \leq 0$  і

$$\begin{aligned} f(x) &= -(x - a_1) + (x - a_2) - (x - a_3) + (x - a_4) - \dots - (x - a_{2n-1}) + (x - a_{2n}) = \\ &= (a_1 + a_3 + \dots + a_{2n-1}) - (a_2 + a_4 + \dots + a_{2n}). \end{aligned}$$

Нехай  $a_1 \leq x \leq a_2$ . Тоді  $x - a_{2n} < \dots < x - a_3 < x - a_2 \leq 0$ ,  $x - a_1 \geq 0$  і

$$\begin{aligned} f(x) &= (x - a_1) + (x - a_2) - (x - a_3) - (x - a_4) - \dots - (x - a_{2n-1}) + (x - a_{2n}) = \\ &= 2x + (-a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{2n-1}) - (a_2 + a_4 + \dots + a_{2n}). \end{aligned}$$

Нехай  $a_2 \leq x \leq a_3$ . Тоді  $x - a_{2n} < \dots < x - a_4 < x - a_3 \leq 0$ ,  $x - a_1 > x - a_2 \geq 0$  і

$$\begin{aligned} f(x) &= (x - a_1) - (x - a_2) - (x - a_3) + (x - a_4) - \dots - (x - a_{2n-1}) + (x - a_{2n}) = \\ &= (-a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{2n-1}) - (-a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{2n}). \end{aligned}$$

Нехай тепер  $a_{2k-1} \leq x \leq a_{2k}$ . Тоді

$$x - a_{2n} < \dots < x - a_{2k+1} < x - a_{2k} \leq 0, \quad x - a_1 > x - a_2 > \dots > x - a_{2k-1} \geq 0$$

і

$$\begin{aligned} f(x) &= (x - a_1) - (x - a_2) + \dots - (x - a_{2k-2}) + (x - a_{2k-1}) + (x - a_{2k}) - (x - a_{2k+1}) + \dots - \\ &\quad - (x - a_{2n-1}) + (x - a_{2n}) = 2x + (-a_1 - a_3 - \dots - a_{2k-1} + a_{2k+1} + \dots + a_{2n-1}) - \\ &\quad - (-a_2 - a_4 - \dots - a_{2k-2} + a_{2k} + \dots + a_{2n}). \end{aligned}$$

Нехай  $a_{2k} \leq x \leq a_{2k+1}$ . Тоді  $x - a_{2n} < \dots < x - a_{2k+2} < x - a_{2k+1} \leq 0$ ,

$x - a_1 > x - a_2 > \dots > x - a_{2k} \geq 0$  і

$$\begin{aligned} f(x) &= (x - a_1) - (x - a_2) + \dots + (x - a_{2k-1}) - (x - a_{2k}) - (x - a_{2k+1}) + (x - a_{2k+2}) - \dots - \\ &\quad - (x - a_{2n-1}) + (x - a_{2n}) = (-a_1 - a_3 - \dots - a_{2k-1} + a_{2k+1} + \dots + a_{2n-1}) - \\ &\quad - (a_2 - a_4 - \dots - a_{2k} + a_{2k+2} + \dots + a_{2n}). \end{aligned}$$

Нарешті, нехай  $x \geq a_{2n}$ . Тоді  $x - a_1 > x - a_2 > \dots > x - a_{2n} \geq 0$  і

$$\begin{aligned}
 f(x) &= (x-a_1) - (x-a_2) + (x-a_3) - (x-a_4) + \dots + (x-a_{2n-1}) - (x-a_{2n}) = \\
 &= (-a_1 - a_3 - \dots - a_{2n-1}) - (-a_2 - a_4 - \dots - a_{2n}) = \\
 &= (a_2 + a_4 + \dots + a_{2n}) - (a_1 + a_3 + \dots + a_{2n-1}).
 \end{aligned}$$

Як бачимо, на кожному з проміжків  $a_{2k-1} \leq x \leq a_{2k}$ , де  $k=1,2,3,\dots,n$ , функція  $f(x)$  збігається з відповідною лінійною функцією вигляду  $y=2x+l_k$ , кожна з яких монотонно зростає.

На проміжках  $a_{2k} \leq x \leq a_{2k+1}$ , де  $k=1,2,3,\dots,n$ , функція  $f(x)$  набуває сталих значень  $m_1, m_2, \dots, m_{n-1}$ .

При  $x \leq a_1$  і  $x \geq a_{2n}$  функція  $f(x)$  також набирає сталих значень:

$$\begin{aligned}
 m_0 &= (a_1 + a_3 + \dots + a_{2n-1}) - (a_2 + a_4 + \dots + a_{2n}) \text{ і} \\
 m_n &= (a_2 + a_4 + \dots + a_{2n}) - (a_1 + a_3 + \dots + a_{2n-1}),
 \end{aligned}$$

причому  $m_0 < m_1 < m_2 < \dots < m_n$ .

Найменше значення функції  $f(x)$  є

$$f_{\min} = m_0 = (a_1 + a_3 + \dots + a_{2n-1}) - (a_2 + a_4 + \dots + a_{2n}),$$

а найбільше значення є

$$f_{\max} = m_n = (a_2 + a_4 + \dots + a_{2n}) - (a_1 + a_3 + \dots + a_{2n-1}).$$

Зауважимо, що  $m_n = -m_0$ .

Розглянуті теореми можна використати для оптимального планування виробничих процесів при розв'язуванні наступних ситуацій.

**Задача 1.** По колу розміщено 5 коробок з деталями (рис. 1). У першій – 19 деталей, у другій – 9 деталей, у третій – 26 деталей, у четвертій – 8 деталей, у п'ятій – 18. Потрібно перекласти деталі з будь-якої коробки в будь-яку сусідню так, щоб в усіх коробках було деталей порівну. Як можна це зробити так, щоб перекласти найменшу кількість деталей?

**Перший спосіб розв'язання.** Через  $x$  позначимо кількість деталей, перекладених з першої коробки в другу (якщо деталі перекладаються з другої коробки в першу, то  $x < 0$ ). Усіх деталей у коробках:  $19+9+26+8+18=80$ . В одній коробці має бути  $80:5=16$  (деталей).

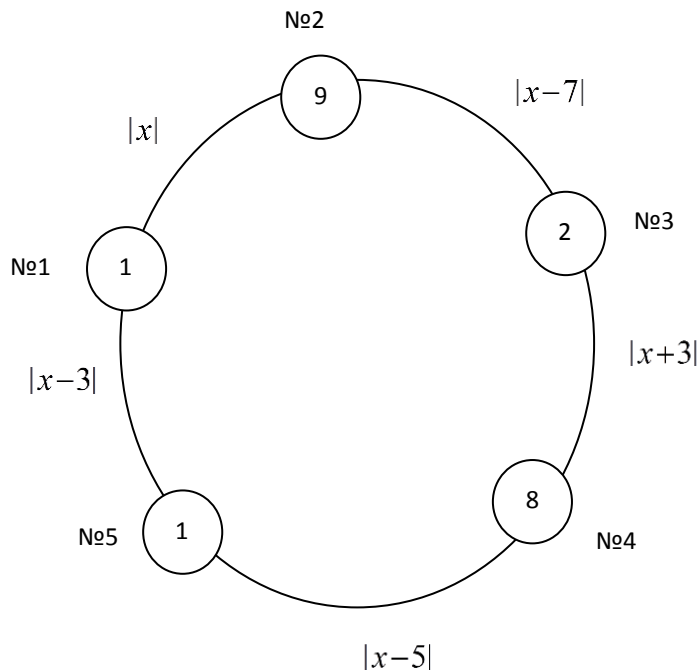


Рис. 1

Складаємо таблицю:

№п/п	Кількість деталей	Кількість деталей, яка повинна бути в коробці	Кількість перекладених деталей
1	19	$19 - x = 16$	$ x $
2	9	$9 + x - a = 16$	$a =  x - 7 $
3	26	$26 + (x - 7) - b = 16$	$b =  x + 3 $
4	8	$8 + (x + 3) - c = 16$	$c =  x - 5 $
5	18	$18 + (x - 5) - d = 16$	$d =  x - 3 $

Позначимо через  $y$  загальну кількість перекладених деталей, тоді

$$y = |x| + |x - 7| + |x + 3| + |x - 5| + |x - 3| \quad (\text{рис. 1}). \quad (1.2)$$

На рис. 1 представлено схему перекладання деталей. У цій формулі знаки модуля використані тому, що для нас важлива лише кількість перекладених деталей, а не те, у якому напрямі їх перекладали. Потрібно вибрати  $x$  так, щоб функція  $y$  мала найменше значення. Якщо побудувати графік функції, то з нього видно, що  $y_{\min} = 15$  при  $x = 3$ . Усіх деталей потрібно перекласти 15:  $y_{\min} = 15$  при  $x = 3$ .

**Другий спосіб розв'язання.** Розв'яжемо задачу методом опорної функції. Оскільки графік функції має 5 переломів (непарну кількість), то екстремальне

значення вона буде набувати (згідно теореми 2) при такому значенні  $x$ , яке є середнім членом послідовності:  $-3, 0, 3, 6, 7$ , тобто при  $x=3$ . Функція (1.2) буде мати мінімальне значення при  $x=3$ .

Схема оптимального плану перекладання деталей зображена на рис. 2. Якщо значення виразу є додатним (від'ємним), то деталі треба перекладати в напрямі за годинниковою стрілкою (проти годинникової стрілки).

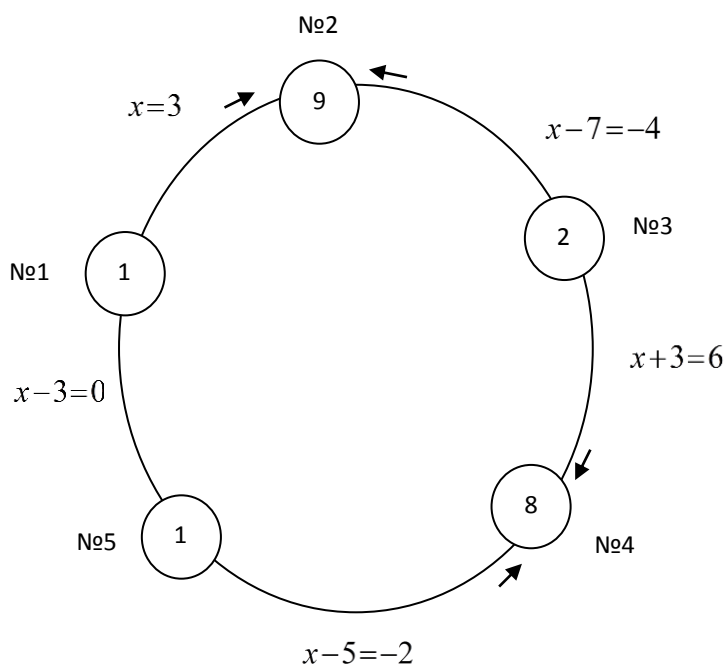


Рис. 2

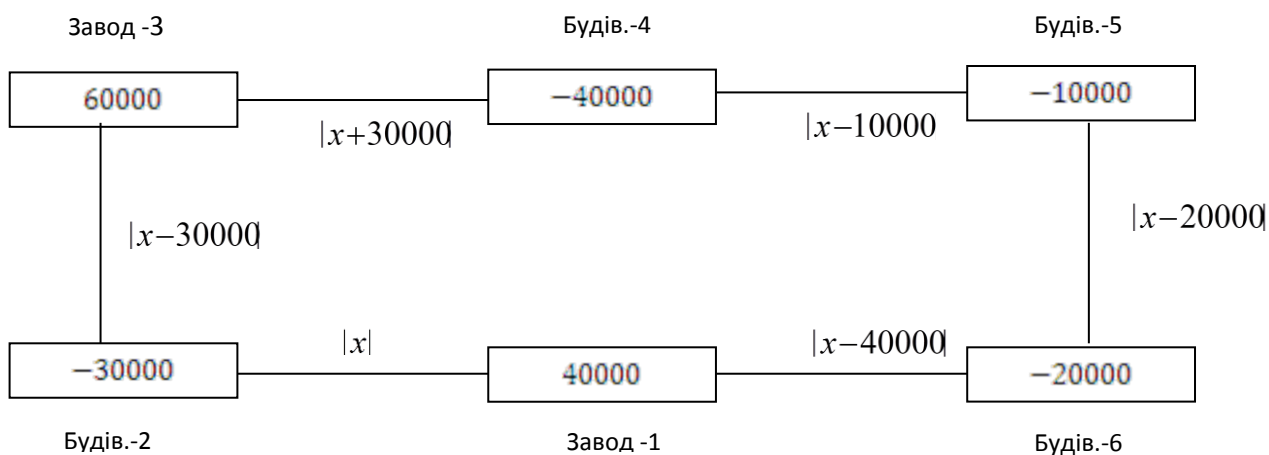


Рис. 3

**Задача 2.** Два цегляних заводи повинні обслуговувати чотири будівельні об'єкти. Заводи і будівельні об'єкти розміщені на однаковій відстані один від одного і сполучені кільцевою дорогою. На рис. 3 показано місце розміщення цегельних заводів і будівельних об'єктів, визначено кількість випуску цегли в добу (із знаком “+”) і кількість цегли, яка необхідна для кожного будівельного об'єкта (із знаком “-”). Як організувати найбільш економне перевезення цегли?

**Розв'язання.** Використовуючи метод розв'язування попередньої задачі, складемо таблицю:

№п/п	Кількість цегли на об'єкті	Кількість цегли, яка має бути на об'єкті	Кількість перевезеної цегли
1	40000	$40000 - x = 0$	$ x $
2	-30000	$0 + x - a = 30000$	$a =  x - 30000 $
3	60000	$60000 + (x - 30000) - b = 0$	$b =  x + 30000 $
4	-40000	$0 + (x + 30000) - c = 40000$	$c =  x - 10000 $
5	-10000	$0 + (x - 10000) - d = 10000$	$d =  x - 20000 $
6	-20000	$0 + (x - 20000) - e = 20000$	$e =  x - 40000 $

Розв'язування задачі зводиться до дослідження функції

$$y = |x| + |x - 30000| + |x + 30000| + |x - 10000| + |x - 20000| + |x - 40000| \quad (\text{рис. 3}).$$

$$y_{\min} = 110000 \quad \text{при } 10000 \leq x \leq 20000, \text{ де } x \in N.$$

Графік цієї функції має шість переломів (парну кількість) при  $x = -30$ ,  $x = 0$ ,  $x = 10$ ,  $x = 20$ ,  $x = 30$ ,  $x = 40$ . Тому згідно з теоремою 1 ця функція буде мати екстремальне значення на відрізку  $[10000; 20000]$ , кінці якого є двома середніми членами послідовності:  $-30$ ,  $0$ ,  $10$ ,  $20$ ,  $30$ ,  $40$ .

На відміну від попередньої ця задача має багато розв'язків, кожний з яких є натуральним числом від 10000 до 20000 включно.

Схема оптимального плану перевезення цегли зображена на рис. 4.

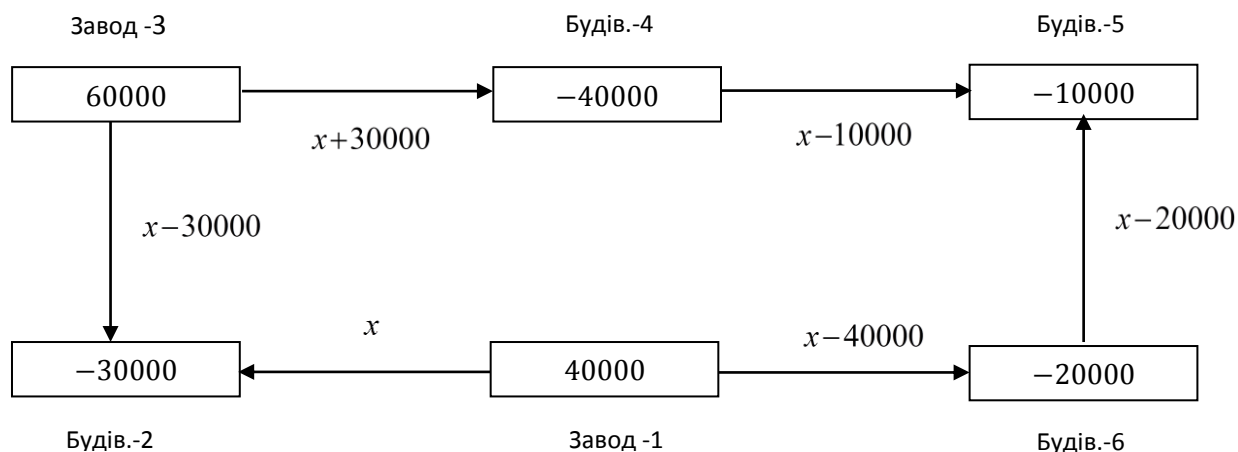


Рис. 4

Якщо значення виразу є додатним (від'ємним) числом, то цеглу треба перевозити в напрямі за годинниковою стрілкою (проти годинникової стрілки).

**Задача 3.** На рисунку 5, показано місце і кількість наявного товару (із знаком “+”), а із знаком “-”, – кількість необхідного товару. Складіть оптимальний план перевезення товару.

Складемо таблицю:

№п/п	Кількість товару, який є в наявності	Кількість товару, яка має бути у кожному пункті	Кількість перевезеного товару
1	80	10; $80 - x = 10$	$ x $
2	0	40; $0 + x - a = 40$	$a =  x - 40 $
3	30	10; $30 + (x - 40) - b = 10$	$b =  x - 20 $
4	60	20; $60 + (x - 20) - c = 20$	$c =  x + 20 $
5	0	70; $0 + (x + 20) - d = 70$	$d =  x - 50 $
6	90	10; $90 + (x - 50) - e = 10$	$e =  x + 30 $
7	0	40; $0 + (x + 30) - k = 40$	$k =  x - 10 $
8	0	60; $0 + (x - 10) - p = 60$	$p =  x - 70 $

Розв'язування задачі зводиться до дослідження функції

$$y = |x| + |x-40| + |x-20| + |x+20| + |x-50| + |x+30| + |x-10| + |x-70| \quad (\text{рис. 5}).$$

$$y_{\min} = 220 \quad \text{при} \quad 10 \leq x \leq 20.$$

Графік цієї функції має вісім переломів при  $x = -30, x = -20, x = 0, x = 10, x = 20, x = 40, x = 50, x = 70$ . Тому згідно з теоремою 1 ця функція буде мати мінімальне значення на відрізку  $[10; 20]$ , кінці якого є двома середніми членами послідовності:  $-30, -20, 0, 10, 20, 40, 50, 70$ .

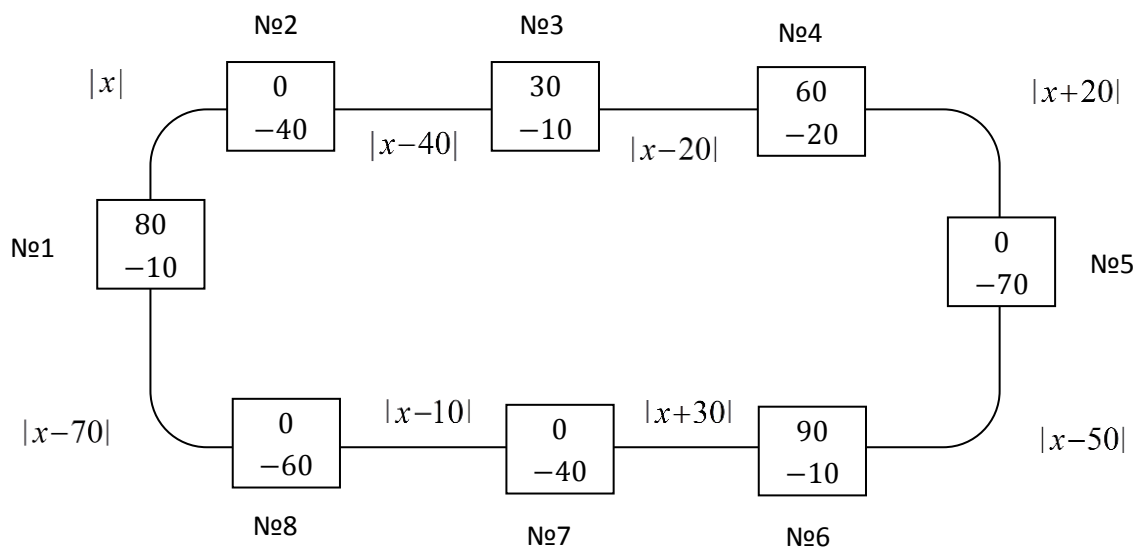


Рис. 5

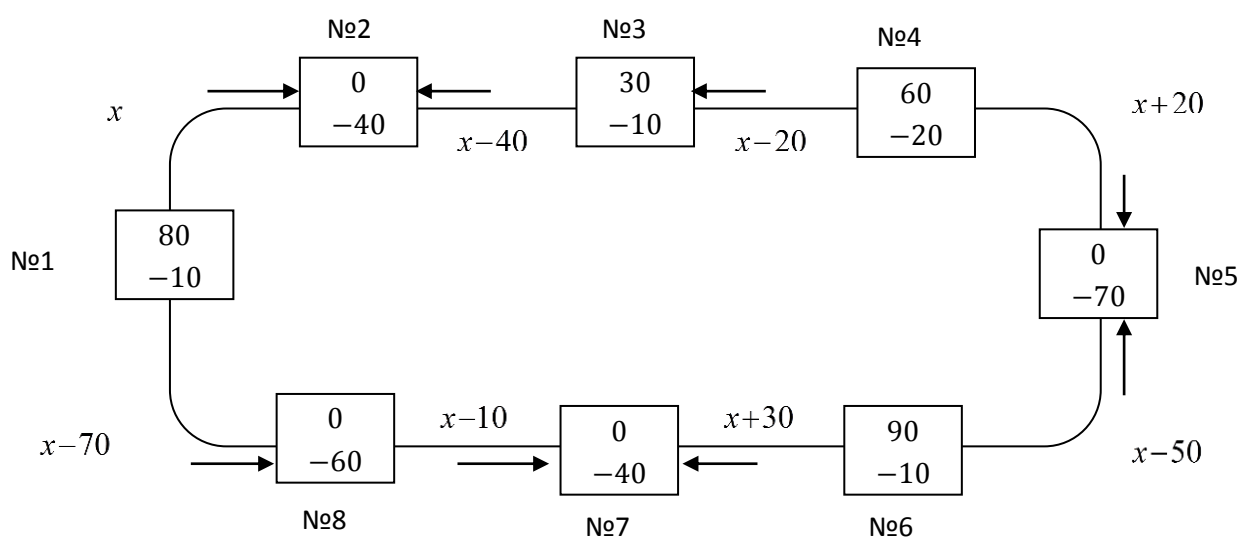


Рис. 6

На рис. 6 показано оптимальний план перевезення товару. Якщо значення виразу є додатним (від'ємним) числом, то товар треба перевозити в напрямі за

годинниковою стрілкою (проти годинникової стрілки).

Сформульовані та доведені теореми знаходження екстремуму функції з аргументом під знаком модуля доцільно застосовувати для оптимального планування виробничих процесів. Запропоновані методи розв'язування логістичних задач апробовані та забезпечують побудову оптимальних планів транспортування товарів.

## **2. Підходи до побудови та розв'язування оптимальних задач черговості в економіці**

Вся людська діяльність планується в часі: без цього неможлива координована робота підприємств і виробничих ділянок, за графіком іде будівництво великих фабрик і заводів, дитячих спортивних площадок, строго в часі розписані дослідження, навіть час виходу з дому на роботу робітника і службовця визначений відповідно до графіка роботи міського транспорту чи руху приміських потягів. Ясно: чим краще складено графік розкладу, тим більша продуктивність праці, тим менше затрат, які пов'язані з тією чи іншою діяльністю, тим кращі й самі результати.

Так що треба вміти складати графіки розкладів, причому найбільш оптимально. Однак, для цього перш за все потрібно поставити завдання скласти оптимальний розклад як математичну задачу. Задачі на складання розкладів, які зводяться до строгого впорядкування деяких робіт, називаються *задачами черговості*. До задач черговості можна віднести такі прості та примітивні задачі, на основі яких розглядаються складні задачі. Наведемо їх.

**Задача 1.** За допомогою цифр 5, 3 і 7 записати всі тризначні числа так, щоб в кожному числі всі цифри були різними. Серед знайдених чисел виберіть найбільше і найменше.

**Задача 2.** У приймальні, чекаючи директора підприємства, зібралось 3 працівники (А, В, С). Попереднє опитування працівників виявило, що для розгляду питання працівника А потрібно 5 хв, працівника В – 3 хв, працівника С – 7 хв. Як організувати прийом працівників, щоб вони знаходилися у



приймальні якомога менше. Іншими словами, директор хоче як можна менше затримувати працівників, тобто мінімізувати час працівників у приймальні.

**Задача 3.** Встановити оптимальний порядок обробки 4 різних деталей, час обробки кожної деталі записано в табл. 1.

Таблиця 1

Деталі	A	B	C	D
Час обробки (у хвиликах)	8	5	7	3

За кожну хвилину чекання обробки накладається “штраф”.

Розв’язання таких задач, як і будь-яких інших, починається з формального представлення задачі, тобто в ході їх розв’язування приходиться робити перехід від реальної ситуації до її математичного опису або, як кажуть, будувати її математичну модель.

Існують різні способи формального представлення задач черговості – достатньо згадати так звані розклади, футбольний календар чи програму телебачення, графіки роботи міського транспорту чи руху приміських потягів. Неважко догадатися, що текст задачі черговості можна представити у вигляді часової діаграми, сітчастого графіка, таблиці. Але слід відмітити, що умову задачі черговості важко представити у вигляді формули. Тому і для їх розв’язання пропонується метод, який називається *методом перебору*.

Суть цього методу полягає в тому, що спочатку виділяється послідовність точок  $\{x_i\} \in M$ . Потім послідовно обчислюються всі значення функції  $F(x_1)$ ,  $F(x_2)$ ,  $F(x_3)$ , ...,  $F(x_n)$ . Ці обчислення продовжуються доти, поки не знайдеться таке  $k$ , що  $F(x_k) < F(x_i)$ , де  $i=1,2,3,\dots,n$ . Тоді ясно, що  $\min F(x) = F(x_k)$ .

На практиці найбільше його використовують тоді, коли потрібно попередньо вивчати функцію  $F(x)$  і виявити область, яка містить точку мінімуму. Для розв’язання таких задач його потрібно застосовувати таким

чином: якщо число елементів невелике, то треба обчислити всі значення функції  $F(x_i)$ ,  $i=1,2,3,\dots,n$ , і вибрати з них оптимальні значення. У цьому випадку метод називається **простим перебором**. Якщо число елементів  $x_i$  велике чи нескінченне, то простий перебір стає неможливим. Потрібно обов'язково знайти відповідну закономірність, визначити, яку систему утворюють елементи послідовності, щоб для обчислення значень функції  $F(x)$  використати мінімальну кількість елементів  $x_i$ . У цьому випадку метод знаходження екстремумів називається **методом оптимального перебору**.

До задач, які розв'язуються методом простого перебору, часто відносяться задачі проектування ліній зв'язку, транспортних ліній, задачі, в яких ставиться завдання встановити черговість обробки різних деталей, задачі про розподіл продуктів між даними магазинами і т. д.

Розглянемо застосування методу перебору до розв'язування задач черговості, тобто задач на складання перестановок, які зводяться до впорядкування виконання деяких робіт. Після відповідної формалізації задача черговості зводиться до пошуку оптимальної перестановки, тобто вимагається серед перестановок  $P_n$  знайти таку перестановку  $P_n^*=(t_1, t_2, t_3, \dots, t_n)$ , що функція  $F(P_n^*)$  досягає екстремуму. Функція  $F(P_n^*)$  набуває мінімуму тоді, коли послідовність  $P_n^*$  побудована так, що попередній член послідовності не перевищує наступного. Мінімальне значення  $F(P_n^*)$  дорівнює сумі членів послідовності  $t'_1, t'_2, t'_3, \dots, t'_n$ , в якій кожен член  $t'_i$  відраховується відповідно до правила:  $t'_i = t'_{i-1} + t_i$  при  $i \geq 2$  і  $t'_1 = t_1$ .

Якщо кожен член послідовності  $P_n^*$  не перевищує попереднього, то функція  $F(P_n^*)$  має максимум, що обчислюється за тим же правилом.

Метод перебору – найпримітивніший метод розв'язування задач. Однак, він часто використовується в прикладній математиці для розв'язання практичних задач.

Приступимо до розв'язання вище перерахованих задач. Перша з них досить проста і примітивна. Але вона несе з собою певне теоретичне навантаження. Хід її розв'язання знайомить нас з елементарними методичними прийомами пошуку оптимальних перестановок. Спосіб її розв'язування можна перенести на задачу 2.

Розглянемо задачу 2 про мінімізацію часу чекання працівників у приймальні директора підприємства. Для кращого розуміння задачі можна записати умову у вигляді табл. 2.

Таблиця 2

Працівник	А	В	С
Час, хв	5	3	7

Розв'язання задачі проілюструємо в табл. 3.

Таблиця 3

Працівники	Час на вивчення питань, хв.	Затрачений кожним працівником час, хв	Сумарний час, хв
ABC	5, 3, 7	5; 5+3; 5+3+7	5+8+15=28
ACB	5, 7, 3	5; 5+7; 5+7+3	5+12+15=32
BCA	3, 7, 5	3; 3+7; 3+7+5	3+10+15=28
BAC	3, 5, 7	3; 3+5; 3+5+7	3+8+15=26
CAB	7, 5, 3	7; 7+5; 7+5+3	7+12+15=34
CBA	7, 3, 5	7; 7+3; 7+3+5	7+10+15=32

Оптимальний варіант розв'язку подамо у табл. 4.

Таблиця 4

Працівник	В	А	С
Час, хв.	3	5	7
Затрачений кожним працівником час, хв	3	8	15

Сумарний мінімальний час, затрачений працівниками:  $3+8+15=26$  (хв).

Для розв'язання задачі 3 достатньо повторити всі міркування розв'язування задачі 2. Її розв'язування завершується відповіддю: черговість обробки 4-ох деталей наведена в табл. 5.

Таблиця 5

Черговість обробки деталей	D	B	C	A
Час обробки, хв.	3	5	7	8

В системі комбінаторних задач можуть зустрічатися і такі, що вимагають певних суджень, які приводять до використання математичних операцій і тверджень. В процесі розв'язання цих задач з успіхом реалізуються задачі, які містять питання про знаходження екстремального значення величини.

**Задача 4.** У фермерському господарстві є трактори (табл. 6):

Таблиця 6

Трактори	Швидкість	Ширина захвату
ХТЗ	4,5 км/год	1,3 м
ДТ-54	5,4 км/год	1,2 м
С-80	5,1 км/год	1,25 м

У якій послідовності слід використовувати трактори?

Очевидно, першим слід використати той трактор, який за одну годину часу зоре більшу площу. Обчислимо зорану площу кожного з тракторів:

$$\text{ХТЗ: } 4500 \cdot 1,3 = 5850 \text{ (м}^2\text{);} \quad \text{ДТ-54: } 5400 \cdot 1,2 = 6840 \text{ (м}^2\text{);}$$

$$\text{С-80: } 5100 \cdot 1,25 = 6375 \text{ (м}^2\text{)}.$$

Трактори слід використовувати у такій послідовності:

$$\text{ДТ-54, С-80, ХТЗ, бо } 4500 \cdot 1,3 < 5100 \cdot 1,25 < 5400 \cdot 1,2.$$

**Задача 5.** На складах А, В, С і D є відповідно 9, 7, 5 і 8 тонн борошна, яке слід перевезти на хлібозавод у кількості 25 тонн. Треба скласти оптимальний план перевезення борошна, якщо вартість перевезення однієї тонни зі складу на хлібозавод відповідно дорівнює 2, 1, 3 і 2 гр. од. Знайти найбільш не вигідний план перевезення борошна і порівняти його з оптимальним.

а) Оптимальний план перевезення борошна наведено в табл. 7:

Таблиця 7

Склади	В	А	Д	С
Кількість борошна (тонн)	7	9	8	1

Вартість перевезення 25 тонн борошна:  $7 \cdot 1 + 9 \cdot 2 + 8 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 44$  (гр. од.).

б) Найбільш невикладний план перевезення борошна вказаний в табл. 8:

Таблиця 8

Склади	С	А	Д	В
Кількість борошна (тонн)	5	9	8	3

Вартість перевезення 25 тонн борошна:  $5 \cdot 3 + 9 \cdot 2 + 8 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 52$  (гр. од.).

Порівняємо ці плани:  $52 - 44 = 8$  (гр. од.);  $44 \div 52 = 0,85\%$ ;  $52 > 44$ .

**Задача 6.** У складальному цеху меблевої фабрики знаходяться заготовки на 100 гарнітурів меблів чотирьох видів А, В, С і Д. Як організувати роботу, щоб складальний цех був як можна менше завантажений заготовками. Час, потрібний на складання гарнітурів меблів, вказано в табл. 9.

Таблиця 9

Вид меблів	А	В	С	Д
Кількість гарнітурів	29	19	32	20
Час складання одного гарнітуру в годинах	2	3	2	3

Як видно, задача виробничого характеру. Для її розв'язання треба застосувати переставний прийом, який використовувався при розв'язанні задач про директора і обробку деталей на станку (задачі 2 і 3).

Оскільки на складання меблів виду А, В, С і Д потрібно 58 ( $2 \cdot 29 = 58$ ), 57 ( $3 \cdot 19 = 57$ ), 64 ( $2 \cdot 32 = 64$ ) і 60 ( $3 \cdot 20 = 60$ ) годин, то їх складання і відправлення з цеху потрібно здійснити в такому порядку: В, А, Д і С. У такому випадку складальний цех буде мінімально завантажений:

$$57 + (57 + 58) + (57 + 58 + 60) + (57 + 58 + 60 + 64) = 586 \text{ (год.)}$$

**Задача 7.** За мінімальний час потрібно закінчити обробку 6 деталей в цеху. Кожна деталь обробляється на першому верстаті (перша операція), час обробки  $t_{1i}$ ; потім на другому верстаті (друга операція), час обробки  $t_{2i}$ . Вихідні дані подано у вигляді табл. 10:

Таблиця 10

Деталі	А	Б	В	Г	Д	Е
Час $t_{1i}$	3	2	4	4	1	2
Час $t_{2i}$	1	4	3	2	2	5

Важливо відмітити, що для задачі двох верстатів друга операція не може почати виконуватися, поки не закінчилася попередня, а також поки верстат ще зайнятий виконанням попередньої операції.

Як бачимо, ця задача ззовні подібна до задачі 3, але вона ставить нову вимогу: «Деталі треба обробляти послідовно не на одному верстаті, а на двох». Таким способом процес розв'язування задачі створює нові проблеми, ситуації, які вимагають від нас потреби оволодіння новими знаннями, новими способами розв'язування задач, самостійного пошуку.

З метою поступового наближення до самостійного розв'язування проблеми корисно зобразити процес розв'язання задачі діаграмою (рис. 1).

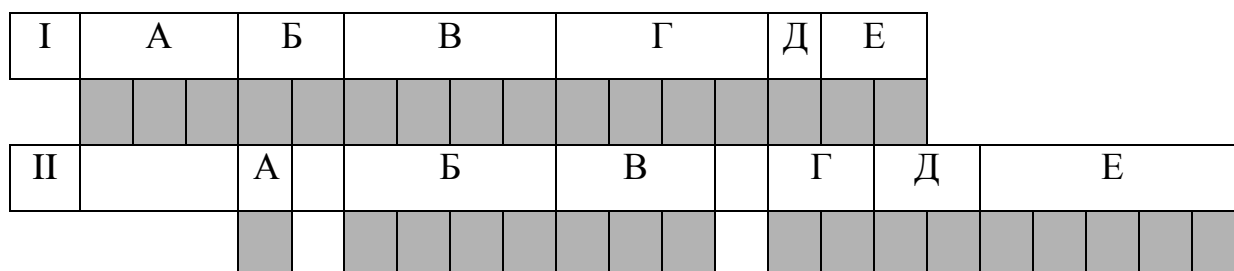


Рис. 1. Черговість деталей на двох верстатах

Зображення діаграми показує, що другий верстат простоював 5 хв. Щоб скоротити час обробки на верстатах і ліквідувати простій другого верстата потрібно впорядкувати деталі так, щоб час обробки попередньої деталі був не більшим від часу обробки наступної деталі, а також, щоб час обробки деталі на другому верстаті був не меншим від часу обробки на першому верстаті.

Враховуючи ці умови мінімальна обробка деталей на двох верстатах задається такою впорядкованою перестановкою <Д, Б, Е, А, В, Г>, а мінімальний час обробки деталі на першому верстаті задається впорядкованою перестановкою  $t_{1i} = \langle 1, 2, 2, 3, 4, 4 \rangle$ , на другому верстаті –  $t_{2i} = \langle 2, 4, 5, 1, 3, 2 \rangle$ . Розв’язування задачі зобразимо діаграмою на рис. 2.

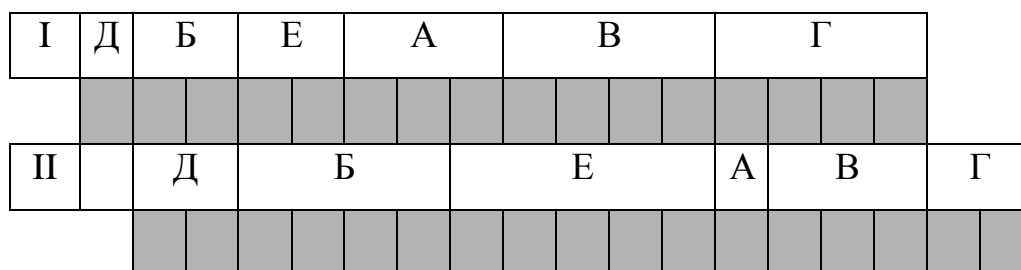


Рис. 2. Черговість деталей на двох верстатах без простою

Час обробки деталей на першому верстаті:  $\sum t_{1i} = 1+2+2+3+4+4=16$  (хв), на другому верстаті:  $\sum t_{2i} = 2+4+5+1+3+2=17$  (хв). Сумарний час обробки всіх деталей на двох верстатах 18 хв. А мінімальний сумарний час перебування кожної деталі в цеху зобразимо в табл. 11.

Таблиця 11

Деталі	Д	Б	Е	А	В	Г
Час перебування деталі в цеху, хв	1+2=3	3+4=7	7+5=12	12+1=13	13+3=16	16+2=18

Тоді сумарний час перебування всіх деталей в цеху:

$$3+7+12+13+16+18=69 \text{ (хв)}.$$

Якщо в задачі поставити додаткову умову «За кожну хвилину чекання обробки – “штраф”», то пошуки розв’язування продовжуватимуться. Міркування спрямовуватимуться на те, щоб звести до мінімуму час затримки деталей в цеху. Цю умову задовольнятиме впорядкована перестановка <Д, Б, А, Е, В, Г>, а мінімальний час обробки деталей на першому верстаті задається впорядкованою перестановкою  $t_{1i} = \langle 1, 2, 3, 2, 4, 4 \rangle$  і на другому –  $t_{2i} = \langle 2, 4, 1, 5, 3, 2 \rangle$ . Розв’язування задачі зобразимо діаграмою (рис. 3).

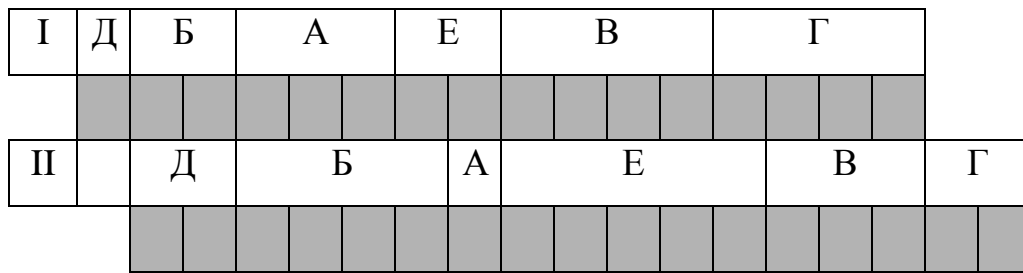


Рис. 3. Черговість деталей на двох верстатах без “штрафу”

Час обробки деталей на першому верстаті:  $\sum t_{1i} = 1+2+3+2+4+4=16$  (хв), на другому верстаті:  $\sum t_{2i} = 2+4+1+5+3+2=17$  (хв). Мінімальний сумарний час очікування обробки деталей в цеху на першому верстаті становить  $1+3+6+8+12+16=46$  (хв), а на другому верстаті –  $2+6+7+12+15+17=59$  (хв). Сумарний час обробки всіх деталей на двох верстатах 18 хв. А мінімальний сумарний час перебування кожної деталі в цеху зобразимо в табл. 12.

Таблиця 12

Деталі	Д	Б	А	Е	В	Г
Час перебування деталей в цеху, хв	1+2=3	3+4=7	7+1=8	8+5=13	13+3=16	16+2=18

Тоді сумарний час перебування деталей в цеху:  $3+7+8+13+16+18=65$  (хв). Отже, деталі слід обробляти у такій впорядкованій перестановці <Д, Б, А, Е, В, Г>, яка забезпечує мінімальний час перебування деталей в цеху.

Це був розглянутий випадок, коли  $\sum t_{1i} < \sum t_{2i}$ . У випадку, коли  $\sum t_{1i} = \sum t_{2i}$ , візьмемо впорядковану перестановку обробки деталей

$$\langle A, B, B, G, D \rangle$$

з часом на першому верстаті, заданим впорядкованою перестановкою

$$t_{1i} = \langle 2, 3, 4, 4, 5 \rangle, \sum t_{1i} = 18 \text{ (хв)},$$

на другому верстаті –  $t_{2i} = \langle 4, 3, 6, 3, 2 \rangle, \sum t_{2i} = 18 \text{ (хв)}$ .

Побудову діаграми почнемо з найменшого часу обробки, наприклад, деталі А на першому верстаті. Далі потрібно дотримуватися вимоги, що час обробки кожної наступної деталі на першому верстаті не перевищує часу



обробки попередньої деталі на другому верстаті. Діаграма обробки деталей на двох верстатах матиме вигляд, зображений на рис. 4.

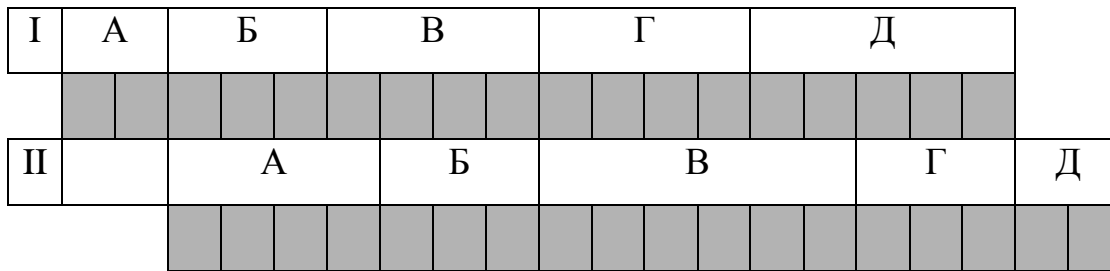


Рис. 4. Черговість деталей на двох верстатах з однаковим часом обробки

Час обробки деталей на першому верстаті:  $\sum t_{1i} = 2+3+4+4+5=18$  (хв), на другому верстаті:  $\sum t_{2i} = 4+3+6+3+2=18$  (хв). Мінімальний час перебування деталей в цеху на першому верстаті:  $2+5+9+13+18=47$  (хв), а на другому верстаті:  $4+7+13+16+18=58$  (хв). Мінімальний час обробки всіх деталей в цеху на двох верстатах становить  $(2+3+4+4+5)+2=20$  (хв).

У випадку, коли  $\sum t_{1i} > \sum t_{2i}$ , візьмемо впорядковану перестановку обробки деталей  $\langle A, B, B, G, D \rangle$  з часом на першому верстаті, який задається впорядкованою перестановкою  $t_{1i} = \langle 5, 1, 2, 3, 6 \rangle$ ,  $\sum t_{1i} = 17$  (хв), на другому верстаті –  $t_{2i} = \langle 2, 3, 4, 4, 1 \rangle$ ,  $\sum t_{2i} = 14$ . Тут  $\sum t_{1i} - \sum t_{2i} = 17 - 14 = 3$ . Щоб час обробки деталей був мінімальним і не було простою другого верстата потрібно обробку деталей починати з такої операції, де  $\sum t_{1i} - \sum t_{2i} = 3$ , а це можливо вже для деталі А. Далі потрібно дотримуватися вимоги, що час обробки кожної наступної деталі на першому верстаті не перевищує часу обробки попередньої деталі на другому верстаті. Діаграма обробки деталей на двох верстатах зображена на рис. 5.

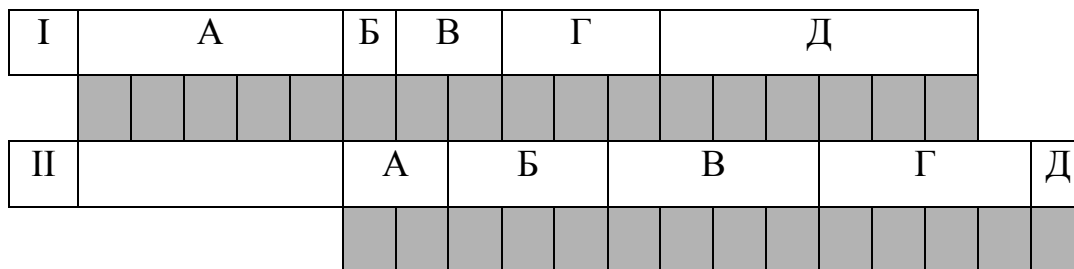


Рис. 5. Черговість деталей на двох верстатах з різним часом обробки

Мінімальний час обробки всіх деталей в цеху на двох верстатах:

$$5+(2+3+4+4+1)=19 \text{ (хв).}$$

При побудові діаграм обробки деталей можна зробити такий висновок:

а) на першому верстаті в першу чергу брати деталі, обробка яких вимагає найменшої затрати часу у порядку зростання;

б) порядок обробки деталей на другому верстаті треба впорядковувати так, щоб при переході деталі з першого верстата на другий не простоював другий верстат, і щоб час обробки кожної наступної деталі на першому верстаті не перевищував часу обробки попередньої деталі на другому верстаті;

в) в оптимальному розв'язку треба, щоб для двох будь-яких деталей на першому верстаті операції виконувалися в тому ж самому порядку черги.

Щоб продовжити оволодіння новими поняттями і знаннями, способами і прийомами розв'язування таких задач, розглянемо обробку деталей на трьох верстатах.

**Задача 8.** Шість деталей за мінімальний час треба обробити на трьох верстатах. Вихідні дані подано у вигляді табл. 13.

Таблиця 13

Деталі	А	Б	В	Г	Д	Е
Час $t_{1i}$ , хв	1	3	2	2	1	3
Час $t_{2i}$ , хв	2	2	2	4	5	2
Час $t_{3i}$ , хв	3	3	2	2	3	1

Оскільки

$$\sum t_{1i} = 1+3+2+2+1+3=12, \quad \sum t_{2i} = 2+2+2+4+5+2=17,$$

$$\sum t_{3i} = 3+3+2+2+3+1=14,$$

то  $\sum t_{1i} < \sum t_{3i} < \sum t_{2i}$ . Враховуючи ці нерівності побудуємо діаграму обробки деталей. Почнемо з найменшого часу обробки деталі Д на першому верстаті ( $1 < 3 < 5$ ). Далі додержуємося вимоги, яка полягає в тому, що час обробки кожної наступної деталі на першому верстаті не перевищує часу обробки попередньої деталі на другому верстаті і час обробки кожної наступної деталі на другому верстаті не перевищує часу обробки попередньої деталі на третьому верстаті.

У цьому випадку візьмемо впорядковану перестановку обробки деталей у вигляді  $\langle Д, Е, А, В, Б, Г \rangle$  з часом на першому верстаті, заданим впорядкованою перестановкою  $t_{1i} = \langle 1, 3, 1, 2, 3, 2 \rangle$ , на другому верстаті –  $t_{2i} = \langle 5, 2, 2, 2, 2, 4 \rangle$ , на третьому верстаті –  $t_{3i} = \langle 3, 1, 3, 2, 3, 2 \rangle$ . Діаграму обробки деталей зобразимо на рис. 6.

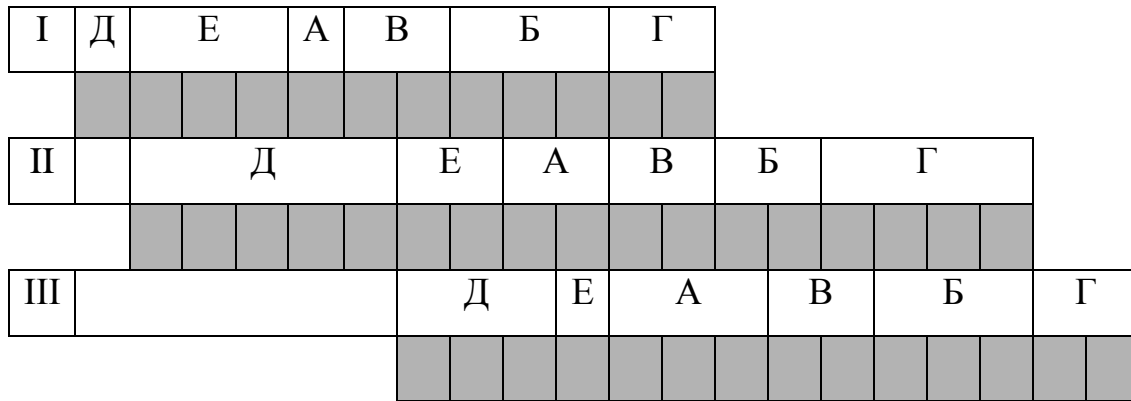


Рис. 6. Черговість деталей на трьох верстатах

Мінімальний час обробки всіх шести деталей в цеху на трьох верстатах становить

$$(1+3+1+2+3+2)+(2+4)+2=20 \text{ (хв).}$$

Ще більш складними прийомами приходить розв'язувати задачі, наприклад, обробку деталей на чотирьох верстатах. Інколи в таких задачах не можна знайти єдиної екстремальної перестановки для побудови діаграми обробки деталей. Але можна знайти дві перестановки, одна з них відповідає порядку обробки деталей на перших двох верстатах, а друга – на інших двох верстатах. Для розв'язання таких задач не можна користуватися точними методами, а потрібно застосовувати наближені методи, від яких вимагається «підійти» до розв'язку як можна ближче, тобто отримати розв'язок, віддалений від оптимального на будь-яку задану раніше величину.

Задачі і прийоми їх розв'язування, запропоновані вище, не стільки важкі, скільки просто складні, і розв'язуються вони нестандартними, нетрадиційними методами. Кожна з них потребує своєрідного підходу до розв'язування. В основу їх розв'язування покладається мето перебору перестановок. Проте такі

задачі можуть вивести нас на широку дорогу вивчення теорії дискретної оптимізації.

### **3. Побудова економічних емпіричних формул методом табличних різниць**

Математика в економіці застосовується понад 150 років. Найперші математичні міркування сприймалися скептично і не знаходили застосування. Так трипаллий час залишалися майже непомітною робота французького математика А. Курно (1801 – 1877), яку сьогодні розглядають як поворотний пункт у розвитку математичної економіки. Не можна згадати одного з найоригінальніших математиків періоду раннього розвитку математичної економіки – пруського економіста Генріха Госсена (1810–1858). Він сформулював закон, відомий як «перший закон Госсена»: *«У процесі збільшення кількості споживаного товару або послуги його корисність від споживання кожної додаткової одиниці зменшується»*.

Математичний вклад економічних проблем А. Курно й Г. Госсен здійснюються на основі теорії дійсних функцій. Аналіз дійсної змінної – це фундаментальна математична дисципліна, за допомогою якої зроблено перший вступ в економіку.

Французький економіст Л. Вальрас (1834–1910) сформулював проблему існування загальних рівноваг ринку, розв'язування якої веде до системи лінійних і нелінійних рівнянь. Існування єдиного розв'язку приводить до визначників, які вивчаються у лінійній алгебрі.

Сучасна економічна теорія пов'язана з теорією ймовірностей, статистикою, теорією стохастичних процесів тощо. Питаннями економіки цікавився і Мирон Зарицький (1889–1961), професор Львівського університету ім. Івана Франка. Про це свідчить його стаття *«Сучинники кореляції в теорії математичної статистики»* (Збірник математично-природописно-лікарської секції Наукового товариства ім. Т. Шевченка у Львові. Том XXXI. 1937). Ця стаття присвячена спробі аналізу балансів кооператорів Тернопільської області.

У своїй праці він подає фрагменти із застосування математичної статистики до економіки.

Для економіки математика важлива і як методологічна наука. Математика відіграє важливу роль тоді, коли із спостережень за явищами, об'єктами економічної дійсності необхідно вивести закономірності, а з них отримати висновки, записані у вигляді формул, рівнянь.

Під час проведення наукових експериментів, а також спостережень у виробничій практиці досить часто доводиться встановлювати функціональну залежність між даними величинами. Нехай, наприклад, вивчаючи функціональну залежність між величинами  $x$  і  $y$  ми можемо зібрати певні дані значення величини  $y$  при  $x=x_1, x=x_2, x=x_3, \dots, x=x_n$  з відрізка  $[a;b]$ . Користуючись цими даними потрібно побудувати аналітичний вираз (формулу)  $\bar{y}(x)$ , який би наближав функцію  $y(x)$  на всьому відрізку  $[a;b]$  до аналітичного виразу. Формули, які дістають на основі аналізу дослідних даних, називають **емпіричними**. Емпіричну формулу подають у вигляді  $\bar{y}(x)=f(x,a_1,a_2,a_3,\dots,a_n)$ , де  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  – деякі параметри. *Емпіричні формули – це математичні формули, що виражають зв'язок між змінними величинами, встановленими на основі дослідів, експериментів.* Аналітичний вигляд емпіричних формул можна вивести з фізичних, хімічних, економічних та інших залежностей. При цьому числові значення визначаються лише за допомогою дослідних даних.

Емпіричні формули містяться, наприклад, в наступних сформульованих задачах.

**Задача 1.** Опір дороги руху автомобіля, швидкість якого  $v$ , виражається такими формулами: а) суха горизонтальна дорога з твердим покриттям:

$$f = 24 - \frac{2}{3}v + \frac{1}{30}v^2; \quad \text{б) слизька дорога з твердим покриттям:}$$

$$f = 28 - \frac{1}{4}v + \frac{1}{50}v^2; \quad \text{в) мокра ґрунтова дорога: } f = 36,5 - \frac{3}{4}v + \frac{1}{30}v^2.$$

При якій швидкості на кожній дорозі опір буде найменшим?

**Задача 2.** Залежність валового доходу на 100 га сільськогосподарських угідь Львівської області та розміром площі цих угідь приймає вигляд  $y=9,19+8,80x-1,46x^2$ , де  $x$  – площа сільськогосподарських угідь (в тис. га),  $y$  – валовий дохід на 100 га сільськогосподарських угідь (в тис. крб.). При якій площі господарство матиме найбільший дохід?

Як бачимо, квадратичні емпіричні функції можуть описувати різні економічні ситуації. Незважаючи на великий науковий вклад з проблем побудови та методів розв’язування економічних задач, що містять емпіричні формули економічних ситуацій, вимагають подальшого дослідження та математичного опису нових економічних ситуацій, яких у нас безмежна кількість на кожному підприємстві чи виробництві, причому одна і та сама економічна проблема залежить від місця розташування підприємства, об’єму підприємства, від різних аргументів, що описуються математичною моделлю по різному. Тому економічна наука потребує мати в запасі чим по більше досліджених емпіричних формул.

У процесі вивчення різних питань природознавства, економіки, техніки, соціології, педагогіки доводиться на основі великої кількості дослідних даних виявити суттєві фактори, які впливають на досліджуваний об’єкт, а також встановити форму зв’язку між різними зв’язаними між собою величинами. При розв’язуванні таких прикладних задач часто виникає ситуація, коли аналітичний вигляд функцій, який задає функціональну залежність, невідомий, але ця функція задається таблично або графічно.

Нехай у результаті досліджень дістали таку таблицю деякої функціональної залежності:

Таблиця 1

$x$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	...	$x_i$	...	$x_{n-1}$	$x_n$
$y$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	...	$y_i$	...	$y_{n-1}$	$y_n$

Такі таблиці отримують в результаті спостереження, дослідів (експериментів), тому їх називають **емпіричними**. Постає завдання за

допомогою емпіричних таблиць знайти вид функції. Але значення  $y_i$  дістають у результаті експерименту, а вони, як правило, сумнівні, то в цьому разі задача інтерполювання табличної функції втрачає смисл. Тому шукають таку функцію  $y=F(x)$ , значення якої при  $x=x_i$  досить близькі до табличних значень  $y_i$ ,  $i=1,2,3,\dots,n$ . Формулу  $y=F(x)$  називають **емпіричною**. Її не виводять теоретично, і, як правило, не має особливого смислу в науковому розумінні. Формулу такої залежності надає дослідник. Але ці формули мають велике практичне значення, вдало підібрана емпірична формула дає змогу не тільки апроксимувати сукупність експериментальних даних, «згладжуючи» значення величини  $y$ , а й екстраполювати знайдену залежність на інші проміжки значень  $x$ .

Побудова емпіричної формули складається з двох етапів:

- 1) вибору виду функції  $f(x)$ ;
- 2) визначення параметрів, які входять до виразу  $f(x)$  так, щоб функція  $f(x)$  найкраще відповідала нашим вимогам.

На першому етапі вигляд функції  $f(x)$  вдається визначити з графіка, який побудований за експериментальними значеннями цієї функції. Зокрема може трапитися, що точки  $(x_1; y_1)$ ,  $(x_2; y_2)$ ,  $(x_3; y_3)$ , ...,  $(x_n; y_n)$  розташовані майже на одній прямій. Із побудованого графіка вдається приблизно передбачити вид функції, порівнявши даний графік з графіком відомих кривих ліній (окремі неправильності при цьому не враховуються). Кількість параметрів підбирають так, щоб емпірична формула найкраще відображала результати спостережень і була досить простою. Для задач такого типу інтерполювання непридатне.

В інших випадках, не користуючись ескізами графіка, визначити вид функції можна з деяких додаткових міркувань. Зокрема, розглянемо функції  $y = ax + b$ ,  $y = ax^2 + bx + c$ , тощо, та покажемо, як саме іншим способом (методом табличних різниць) можна визначити вид функції.

**Побудова лінійної емпіричної формули.** Як уже встановлено взаємна відповідність між всіма прямими, які не паралельні до осей координат,

записується формулою  $y = ax + b$ , де  $a \neq 0$  і  $b \neq 0$ . Знаючи формулу  $y = ax + b$ , можемо визначити значення функції, якщо задано значення аргументу. Отож, можемо скласти таблицю значень функції для багатьох значень аргументу. Ця таблиця буде мати такий вигляд:

Таблиця 2

$x$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	...	$x_{n-1}$	$x_n$
$y$	$ax_0 + b$	$ax_1 + b$	$ax_2 + b$	...	$ax_{n-1} + b$	$ax_n + b$

Ми завжди будемо брати такі зростаючі значення аргументу  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$ , щоб різниця між сусідніми значеннями аргументу була сталою. Цю величину будемо називати **кроком таблиці** і позначати її буквою  $h$ :  $h = x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \dots = x_n - x_{n-1}$ . Такі таблиці носять назву **таблиць із сталим кроком**. При цій умові таблицю 2 можемо переписати так:

Таблиця 3

$x$	$x_0 + h$	$x_0 + 2h$	$x_0 + 3h$	...	$x_0 + (n-1)h$	$x_0 + nh$
$y$	$ax_0 + ah + b$	$ax_0 + 2ah + b$	$ax_0 + 3ah + b$	...	$ax_0 + (n-1)ah + b$	$ax_0 + nah + b$

Введемо поняття табличної різниці.

*Табличною різницею першого порядку*  $\Delta y$  називається різниця між двома сусідніми табличними значеннями функції

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i. \quad (3.1)$$

До таблиці 3 додамо рядок табличних різниць. Тоді вона матиме вигляд:

Таблиця 4

$x$	$x_0 + h$	$x_0 + 2h$	$x_0 + 3h$	...	$x_0 + (n-1)h$	$x_0 + nh$
$y$	$ax_0 + ah + b$	$ax_0 + 2ah + b$	$ax_0 + 3ah + b$	...	$ax_0 + (n-1)ah + b$	$ax_0 + nah + b$
$\Delta y$		$ah$	$ah$	...	$ah$	$ah$



Як бачимо, в таблиці 4 з сталим кроком  $h$  лінійної функції  $y = ax + b$  різниці першого порядку  $\Delta y = ah$  завжди сталі. Більш того, за величиною табличної різниці  $\Delta y$  можна визначити її коефіцієнт  $a$  при аргументі лінійної функції, тобто  $a = \frac{\Delta y}{h} = \frac{y_i - y_{i-1}}{h}$ . Але за цими даними не можна визначити вільний член  $b$  лінійної функції.

Із розглянутої таблиці 4 можна сформулювати важливе твердження.

**Теорема 1.** *Якщо функція із сталим зростаючим аргументом  $h = x_{i+1} - x_i$  є лінійною, то таблична різниця першого порядку завжди є сталою  $\Delta y = ah$ .*

На другому етапі побудови емпіричної формули відбувається визначення параметрів лінійної функції. Щоб визначити параметри емпіричної формули часто застосовують метод найменших квадратів. Цей метод запропонували відомі математики К. Гаусс і А. Лежандр. Проте ми будемо користуватися досить простим **методом вибраних точок**. З цією метою сформулюємо і доведемо обернене твердження до теореми 1.

**Теорема 2.** *Якщо табличні різниці першого порядку  $\Delta y = ah$  у функції є сталими при сталому зростанні  $h$  аргументу, то така функція є лінійною.*

Відмітимо, що таблична різниця  $\Delta y = ah$  є характерною властивістю лінійної функції  $y = ax + b$ . Доведемо цю теорему.

Нехай маємо деяку таблицю зі сталим кроком  $h = x_{i+1} - x_i$  і сталою різницею першого порядку  $\Delta y = y_{i+1} - y_i = ah$ . Доведемо, що всі її значення належать деякій лінійній функції. Для цього виберемо довільні дві пари значень  $(x_i; y_i)$  і  $(x_{i+1}; y_{i+1})$ . Оскільки  $x_{i+1} - x_i = h = \Delta x$ , а  $y_{i+1} - y_i = ah = \Delta y$ , то

$$a = \frac{\Delta y}{h} = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i},$$

де  $i=1,2,3,\dots,n-1$ . Отже,  $a$  – стала величина. Якщо  $a$  – стала величина, то залежність між  $x$  і  $y$  лінійна, бо точки  $(x_i; y_i)$  належать одній прямій  $y = ax + b$ .

Щоб визначити вільний член  $b$ , достатньо, користуючись таблицею 3 та значенням параметра  $a$ , записати систему рівнянь

$$\begin{cases} ax_0 + b = y_0, \\ a = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}, \end{cases}$$

звідки

$$b = y_0 - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} x_0.$$

Слід відмітити, що якщо табличні різниці різні, але мають не великі відхилення, то використовують середнє їх значення за формулою

$$\overline{\Delta y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta y_i.$$

Розглянемо це на конкретному прикладі.

**Задача 3.** Щоб скласти річний план заводу економіст виробництва вирішив на одному з цехів заводу встановити залежність між стажем робітників і їх виготовленням кількості деталей, яка виражається наступним чином:

Таблиця 5

Стаж роботи ( $x$ років)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Виготовлена кількість деталей за зміну ( $y$ штук)	70	74	79	83	88	92	97	103	109	115
$\Delta y = y_i - y_{i-1}$		4	5	4	5	4	5	6	6	6

Чи можна, користуючись цією таблицею, скласти аналітичний вираз лінійної функції?

**Розв'язання.** Перевіримо задану в таблиці 5 залежність на лінійність.

Оскільки

$$h = x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = \dots x_{10} - x_9 = 1 \text{ і } \Delta y = \frac{1}{9} (4 + 5 + 4 + 5 + 4 + 5 + 6 + 6 + 6) = 5,$$

то залежність згідно з теоремою 2 між стажем роботи та кількістю виготовлених деталей є лінійною:  $y = ax + b$ .

Відповідь на запитання, поставлене в задачі, є однозначною. Для цього достатньо, скориставшись двома значеннями  $x$  і  $y$  з таблиці 5, скласти систему із двох рівнянь з невідомими  $a$  і  $b$ :

$$\begin{cases} 74 = 2a + b, \\ 79 = 3a + b; \end{cases}$$

звідки  $a=5$ ,  $b=64$ .

Отже,  $y = 5x + 64$ , де  $x$  належить до відрізка  $[1;10]$ .

**Побудова квадратичної емпіричної формули.** Розглянемо елементарну функцію, подану за допомогою аналітичної формули  $y = ax^2 + bx + c$ . Ми знаємо, що кожному значенню аргументу  $x$  відповідає єдине значення  $y$ , тобто вважаємо, що  $x$  і  $y$  пов'язані співвідношенням  $y = ax^2 + bx + c$ , де  $a \neq 0$ . Ставиться завдання: а) знайти вид функції; б) знайти параметри функції.

Складемо таблицю значень функції при сталому зростанні  $h$  аргументу  $x$ . Знайдемо табличну різницю  $\Delta y$  між двома сусідніми табличними значеннями функції  $\Delta y = y_i - y_{i-1}$ . Оскільки різниці  $\Delta y$  виявляються різними, то знайдемо другу табличну різницю  $\Delta^2 y$  між двома сусідніми табличними значеннями першої різниці

$$\Delta^2 y = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i.$$

Розглянемо метод табличних різниць квадратичної функції

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Таблиця 6

$x$	$y = ax^2 + bx + c$	$\Delta y$	$\Delta^2 y$
$x_0$	$y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c$		
$x_0 + h$	$y_1 = a(x_0 + h)^2 + b(x_0 + h) + c$	$2ahx_0 + ah^2 + bh$	

$x_0+2h$	$y_2 = a(x_0+2h)^2 + b(x_0+2h) + c$	$2ahx_0 + 3ah^2 + bh$	$2ah^2$
$x_0+3h$	$y_3 = a(x_0+3h)^2 + b(x_0+3h) + c$	$2ahx_0 + 5ah^2 + bh$	$2ah^2$
...	...	...	...
$x_n-h$	$y_{n-1} = a(x_n-h)^2 + b(x_n-h) + c$	$2ahx_n - 3ah^2 + bh$	$2ah^2$
$x_n$	$y_n = ax_n^2 + bx_n + c$	$2ahx_n - ah^2 + bh$	$2ah^2$

Як бачимо з таблиці 6, перша таблична різниця  $\Delta y$  залежить від їх номера  $n$  і від аргументу  $x$ ; вони різні. Друга різниця  $\Delta^2 y$  не залежить від номера  $n$  і від аргументу  $x$ , тобто є сталою для всієї таблиці 6:

$$\Delta^2 y = 2ah^2. \quad (3.2)$$

Ця різниця  $\Delta^2 y$  називається **різницею другого порядку**. Отже, ми довели наступну теорему.

**Теорема 3.** *Будь-яка квадратична функція зі сталим кроком  $h$  (приростом аргументу  $x$ ) завжди має сталу різницю другого порядку  $\Delta^2 y$ .*

Правильною буде й обернена теорема.

**Теорема 4.** *Якщо функція зі сталим кроком  $h$  (приростом аргументу  $x$ ) має сталу різницю другого порядку  $\Delta^2 y$ , то всі її значення належать деякій квадратичній функції.*

Доведення теореми 4 виконаємо наступним чином.

Нехай задана таблиця 6 зі сталим кроком  $h$  має сталу різницю другого порядку  $\Delta^2 y$ . Користуючись першими трьома вузлами  $(x_0; y_0)$ ,  $(x_1; y_1)$  і  $(x_2; y_2)$  складемо аналітичний вираз функції  $y = ax^2 + bx + c$ . Далі складемо таблицю значень цієї функції з тими самими значеннями аргументу, що й в заданій таблиці 6. Перші три вузли нової таблиці будуть збігатися з першими трьома вузлами вихідної таблиці. Різниця другого порядку  $\Delta^2 y$  буде в обох таблицях однакою. Встановлюючи за цими даними значення  $y$  другої таблиці, ми лише відтворимо задану таблицю.

Щоб визначити параметри  $a$ ,  $b$  і  $c$  цієї квадратичної функції, потрібно методом вибраних точок скласти систему трьох рівнянь з цими невідомими і розв'язати її. Вибравши три пари значень  $(x_0; y_0)$ ,  $(x_1; y_1)$  і  $(x_2; y_2)$ , складемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} ax_0^2 + bx_0 + c = y_0, \\ ax_1^2 + bx_1 + c = y_1, \\ ax_2^2 + bx_2 + c = y_2. \end{cases} \quad (3.3)$$

Оскільки складена таблиця квадратичної функції зі сталим кроком  $h$  має сталу різницю другого порядку  $\Delta^2 y = 2ah^2$ , то можна визначити параметр  $a$ .

В таблиці 6 маємо  $\Delta^2 y = 2ah^2$ , звідки

$$a = \frac{\Delta^2 y}{2h^2}. \quad (3.4)$$

Підставивши в систему рівнянь (3.3) перших двох рівнянь замість  $a$  вираз  $\frac{\Delta^2 y}{2h^2}$ , дістанемо систему рівнянь

$$\begin{cases} \frac{\Delta^2 y}{2h^2} x_0^2 + bx_0 + c = y_0, \\ \frac{\Delta^2 y}{2h^2} x_1^2 + bx_1 + c = y_1. \end{cases} \quad (3.5)$$

Друге рівняння системи (3.5) помножимо на  $(-1)$  і додамо до нього перше рівняння, дістанемо

$$\frac{\Delta^2 y}{2h^2} (x_0^2 - x_1^2) + b(x_0 - x_1) = y_0 - y_1.$$

Врахувавши те, що  $\Delta y = y_1 - y_0$ ,  $h = x_1 - x_0$ , і спростивши це рівняння, дістанемо:

$$b = \frac{2h\Delta y - \Delta^2 y(x_0 + x_1)}{2h^2}. \quad (3.6)$$

Із першого рівняння системи (3.5) дістанемо

$$c = y_0 - \frac{\Delta^2 y x_0^2 - 2h\Delta y x_0 + \Delta^2 y (x_0 + x_1)x_0}{2h^2}. \quad (3.7)$$

Знаменники виразів (3.4), (3.6) і (3.7) для параметрів  $a$ ,  $b$ , і  $c$  не дорівнюють нулю.

Отже, параметри  $a$ ,  $b$ , і  $c$  системи рівнянь (3.3) визначаються однозначно.

Серед транспортних задач, найраціональніші з економічного погляду, важливе місце займають задачі, в яких йде мова про найраціональніші способи шляхів сполучення об'єктів. Елементарним прикладом може бути наступна задача.

**Задача 4.** Яка максимальна кількість шляхів сполучення може бути між об'єктами, які розміщені у вершинах опуклого  $n$ -кутника?

**Розв'язування.** Проведемо серію уявних «експериментів».

Спостереження: а) три об'єкти сполучені 3-ма шляхами; б) чотири об'єкти сполучені 6-ма шляхами. в) п'ять об'єктів сполучені 10-ма шляхами; г) шість об'єктів сполучені 15-ма шляхами; д) сім об'єктів сполучені 21-им шляхом.

Щоб в загальному дати відповідь на запитання, яке поставлене в задачі, може допомогти метод табличних різниць. Складемо таблицю.

Таблиця 7

Кількість об'єктів ( $n$ )		3	4	5	6	7
Кількість шляхів сполучення ( $k$ )		3	6	10	15	21
Табличні різниці	$\Delta k$		3	4	5	6
	$\Delta^2 k$			1	1	1

Як бачимо, різниця другого порядку  $\Delta^2 k = 1$  – стала величина. Отже, формула, яка визначає максимальну кількість шляхів сполучення об'єктів згідно з теоремою 4 виражається формулою

$$k(n) = an^2 + bn + c.$$

Залишається, методом вибраних точок, визначити значення параметрів  $a$ ,  $b$ , і  $c$ . Користуючись числами розміщених у таблиці 7, запишемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 16a + 4b + c = 6, \\ 25a + 5b + c = 10, \\ 36a + 6b + c = 15. \end{cases} \quad (3.8)$$

Розв'язуючи цю систему, дістанемо:  $a = 0,5$ ,  $b = -0,5$  і  $c = 0$ . Отже,

$$k(n) = \frac{n^2 - n}{2}. \quad (3.9)$$

Формула (3.9) є правильною для описаних «експериментів». Для того, щоб вона була правильною для довільного натурального числа  $n$ , залишається підтвердити її правильність методом математичної індукції.

Для  $n=3, 4, 5, 6$  і  $7$  формула (3.9) є правильною. Нехай вона буде правильною для  $n=m$  об'єктів, тобто

$$k(m) = am^2 + bm + c.$$

Доведемо, що ця формула буде правильною при  $n=m+1$ . Тоді кількість шляхів, які сполучають об'єкти, збільшується на число  $m$ . Тобто

$$k(m+1) = k(m) + m = \frac{m^2 - m}{2} + m = \frac{(m+1)^2 - (m+1)}{2}.$$

Отже, формула (3.9) є правильною для всіх натуральних чисел, які вказують на кількість шляхів сполучення  $n$  об'єктів.

Ряд задач економіки зводиться до знаходження найвигідніших, або, як кажуть, оптимального варіанту планування виробничих процесів. Наведемо елементарний приклад, пов'язаний з торгівлею, такої задачі.

**Задача 5.** Для визначення попиту на чоловіче взуття в одному із магазинів на прохання виробника взуттєвої фабрики, провели спостереження протягом тижня за проданим взуттям, результати якого подані в таблиці.

Таблиця 8

Розмір взуття ( $n$ )	38	39	40	41	42	43	44
Кількість проданого взуття ( $k$ )	2	12	18	20	18	12	2

Встановіть залежність між розмірами взуття і кількістю проданого взуття.

Скільки взуття кожного розміру треба виготовити для 20 000 населення?

Для визначення залежності між змінними  $n$  і  $k$  побудуємо таблицю табличних різниць.

Таблиця 9

$n$	38	39	40	41	42	43	44
$k$	2	12	18	20	18	12	2
$\Delta k$		10	6	2	-2	-6	-10
$\Delta^2 k$			-4	-4	-4	-4	-4

Оскільки  $h = 1$  – стале число і різниця другого порядку ( $\Delta^2 k = -4$ ) також є сталим числом, то згідно з теоремою 4, залежність між  $n$  і  $k$  виражається квадратичною функцією:

$$k(n) = an^2 + bn + c.$$

З метою визначення значення параметрів  $a$ ,  $b$ , і  $c$  потрібно методом вибраних точок скласти і розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} 1444a + 38b + c = 2, \\ 1521a + 39b + c = 12, \\ 1600 + 40b + c = 18. \end{cases} \quad (3.10)$$

В результаті розв'язування системи рівнянь (3.10) знаходимо значення параметрів:  $a = -2$ ,  $b = 164$ ,  $c = -3342$ . Рівняння зв'язку між номером взуття та кількістю проданого взуття кожного розміру набуває вигляду:

$$k(n) = -2n^2 + 164n - 3342, \text{ або}$$

$$k(n) = 20 - 2(n - 41)^2, \quad 38 \leq n \leq 44. \quad (3.11)$$

Кількість взуття кожного розміру для 20000 жителів визначається формулою



$$\tilde{k}(n) = \frac{20 - 2(n - 41)^2}{84} \cdot 20000.$$

Отже, формула (3.11) є правильною для всіх описаних «експериментів».

Розглянемо ще дві наступні взаємопов'язані між собою задачі. Задача 7 є продовженням задачі 6.

**Задача 6.** Визначте, на яку максимальну кількість різнокольорових частин  $k$  можна розподілити площину  $n$  прямими.

**Розв'язування.** Доведемо, що  $k$  буде найбільшим, якщо ніякі дві прямі не будуть паралельними й ніякі три прямі не будуть перетинатися в одній точці.

Проведемо серію уявних «експериментів».

Спостереження: а) одна пряма ділить площину на 2 частини; б) дві прямі ділять площину на 4 частини; в) три прямі ділять площину на 7 частин; г) чотири прямі ділять площину на 11 частин.

Щоб в загальному дати відповідь на запитання, яке поставлено в задачі, може допомогти метод табличних різниць. Складемо таблицю.

Таблиця 10

Кількість прямих ( $n$ )	1	2	3	4
Кількість частин ( $k$ )	2	4	7	11
$\Delta k$		2	3	4
$\Delta^2 k$			1	1

Як бачимо, різниця другого порядку  $\Delta^2 k = 1$  – стала величина. Отже, формула, яка визначає максимальну кількість різнокольорових частин площини, розділених  $n$  прямими, виражається квадратичною функцією:

$$P_2(n) = an^2 + bn + c.$$

Залишається, методом вибраних точок, визначити значення параметрів  $a$ ,  $b$ , і  $c$ . Користуючись числами таблиці 10, запишемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} a + b + c = 2, \\ 4a + 2b + c = 4, \\ 9a + 3b + c = 7. \end{cases} \quad (3.12)$$

Розв'язуючи систему (3.12), дістанемо

$$a = 0,5, \quad b = 0,5, \quad c = 1.$$

Отже, формула  $P_2(n) = an^2 + bn + c$  матиме вигляд

$$P_2(n) = \frac{n^2 + n + 2}{2}. \quad (3.13)$$

Формула (3.13) є правильною для описаних «експериментів». Для того, щоб ця формула була правильною для довільного натурального числа, потрібно підтвердити її правильність методом математичної індукції.

Для  $n=1, 2, 3, 4$  формула є правильною. Нехай вона буде правильною для  $n=m$  прямих, із яких ніякі дві прямі не паралельні й ніякі три не перетинаються в одній точці. Проведемо ще одну  $(m+1)$ -шу пряму. Вона перетне  $m$  прямих в  $m$  різних точках і ці точки розділять її на  $m+1$  частин ( $m-1$  відрізків і два промені). Кожна така частина ділить існуючу частину площини на дві частини, тобто до існуючих частин площини додається ще  $m+1$  частин площини. Тому

$$P_2(m+1) = P_2(m) + (m+1) = \frac{m^2 + m + 2}{2} + m + 1 = \frac{(m+1)^2 + (m+1) + 2}{2}.$$

Отже, формула (3.13) є правильною для довільного натурального числа  $n$ .

Як бачимо, метод табличних різниць допоміг виконати досить важливу частину роботи – побудувати гіпотезу, і методом математичної індукції підтвердити її правильність, як формулу для натурального числа.

Вище було розглянуто методику побудови емпіричних функцій економічного змісту (виробничих, транспортних торговельних), в яких економічною моделлю були емпіричні лінійні та квадратичні функції. Узагальнимо цю методику на прикладі задачі, моделлю якої буде емпірична функція третього степеня.

**Задача 7.** На яку максимальну кількість  $k$  частин можна розділити простір  $n$  площинами?

Можна сказати, що така задача не має практичного значення. Може й так, але часто математична задача деякий час досить далека від практики, а тільки в певний момент виявиться її велике практичне значення. Може і ця задача знайде практичне застосування.

**Розв’язування.** Кількість  $k$  частин простору буде найбільшим, якщо ніякі дві площини не будуть паралельними і ніякі три площини не будуть перетинатися по одній прямій.

Спостереження: а) одна площина ділить простір на дві частини; б) дві площини ділять простір на чотири частини; в) три площини ділять простір на вісім частин; г) чотири площини ділять простір на 15 частин.

Складемо таблицю.

Таблиця 11

$n$	1	2	3	4
$k$	2	4	8	15
$\Delta k$		2	4	7
$\Delta^2 k$			2	3
$\Delta^3 k$				1

Оскільки  $\Delta k$  і  $\Delta^2 k$  не є сталими числами, а для того щоб визначити сталість  $\Delta^3 k$ , необхідно знайти, скільки буде частин простору при  $n=5$ . А це досить важко визначити, тому замість  $n=5$  візьмемо значення  $n=0$ .

Складемо додаткову таблицю.

Таблиця 12

$n$	0	1	2	3	4
$k$	1	2	4	8	15
$\Delta k$		1	2	4	7

$\Delta^2 k$			1	2	3
$\Delta^3 k$				1	1

Оскільки  $\Delta^3 k = 1$  – сталє число, то можна припустити, що

$$k = P_3(n) = an^3 + bn^2 + cn + d.$$

Визначимо, методом вибраних точок, коефіцієнти цього многочлена. Тому нам прийдеться розв'язати систему чотирьох рівнянь з 4-ма невідомими. Складемо систему рівнянь, використовуючи перші 4 вузли таблиці 12.

$$\begin{cases} a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = 1, \\ a + b + c + d = 2, \\ 8a + 4b + 2c + d = 4, \\ 27a + 9b + 3c + d = 8. \end{cases} \quad (3.14)$$

Розв'язуючи систему рівнянь (3.14), дістанемо

$$a = \frac{1}{6}, b = 0, c = \frac{5}{6}, d = 1.$$

Отже,

$$P_3(n) = \frac{n^3 + 5n + 6}{6} \quad (3.15)$$

Далі залишається довести правильність формули (3.15) для довільного натурального числа  $n$  методом математичної індукції.

Для  $n=0, 1, 2, 3, 4$  формула (3.15) є правильною. Нехай формула (3.15) є правильною для  $n=m$ , тобто

$$P_3(m) = \frac{m^3 + 5m + 6}{6}.$$

Проведемо  $(m+1)$ -шу площину. Вона перетне всі раніше проведені площини по  $m$  різних прямих (оскільки ніякі дві площини не паралельні і ніякі три площини не проходять через одну пряму). Але із задачі 6 випливає, що  $m$  прямих ділять площину на  $\frac{m^2 + m + 2}{2}$  частин. Отже, наша площина поділиться

цими прямими саме на таку кількість частин. Кожна з цих частин є «перегородкою», яка відділяє нову частину простору. Проводячи  $(m+1)$ -шу площину, ми додаємо до тих, що раніше були,  $\frac{m^2 + m + 2}{2}$  нових частин простору. Всього одержуємо частин:

$$\begin{aligned} P_3(m+1) &= P_3(m) + \frac{m^2 + m + 2}{2} = \\ &= \frac{m^3 + 5m + 6}{6} + \frac{m^2 + m + 2}{2} = \frac{(m+1)^3 + 5(m+1) + 6}{6}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Отже, формула (3.15) є правильною для довільного натурального числа  $n$ .

Точно так само можна розв'язувати задачу, математична модель якої має сталі табличні різниці  $\Delta^4 y$ ,  $\Delta^5 y$  і т. д.

Згідно з означенням, маємо  $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$ . Для різниць другого порядку

$$\Delta^2 y_k = \Delta y_{k+1} - \Delta y_k = (y_{k+2} - y_{k+1}) - (y_{k+1} - y_k) = y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k.$$

Як бачимо, різниця третього порядку має вигляд

$$\begin{aligned} \Delta^3 y_k &= \Delta^2 y_{k+1} - \Delta^2 y_k = (y_{k+3} - 2y_{k+2} + y_{k+1}) - (y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k) = \\ &= y_{k+3} - 3y_{k+2} + 3y_{k+1} - y_k. \end{aligned}$$

Методом математичної індукції можна довести, що

$$\begin{aligned} \Delta^n y_k &= y_{k+n} - ny_{k+n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} y_{k+n-2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} y_{k+n-3} + \dots + (-1)^n y_k = \\ &= \sum_{i=0}^n (-1)^i C_n^i y_{n+k-i}. \end{aligned}$$

У цьому разі справедливе таке твердження: *якщо різниці  $n$ -го порядку функції  $y=f(x)$  є сталими для будь-якого сталого кроку, то ця функція є многочленом  $n$ -го порядку.*

Сформульовані і доведені тут теореми, на основі яких будуються емпіричні функції для економічних задач, що статистично описують різні економічні процеси, доцільно застосовувати для вирішення оптимального

планування виробничих процесів. Запропоновані методи розв'язування логістичних задач, забезпечують побудову оптимальних економічних планів виробничого, торговельного та транспортного характеру. Тому доцільно використовувати лінійні, квадратичні та інших степенів функції в якості математичної моделі виробничого процесу, а їх застосування забезпечить можливість моделювання виробничих процесів.

### **ВИКОРИСТАНА ЛІТЕРАТУРА**

1. Андрієшин М.В. Економічна ефективність використання землі // М.В. Андрієшин, С.Д. Шулейкін. – Київ: Урожай, 1969. – 168 с.
2. Башмакова М.И. Паросочетания и транспортные сети // М.И. Башмакова / Научно-популярный физ.-мат. журнал “Квант”. – 1970, №4. – С. 16-24.
3. Беяева Х.С. Экстремальные задачи // Х.С. Беяева, В.И. Монахов. – М.: Просвещение, 1977. – 144 с.
4. Болтянский В.Г. Математика решает задачи на оптимизацию // В.Г. Болтянский. – М.: Знание, 1977. – 192 с.
5. Виленкин Н.Я. Популярная комбинаторика // Н.Я. Виленкин. – М.: Наука, 1975. – 208 с.
6. Возняк Г.М., Гусев В.А. Прикладные задачи на экстремумы // Г.М. Возняк, В.А. Гусев. – М.: Просвещение, 1985. – 144 с.
7. Жалдак М.І. Чисельні методи математики // М.І. Жалдак, Ю.С. Рамський. – Київ: Радянська школа, 1984. – 208 с.
8. Лященко М.Я. Чисельні методи // М.Я. Лященко, М.С. Головань. – Київ: Лебідь, 1996. – 280 с.
9. Нагибин Ф.Ф. Экстремумы // Ф.Ф. Нагибин. – М.: Просвещение, 1968. – 104 с.
10. Шкурба В.В. Задача трех станков // В.В. Шкурба. – М.: Наука, 1976. – 96 с.

**Пасічник Роман Мирославович, доктор технічних наук,  
професор кафедри економічної кібернетики та інформатики**

## **МОДЕЛІ СИСТЕМ ІЗ ВНУТРІШНІМИ ЛІМІТУЮЧИМИ ФАКТОРАМИ ТА МЕТОД ЇХ ІДЕНТИФІКАЦІЇ**

На сьогоднішній день процеси в фізико-технічних об'єктах досліджені набагато повніше, ніж в їх біотехнологічних, медичних та Веб-інформаційних аналогах, яких об'єднує спорідненість із процесами, що характерні для функціонування живих організмів. Однією з найважливіших властивостей живих систем є здатність до росту, причому внаслідок високого рівня самоорганізації цих систем, який забезпечує їх автономність та здатність концентрувати ресурси на головному напрямку, на перебіг росту визначальний вплив має лише один або декілька основних факторів. Такі системи отримали назву систем із лімітуючими факторами. Тому, поряд із класичними моделями необмеженого росту Мальтуса та обмеженого росту Фергюльста, розглядаються моделі з лімітуючими факторами конкурентної взаємодії організмів Лотки-Вольтерри та Колмогорова із їх узагальненнями в роботах R.H. MacArthur, M.E. Gilpin, M. Shaffer, А.Д. Базикіна, Г.Ю. Різниченко, а також моделі росту Моно, що аналізуються у роботах М.Д. Ієрусалимського, Дж. Робінсона, А.Б. Рубіна, Дж. Марі, Д.С. Дворецького, В.В. Алексеєва, В.С. Івлєва, Н. Рашевського. Моделі Моно дозволяють відображати мінливість впливу лімітуючого фактора в залежності від його концентрації, чого важко досягти в класичній моделі Лотки-Вольтерри.

Точна прив'язка моделей до особливостей досліджуваного об'єкта здійснюється на основі методів параметричної ідентифікації. Нелінійний характер моделей систем з лімітуючими факторами призводить до наявності численних локальних мінімумів функціоналу якості цієї ідентифікації. Універсальним методом мінімізації такого роду функціоналів є метод напрямного конуса, що відноситься до класу методів випадкового пошуку і запропонований у роботах Л.А. Растрігіна та розвинутий у роботах П.Г. Стахіва, М.П. Дивака, Ю.Я. Козака. Універсальність згаданого методу

породжує певні складності в налаштуванні його параметрів, а також їх значну обчислювальну складність.

Останнім часом вдалося побудувати ряд моделей систем із лімітуючими факторами, що значно розширюють сферу їхнього застосування. У ролі методів ідентифікації використовувався підхід, який полягає у побудові початкового наближення параметрів моделі на основі спеціальних співвідношень та наступному уточненні його градієнтним методом. Складність застосування методів викликає необхідність розроблення відповідних програмних засобів для їх реалізації.

Існуючі методи ідентифікації моделей систем з лімітуючими факторами повністю орієнтовані на специфіку конкретних прикладних галузей, що спричиняє невиправдані затрати зусиль для досягнення точності моделей. Особливістю побудованих математичних моделей зазначеного класу та методів їх ідентифікації також є розрізненість та частковість. Зокрема, наявні різні моделі одного процесу (моделі для різних етапів реабілітації після серцево-судинних захворювань) та кілька методів ідентифікації параметрів моделі (методи ідентифікації короткотривалого та довготривалого підвищення відвідуваності Веб-сайту), що утруднює поширення моделей систем з лімітуючими факторами на нові предметні галузі з одночасним забезпеченням необхідної точності прогнозування. Це породжує науково-прикладну проблему, пов'язану з потребами спрощення процесу моделювання систем із лімітуючими факторами з одночасним забезпеченням необхідної точності та розробки для цих цілей інженерного інструментарію.

Одним із поширених видів лімітуючих факторів є компоненти, використання яких забезпечує перебіг основних процесів в системах. Цей розділ присвячено аналізу особливостей моделювання згаданих процесів, а згадані компоненти віднесено до групи внутрішніх лімітуючих факторів. Тут подано узагальнену модель систем із згаданими факторами, результати досліджень впливу зміни параметрів моделей на динаміку їх змінних, на основі яких розроблено метод ідентифікації згаданих моделей.



## 1. Особливості систем з лімітуючими факторами

Аналіз літературних джерел та практика досліджень систем із лімітуючими факторами дозволяє нам вважати лімітуючими окремих фактор або невелику їх підмножину, коли вони визначають поведінку та функціонування системи, виключаючи вплив інших факторів. Таке виключення може бути абсолютним або неповним, коли інші фактори виключаються в основному, хоча їх незначний вплив може відчуватися. Часто зустрічається ситуація, коли в процесі функціонування системи один лімітуючий фактор заміняється іншим. Однак значний практичний інтерес представляють і значно простіші процеси, в яких лімітуючий фактор не міняється. Традиційно системи з лімітуючими факторами розглядаються в біологічних та екологічних дослідженнях.

### 1.1. Найпростіші моделі росту біологічних популяцій

Найпростіша модель росту біологічних популяцій описується моделлю Бернуллі-Мальтуса (1760 р.), що передбачає експоненціальний ріст чисельності популяції  $N$  при відсутності будь-яких стримуючих факторів:

$$\frac{d}{dt} N(t) = aN(t), \quad a > 0, \quad (1)$$

$$N(t_0) = N_0, \quad (2)$$

$$a = b - d, \quad (3)$$

де  $b$  – інтенсивність народжуваності в популяції,  $d$  – інтенсивність смертності в популяції.

Згодом (в 1838 р.) бельгійський дослідник Фергюльст зауважив, що при невисокій чисельності популяції вона може розвиватися за законом Мальтуса, але велика концентрація особин одного виду призведе до загострення внутривидової боротьби і зменшуватиме темпи приросту. Він допустив, що якщо  $K$  – максимальна чисельність, якої може досягти популяція, то приріст популяції буде пропорційним до обсягів невикористаних ресурсів  $K - N$ . За цими допущеннями модель динаміки популяції набуває вигляду:

$$\frac{d}{dt} N(t) = (b - d)(K - N(t))N(t), \quad (4)$$

$$N(t_0) = N_0. \quad (5)$$

Розв'язок цього рівняння можна побудувати аналітично

$$N(t) = \frac{KN_0}{N_0 + (K - N_0)\exp[-(b - dKt)]}. \quad (6)$$

Графіком згаданого розв'язку є так звана логістична крива, що має горизонтальну асимптоту  $\frac{KN_0}{N_0 + (K - N_0)}$  коли  $t \rightarrow \infty$ .

Незручність цієї моделі полягає у необхідності задання обсягу максимальної чисельності популяції, хоча частіше її якраз і потрібно оцінити на основі деяких часткових спостережень. Спрогнозувати динаміку росту біологічних популяцій, не використовуючи оцінку максимального обсягу екологічної ніші, вдається на основі застосування поняття лімітуючого фактора. У вжиток його ввів німецький дослідник Ю. Лібіх у своїй праці «Хімія в застосуванні до землеробства та фізіології», опублікованої в 1840 р. Досліджуючи причини виснаження угідь при постійному вирощуванні сільськогосподарських культур за аналізами хімічних складів ґрунтів та рослин він встановив, що швидкість росту популяції визначається не всіма елементами харчування, а лише тими з них що перебувають у найбільшому відносному дефіциті стосовно їх оптимального співвідношення [1].

Принцип Лібіха дозволяє враховувати лише лімітуючий компонент реалізації ланцюга ферментативних реакцій або харчування при моделюванні росту біологічних спільнот. Він дозволив російському вченому І.А. Полетаєву [2] формалізувати динаміку багатопроектної реакції у вигляді системи кусково-лінійних диференціальних рівнянь виду:

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{s=1}^N a_{is}^+ P_s - \sum_{s=1}^N a_{is}^- P_s, \quad i = \overline{1, n}; \quad (7)$$

$$P_s = \min \left( \frac{E_s}{b_{os}}, \frac{k_{1s} x_1}{a_{1s}^-}, \dots, \frac{k_{ns} x_n}{a_{ns}^-} \right) \quad (8)$$

де  $x_i$  – обсяг  $i$ -ої компоненти реакції,  $P_s$  – інтенсивність  $s$ -го процесу,  $a_{is}^+$  ( $a_{is}^-$ ) – обсяг виробництва (споживання)  $i$ -ої компоненти за одиницю часу при

одиночній інтенсивності процесу,  $E_s$  – обсяг зовнішньої компоненти  $s$ -го процесу, яка є лімітуючим зовнішнім фактором,  $b_{0s}$  – обсяг зовнішньої компоненти  $s$ -го процесу для підтримки його одиночної інтенсивності,  $k_{is}$  – інтенсивність потоку  $i$ -ої компоненти в  $s$ -ий процес.

Таким чином в даній моделі кожен процес лімітується як зовнішніми, так і внутрішніми факторами, та моделюється лінійною динамікою, а перехід від одного до іншого лімітуючого фактора відбувається миттєво. Однак при моделюванні реальних систем слід врахувати, що настільки значні зміни параметрів системи супроводжуються нелінійними ефектами. Зокрема кінетика ферментативних реакцій підлягає нелінійному закону Міхаеліса-Ментен [3,4], встановленого на основі їхньої публікації 1913 року.

## 1.2. Кінетика ферментативних реакцій

Підтримка життєдіяльності живих організмів полягає в синтезі органічних речовин із компонентів їжі і окисленні органічних компонент клітин при диханні або виконанні роботи [1]. Вона реалізується у вигляді складних послідовностей реакцій за участю каталізаторів, роль яких виконують білкові ферменти. Робота, яку виконують живі організми полягає в переносі та перерозподілі хімічних елементів в біосфері, завдяки чому більшість хімічних речовин перебувають в неперервному обороті.

Згідно законів загальної кінетики хімічних реакцій стан хімічної рівноваги для реагентів  $A, B$  з утворенням речовин  $C, D$ , що описується схемою



характеризується сталою термодинамічної рівноваги  $K_p$ :

$$K_p = \frac{[C][D]}{[A][B]} = \frac{k_{+1}}{k_{-1}}, \quad (10)$$

де  $k_{+1}$  ( $k_{-1}$ ) позначає швидкість прямої (зворотної) реакції, а  $[ ]$  – концентрацію речовини.

Кінетика ферментативних реакцій відрізняється від кінетики звичайних реакцій явищем насичування ферменту субстратом. При низькій концентрації субстрату швидкість хімічної реакції лінійно залежить від його концентрації. Однак при високій концентрації субстрату спостерігається максимальна швидкість перебігу реакції, що більше не залежить від його концентрації.

Величину, обернену до сталої рівноваги у випадку ферментативної реакції субстрату  $S$  та ферменту  $E$  з утворенням фермент-субстратного комплексу  $ES$  та продукту  $P$



де

$$K_S = \frac{k_{-1}}{k_{+1}}, \quad (12)$$

називають константою диссоціації (розділення) фермент-субстратного комплексу. На основі експериментальних досліджень Міхаеліс та Ментен встановили формулу швидкості  $v$  перебігу ферментативних реакцій

$$v = \frac{v_{\max} [S]}{K_S + [S]}, \quad (13)$$

де  $v_{\max}$  – максимальна швидкість реакції при повному насиченні ферментом. В наступних дослідженнях Брігс та Холдейн удосконалили цю формулу, замінивши сталу диссоціації на сталу Міхаеліса  $K_M$

$$K_M = \frac{k_{-1} + k_2}{k_1}. \quad (14)$$

Врахування нелінійності ферментативних реакцій дозволило розглядати системи з лімітуючими факторами як кусково-нелінійні [1]. Однак в ході подальших досліджень було встановлено, що системи з лімітуючими факторами моделюють процеси далеко за межами області ферментативних реакцій. На сьогоднішній день їх використовують в моделюванні розвитку

урбосистем [5], фізичних можливостей людського організму [6, 7, 8, 9], взаємовпливу та розвитку рослин [10, 11, 12, 13, 14, 15, 16], найпростіших мікроорганізмів [17, 18, 19, 20] а також клітин людини [21, 22], моделі генної терапії [23, 24]. Таке моделювання має свою передісторію.

### 1.3. Моделі росту популяцій з лімітуючими факторами

В 1925 та 1926 роках Джеймс Лотка та Віто Вольтерра незалежно один від одного запропонували систему диференціальних рівнянь, яка описує кінетику системи, що складається із однотипних хижаків та їх жертв, причому жертви є лімітуючим фактором для чисельності хижаків [25]. Ця система записується у вигляді

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = p_1XS - p_2X, \\ \frac{dS}{dt} = -p_3XS + p_4S, \end{cases} \quad (15)$$

де  $S$  – чисельність жертв,  $X$  – чисельність хижаків,  $p_1$  – інтенсивність зростання кількості хижаків в залежності від інтенсивності їхнього харчування,  $p_2$  – смертність хижаків,  $p_3$  – інтенсивність поїдання жертв,  $p_4$  – інтенсивність народження жертв.

Дана система допускає циклічні зміни чисельності жертв та хижаків. Велика чисельність жертв приводить до значного розмноження хижаків, які значно зменшують число жертв. Згодом і кількість хижаків зазнає скорочення, оскільки жертв для свого відтворення їм не вистачає. Зменшення кількості хижаків приводить до зростання кількості жертв. Такі процеси циклічно повторюються. Справедливість даної моделі була підтверджена на аналізі динаміки деяких популяцій, однак згодом було запропоновано новий тип моделей, який узагальнював модель Лотки-Вольтерри.

В 1942 році французький дослідник Жак Моно у фундаментальній праці "Дослідження росту бактеріальних культур" [26] побудував математичне подання залежності питомої швидкості росту популяцій  $\mu$  від концентрації субстрату  $S$ , який цей ріст лімітує:

$$\mu(t) = \frac{\mu_{\max} S(t)}{K + S(t)}, \quad (16)$$

де  $K$  – стала, що дорівнює концентрації субстрату, при якій швидкість росту дорівнює половині максимальної. На відміну від формули Міхаеліса-Ментен вона потребує експериментального встановлення. При використанні згаданого подання питомої швидкості росту популяції у системі Лотки-Вольтерри за відсутності росту концентрації субстрату, отримуємо модель періодичного біотехнологічного реактора виду

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} X(t) = \left( p_1 \frac{S(t)}{p_4 + S(t)} - p_2 \right) X(t), \\ \frac{d}{dt} S(t) = -p_3 \frac{S(t)}{p_4 + S(t)} X(t), \end{cases} \quad (17)$$

$$X(0) = X_0, \quad S(0) = S_0.$$

В ній присутня характеристика активності процесу  $X(t)$ , яка відповідає концентрації мікроорганізмів в реакторі, а також характеристика забезпеченості процесу  $S(t)$ , яка відповідає концентрації поживного середовища – субстрату, що підтримує перебіг процесу та є його лімітуючим фактором. Лімітуючий фактор впливає на відносну інтенсивність взаємодії мікроорганізмів та субстрату: при максимальних його концентраціях швидкість взаємодії близька до максимальної, а при низьких концентраціях – до нульової. При разовому внесенні певної концентрації субстрату та активного середовища в систему, внаслідок взаємодії із субстратом, концентрація активного середовища зростає до максимального значення, а потім, внаслідок вичерпання субстрату та смертності серед елементів активного середовища, вона редукується до нуля. Концентрація субстрату внаслідок взаємодії із активним середовищем монотонно спадає до нуля.

Подібність такого подання інтенсивності взаємодії компонент біотехнологічного реактора до закону Міхаеліса-Ментен пояснюється тим, що для живої клітини характерна строго збалансована система ферментативних реакцій. Швидкість біосинтезу в цьому випадку буде визначатися реакцією, швидкість якої обмежена нестачею субстрату. Модель Моно описує процес

нарощення впливу окремого лімітуючого фактора на результуючий параметр, що зустрічається не лише в процесах росту популяцій.

В моделі (17) на початковій стадії процесу, при значних концентраціях субстрату знаменник виразу  $\frac{S(t)}{p_4 + S(t)} X(t)$  набуває максимальних значень, що визначає невисоку інтенсивність нарощення концентрації активного середовища та споживання субстрату. Надалі зменшення концентрації субстрату компенсується нарощенням концентрації активного середовища, окрім цього, знаменник згаданого виразу зменшується аж до своєї мінімальної величини  $p_4$ . Це моделює високі швидкості росту концентрації активного середовища та споживання субстрату. Така мінливість відображає вибірковий характер споживання субстрату при його великій концентрації а також малопомітний вплив концентрації субстрату на стан системи. У випадку зменшення концентрації субстрату, наростає вплив лімітуючого фактора. Такі ефекти неможливо представити в класичній моделі Лотки-Вольтерри. Максимальна швидкість перебігу процесів визначається параметром  $p_4$ , який далі будемо називати лімітуючим параметром.

Залежність Моно виявляється справедливою також при лімітуванні їжею крупних організмів, наприклад риб. Доцільність використання такого типу залежностей в цій предметній області обґрунтована Н. Рашевським [27]. Він запропонував пов'язувати чисельність популяції із заповненістю  $X$  травної системи її особин. Динаміка такої наповненості визначається поступленням харчів та виходом опрацьованої їжі і моделюється диференціальним рівнянням

$$\frac{dX(t)}{dt} = \alpha S(t) \left( 1 - \frac{X(t)}{n_0} \right) - \mu X(t), \quad (18)$$

де  $S$  – концентрація їжі в оточуючому середовищі,  $n_0$  – максимальна вмістимість травної системи,  $\alpha$  – коефіцієнт впливу голоду на наповненість травної системи,  $\mu$  – швидкість перетравлювання їжі.

Оскільки темп зміни чисельності популяції набагато нижчий темпу зміни наповненості травної системи, останню можна вважати статичною, тобто розглядати випадок

$$\frac{dX(t)}{dt} = 0. \quad (19)$$

З останньої умови отримуємо наступну оцінку наповненості

$$X(t) = \frac{n_0 S(t)}{S + \mu n_0 / \alpha}. \quad (20)$$

Динаміку чисельності популяції  $N$  визначає лінійна комбінація ситості  $XN$  організмів в ній та їх смертності із коефіцієнтами  $\gamma$  та  $\varepsilon$  відповідно:

$$\frac{dN(t)}{dt} = \gamma X(t)N(t) - \varepsilon N(t). \quad (21)$$

Підставляючи (14) в (15) отримуємо:

$$\frac{dN(t)}{dt} = \frac{\mu_{\max} S(t)N(t)}{K + S} - \varepsilon N(t), \quad (22)$$

де  $\mu_{\max} = \mu_0$ ,  $K = \frac{n_0 \mu}{\alpha}$ .

Отримане співвідношення по структурі співпадає із моделлю Моно. Широка застосовність формули Моно для подання росту популяцій різноманітних видів призвела до того, що вона стала базовою в мікробіології та екології [1].

#### **1.4. Модель зростання та редукції активності процесів під дією лімітуючого фактора**

Розробка моделей для процесів, що виходять за рамки екологічних або біологічних систем вимагає модифікації математичного апарату. Це стосується в першу чергу питомої швидкості росту популяцій (10), яку ми хочемо застосувати для моделювання інтенсивності процесів, що зазнають суттєвого підвищення активності або насичення. Тому замість питомої швидкості росту популяцій, що є основою моделей Моно, розглянемо відносну інтенсивність



процесу взаємодії певних компонентів. Для її побудови необхідно подання інтенсивності взаємодії поділити на обсяги взаємодіючих компонентів, або питому швидкість росту популяцій поділити на обсяги взаємодіючого субстрату та активного середовища.

В результаті приходимо до наступного подання відносної інтенсивності взаємодії для процесів із лімітуючим фактором

$$R(m, S(t)) = \frac{1}{m + S(t)}, \quad (23)$$

де  $S(t)$  – лімітуючий фактор,  $m \neq 0$  – лімітуючий параметр нелінійності взаємодії. При зростанні параметра інтенсивність наближається до сталої, тобто стає аналогічною до відносної інтенсивності взаємодії характеристик системи в моделі Лотки-Вольтера. При зменшенні значень параметру градієнти відносної інтенсивності зростають.

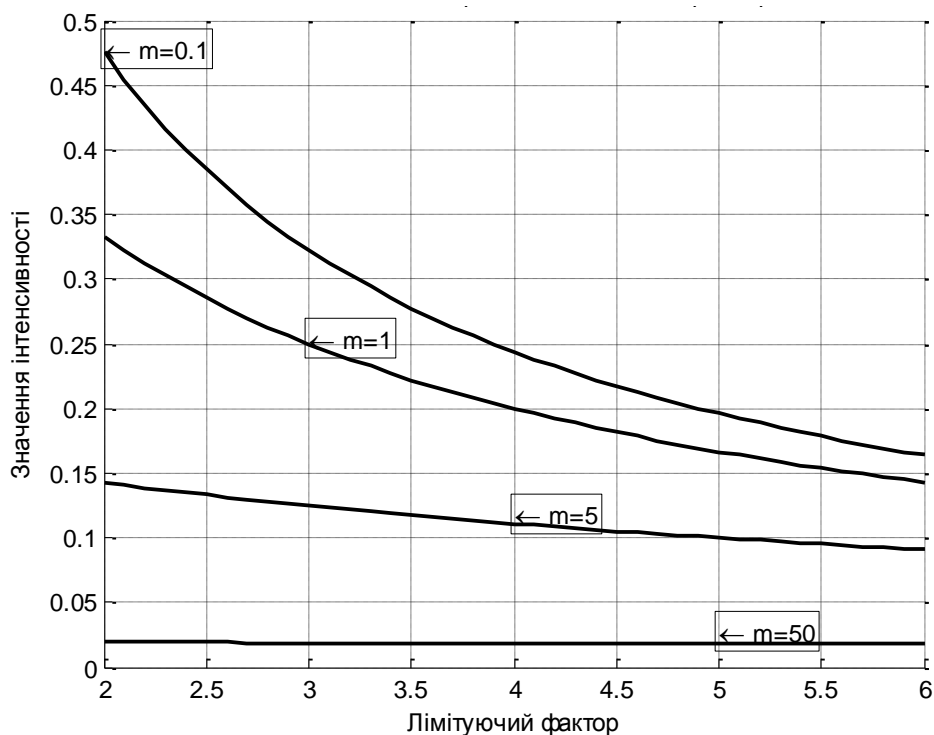


Рис. 1. Відносна інтенсивність реакції системи при дії лімітуючого фактора

Оскільки базовою моделлю процесів з лімітуючими факторами вважаємо модель Моно, то добуток відносної інтенсивності взаємодії характеристик

системи в моделі Моно на значення лімітуючого фактора представимо як функцію Моно першого роду:

$$M_1(m, S(t)) = \frac{S(t)}{m + S(t)}. \quad (24)$$

Графік одномісної функції Моно першого роду наведено на рисунку.

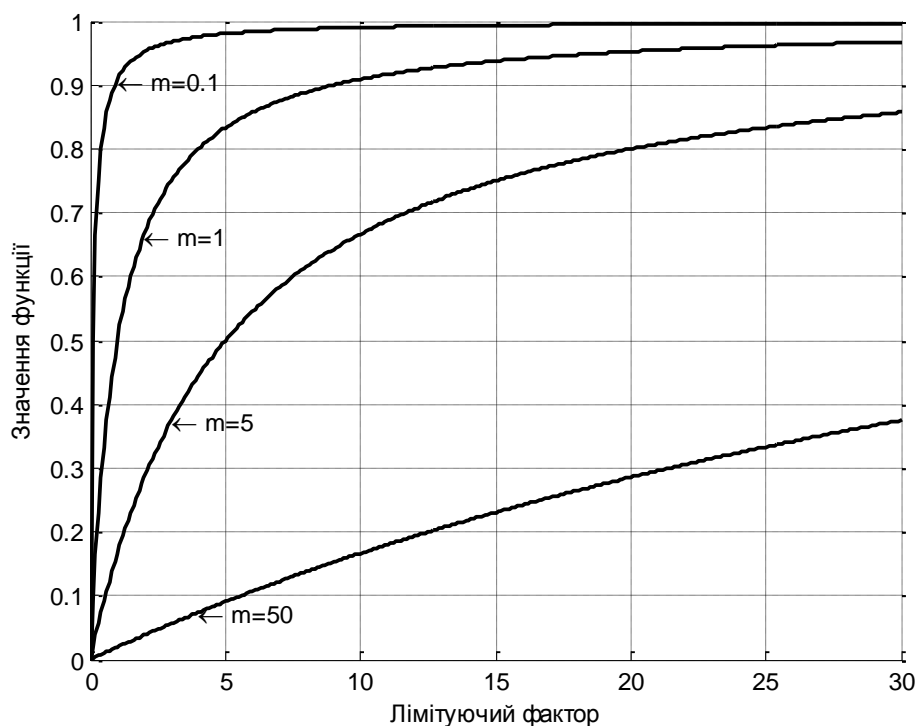


Рис. 2. Графіки функцій Моно першого роду

Можна спостерігати втрату впливу лімітуючого фактору при рості його значень. Процеси із лімітуючим фактором зустрічаються в різноманітних ситуаціях. Однак природа цих факторів може бути абсолютно різною. Звичайно в ролі лімітуючого фактора виступає деяка внутрішня характеристика системи. Її динаміка визначається системою і може бути прогнозованою, як і динаміка інших характеристик. Один із найпростіших процесів такого роду відбувається в біохімічному реакторі періодичного типу. Він починається із деяких початкових концентрацій характеристики забезпеченості процесу  $S_0$ , в ролі якої виступає концентрація субстрату в реакторі, та характеристики активності системи  $X_0$  (див. рис. 3), в ролі якої виступає концентрація мікроорганізмів в реакторі. В ході реалізації процесу концентрація субстрату  $S(t)$  знижується до

нульової. За рахунок субстрату значення характеристики активності зростає, причому швидкість такого росту зазнає насичення.

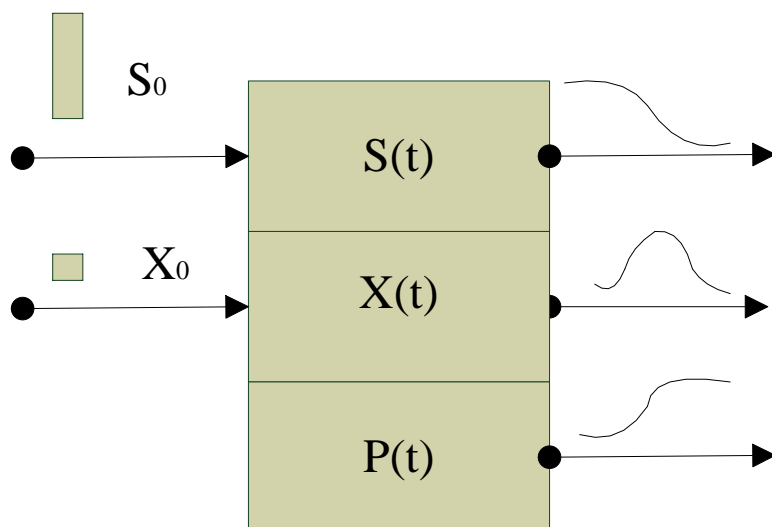


Рис. 3. Схема утворення продукту  $P$  за рахунок взаємодії субстрату  $S$  та активного середовища  $X$

Характеристика активності процесу часто є нестійкою і зазнає редукції. Якщо швидкість редукції значна, то характеристика активності  $X(t)$  швидко знижується до нульового або деякого постійного значення. В процесі перетворення субстрату може утворюватися продукт процесу  $P(t)$ .

Побудову моделей описуваних процесів розпочнемо із простішого випадку, коли розглядається динаміка лише характеристик забезпеченості та активності процесів системи. Ця динаміка із врахуванням ефекту насичення інтенсивності їх взаємодії та процесу редукції активності системи моделюється наступною системою звичайних диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} X(t) = (p_1 M_1(p_4, S(t)) - p_2) X(t), & (25) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} S(t) = -p_3 M_1(p_4, S(t)) X(t), & (26) \end{cases}$$

$$X(0) = X_0, \quad S(0) = S_0. \quad (27)$$

Системи такого роду часто використовуються в моделюванні біотехнологічних процесів. В цій моделі параметр  $p_1$  визначає вплив інтенсивності взаємодії характеристики активності процесу із характеристикою його забезпеченості на ріст активності процесу, а параметр  $p_2$  визначає

відносну інтенсивність редукції цієї активності. Параметр  $p_3$  визначає вплив інтенсивності взаємодії характеристики активності процесу із характеристикою його забезпеченості на швидкість редукції забезпеченості процесу. Параметр  $p_4$  є лімітуючим параметром функції Моно. Він відіграє ключову роль у поданні швидкості перебігу процесу взаємодії інтенсивності взаємодії характеристики активності процесу із характеристикою його забезпеченості.

### 1.5. Модель трансформації активності процесів під дією лімітуючого фактора

Подана модель описує перебіг взаємодії змінної активного середовища із субстратом в різних предметних областях. Причина полягає в тому, що багатьом процесам властиве явище насичування взаємодії його характеристик, які ми можемо вважати змінними активного середовища та субстрату. Однак така подібність навіть у основних рисах не є повною. Зокрема у Веб-аналітичних при правильній організації рекламування Веб-сайтів згладжена відвідуваність останніх при завершенні періодичного процесу знижується не до нуля, а до деякої частки свого максимального значення  $X_m = \max X(t)$ . Відповідно і значення субстрату знижується не до нуля а до деякої частки  $f$  початкового значення  $S_0$ . Для моделювання такої ситуації необхідно узагальнити модель (25)–(27) наступним чином:

$$\left\{ \frac{d}{dt} X(t) = (p_1 M_2(p_4, S(t), S(t) - S_f) - p_2) \Theta(S(t) - S_f) X(t), \right. \quad (28)$$

$$\left. \frac{d}{dt} S(t) = -a_3 M_1(p_4, S(t)) \Theta(S(t) - S_f) X(t), \right. \quad (29)$$

$$X(0) = X_0, \quad S(0) = S_0, \quad S_f = f S_0, \quad (30)$$

$$M_2(p_4, S(t), C(t)) = \frac{C(t)}{p_4 + S(t)}. \quad (31)$$

Тут символом  $M_2$  позначимо функцію Моно другого роду, в якій змінні величини чисельника та знаменника не співпадають. Покладаючи в даній моделі  $f = 0$ , отримуємо відому модель (25)–(27) процесів із насиченням.

Пропонована модель може бути ідентифікована при наявності спостережень змінної активного середовища та субстрату. Однак зустрічаються практичні задачі, в яких значення субстрату оцінити не можна. Це не дозволяє ідентифікувати та якісно використовувати модель (28)–(31), оскільки вона містить перемикачі виду  $\Theta(S - S_f)$ . Тому переформатуємо модель (28)–(31) з метою максимального використання значень спостережуваної змінної активного середовища  $X(t)$ . Вихід на насичення будемо фіксувати за допомогою умови

$$X(t) < X_f, \quad X_f = fX_{\max}. \quad (32)$$

Тим самим ми орієнтуємося на зменшення значення змінної активного середовища нижче деякої частки  $f$  від максимально досягнутого значення  $X_{\max}$ . Однак застосування лише наведеної умови заблокує зростання змінної активного середовища на початковому етапі, а отже вона і не зможе досягнути максимального значення. Тому розширимо попередню умову наступним чином:

$$(t > t_{\max}) \wedge (X(t) < X_f), \quad X_f = fX_{\max}, \quad X(t_{\max}) = X_{\max}. \quad (33)$$

Таким чином, замість моделі (25)–(27) переходимо до моделі

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} X(t) = (p_1 M_1(p_4, S(t)) - p_2) X(t), \quad (t < t_{\max}) \vee (X(t) > X_f), \end{array} \right. \quad (34)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} S(t) = -p_3 M_1(p_4, S(t)) X(t), \quad (t - t_{\max}) \vee (X(t) > X_f), \end{array} \right. \quad (35)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} X(t) = 0, \quad (t > t_{\max}) \wedge (X(t) > X_f), \end{array} \right. \quad (36)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} S(t) = 0, \quad (t > t_{\max}) \wedge (X(t) > X_f), \end{array} \right. \quad (37)$$

$$X(0) = X_0, \quad S(0) = S_0, \quad X_f = fX_{\max}, \quad X(t_{\max}) = X_{\max}, \quad (38)$$

Тут використано значення моменту часу  $t_{\max}$ , в який змінна активного середовища досягає свого максимального значення. Якщо максимальне значення змінної активного середовища вже досягнуте в минулому, то зменшення згаданого значення нижче певної частки від максимального призведе до стабілізації процесу.

Як приклад використання моделі (34–38) продемонструємо наближення експериментальних даних для деякого веб-аналітичного процесу, який описує перехід від мінімальної відвідуваності до дещо вищої відвідуваності через деякий проміжковий максимум. За допомогою вибору відповідних параметрів дані можна достатньо точно наблизити із використанням лише частини (9 точок) для підбору цих значень, як показано на рисунку.

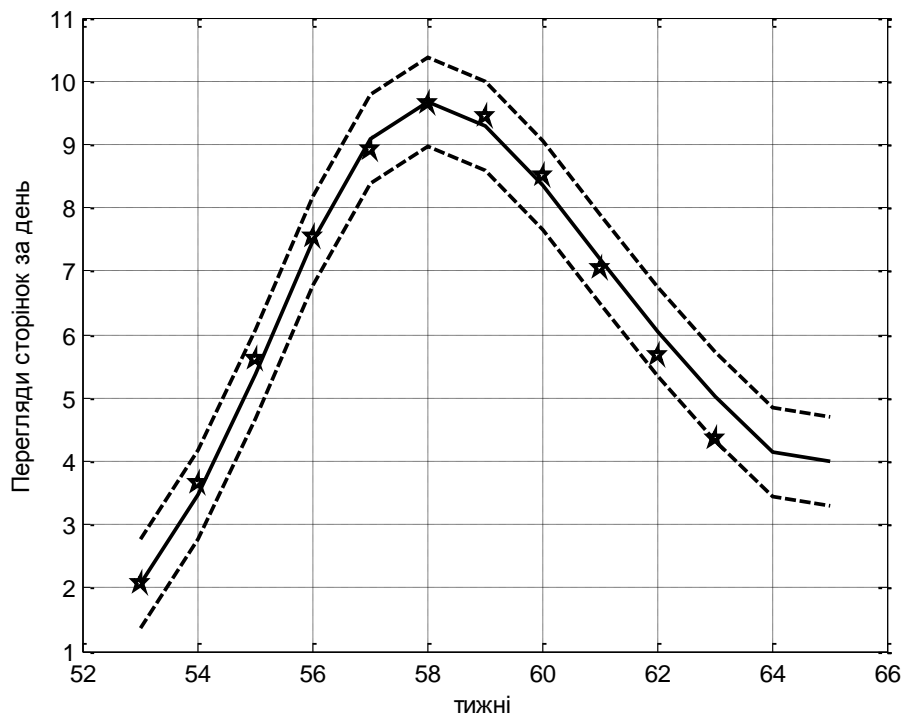


Рис. 4. Результат застосування моделі (5) до наближення експериментальних даних

Із аналізу рисунка видно достатню точність наближення даних (6,8%), що наочно демонструє 7% коридор навколо модельованих значень, який представляється пунктирними лініями.

При аналізі біотехнологічних процесів із лімітуючим фактором помічено явище гальмування росту їх основної характеристики, що обумовлюється впливом продуктів розвитку мікроорганізмів. Це явище отримало назву продуктного інгібування [28, 29, 30]. В роботах [31, 32] вводиться спрощене

подання явища інгібування, яке можна представити як добуток функцій Моно з лімітуючими субстратом та продуктом процесу.

Однак в дослідженнях біотехнологічних процесів Andrés-Toro [33, 34, 35], запропоновано ще простіше подання ефекту продуктного інгібування. А саме в рівнянні, яке описує динаміку основної характеристики процесу в якості лімітуючого фактора використано не субстрат, а продукт процесу. Для моделювання динаміки продукту процесу використано лінійну залежність його приросту від швидкості зменшення субстрату, як це подано у наступних співвідношеннях

$$\frac{d}{dt} X(t) = (p_1 M_2(p_5, P(t), S(t)) - p_2) X(t), (t < t_{\max}) \vee (X(t) > X_f), \quad (39)$$

$$\frac{d}{dt} S(t) = -p_3 M_1(p_4, S(t)) X(t), (t < t_{\max}) \vee (X(t) > X_f), \quad (40)$$

$$\frac{d}{dt} X(t) = 0, (t > t_{\max}) \wedge (X(t) > X_f), \quad (41)$$

$$\frac{d}{dt} S(t) = 0, (t > t_{\max}) \wedge (X(t) > X_f), \quad (42)$$

$$\frac{d}{dt} P(t) = -p_6 \frac{d}{dt} S(t), \quad (43)$$

$$X(0) = X_0, S(0) = S_0, X_f = fX_{\max}, X(t_{\max}) = X_{\max}, \quad (44)$$

$$M_2(m, P(t), S(t)) = \frac{S(t)}{m + P(t)}. \quad (45)$$

Числові експерименти підтвердили ефективність такого підходу.

Наступний вид ускладнення моделі передбачає управління інтенсивністю процесу. Таке управління моделюється переходом від постійних коефіцієнтів моделі до деяких функцій від управління  $T$  та деякого вектора відомих параметрів  $\vec{C}$

$$p_i = H_i[\vec{C}, T(t)] \quad (46)$$

В результаті отримуємо модель

$$\frac{d}{dt} X(t) = (H_1[\vec{C}, T(t)]M_2(H_5[\vec{C}, T(t)]P(t), S(t)) - H_2[\vec{C}, T(t)])X(t),$$

$$(t < t_{\max}) \vee (X(t) > X_f), \quad (47)$$

$$\frac{d}{dt} S(t) = -H_3[\vec{C}, T(t)]M_1(H_4[\vec{C}, T(t)]S(t))X(t),$$

$$(t < t_{\max}) \vee (X(t) > X_f), \quad (48)$$

$$\frac{d}{dt} X(t) = 0, (t > t_{\max}) \wedge (X(t) > X_f), \quad (49)$$

$$\frac{d}{dt} S(t) = 0, (t > t_{\max}) \wedge (X(t) > X_f), \quad (50)$$

$$\frac{d}{dt} P(t) = -H_6[\vec{C}, T(t)]\frac{d}{dt} S(t), \quad (51)$$

$$X(0) = X_0, S(0) = S_0, X_f = fX_{\max}, X(t_{\max}) = X_{\max}. \quad (52)$$

Згадані ускладнення включають попередні моделі як часткові випадки. Зокрема, покладаючи в моделі (39)–(45)  $p_6 = -1$ , отримуємо модель (34)–(38), а покладаючи в моделі (47)–(52)  $\vec{C} = \vec{0}$ , отримуємо модель (39)–(45).

### 1.6. Модель забезпеченості процесів із відокремленими лімітуючими факторами

Модель (47)–(52) дозволяє описати в принципі майже всі процеси, які розглядаються в даній роботі, де лімітуючим фактором служить внутрішня компонента системи. Однак відомі процеси, в яких лімітуючим фактором служить зовнішнє навантаження, або процеси, результуючою характеристикою яких служить рівень їх забезпеченості, на яку впливає ціла множина змінних, що визначаються окремими лімітуючими факторами. Це процеси реакції на фізичне навантаження хворих із серцево-судинними захворюваннями а також добової динаміки глікемії, які будуть розглядатися нижче. Структуру узагальненої моделі, яка охоплює всі зазначені вище випадки подано на рисунку.



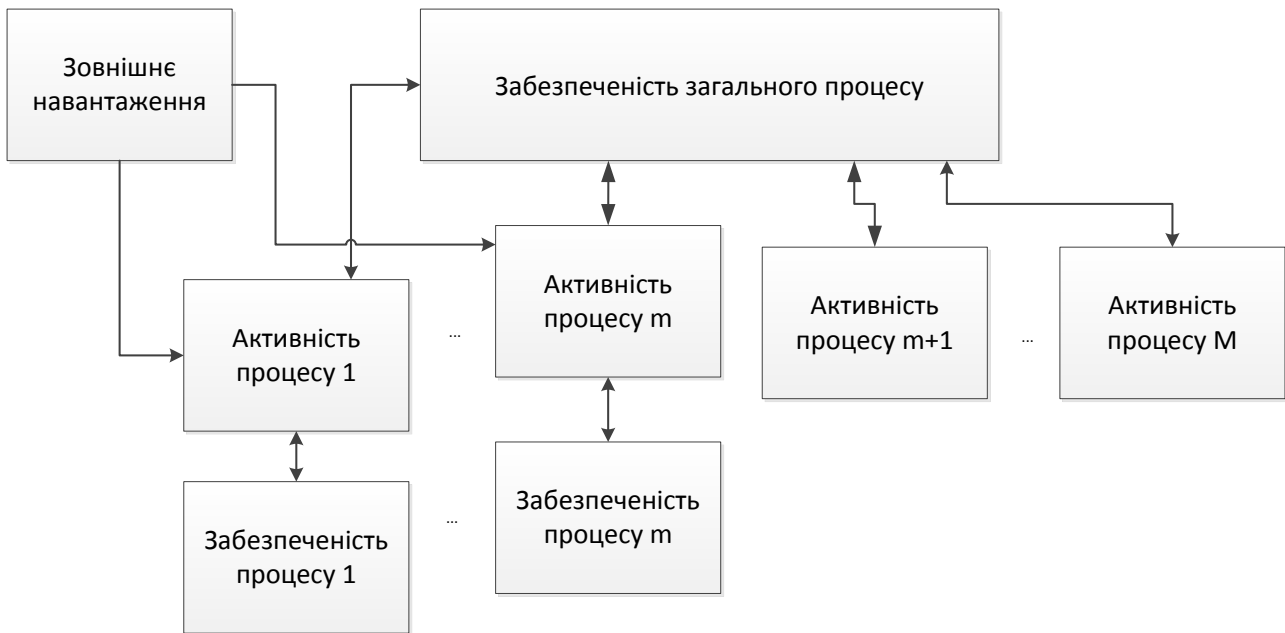


Рис. 5. Загальна структура моделей систем із лімітуючими факторами

Системи із зовнішнім лімітуючим фактором представляються моделлю, в якій розглядається лише вплив зовнішнього навантаження на характеристику активності системи. В інших системах лімітуючими факторами служать компоненти системи, тому вони отримали назву внутрішніх лімітуючих факторів.

В моделях забезпеченості  $S(t)$  загального процесу на неї впливає множина активностей  $M$  підпорядкованих процесів. Активності частини із цих процесів (їх кількість позначена через  $m$ ) міняються в залежності від власних рівнів забезпеченості. Останні не взаємодіють між собою і тому отримали назву відокремлених лімітуючих факторів. Активності інших  $M - m$  процесів представляються деякими параметризованими залежностями. Прикладом такої складної системи є модель динаміки глікемії хворих на цукровий діабет, яка містить сукупність різних підпорядкованих процесів, що взаємодіють із загальною забезпеченістю системи та можуть обмежуватися власними забезпеченостями [36, 37, 38].

Розглянемо узагальнену математичну модель систем із внутрішніми лімітуючими факторами, яка містить  $M$  підпорядкованих процесів, що впливають на динаміку її загальної забезпеченості  $S(t)$ . Взаємодія процесів із загальною забезпеченістю представляється за допомогою функції Моно,

частковим випадком якої є лінійна функція. Нехай  $t_{\max}^i$  – момент часу досягнення змінною активності  $i$ -го підпорядкованого процесу свого максимального значення,  $f_i$  – частка фінального рівня змінної активності  $i$ -го процесу відносно свого максимального рівня  $X_{i,\max}$ ,  $\vec{C}_j^i$  – вектор аргументів функції управління  $j$ -м параметром  $i$ -го процесу. При цих допущеннях згадана узагальнена модель набуває вигляду

$$\frac{d}{dt} S(t) = \sum_{i=1}^M p_{2i-1} M_1(p_{2i}, S(t)) X_i(t), \quad (53)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} X_i(t) = & \left( p_1^i M_2(p_5^i, S_i^X(t), P_i(t)) - p_2^i \right) X_i, \\ & \left( t < t_{\max}^i \right) \vee (X_i(t) > X_{i,f}), i = \overline{1, m}, \end{aligned} \quad (54)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} S_i^X(t) = & -p_3^i M_1(p_4^i, S_i^X(t)) X_i(t), \\ & \left( t < t_{\max}^i \right) \vee (X_i(t) > X_{i,f}), i = \overline{1, m}, \end{aligned} \quad (55)$$

$$\frac{d}{dt} X_i(t) = 0, \left( t > t_{\max}^i \right) \wedge (X_i(t) < X_{i,f}), i = \overline{1, m}, \quad (56)$$

$$\frac{d}{dt} S_i(t) = 0, \left( t > t_{\max}^i \right) \wedge (X_i(t) < X_{i,f}), i = \overline{1, m}, \quad (57)$$

$$\frac{d}{dt} P_i(t) = -p_6^i \frac{d}{dt} S_i(t), i = \overline{1, m}, \quad (58)$$

$$X_i(0) = X_{i,0}, S(0) = S_0, S_i^X(0) = S_{i,0}^X,$$

$$X_{i,f} = f_i X_{i,\max}, X(t_{\max}^i) = X_{i,\max}, \quad (59)$$

$$p_j^i = H_6[\vec{C}_j^i, T(t)]. \quad (60)$$

В моделі передбачено ефект стабілізації змінних стану, коли концентрація активного середовища стає нижчою певного критичного рівня  $X_{i,f}$  після досягнення цією змінною свого максимального значення,

преставлено динаміку продукту системи а також передбачено можливість управління параметрами моделі.

Попередня модель (47)–(52) подає динаміку підпорядкованих процесів поданої моделі і тому є її частковим випадком. Тому модель (53)–(60) вважаємо узагальненою моделлю систем із внутрішніми лімітуючими факторами. В даній моделі не враховано дію зовнішнього фактора. Відповідне узагальнення буде реалізовано нижче.

Після формування загального подання моделі системи із внутрішніми лімітуючими факторами виникає задача розроблення єдиного методу її ідентифікації. При побудові загального методу ідентифікації цієї моделі необхідно врахувати великий рівень невизначеності, який може бути в ній присутній у випадку спостереження лише за загальною забезпеченістю моделі. Такий метод достатньо важко побудувати безпосередньо, тому в першу чергу розглянемо методи ідентифікації простіших моделей, які дозволять підготувати побудову методу ідентифікації узагальненої моделі систем із внутрішніми лімітуючими факторами.

## **2. Дослідження впливу параметрів моделей зростання та редукції активності процесів під дією лімітуючого фактора на характеристики системи**

В результаті попередньо проведеного аналізу побудовано узагальнену модель для процесів з відокремленими лімітуючими факторами. Корисність моделі визначається наявністю методів підбору її параметрів. Для побудови ефективних методів ідентифікації доцільно дослідити властивості розглянутих моделей. З метою детального дослідження виберемо найпростішу модель із сімейства запропонованих, яка міститиме ключові особливості складніших варіантів. Тому розглянемо модель (25)–(27), яка описує динаміку зростання та редукції активності процесів.

Із подання системи видно, що вона при фіксації параметру  $p_4$  перетворюється в лінійну. Тоді початкові значення параметрів системи можна

визначати, застосувавши різницеву апроксимацію системи диференціальних рівнянь. З метою побудови ефективного методу ідентифікації моделі дослідимо вплив зміни значень її параметрів на поведінку модельованих величин. Покладаємо наступні значення параметрів моделі

$$X_0 = 0.1; S_0 = 10, p_1 = 4; p_2 = 0.5; p_3 = 0.5; p_4 = 5,$$

які імітують деякий типовий процес із лімітуючим фактором. Надалі будемо проводити зміни окремих параметрів та аналізувати отримані ефекти.

### 2.1. Вплив початкових значень змінної активного середовища.

В першу чергу дослідимо вплив початкової концентрації змінної активного середовища на значення системних змінних, тобто ефект збільшення початкового значення  $X_0$  змінної активності системи  $X$  відносно базового рівня. Із другого рівняння системи (25)–(27) випливає, що збільшення значення  $X_0$  спричинить збільшення значення змінної  $X(t)$  в околі точки  $t_0$ , призводячи до росту чисельника в правій частині диференціального рівняння

$$-p_3 M_1(p_4, S(t)) X(t) = \frac{-p_3 S(t) X(t)}{p_4 + S(t)}, \quad (61)$$

а значить до збільшення значення абсолютної величини похідної  $\frac{dS(t)}{dt}$ . Це в свою чергу, при незмінному початковому рівні забезпеченості процесу  $S_0$ , призведе до швидшого його вичерпання. Графік динаміки змінної забезпеченості процесу наводиться на рис. 6.

Сама функція субстрату міняє характер випуклості із випуклої вгору до випуклої вниз. Точка перегину відповідає половині спожитого рівня забезпеченості та із ростом  $X_0$  час її досягнення зменшується. З аналізу рисунку випливає, що через деякий період часу після нелінійного спадання переходить до майже лінійного закону і вже при суттєвому зниженні забезпеченості знову стає нелінійним.

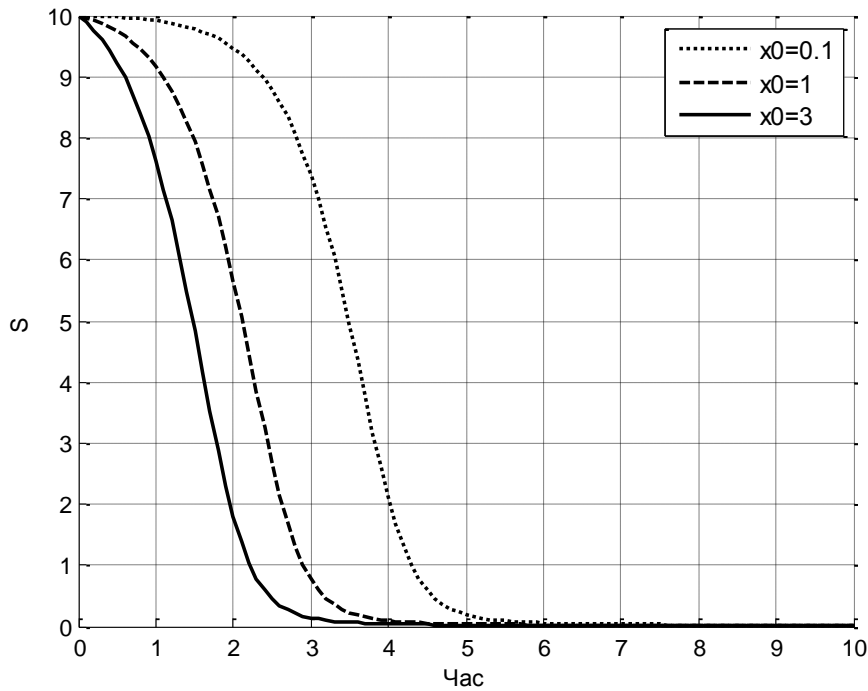


Рис. 6. Динаміка змінної забезпеченості моделі (25)–(27) при змінах значень параметру  $X_0$

Перейдемо до аналізу динаміки змінної  $X(t)$ . Із першого рівняння системи (25)–(27) випливає, що ріст значення  $X(t)$ , який відповідає додатності похідної  $\frac{dX(t)}{dt}$ , досягається при виконанні умови

$$p_1 M_1(p_4, S(t)) - p_2 = \frac{p_1 S(t)}{p_4 + S(t)} - p_2 > 0. \quad (62)$$

Це означає, що при достатньо великих значеннях параметру  $p_2$  змінна активності  $X(t)$  буде тільки спадати. Якщо ж значення  $p_2$  відносно невелике, то умова (62) виконується на початковій стадії процесу. Однак, оскільки  $S(t)$  з часом прямує до нуля, то умова (62) обов'язково порушиться і змінна активності  $X(t)$  отримає стадію спадання. Оскільки із ростом  $X_0$  швидкість спадання  $S(t)$  посилюється, то і точка максимуму змінної  $X(t)$  буде досягатися швидше. До того ж оскільки зростання  $X(t)$  починається із різних рівнів  $X_0$ , то і максимальне значення змінної  $X(t)$  при зростанні  $X_0$  повинно зростати. Графік динаміки змінної активності системи наводиться на рисунку 7. Аналіз

рисунка 7 підтверджує справедливність проведеного аналізу. Окрім того на рисунку можна виділити ділянки лінійного росту та спадання змінної  $X(t)$ .

В наступному експерименті, результати якого ілюструє рис. 8, дослідимо вплив початкової концентрації субстрату на значення системних змінних, зокрема ефект зменшення початкового значення субстрату відносно базового рівня.

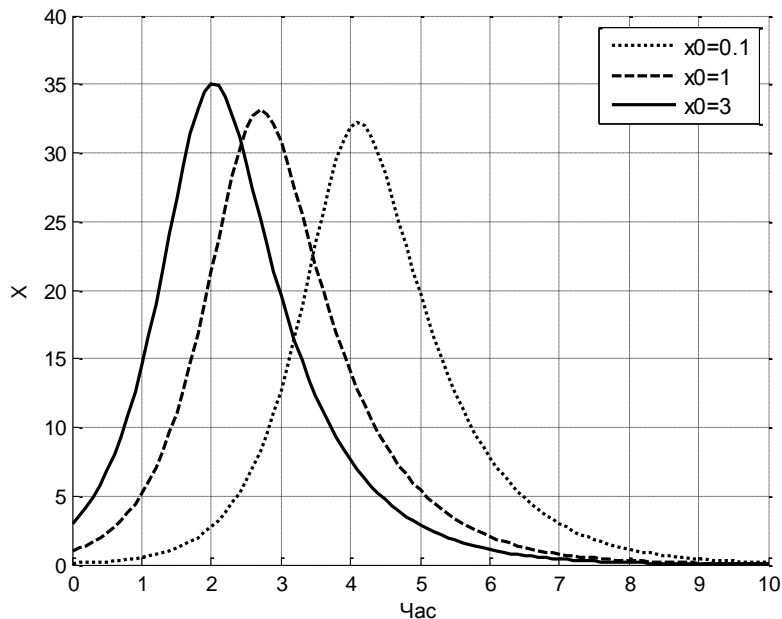


Рис. 7. Динаміка змінної активності моделі процесів зростання та редукції активності системи (25)–(27) при зміні значень параметру  $X_0$

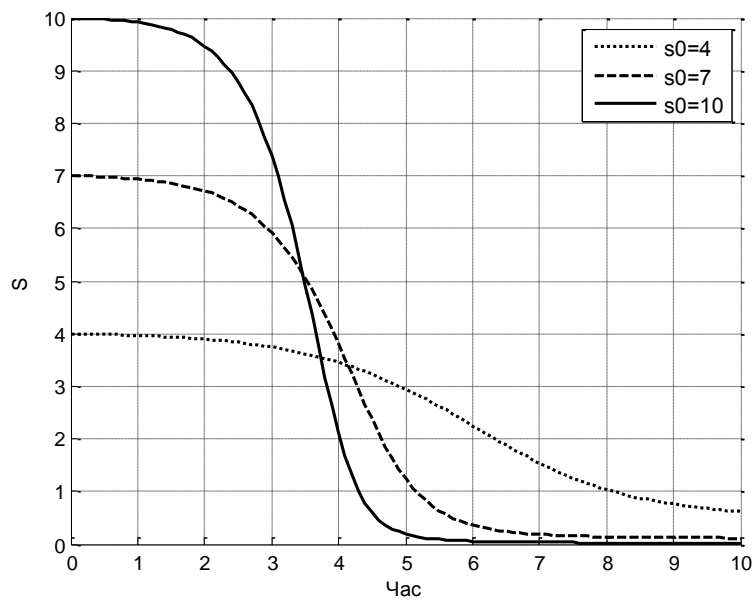


Рис. 8. Динаміка змінної забезпеченості системи моделі (25)–(27) при зміні значень параметру  $S_0$

Із подання (61) правої частини другого диференціального рівняння моделі (25)–(27) випливає, що із зменшенням значення  $S(t)$  зменшується і швидкість його спадання, а значить зростає і час вичерпання початкового запасу забезпеченості системи. Швидке убуття забезпеченості системи  $S(t)$  та його велика початкова концентрація  $S_0$  спричиняють швидший ріст значень функції активності системи  $X(t)$ . Згідно умови (62) це викликає швидше досягнення змінною активності системи свого максимального значення. Окрім того, більша початкова концентрація забезпеченості дозволяє генерувати більші значення змінної активності системи. Графіки динаміки змінної активності системи наводяться на рис. 9. Вони підтверджують проведений аналіз.

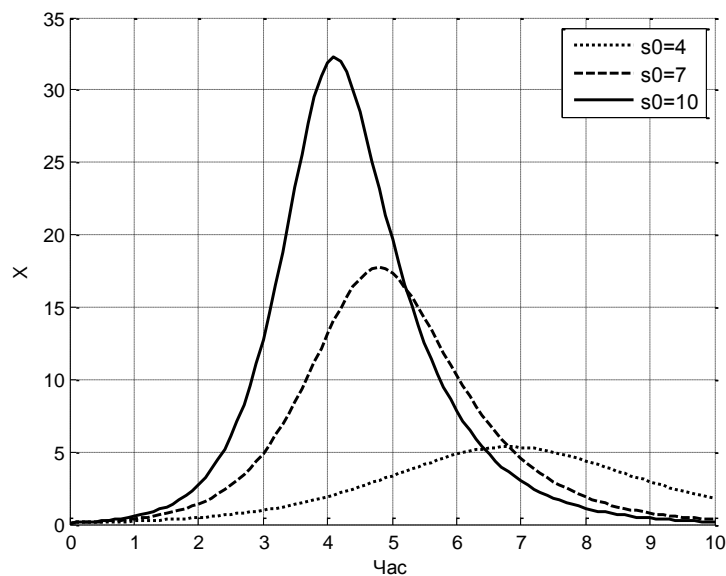


Рис. 9. Динаміка змінної активності середовища моделі процесів із внутрішнім лімітуючим фактором (25) при зміні значень параметру  $S_0$

## 2.2. Вплив параметрів динаміки змінної активності системи

Перейдемо до аналізу впливу окремих параметрів моделі на поведінку її змінних. Перш за все проаналізуємо вплив параметру  $p_1$  на динаміку змінних моделі. З подання першого доданку

$$p_1 M_1(p_4, S(t)) X(t) = p_1 \frac{S(t)}{p_4 + S(t)} X(t) \quad (63)$$

правої частини першого диференціального рівняння моделі (25)–(27) впливає, що ріст параметра  $p_1$  на пряму збільшує швидкість росту змінної активності системи  $X(t)$ . Окрім того збільшення параметра  $p_1$  дозволяє на кожну одиницю змінної забезпеченості отримувати більший ріст змінної активності. Тому при збільшенні  $p_1$  максимум активності  $X(t)$  досягається швидше і сам цей максимум стає більшим. Графіки на рис. 10 підтверджують цей аналіз.

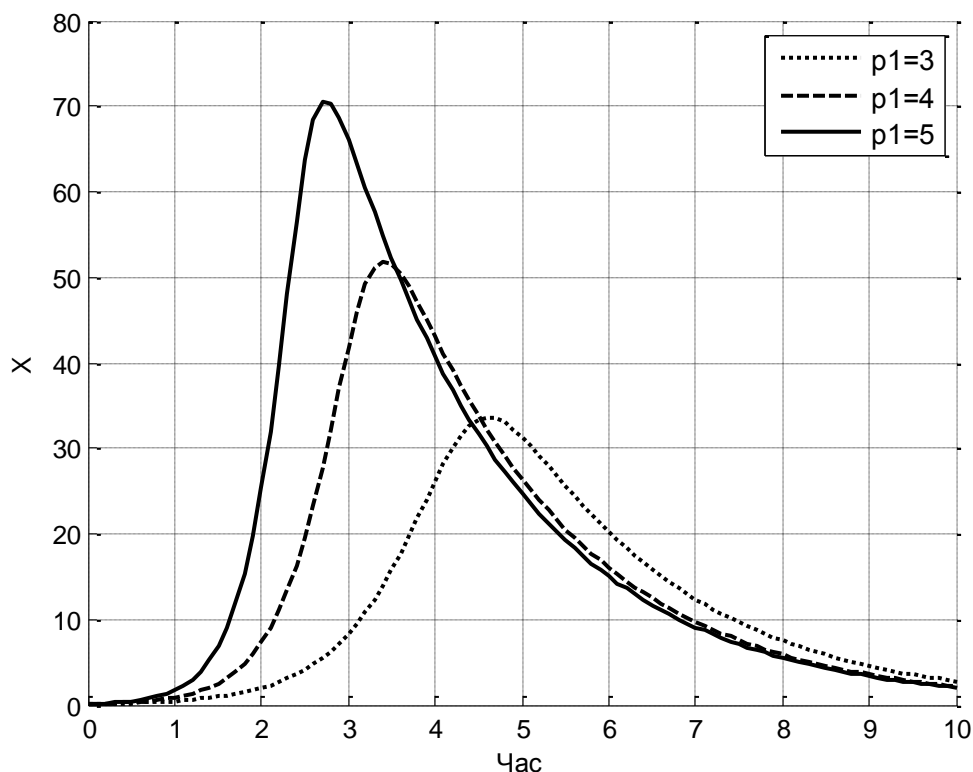


Рис. 10. Динаміка змінної активності системи моделі (25)–(27) при зміні значень параметру  $p_1$

Ріст параметру  $p_1$ , викликаючи прискорення росту змінної  $X(t)$ , як видно із виразу (46), приведе до прискорення редукції забезпеченості системи  $S(t)$ . Аналіз графіків на рис. 11 підтверджують даний висновок. На наступному етапі проаналізуємо вплив параметра  $p_2$  на модель. Параметр  $p_2$  безпосередньо входить в перше диференціальне рівняння в складі другого доданка правої частини виду



$$-p_2 X(t). \quad (64)$$

Отже коефіцієнт  $p_2$  представляє відносний рівень редукції змінної  $X(t)$ .

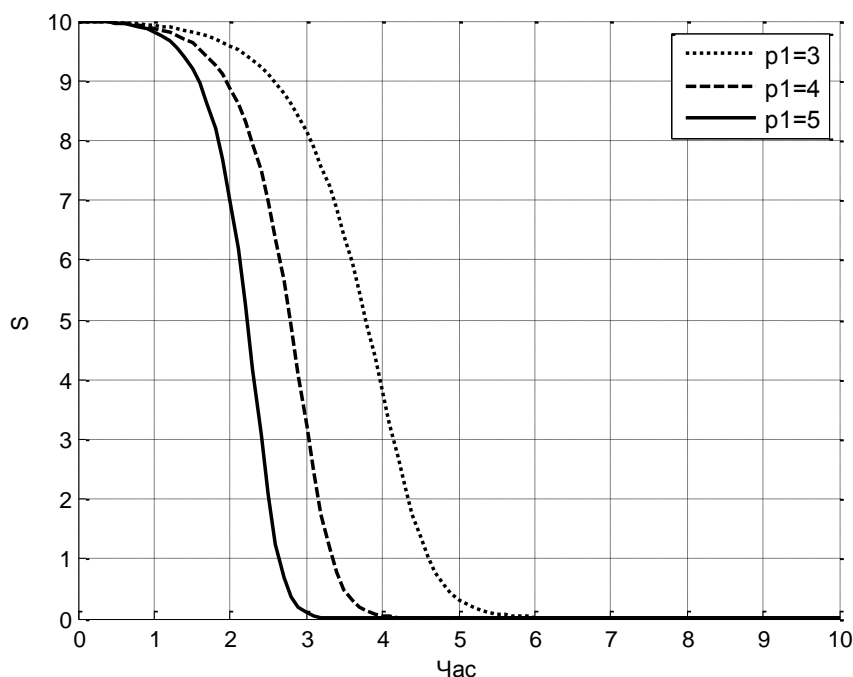


Рис. 11. Динаміка змінної забезпеченості (25)–(27) при зміні значень параметру  $p_1$

Нульове значення коефіцієнта свідчить про неможливість нівелювання значень аналізованої змінної. Ріст значень цього параметра призведе до сповільнення росту значень змінної  $X(t)$ , а на часовому проміжку, де умова (62) порушується, значення змінної  $X(t)$  будуть зменшуватися з більшою швидкістю. Це призводить до збільшення часу досягнення максимуму змінної  $X(t)$ , а також до зниження рівня самого максимуму. Графіки, наведені на рис. 12 ілюструють справедливості наведених міркувань.

Безпосередньо впливаючи на значення змінної  $X(t)$  зміна значень параметра  $p_2$  опосередковано впливає на значення забезпеченості системи  $S(t)$ . Це відбувається за рахунок присутності змінної забезпеченості в правій частині другого диференціального рівняння моделі (25)–(27), як це подано у  $S(t)$  виразі (61). Тому всяке зменшення значень змінної  $X(t)$  призводить до сповільнення вичерпання забезпеченості  $S(t)$ .

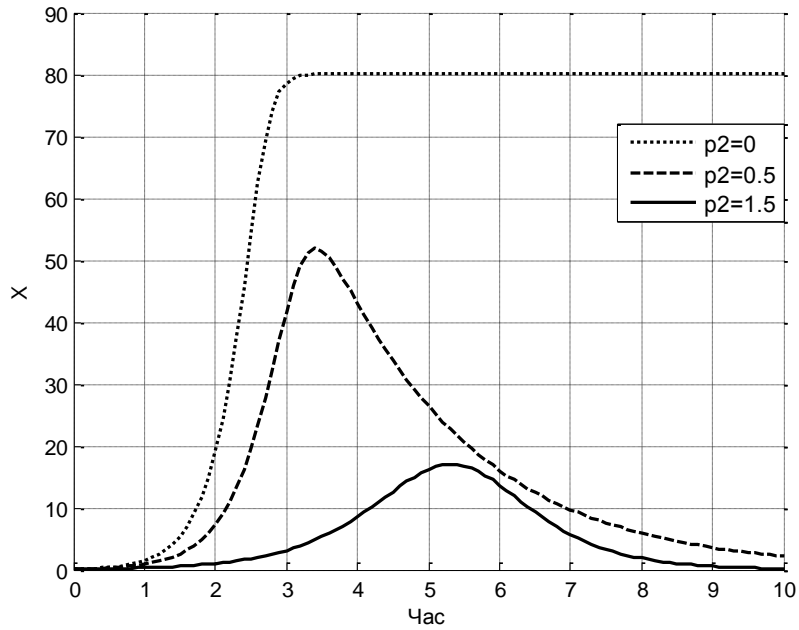


Рис. 12. Динаміка змінної активності системи моделі (25)–(27) при зміні значень параметру  $p_2$

Найстрімкіше зменшення забезпеченості системи відбувається при відсутності редукції змінної  $X(t)$ , тобто коли параметр  $p_2$  отримає значення нуля. Справедливість проведеного аналізу підтверджують графіки на рис. 13.

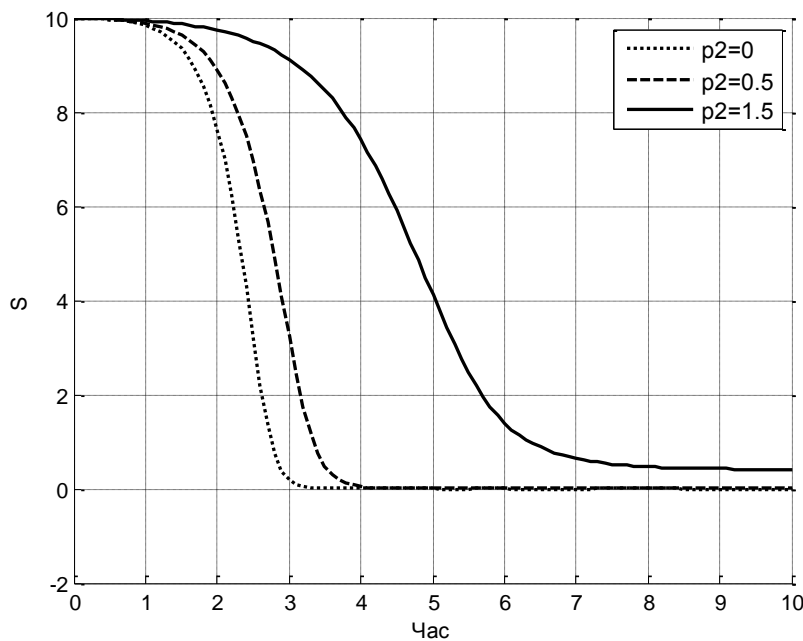


Рис. 13. Динаміка забезпеченості моделі (25)–(27) при зміні значень параметру  $p_2$

### 2.3. Вплив параметра динаміки змінної забезпеченості

Проаналізуємо вплив на модель змін параметра  $p_3$ . Цей параметр безпосередньо входить в друге диференціальне рівняння як множник в його правій частині, що наочно демонструє вираз (61). Коефіцієнт  $p_3$  представляє відносний рівень редукції змінної  $S(t)$ . Збільшення його значень призведе до прискореного витрачання забезпеченості, що наочно демонструють графіки, подані на рис. 14.

Зміна значень параметра  $p_3$  опосередковано впливає на змінну  $X(t)$ . Ріст значень  $p_3$  означає більші затрати забезпеченості на ріст значень  $X(t)$ . Тому із ростом  $p_3$  максимальне значення змінної  $X(t)$  зменшується. Крім того швидше вичерпування забезпеченості призводить до швидшого досягнення точки максимуму змінної  $X(t)$ .

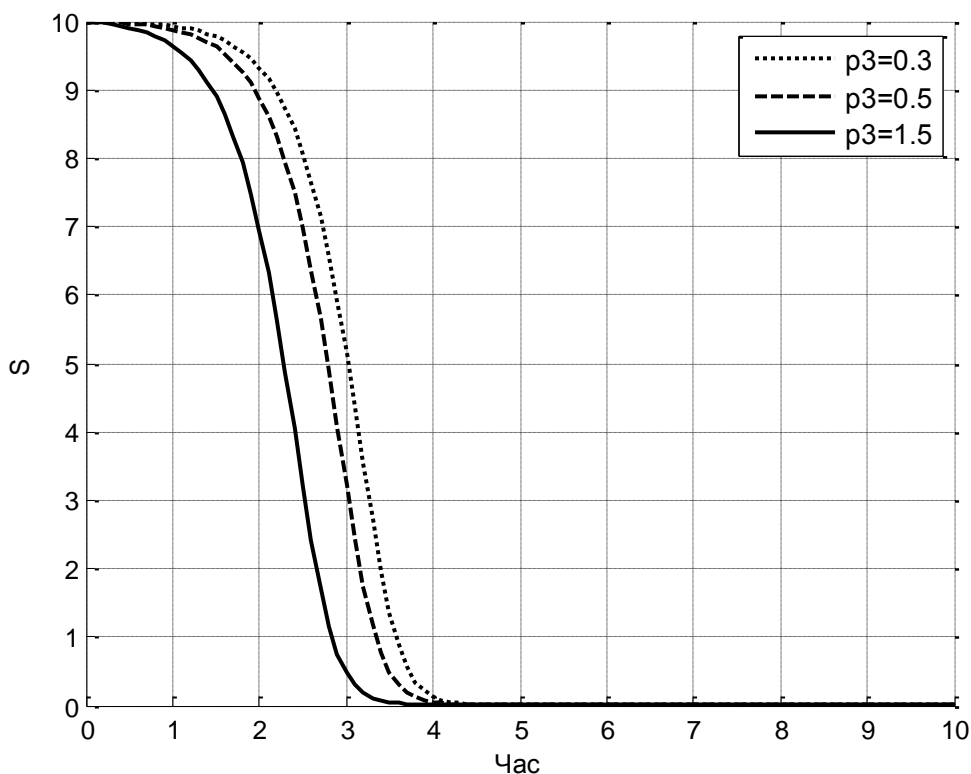


Рис. 14. Динаміка змінної забезпеченості моделі процесів із внутрішнім лімітуючим фактором (25)–(27) при зміні значень параметра  $p_3$

На момент досягнення точки максимуму змінної  $X(t)$  значення забезпеченості  $S(t)$  майже вичерпується. Тому надалі швидкість зменшення

$X(t)$ , при незмінному значенні параметру  $p_2$ , згідно виразу (64) найбільше залежить від значення самої змінної  $X(t)$ . Зміна значень параметра  $p_3$  опосередковано впливає на змінну  $X(t)$ . Ріст значень  $p_3$  означає більші затрати субстрату на ріст значень  $X(t)$ . Тому із ростом  $p_3$  максимальне значення змінної  $X(t)$  зменшується.

Справедливість проведеного аналізу підтверджують графіки, наведені на рисунку.

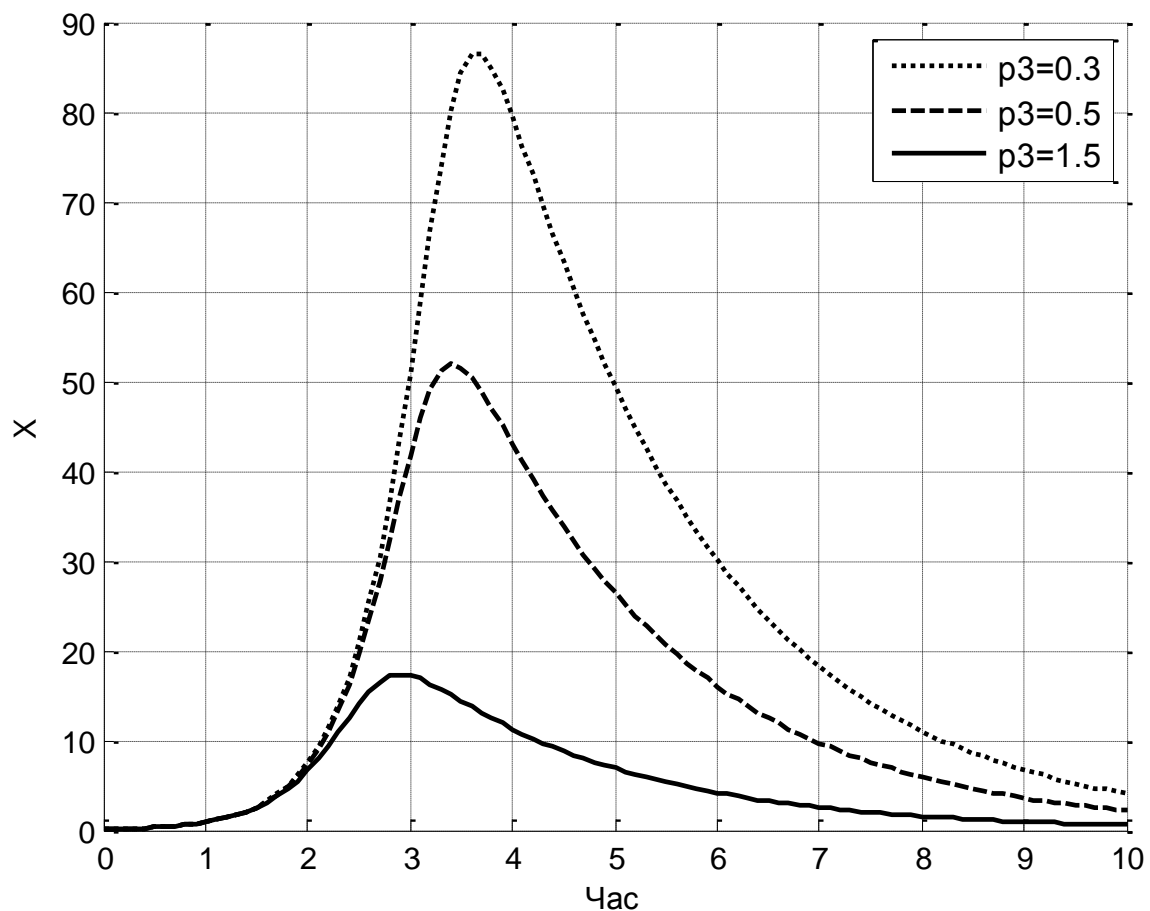


Рис. 15. Динаміка змінної активності моделі процесів із внутрішнім лімітуючим фактором (25)–(27) при зміні значень параметру  $p_3$

#### 2.4. Вплив лімітуючого параметра

На наступному етапі проаналізуємо вплив на модель змін параметра  $p_4$ . Цей параметр входить як в перше, так і в друге диференціальне рівняння моделі (25)–(27). Даний параметр входить в знаменник виразів для правих частин. Тому його збільшення призводить до зменшення темпів зміни величин  $S(t)$  та

$X(t)$ . Таку тенденцію для змінної  $S(t)$  демонструють графіки на рисунку 16. Зменшення темпів росту змінної  $X(t)$  могло б компенсуватися зменшенням темпів падіння забезпеченості  $S(t)$ . Однак, оскільки в досліджуваних класах моделей значення параметра  $p_1$  суттєво перевищує значення параметру  $p_3$ , то домінуючою виявляється тенденція на зменшення росту  $X(t)$  при збільшенні значень параметра  $p_4$  (див. рис. 17). Таким чином, досліджено вплив параметрів моделі на динаміку її змінних. Виявлено важливі закономірності такого впливу.

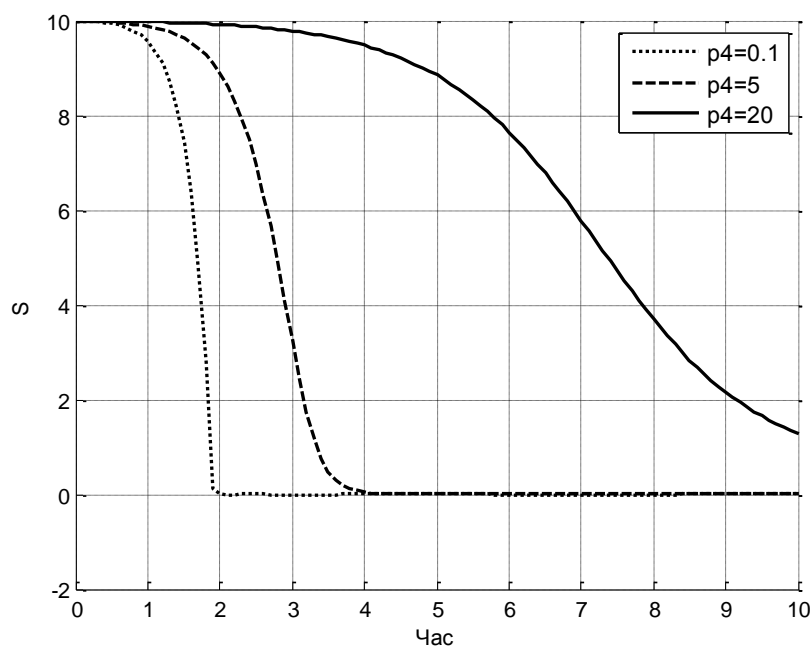


Рис. 16. Динаміка змінної забезпеченості моделі процесів із внутрішнім лімітуючим фактором (25)–(27) при зміні значень параметра  $p_4$

Однак цей аналіз показав, що існує багато можливостей досягати одних і тих же ефектів різними комбінаціями параметрів. При наявності обмеженої кількості спостережень для ідентифікації параметрів моделі це може приводити до неєдиності розв'язку. Розв'язати таку невизначеність можна за допомогою побудови методу, який забезпечує задовільну точність наближення спостережених значень. Якщо в процесі експлуатації ідентифікованої моделі виявляться значні відхилення прогнозованих значень від спостережених,

отримані дані поєднуємо із початковими та проводимо ідентифікацію, яка забезпечить побудову адекватнішої моделі.

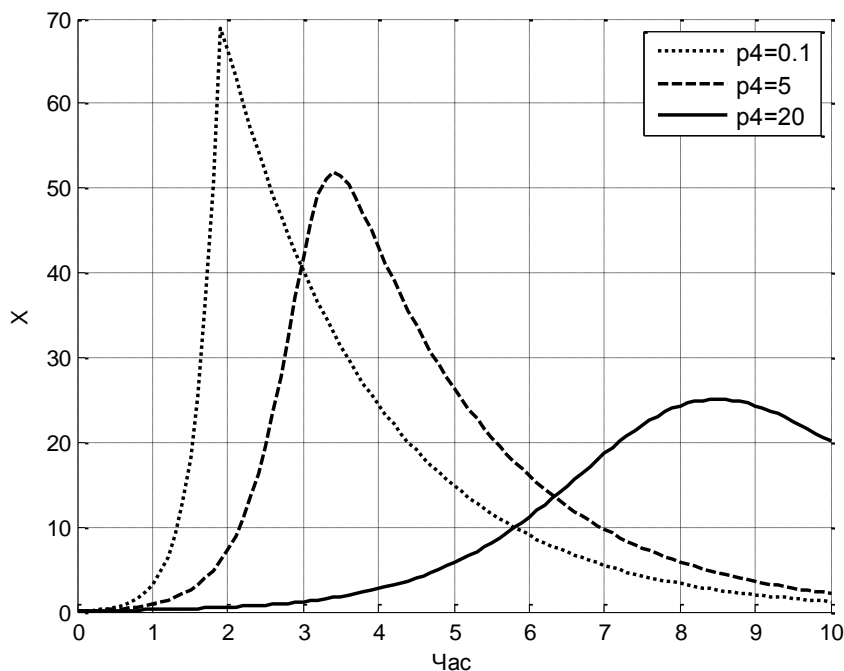


Рис. 17. Динаміка змінної активності моделі (25)–(27) при зміні значень параметру  $p_4$

Проведений аналіз дозволяє розробляти метод ідентифікації систем із внутрішнім лімітуючим фактором.

### **3. Метод ідентифікації моделі зростання та редукції активності процесів під дією лімітуючого фактора**

Загальна модель системи з лімітуючими факторами може включати більше десятка диференціальних рівнянь. Задача параметричної ідентифікації такої системи стає надзвичайно складною. З метою її спрощення запропоновано процедуру поетапної ідентифікації, яка дозволяє на окремих етапах ідентифікувати параметри, що стосуються не більше п'яти змінних моделі, що суттєво спрощує параметричну ідентифікацію цих окремих допоміжних моделей.

Задача параметричної ідентифікації моделі полягає у встановленні значень її параметрів за спостереженнями значень змінних. Додаткове ускладнення задачі ідентифікації полягає у спостереженні значень лише

окремих змінних, які присутні в моделі. З метою спрощення наступного викладу метод ідентифікації буде поступово ускладнюватися від випадку наявності спостережень всіх змінних для моделі із двома змінними, до випадку спостережуваності лише однієї змінної моделі, яка містить п'ять змінних. Побудова останнього із перерахованих методів ідентифікації за допомогою поетапної процедури дозволить здійснювати повну ідентифікацію описаної загальної моделі із внутрішніми лімітуючими факторами.

### **3.1. Концепція методу ідентифікації моделі процесів з внутрішнім лімітуючим фактором**

Задача параметричної ідентифікації моделі що включає дві невідомих змінних  $X(t)$  та  $S(t)$  полягає у встановленні значень її параметрів за спостереженнями значень  $\{t_j^e, S_j^e, X_j^e\}_{j=1}^N$  змінних часу  $t$  спостереження, забезпеченості  $S(t)$  та активності  $X(t)$  процесів системи. Оскільки змінним моделі не властиві різкі випадкові коливання, для оцінки якості ідентифікації виберемо середньоквадратичний критерій:

$$Q_1(\bar{p}) = \sum_{j=1}^N \{(\tilde{S}(t_j, \bar{p}) - S_j^e)^2 + (\tilde{X}(t_j, \bar{p}) - X_j^e)^2\}. \quad (65)$$

При кожному наборі значень  $\bar{p}$  параметрів моделі для побудови значень змінних забезпеченості  $\tilde{S}(t_j, \bar{p})$  та активності  $\tilde{X}(t_j, \bar{p})$  системи необхідно розв'язати систему нелінійних диференціальних рівнянь (25)–(27). Зворотня задача параметричної ідентифікації полягає у підборі значень параметрів моделі, при яких вона найкраще наближає задані експериментальні значення. Універсальним методом розв'язання таких задач є метод напрямного конуса Растрігіна, однак він вимагає надто громіздких обчислень, обслідування численних локальних екстремумів функціоналу якості ідентифікації по кожному параметру моделі.

Якщо в моделі є один-два параметри, які радикально впливають на її характеристики логічно допустити, що обсяги обчислень можна значно

зменшити, сконцентрувавши зусилля саме на аналізі впливу цих параметрів з метою підбору їхніх значень близьких до оптимальних. В цій області значень близьких до оптимальних здійснюємо випадковий пошук лише за основними змінними, а за іншими – градієнтний пошук. Таким чином досягається значна економія обчислювальних ресурсів.

Застосуємо описаний підхід до ідентифікації моделі динаміки активного середовища та субстрату (25)–(27). Дослідження впливу параметрів на поведінку моделі виявили єдиного претендента на роль лімітуючого параметра – а саме параметр  $p_4$ . Такий вибір обумовлений тим, що параметр входить нелінійно у всі диференціальні рівняння моделі, а його зміни радикально міняють характер модельованих змінних. Ця радикальність забезпечує унімодальність поведінки функціоналу якості ідентифікації моделі на деякій сітці значень параметрів моделі. Основу сітки складає множина значень лімітуючого параметра, що значно відрізняються між собою.

Складність побудови початкового значення лімітуючого параметра моделі полягає в тому, що він може мінятися в достатньо широкому діапазоні. Однак як неважко бачити, похідна від функцій Моно (2)–(3) по лімітуючому параметру  $m$  від’ємна і спадна за абсолютною величиною

$$\frac{d}{dm}M_1(m, S(t)) = -\frac{S(t)}{(m + S(t))^2}, \quad \frac{d}{dm}M_2(m, P(t), S(t)) = -\frac{S(t)}{(m + P(t))^2}. \quad (66)$$

Це свідчить про зменшення впливу лімітуючого параметра при зростанні його значень і про доцільність застосування різних кроків при побудові сітки для підбору найкращих значень лімітуючого параметра. Тобто при зростанні значень лімітуючого параметра крок зміни значень на сітці повинен зростати. В якості простого подання такого зростання використано геометричну прогресію виду

$$P_{4,j}^0 \in \left\{ \frac{B}{2} \cdot B^j \cdot S_0 \right\}. \quad (67)$$

Значення параметру  $B$  вибирається експериментально, з метою забезпечення достатнього зміщення максимуму активності процесу при



переміщенні значень лімітуючого параметра по вузлах сітки (67). Інші параметри моделі визначаються на основі вибраного значення лімітуючого параметра та наближеного різницевого подання диференціальних рівнянь моделі для окремих значень часового аргументу. Точка мінімуму цієї унімодальної функції визначає область пошуку параметрів ідентифікованої моделі.

В цій області мінімізація функціоналу якості визначається не лише змінами лімітуючого параметра, а взаємовпливом всіх параметрів. Тому область пошуку значень лімітуючого параметра покривається рівномірною сіткою. Для кожного значення лімітуючого параметра на основі різницевих співвідношень добудовуються значення інших параметрів. Побудовані значення уточнюються за допомогою модифікованого градієнтного методу. Серед уточнених значень параметрів вибираємо те, яке мінімізує максимальну відносну похибку модельованих значень відносно спостережених.

### **3.2. Основні співвідношення методу ідентифікації моделі процесів з внутрішнім лімітуючим фактором**

Перше диференціальне рівняння системи (25)–(27) містить окрім параметра  $p_4$ , який ми вважаємо відомим, параметри  $p_1$  та  $p_2$ , значення яких необхідно встановити. Для встановлення двох невідомих параметрів необхідно як мінімум два співвідношення. Щоб повніше врахувати особливості динаміки змінної  $X(t)$  ці співвідношення краще будувати в безпосередній близькості до та після точки максимуму змінної  $X(t)$ . Оскільки диференціальне рівняння включає похідну, для побудови одного різницевого співвідношення потрібні спостереження хоча б у двох точках. Для побудови двох пропонованих співвідношень достатньо використати спостереження у трьох точках: в точці максимуму, в попередній та наступній точках, оскільки спостереження у середній точці використовується у двох співвідношеннях. Формалізуємо наведені міркування з метою побудови двох різницевих співвідношень для оцінки значень параметрів  $p_1$  та  $p_2$ .

На основі спостережень за змінною  $X(t)$  побудуємо оцінку  $X^*$  її максимального значення та часу  $t^*$  його досягнення. З цією метою встановимо номер  $J$  моменту спостереження максимального значення змінної активного середовища

$$J = \arg \max_j (X_j^e). \quad (68)$$

На основі встановленого номера визначаємо максимальне спостережене значення  $X^*$  змінної активного середовища, час  $t^*$  його досягнення та концентрацію субстрату  $S^*$ , яке ці значення супроводжує

$$t^* = t_J^e, \quad (69)$$

$$X^* = X_J^e, \quad (70)$$

$$S^* = S_J^e. \quad (71)$$

За допомогою різницевих апроксимацій побудуємо оцінки похідних функції активного середовища в точках, що прилягають до точки досягнення максимуму зліва та справа

$$D_{X, J-1/2} = (X_J^e - X_{J-1}^e)/(t_J^e - t_{J-1}^e), \quad (72)$$

$$D_{X, J+1/2} = (X_{J+1}^e - X_J^e)/(t_{J+1}^e - t_J^e). \quad (73)$$

За допомогою операції усереднення оцінимо значення змінних активного середовища та субстрату в точках оцінки значення похідних

$$X_{J-1/2} = \frac{X_J^e + X_{J-1}^e}{2}, \quad (74)$$

$$X_{J+1/2} = \frac{X_{J+1}^e + X_J^e}{2}, \quad (75)$$

$$S_{J-1/2} = \frac{S_J^e + S_{J-1}^e}{2}, \quad (76)$$

$$S_{J+1/2} = \frac{S_{J+1}^e + S_J^e}{2}. \quad (77)$$

На основі встановлених значень побудуємо наближення першого диференціального рівняння моделі (25)–(27) в точках, що розташовані зліва та справа від точки досягнення максимуму функції активного середовища

$$D_{X, J-1/2} \approx \left( p_1 \frac{S_{J-1/2}}{p_4 + S_{J-1/2}} - p_2 \right) X_{J-1/2}, \quad (78)$$

$$D_{X, J+1/2} \approx \left( p_1 \frac{S_{J+1/2}}{p_4 + S_{J+1/2}} - p_2 \right) X_{J+1/2}. \quad (79)$$

На основі співвідношень (78) та (79) побудуємо систему алгебраїчних рівнянь для оцінки двох перших значень параметрів моделі

$$A\vec{P}^2 = \vec{b}, \quad (80)$$

де

$$A = \begin{pmatrix} \frac{S_{J-1/2}}{p_4 + S_{J-1/2}} & -1 \\ \frac{S_{J+1/2}}{p_4 + S_{J+1/2}} & -1 \end{pmatrix}, \quad (81)$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} D_{X, J-1/2} \\ D_{X, J+1/2} \end{pmatrix}, \quad (82)$$

$$\vec{P}^2 = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}. \quad (83)$$

Перейдемо тепер до аналізу другого рівняння системи (25)–(27). Воно містить лише один невідомий параметр  $p_3$ . Тому побудувавши наближене подання рівняння в одній точці, можемо оцінити значення цього параметра. Для побудови виберемо точку досягнення максимального значення змінної активного середовища, в якій тенденція змінної субстрату близька до лінійної. Насамперед оцінимо похідну субстрату у вибраній точці за наступним співвідношенням:

$$D_{S, J} = (S_{J+1}^e - S_{J-1}^e) / (t_{J+1}^e - t_{J-1}^e). \quad (84)$$

Отримані значення дозволяють побудувати наближене подання другого диференціального рівняння в момент досягнення максимуму змінної активного середовища

$$D_{S, J} \approx -p_3 \frac{S_J^e}{p_4 + S_J^e} X_J^e. \quad (85)$$

На основі побудованого співвідношення будемо оцінку параметра моделі

$$p_3 \approx -\frac{p_4 + S_J}{S_J X_J} D_{S, J}. \quad (86)$$

Основа методу ідентифікації моделі внутрішнього лімітуючого фактора полягає у переборі значень параметру  $p_4$  на деякій рівномірній сітці  $w_4$ , по кожному значенню якого за допомогою встановлених різницевих співвідношень добуваються відповідні початкові значення інших параметрів моделі. Надалі всі початкові значення параметрів моделі уточнюються градієнтним методом за критерієм мінімуму функціоналу  $Q_1(\vec{p})$ , поданого співвідношенням (65).

Розглянемо детальніше процес побудови згаданої рівномірної сітки. На основі запропонованої прогресії (67) будемо нерівномірну сітку для вибору базової точки побудови наступної рівномірної сітки уточненого пошуку. Нерівномірну сітку, побудовану на основі геометричної прогресії, описуємо поданням

$$W_4(k_{\min}, k_{\max}) = \left\{ \frac{B}{2} \cdot B^j \cdot S_0 \right\}_{j=k_{\min}}^{k_{\max}}. \quad (87)$$

Побудову нерівномірної сітки розпочинаємо із точки, що асоціюється із половиною початкової концентрації субстрату,

$$W_4(k_{\min}^0, k_{\max}^0) = \left\{ P_{4, k_0}^0 \right\} \quad k_{\min}^0 = k_{\max}^0 = k_0 = -1, \quad (88)$$

оскільки таке значення лімітуючого параметру є задовільним початковим значенням для великої кількості практично важливих процесів.

Надалі здійснюємо поповнення нерівномірної сітки на основі зменшення та збільшення значення лімітуючих параметрів при умові, що відносне зменшення мінімального значення на розширеній сітці відносно мінімального значення попередньої конфігурації сітки, отримує відносне зменшення більше величини  $\delta_Q$ , значення якої встановлюється експериментально. Тобто при виконанні наступної умови

$$\frac{\min_{p_4 \in W_4(k_{\min}, k_0)} Q_1(p_4) - \min_{p_4 \in W_4(k_{\min} - 1, k_0)} Q_1(p_4)}{\min_{p_4 \in W_4(k_{\min}, k_0)} Q_1(p_4)} > \delta_Q \Rightarrow k_{\min} = k_{\min} - 1, \quad (89)$$

нижня межа порядків елементів геометричної прогресії, які формують сітку, зменшується на одиницю, а при виконанні умови

$$\frac{\min_{p_4 \in W_4(k_{\min}, k_{\max})} Q_1(p_4) - \min_{p_4 \in W_4(k_{\min}, k_{\max} + 1)} Q_1(p_4)}{\min_{p_4 \in W_4(k_{\min}, k_0)} Q_1(p_4)} > \delta_Q \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k_{\max} = k_{\max} + 1, \quad (90)$$

верхня межа порядків елементів геометричної прогресії збільшується на одиницю.

Після завершення процесу поповнення нерівномірної сітки, мінімальне значення функціоналу якості на ній вказує на базове значення лімітуючого параметра  $P_{4, k_{base}}$ :

$$P_{4, k_{base}} = \arg \min_{p_4 \in W_4(k_{\min}, k_{\max})} \{Q_1(p_4)\} \quad (91)$$

Вибране значення лімітуючого параметра визначає базову точку і крок для побудови множини точок з метою точнішого вибору початкових значень параметрів моделі. Ця множина задається за допомогою рівномірної сітки виду

$$P_{4, k_{base}, l} \in W_{4, k_{base}} \equiv \{B^{-k_{base}} l S_0 \}_{l=1}^{\lfloor B/3 \rfloor B}, \quad (92)$$

перше значення якої менше ніж значення базової точки (для базової точки  $l = \lfloor B/2 \rfloor$ ), а останнє значення наближається до вузла нерівномірної сітки, наступного після базового (для точки наступної після базової  $l = \lfloor B/2 \rfloor B$ ).

Кожне значення із сітки  $w_{4,k_{base}}$  присвоюється параметру  $p_4$ , за допомогою якого на основі встановлених різницевих співвідношень (80)–(86) будуються наближені оцінки інших параметрів моделі. Надалі вони уточнюються за допомогою модифікованого градієнтного методу Левенберга-Марквардта на основі критерію (65). Серед цих початкових значень параметрів моделі вибирається те, що забезпечує мінімум найменшої з максимальних відносних похибок на точках ідентифікації моделі

$$\min_l \delta_1^{k_{base},l} = \max_j \left\{ \frac{|\tilde{X}(t_j, \bar{p}^{k_{base},l}) - X_j^e|}{\max_j |\tilde{X}(t_j, \bar{p}^{k_{base},l})|}, \frac{|\tilde{S}(t_j, \bar{p}^{k_{base},l}) - S_j^e|}{\max_j |\tilde{S}(t_j, \bar{p}^{k_{base},l})|} \right\} \quad (93)$$

### 3.3. Експериментальне дослідження методу ідентифікації моделі процесів з внутрішнім лімітуючим фактором

Перевіримо ефективність запропонованого методу на розв'язанні модельної задачі, розв'язок якої відомий. В якості такої задачі виберемо модель виду (25)–(27) із наступними значеннями параметрів  $p_1 = 4$ ;  $p_2 = 1,5$ ;  $p_3 = 0,5$ ;  $p_4 = 5$ . Значення змінних для задачі ідентифікації наведені в табл. 2.1.

Таблица 2.1

Значення субстрату та змінної активного середовища модельної задачі

$T$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$S(t)$	10.0	9.9365	9.7350	9.1164	7.4180	4.1174	1.4026	0.6401	0.4695	0.4245	0.4115
$X(t)$	0.1	0.3218	1.0222	3.1297	8.5056	16.1703	13.6792	5.6556	1.8606	0.5751	0.1741

На першому етапі дослідження встановимо область пошуку параметрів ідентифікованої моделі. З цією метою побудуємо послідовність значень параметра  $p_{4,j}^0 \in \left\{ \frac{B}{2} \cdot B^j \cdot S_0 \mid j = \overline{-3,1} \right\}$ . Для кожного із значень сітки параметра  $p_4$  на основі встановлених різницевих співвідношень будемо множину значень параметрів моделі а також множину значень функціоналу якості ідентифікації. Як і передбачалося, залежність значень функціоналу якості від порядку елементів послідовності значень лімітуючого параметра представляє

унімодальну послідовність, графік якої подано на рис 18. На основі аналізу даної послідовності легко встановити, що мінімальному значенню функціоналу якості на побудованій сітці відповідає індекс  $j = -1$ . Графіки змінних моделі, що відповідають значенням сітки, наведені на рис. 19 і рис. 20.

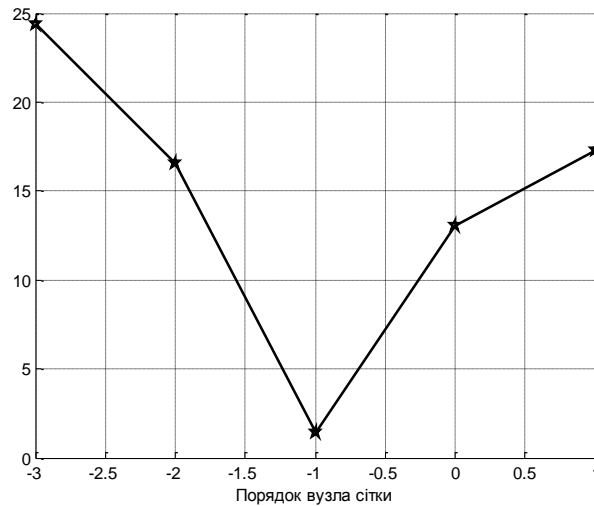


Рис. 18. Залежність значень функціоналу якості від порядку елементів послідовності значень лімітуючого параметра

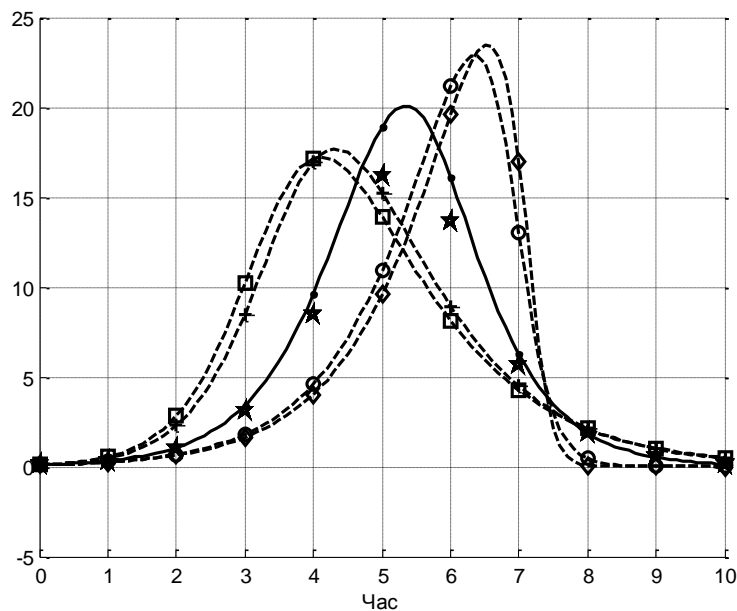


Рис. 19. Графіки змінної активного середовища, що відповідають порядкам побудови вузлів лімітуючого параметра:  $j=-3(\square)$ ,  $j=-2(+)$ ,  $j=-1(\bullet)$ ,  $j=0(\circ)$ ,  $j=1(\diamond)$ .

На основі оптимального індексу  $j = -1$  будуюмо сітку значень  $p_{4,i} \in w_4$ .

Наведена на рис. 21 функція максимальних похибок має унімодальний характер

із мінімальними значеннями із інтервалу  $p_4 \in [4;6]$ , де вона не перевищує рівень 20%.

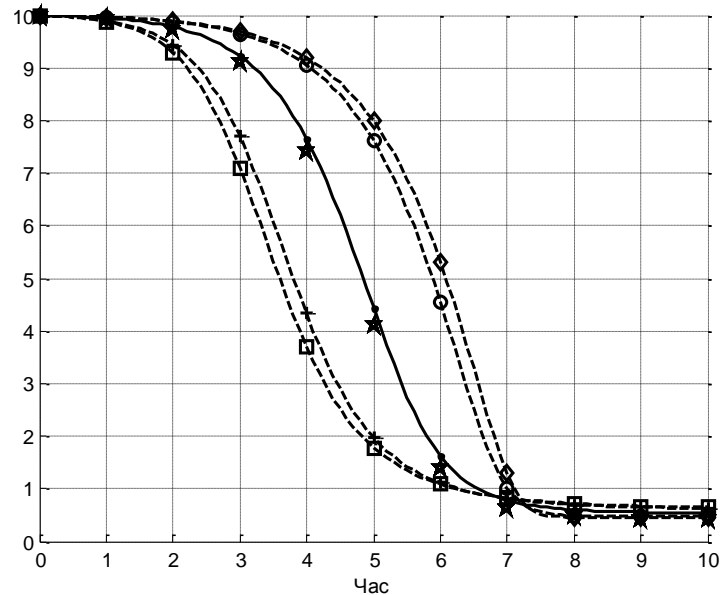


Рис. 20. Графіки змінної субстрату, що відповідають порядкам побудови вузлів лімітуючого параметра:  $j=-3(\square)$ ,  $j=-2(+)$ ,  $j=-1(\bullet)$ ,  $j=0(\circ)$ ,  $j=1(\diamond)$

Така проста залежність дозволяє легко підбирати область для вибору найкращих початкових значень параметру  $p_4$ . Однак початкові значення потребують уточнення, що дозволяє суттєво знизити похибку ідентифікованої моделі. Цей феномен демонструє графік максимальних відносних похибок уточнених наближень параметрів, поданий на рис. 22. Вдалося знизити максимальну відносну похибку до рівня 0,0005%, тобто практично до нуля, при набагато складнішій залежності таких похибок від початкового значення параметра  $p_4$ .

Мінімальна із аналізованих похибок досягається уже при початковому значенні  $p_4 = 5$ , однак достатньо низький рівень похибки досягається для значень  $p_4 = 6$  та  $p_4 = 13$ . Аналіз рис. 21 та рис. 22 показує, що похибка моделі на початкових значеннях параметрів ніяк не пов'язана із похибкою моделі на уточнених значеннях параметрів. Тому надалі будемо аналізувати лише похибки для уточнених значень параметрів моделі.



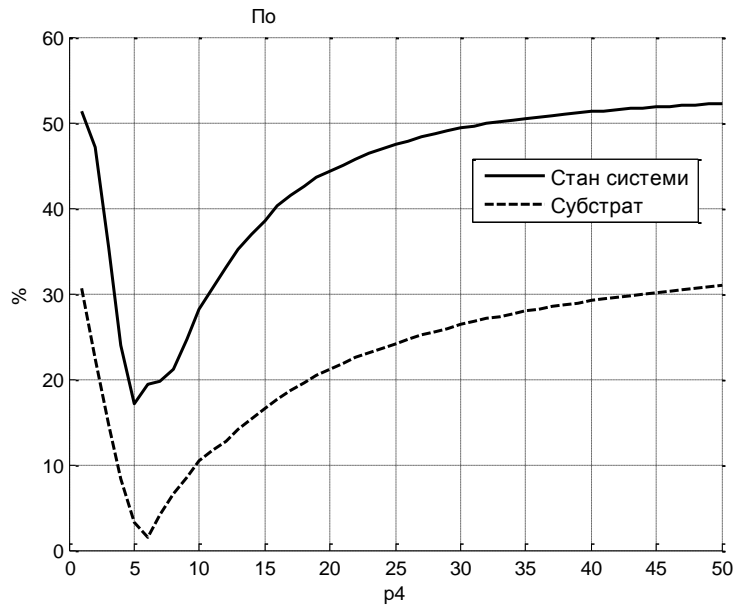


Рис. 21. Максимальні відносні похибки для початкових наближень параметрів моделі (25)–(27) при змінах значень параметра  $p_4$

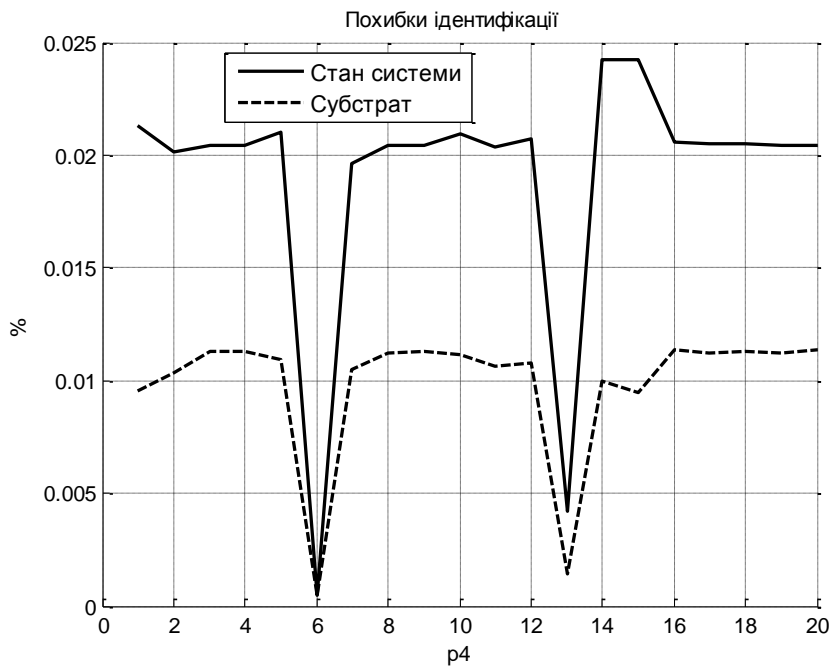


Рис. 22. Максимальні відносні похибки для уточнених наближень параметрів моделі при змінах значень параметра  $p_4$

Для даної задачі ідентифіковані значення коефіцієнтів склали  $p_1 = 4$ ;  $p_2 = 1,5$ ;  $p_3 = 0,5$ ;  $p_3 = 5$ ;  $p_4 = 5$ , що практично не відрізняються від заданих попередньо значень. Тому природно, що модельні та побудовані значення

змінних активного середовища системи практично співпадають. Відповідні графіки наведено на рис. 23 і рис. 24.

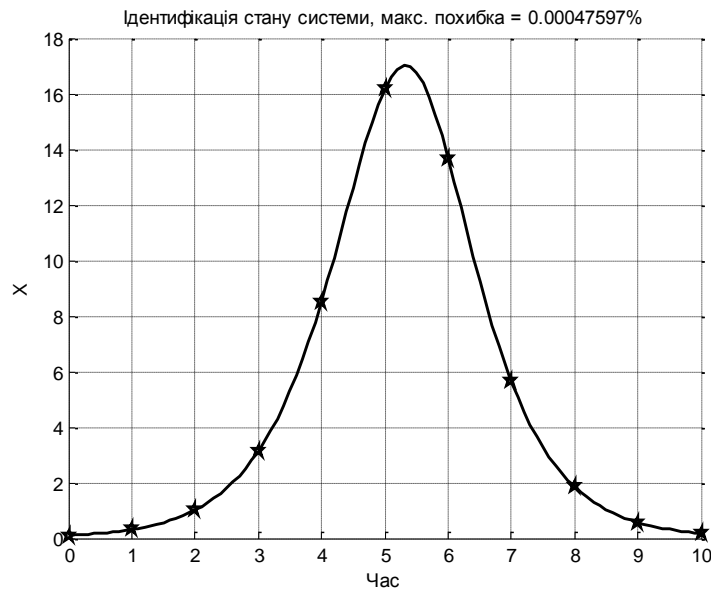


Рис. 23. Наближення змінної активного середовища системи за допомогою уточнених коефіцієнтів моделі (25)–(27), максимальна відносна похибка 0,0005%

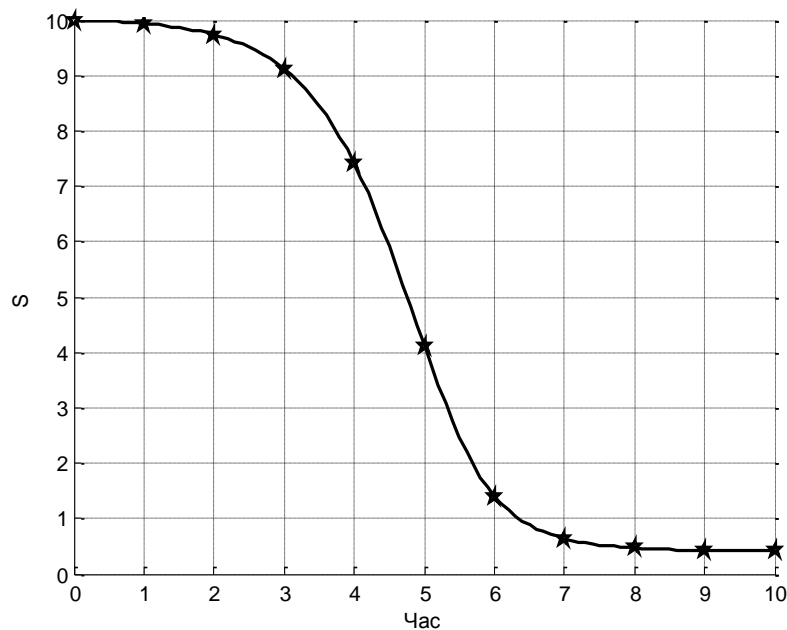


Рис. 24. Наближення змінної субстрату за допомогою уточнених коефіцієнтів моделі (25)–(27), максимальна відносна похибка 0,0005%

Для характеристики важливості застосування процедури уточнення початкових значень коефіцієнтів моделі наведемо поведінку змінних активного середовища системи та субстрату, побудованою за початковими наближеннями

її коефіцієнтів. Відбір за мінімальними відносними похибками дозволив отримати наступні початкові значення коефіцієнтів моделі  $p_1 = 4,5021$ ;  $p_2 = 1,5854$ ;  $p_3 = 0,4570$ ;  $p_4 = 6$ . В результаті уточнення цих коефіцієнтів і отримано модель із найменшою максимально відносною похибкою.

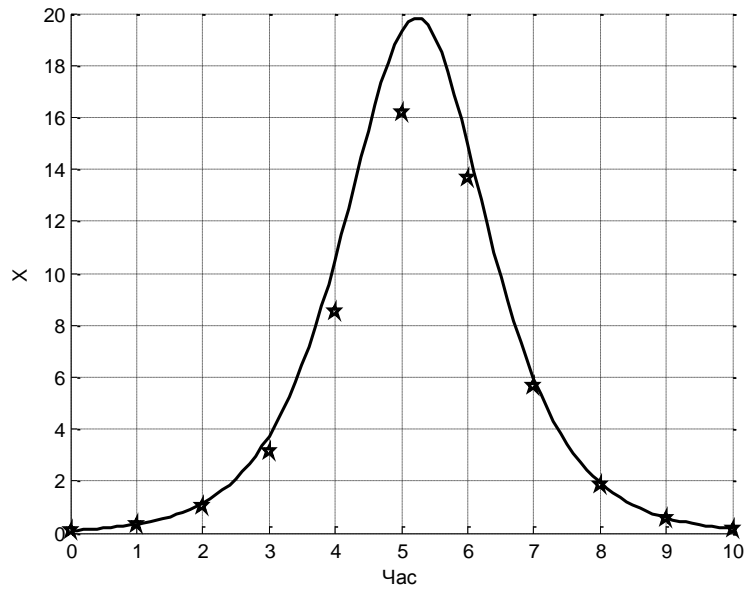


Рис. 25. Наближення змінної активного середовища системи за допомогою початкових значень коефіцієнтів моделі (25)–(27)

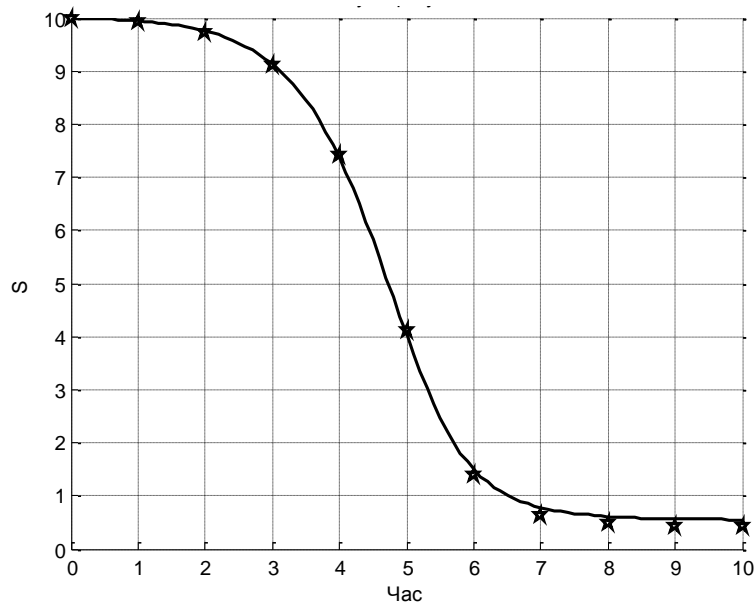


Рис. 26. Наближення змінної забезпеченості системи за допомогою початкових значень коефіцієнтів моделі (25)–(27)

Початкове наближення активного середовища системи має значну похибку на рівні 20% (див. рис. 25), а субстрату – незначну похибку на рівні 1,5% (див. рис. 26). Уточнення початкових значень параметрів прогнозовано зменшує похибку змінної активного середовища а також змінної субстрату практично до нуля. Таким чином у випадку спостереження змінних системи запропонований метод ідентифікації параметрів моделі дозволяє відтворювати її із похибкою на рівні похибки обчислень.

Більший рівень похибки при розв'язанні практично важливих задач може виникати за рахунок похибки самої моделі в описі реальної практичної ситуації. Ще одна складність, яка виникає при розв'язанні практичних задач полягає в тому, що не завжди можливо спостерігати одночасно динаміку змінних активного середовища системи та субстрату.

### **Висновки**

1. В результаті використання теорії систем побудовано узагальнену модель процесів із внутрішнім лімітуючим фактором, в якій застосовано функції Моно від змінної субстрату та продукту процесу а також частку обсягу фінального базового рівня відносно максимального рівня змінної активного середовища, що уможливило встановлення залежності між змінними активного середовища та її продукту систем із лімітуючим фактором і змінною субстрату для широкого класу практично важливих процесів.

2. В результаті експериментальних досліджень впливу параметрів моделей процесів з внутрішніми лімітуючими факторами на системні змінні виявлено основні засоби зміни динаміки останніх, що склало основу методу ідентифікації моделі із внутрішнім лімітуючим фактором при наявності спостережень за змінними моделі.

3. Для моделей процесів з внутрішніми лімітуючими факторами запропоновано метод ідентифікації, який включає етапи побудови початкових значень коефіцієнтів моделі та її ідентифікації за середньоквадратичним критерієм за допомогою градієнтного методу. Побудова початкових наближень включає побудову наближених різницевих співвідношень між параметрами

моделі, встановлення прийнятного порядку значень лімітуючого параметра за критерієм мінімуму похибки моделі на спостережених значеннях.

4. Параметри моделі ідентифікуються за критерієм мінімуму максимальної відносної похибки моделі для значень лімітуючого параметра на рівномірній сітці, побудованій на основі встановленого раніше оптимального порядку лімітуючого параметру. В останньому випадку при виборі значення лімітуючого параметра та встановленні інших параметрів моделі за різницею співвідношеннями, параметри уточнюються мінімізацією середньоквадратичного критерію якості ідентифікації методом Левенберга-Марквардта.

5. Експериментально підтверджено ефективність запропонованого методу, причому на розв'язанні модельних задач похибка методу склала соті долі відсотка.

#### **ВИКОРИСТАНА ЛІТЕРАТУРА**

1. Алексеев В. Физическое и математическое моделирование экосистем / В. Алексеев, И. Крышев, Т. Сазыкина. – СПб.: Гидрометеоздат, 1992. – 368 с.

2. Игорь Андреевич Полетаев. 1915-1983. – Новосибирск: Изд-во Института математики, 2015. – 162 с.

3. Michaelis L. Die kinetik der invertinwirkung / L. Michaelis, M. Menten. // Biochemische Zeitschrift. – 1913. – №49. – С. 333—369.

4. Кинетика ферментативных реакций [Електронний ресурс]. – Режим доступу до ресурсу: <http://www.xumuk.ru/biologhim/049.html>.

5. Антошкина Е. В. Геологические процессы как лимитирующий фактор развития урбосистем / Е.В. Антошкина, Е.В. Фоменко // Геология, география и глобальная энергия. – 2013.-№4(51). – С. 175-182.

6. Яковлев Б. П. Лимитирующие факторы психомоторной организации квалифицированных спортсменов / Б. П. Яковлев, В. В. Апокин. // Теория и практика физической культуры. – 2013. – №11. – С. 83-87.

7. Beneke R. The limits of human performance [Электронный ресурс] / R. Beneke, D. Böning // Biochemical Society. – 2008. – Режим доступа до ресурсу: <http://essays.biochemistry.org/content/ppebio/44/11.full.pdf>.
8. Rapoport B. Metabolic Factors Limiting Performance in Marathon Runners [Электронный ресурс] / B. Rapoport // PLOS Computatinal Biology. – 2010. – Режим доступа до ресурсу: <http://dx.doi.org/10.1371/journal.pcbi.1000960>.
9. Rosenheim J. Evolutionary Balancing of Fitness-Limiting Factors / J. Rosenheim, U. Alon, G. Shinar. // the american naturalist. – 2010. – №6. – С. 662-674.
10. Duke S. Phytochemical Phytotoxins and Hormesis / S. Duke. // Dose-Response. – 2014. – №1. – С. 76-78.
11. Growth and neutral lipid synthesis in green microalgae: A mathematical model / [A. Packer, Y. Li, T. Andersen та ін.]. // Bioresource Technology. – 2011. – №102. – С. 111–117.
12. Lignin Biosynthesis and Structure / [R. Vanholme, B. Demedts, K. Morreel and others]. // Plant Physiology. – 2010. – №3. – С. 895-905.
13. Mathematical modeling of plant allelopathic hormesis based on ecological-limiting-factor models / [Y. Liu, X. Chen, S. Duan and others.]. // Dose Response. – 2011. – №9. – С. 117-129.
14. Mathematical Models Light Up Plant Signaling / [Y. Chewa, R. Smitha, H. Jones et. al.]. // The Plant Cell. – 2014. – №1. – С. 5-20.
15. Multiscale systems analysis of root growth and development: Modeling beyond the network and cellular scales / [L. Band, J. Fozard, C. Godin та ін.]. // Plant Cell. – 2012. – №24. – P. 3892-3906.
16. Towards multiscale plant models: Integrating cellular networks / V. Baldazzi, N. Bertin, H. de Jong, M. Genard. // Trends Plant Sci.. – 2012. – №17. – С. 728-736.

17. Lanzas C. Mathematical Modeling of the Transmission and Control of Foodborne Pathogens and Antimicrobial Resistance at Preharvest [Электронный ресурс] / C. Lanzas, Z. Lu, Y. Gröhn // *Foodborne Pathogens and Disease*. – 2011. – Режим доступа до ресурсу:

<https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC3123936/>.

18. Mangal T. Effects of Snail Density on Growth, Reproduction and Survival of *Biomphalaria alexandrina* Exposed to *Schistosoma mansoni* [Электронный ресурс] / T. Mangal, S. Paterson, A. Fenton // *Journal of Parasitology Research*. – 2010. – Режим доступа до ресурсу: <http://dx.doi.org/10.1155/2010/186792>.

19. Mathematical Model To Quantify the Effects of Risk Factors on Carbapenem-Resistant *Acinetobacter baumannii* / [M. Tan, D. Lye, T. Ng and others]. // *Antimicrob. Agents Chemother.* – 2014. – №9. – С. 5239-5244.

20. Modeling of the ComRS Signaling Pathway Reveals the Limiting Factors Controlling Competence in *Streptococcus thermophilus* [Электронный ресурс] / L. Haustenne, G. Bastin, P. Hols, L. Fontaine // *Frontiers in Microbiology*. – 2015. – Режим доступа до ресурсу:

<http://journal.frontiersin.org/article/10.3389/fmicb.2015.01413/full>.

21. A chromatin structure-based model accurately predicts DNA replication timing in human cells [Электронный ресурс] / [Y. Gindin, M. Valenzuela, M. Aladjem and others] // *Molecular System Biology*. – 2014. – Режим доступа до ресурсу: <http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/msb.134859/pdf>

22. Cancer Evolution: Mathematical Models and Computational Inference [Электронный ресурс] / N. Beerenwinkel, R. Schwarz, M. Gerstung, F. Markowetz // *Syst Biol*. – 2015. – Режим доступа до ресурсу:

<http://sysbio.oxfordjournals.org/content/64/1/e1.full>

23. Pocheville A. Ecological Models for Gene Therapy / A. Pocheville, M. Montevil. // *Biol Theory*. – 2014. – №9. – С. 401-413

24. Santillán M. On the Use of the Hill Functions in Mathematical Models of Gene Regulatory Networks / M. Santillán. // *Math. Model. Nat. Phenom.*. – 2008. – №2. – С. 85-97.
25. Ризниченко Г. Математические модели в биофизике и экологии / Г.Ю. Ризниченко. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. – 184 с.
26. Monod J. Recherches sur la croissance des cultures bactériennes / J. Monod. – Paris, 1942. – 211 p.
27. Rashevsky N. Some remarks on the mathematical theory of nutrition of fishes / N. Rashevsky. // *Bull. of math. biophys.* – 1959. – №2. – С. 161. – 184 p.
28. Перт С. Дж. Основы культивирования микроорганизмов и клеток / С. Дж. Перт. — Москва : Мир, 1978. — 333 с.
29. Kinetic models for nitrification inhibition by ammonium and nitrite in a suspended and an immobilised biomass systems / [J. Carrera, I. Jubany, L. Carvallo та ін.]. // *Journal on Process Biochemistry.* – 2004. – №9. – С. 1159-1165.
30. Multiobjective optimization and multivariable control of the beer fermentation process with the use of evolutionary algorithms / [B. Andrés-Toro, J. Girón-Sierra, P. Fernández-Blanco та ін.]. // *Journal of Zhejiang University* – 2004. – №4. – P. 378-389.
31. Bader F. Analysis of double-substrate limited growth. / F.G. Bader. // *Biotech. and Bioeng.* – 1978. – №20. – С. 183-202.
32. Taylor P. Theoretical studies on the coexistence of competing species under continuous-flow conditions / P. Taylor, P. Williams. // *Can. J. Microbiol.* – 1975. – №21. – С. 90-98.
33. A kinetic model for beer production under industrial operational conditions / [G.B. de Andrés-Toro, J. Girón-Sierra, J. López-Orozco та ін.]. // *Mathematics and Computers in Simulation.* – 1998. – №1. – P. 65-74.



34. Multiobjective optimization and multivariable control of the beer fermentation process with the use of evolutionary algorithms / [B. Andrés-Toro, J. Girón-Sierra, P. Fernández-Blanco та ін.]. // Journal of Zhejiang University – 2004. – №4. – P. 378-389.

35. Optimization of a batch fermentation process by genetic algorithms / B.de Andrés-Toro, J. Girón-Sierra, J. López-Orozco, C. Fernández-Conde. // IFAC ADCHEM, Proceedings of an International Symposium on Advance Control of Chemical Processes. – 1997. – P. 183-188.

36. Pasichnyk R. Concept model of resources accumulation and operational management in biotechnology, biomedical and Web information systems / R. Pasichnyk, N. Pasichnyk, A. Melnyk, I. Strubycka // The XIIIth International Conference on Experience of Designing and Application of CAD Systems in Microelectronics (CADSM 2015) – Lviv-Polyana, Ukraine, 2015. – P. 152-155.

37. Pasichnyk R. Developing problem – oriented ontology for bio-technical modeling / R. Pasichnyk // Proceedings of the IXth International Conference on Modern Problems of Radio Engineering, Telecommunications and Computer Science (TCSET'2008). – Lviv-Slavsko, –2008. – P. 73-74.

38. Pasichnyk R. Modeling of resources accumulation and operational management in biotechnology, biomedical and web information systems / R. Pasichnyk // Computational Problems of Electrical Engineering. -2014. – V. 4, N 2. – P. 37-46.

**Адамів Олег Петрович, кандидат технічних наук,  
доцент кафедри економічної кібернетики та інформатики  
СИСТЕМИ ВИДОБУВАННЯ ЗНАНЬ У БІЗНЕС АНАЛІТИЦІ**

**1. Основні поняття та визначення аналізу даних.**

**Типи даних для роботи в Data Mining**

**1.1. Історія виникнення та причини розвитку**

Поняття Data Mining, що з'явилося в 1978 р., набуло високої популярності в сучасному трактуванні приблизно з першої половини 90-х років. До цього часу обробка та аналіз даних здійснювалися в рамках прикладної статистики, при цьому в основному вирішувалися завдання обробки невеликих баз даних.

Термін **інтелектуальний аналіз даних** походить від поняття **Data Mining** котре отримало свою назву з двох понять: пошуку цінної інформації у великій базі **даних** (Data) і **видобутку** (Mining). Обидва процеси вимагають або просіювання величезної кількості сирого матеріалу, або розумного дослідження і пошуку шуканих цінностей. Також термін Data Mining часто перекладається як видобуток даних, витягування інформації, розкопування даних, **інтелектуальний аналіз даних**, засоби пошуку закономірностей, вилучення знань, аналіз шаблонів, розкопування знань в базах даних.

Поняття «Виявлення знань в базах даних» (knowledge discovery in databases, KDD) можна вважати синонімом інтелектуального аналізу даних.

**Розвиток технології баз даних:**

- 1960-і рр. У 1968 році була введена в експлуатацію перша промислова СУБД система IMS фірми IBM.
- 1970-і рр. У 1975 році з'явився перший стандарт асоціації по мовах систем обробки даних – Conference on Data System Languages (CODASYL), який визначив ряд фундаментальних понять в теорії систем баз даних, які до цих пір є основоположними для мережевої моделі даних. У подальший

розвиток теорії баз даних великий внесок був зроблений американським математиком Е.Ф. Коддом, який є творцем реляційної моделі даних.

- 1980-і рр. Протягом цього періоду багато дослідників експериментували з новим підходом у напрямках структуризації баз даних і забезпечення до них доступу. Метою цих пошуків було отримання реляційних прототипів для більш простого моделювання даних. У результаті, в 1985 році була створена мова, названа SQL. На сьогоднішній день практично всі СУБД забезпечують даний інтерфейс.

- 1990-і рр. З'явилися специфічні типи даних – "графічний образ", "документ", "звук", "карта", типи даних для часу, інтервалів часу, символічних рядків з двобайтовим поданням символів були додані в мову SQL. З'явилися технології **Data Mining**, сховища даних, мультимедійні бази даних і веб-бази даних.

У зв'язку з удосконаленням технологій запису і зберігання даних на людей обвалилися колосальні потоки «інформаційного видобутку» в найрізноманітніших областях. Діяльність будь-якого підприємства (комерційного, виробничого, медичного, наукового і т.д.) тепер супроводжується реєстрацією та записом всіх подробиць його діяльності. Що робити з цією інформацією? Стало ясно, що без продуктивної переробки потоки сирих даних утворюють нікому не потрібну звалище.

#### **Специфіка сучасних вимог до такої переробки наступна:**

- дані мають необмежений обсяг;
- дані є різноманітними (кількісними, якісними, текстовими);
- результати мають бути конкретні і зрозумілі;
- інструменти для обробки сирих даних повинні бути прості у використанні.

Традиційна математична статистика, яка довгий час претендувала на роль основного інструменту аналізу даних не могла більше ефективно вирішувати дані завдання. Головна причина – концепція усереднення за вибіркою, що призводить до операцій над фіктивними величинами (типу середньої

температури пацієнтів по лікарні, середньої висоти будинку на вулиці і т.п.).  
Методи математичної статистики виявилися корисними головним чином для перевірки заздалегідь сформульованих гіпотез (перевірка керованості інтелектуального аналізу даних) і для "грубого" розвідувального аналізу, що становить основу оперативної аналітичної обробки даних (аналітична обробка в реальному часі, online analytical processing, OLAP).

### Причини популярності Data Mining:

- стрімке накопичення даних;
- загальна комп'ютеризація бізнес-процесів;
- проникнення Інтернету у всі сфери діяльності;
- прогрес в області інформаційних технологій: вдосконалення СУБД і сховищ даних;
- прогрес в області виробничих технологій: стрімке зростання продуктивності комп'ютерів, об'ємів накопичувачів, впровадження Grid систем.

Про популярність Data Mining говорить і той факт, що результат пошуку терміну «Data Mining» в пошуковій системі Google (на вересень 2005 року) – становить більше 18 мільйонів сторінок, на вересень 2013 – 198 мільйонів сторінок.

**Data Mining** – мультидисциплінарна галузь, що виникла і розвивається на базі таких наук як прикладна статистика, розпізнавання образів, штучний інтелект, теорія баз даних та ін., див. рис. 1.1.

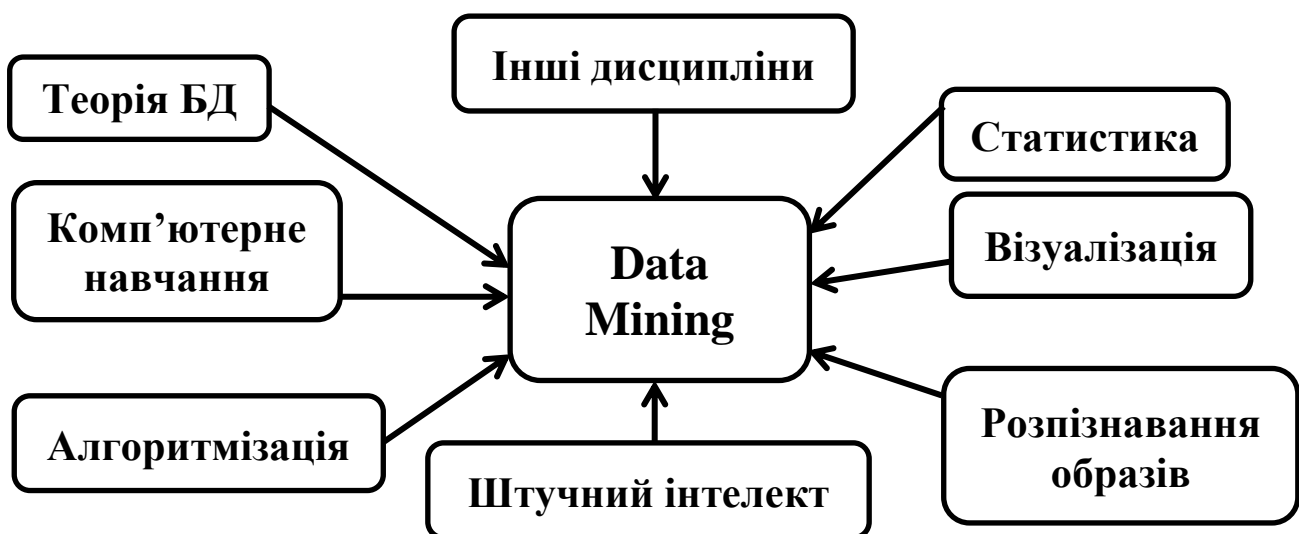


Рис. 1.1. Data Mining, як міждисциплінарна галузь

## 1.2. Суть, мета та сфера застосування технології Data Mining

**Суть та мету технології Data Mining** можна охарактеризувати так: це технологія, яка призначена для пошуку у великих обсягах даних неочевидних, об'єктивних і корисних на практиці закономірностей.

**Неочевидних** – це означає, що знайдені закономірності не виявляються стандартними методами обробки інформації або експертним шляхом.

**Об'єктивних** – це означає, що виявлені закономірності будуть повністю відповідати дійсності, на відміну від експертної думки, яке завжди є суб'єктивним.

**Практично корисних** – це означає, що висновки мають конкретне значення, котрому можна знайти практичне застосування.

**Знання** – сукупність відомостей, яка утворює цілісний опис, відповідне деякому рівню обізнаності про описуваному питанні, предметі, проблемі і т.д.

Використання знань означає дійсне застосування знайдених знань для досягнення конкретних переваг (наприклад, в конкурентній боротьбі за ринок).

Наведемо ще кілька визначень поняття Data Mining.

**Data Mining** – це процес виділення з даних неявної і неструктурованою інформації та представлення її у вигляді, придатному для використання.

**Data Mining** – це процес виділення, дослідження і моделювання великих обсягів даних для виявлення невідомих до цього структур (моделей) з метою досягнення переваг у бізнесі (визначення SAS Institute).

**Data Mining** – це процес, мета якого – виявити нові значущі кореляції, зразки і тенденції в результаті просіювання великого обсягу збережених даних з використанням методик розпізнавання зразків плюс застосування статистичних і математичних методів (визначення Gartner Group).

**Сфера застосування Data Mining** нічим не обмежена – вона скрізь, де є будь-які дані. Але в першу чергу методи Data Mining сьогодні, м'яко кажучи, заінтригували комерційні підприємства, що розгортають проекти на основі інформаційних сховищ даних (сховища даних). Досвід багатьох таких підприємств показує, що віддача від використання Data Mining може досягати

1000%. Наприклад, відомі повідомлення про економічний ефект, що в 10-70 разів перевищив початкові витрати від 350 до 750 тис. дол. Є відомості про проект в 20 млн. дол., який окупився всього за 4 місяці. Інший приклад – річна економія 700 тис. дол. за рахунок впровадження Data Mining в мережі універсамів у Великобританії.

Data Mining становлять велику цінність для керівників та аналітиків в їх повсякденній діяльності. Ділові люди усвідомили, що за допомогою методів Data Mining вони можуть отримати відчутні переваги в конкурентній боротьбі. Коротко охарактеризуємо деякі можливі бізнес-додатки інтелектуального аналізу даних.

**Роздрібна торгівля.** Підприємства роздрібною торгівлі сьогодні збирають докладну інформацію про кожну окрему покупку, використовуючи кредитні картки з маркою магазину і комп'ютеризовані системи контролю. Ось типові завдання, які можна вирішувати за допомогою Data Mining у сфері роздрібною торгівлі:

- *аналіз купівельної кошику* (аналіз подібності) призначений для виявлення товарів, які покупці прагнуть купувати разом. Володіння купівельної кошику необхідно для поліпшення реклами, вироблення стратегії створення запасів товарів і способів їх розкладки в торгових залах.

- *дослідження тимчасових шаблонів* допомагає торговим підприємствам приймати рішення про створення товарних запасів. Воно дає відповіді на питання типу "Якщо сьогодні покупець придбав відеокамеру, то через який час він найімовірніше купить нові батарейки і плівку?"

- *створення прогнозуючих моделей* дає можливість торговельним підприємствам дізнаватися характер потреб різних категорій клієнтів з певною поведінкою, наприклад, купують товари відомих дизайнерів або відвідують розпродажі. Ці знання потрібні для розробки точно спрямованих, економічних заходів щодо просування товарів.

**Банківська справа.** Досягнення технології Data Mining використовуються в банківській справі для вирішення наступних поширених завдань:

- *виявлення шахрайства з кредитними картками.* Шляхом аналізу минулих транзакцій, які згодом виявилися шахрайськими, банк виявляє деякі стереотипи такого шахрайства.

- *сегментація клієнтів.* Розбиваючи клієнтів на різні категорії, банки роблять свою маркетингову політику більш цілеспрямованою і результативною, пропонуючи різні види послуг різним групам клієнтів.

- *прогнозування змін клієнтури.* Data Mining допомагає банкам будувати прогностні моделі цінності своїх клієнтів, і відповідним чином обслуговувати кожну категорію.

**Телекомунікації.** В області телекомунікацій методи Data Mining допомагають компаніям більш енергійно просувати свої програми маркетингу і ціноутворення, щоб утримувати існуючих клієнтів і залучати нових. Серед типових заходів відзначимо наступні:

- *аналіз записів про докладних характеристиках викликів.* Призначення такого аналізу – виявлення категорій клієнтів з схожими стереотипами користування їх послугами та розробка привабливих наборів цін і послуг;

- *виявлення лояльності клієнтів.* Data Mining можна використовувати для визначення характеристик клієнтів, які, один раз скориставшись послугами даної компанії, з великою часткою ймовірності залишаться їй вірними. У підсумку кошти, що виділяються на маркетинг, можна витратити там, де віддача найбільше.

**Страховання.** Страхові компанії протягом ряду років накопичують великі обсяги даних. Тут широке поле діяльності для методів Data Mining:

- *виявлення шахрайства.* Страхові компанії можуть знизити рівень шахрайства, відшукуючи певні стереотипи в заявах про виплату страхового відшкодування, що характеризують взаємини між юристами, лікарями та заявниками.

- *аналіз ризику*. Шляхом виявлення поєднань факторів, пов'язаних з оплаченими заявами, страховики можуть зменшити свої втрати за зобов'язаннями. Відомий випадок, коли в США велика страхова компанія виявила, що суми, виплачені за заявами людей, одружених, вдвічі перевищує суми за заявами самотніх людей. Компанія відреагувала на це нове знання переглядом своєї загальної політики надання знижок сімейним клієнтам.

**Інші області в бізнесі.** Data Mining може застосовуватися в безлічі інших областей:

- *розвиток автомобільної промисловості*. При складанні автомобілів виробники повинні враховувати вимоги кожного окремого клієнта, тому їм потрібні можливість прогнозування популярності певних характеристик і знання того, які характеристики зазвичай замовляються разом;

- *політика гарантій*. Виробникам потрібно передбачати число клієнтів, які подадуть гарантійні заявки, і середню вартість заявок;

- *заохочення часто літаючих клієнтів*. Авіакомпанії можуть виявити групу клієнтів, яких даними заохочувальними заходами можна спонукати літати більше. Наприклад, одна авіакомпанія виявила категорію клієнтів, які здійснювали багато польотів на короткі відстані, що не накопичуючи досить миль для вступу в їхні клуби, тому вона таким чином змінила правила прийому до клубу, щоб заохочувати число польотів так само, як і милі.

**Медицина.** Відомо багато експертних систем для постановки медичних діагнозів. Вони побудовані головним чином на основі правил, що описують поєднання різних симптомів різних захворювань. За допомогою таких правил дізнаються не тільки, на що хворий пацієнт, але і як потрібно його лікувати. Правила допомагають вибирати засоби медикаментозного впливу, визначати показання – протипоказання, орієнтуватися в лікувальних процедурах, створювати умови найбільш ефективного лікування, пророкувати результати призначеного курсу лікування і т. п. Технології Data Mining дозволяють виявляти в медичних даних шаблони, що становлять основу зазначених правил.



**Молекулярна генетика і генна інженерія.** Мабуть, найбільш гостро і водночас чітко завдання виявлення закономірностей в експериментальних даних коштує в молекулярній генетиці та генної інженерії. Тут вона формулюється як визначення так званих маркерів, під якими розуміють генетичні коди, контролюючі ті чи інші фенотипічні ознаки живого організму. Такі коди можуть містити сотні, тисячі і більше пов'язаних елементів.

На розвиток генетичних досліджень виділяються великі кошти. Останнім часом в даній області виник особливий інтерес до застосування методів Data Mining. Відомо кілька великих фірм, що спеціалізуються на застосуванні цих методів для розшифровки генома людини і рослин.

**Прикладна хімія.** Методи Data Mining знаходять широке застосування в прикладній хімії (органічної та неорганічної). Тут нерідко виникає питання про з'ясування особливостей хімічної будови тих чи інших сполук, що визначають їх властивості. Особливо актуальна така задача при аналізі складних хімічних сполук, опис яких включає сотні і тисячі структурних елементів та їх зв'язків.

Можна навести ще багато прикладів різних областей знання, де методи Data Mining відіграють провідну роль. Особливість цих областей полягає в їх складній системній організації. Вони відносяться головним чином до над кібернетичному рівню організації систем, закономірності якого не можуть бути достатньо точно описані на мові статистичних чи інших аналітичних математичних моделей. Дані в зазначених областях неоднорідні, гетерогенні, нестационарні і часто відрізняються високою розмірністю.

### **1.3. Типи закономірностей**

Виділяють п'ять стандартних типів закономірностей, які дозволяють виявляти методи Data Mining: *асоціація, послідовність, класифікація, кластеризація і прогнозування.*

**Асоціація** має місце в тому випадку, якщо кілька подій зв'язані один з одним. Наприклад, дослідження, проведене в супермаркеті, може показати, що 65 % купили кукурудзяні чіпси беруть також і "кока-колу", а за наявності знижки за такий комплект "колу" здобувають у 85% випадків. Маючи в своєму

розпорядженні відомостями про подібну асоціацію, менеджерам легко оцінити, наскільки дієва надається знижка.

Якщо існує ланцюжок пов'язаних у часі подій, то говорять про **послідовність**. Так, наприклад, після покупки будинку в 45 % випадків протягом місяця купується і нова кухонна плита, а в межах двох тижнів 60 % новоселів обзаводяться холодильником.

За допомогою **класифікації** виявляються ознаки, що характеризують групу, до якої належить той чи інший об'єкт. Це робиться за допомогою аналізу вже класифікованих об'єктів і формулювання деякого набору правил.

**Кластеризація** відрізняється від класифікації тим, що самі групи заздалегідь не задані. За допомогою кластеризації засобів Data Mining самостійно виділяють різні однорідні групи даних.

Основою для всіляких систем **прогнозування** служить історична інформація, що зберігається в БД у вигляді часових рядів. Якщо вдається побудувати знайти шаблони, які адекватно відображають динаміку поведінки цільових показників, є ймовірність, що з їх допомогою можна передбачити і поведінку системи в майбутньому.

#### 1.4. Класи систем Data Mining

Data Mining є мультидисциплінарною областю, яка виникла і розвивається на базі досягнень прикладної статистики, розпізнавання образів, методів штучного інтелекту, теорії баз даних та ін. (рис. 1.2).

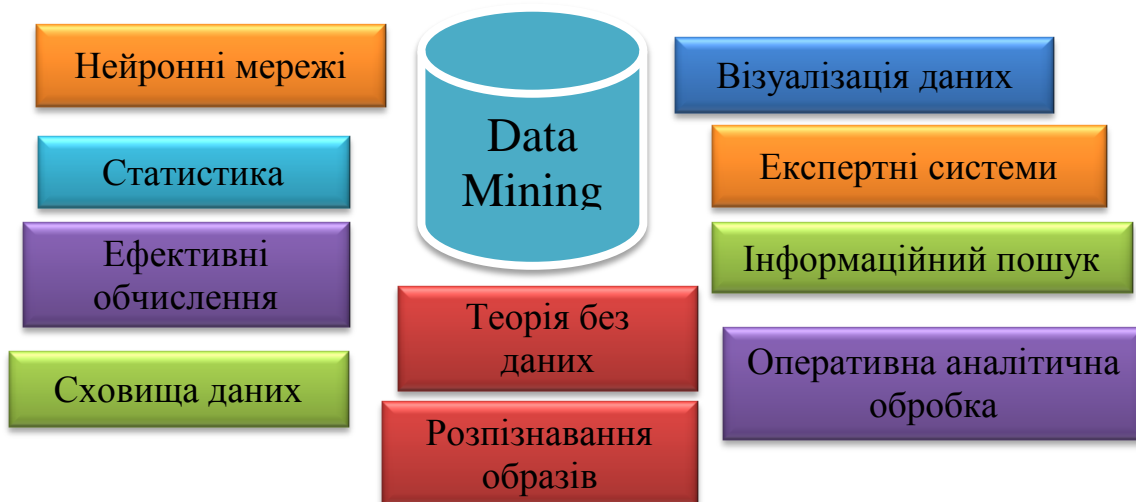


Рис. 1.2. Data Mining – мультидисциплінарна область

Звідси велика кількість **методів і алгоритмів**, реалізованих у різних діючих системах Data Mining. Багато з таких систем інтегрують в собі відразу кілька підходів. Проте, як правило, в кожній системі є якась ключова компонента, на яку робиться головна ставка. Нижче наводиться класифікація зазначених ключових компонент на основі роботи. Виділеним класам дається коротка характеристика.



Рис. 1.3. Популярні продукти для Data Mining

**Предметно-орієнтовані аналітичні системи** дуже різноманітні. Найбільш широкий підклас таких систем, що одержав поширення в галузі дослідження фінансових ринків, носить назву "технічний аналіз". Він являє собою сукупність декількох десятків методів прогнозу динаміки цін і вибору оптимальної структури інвестиційного портфеля, заснованих на різних емпіричних моделях динаміки ринку. Ці методи часто використовують нескладний статистичний апарат, але максимально враховують сформовану своїй області специфіку (професійна мова, системи різних індексів і пр.). На ринку є безліч програм цього класу. Як правило, вони досить дешеві (зазвичай \$ 300-1000).

**Статистичні пакети.** Останні версії майже всіх відомих статистичних пакетів включають поряд з традиційними статистичними методами також елементи Data Mining. Але основна увага в них приділяється все ж класичним методикам – кореляційному, регресійному, факторному аналізу і іншим.

Недоліком систем цього класу вважають вимогу до спеціальної підготовки користувача. Також відзначають, що потужні сучасні статистичні пакети є занадто "ваговитими" для масового застосування у фінансах і бізнесі. До того ж часто ці системи досить дорогі – від \$ 1000 до \$ 15000.

Є ще більш серйозний принциповий недолік статистичних пакетів, що обмежує їх застосування в Data Mining. Більшість методів, що входять до складу пакетів спираються на статистичну парадигму, в якій головними фігурантами служать усереднені характеристики вибірки. А ці характеристики, як зазначалося вище, при дослідженні реальних складних життєвих феноменів часто є фіктивними величинами.

В якості прикладів найбільш потужних і поширених статистичних пакетів можна назвати SAS (компанія SAS Institute), SPSS (SPSS), STATGRAPICS (Manugistics), STATISTICA, STADIA та інші.

**Нейронні мережі.** Це великий клас систем, архітектура яких має аналогію (як тепер відомо, досить слабку) з побудовою нервової тканини з нейронів. В одній з найбільш поширених архітектурі зі зворотним поширенням помилки, імітується робота нейронів у складі ієрархічної мережі, де кожен нейрон більш високого рівня з'єднаний своїми входами з виходами нейронів нижчого шару. На нейрони самого нижнього шару подаються значення вхідних параметрів, на основі яких потрібно приймати якісь рішення, прогнозувати розвиток ситуації і т. д. Ці значення розглядаються як сигнали, що передаються в наступний шар, ослабляючись або посилюючись в залежності від числових значень (ваг), приписуваних між нейронних зв'язків. У результаті на виході нейрона самого верхнього шару виробляється деяке значення, яке розглядається як відповідь – реакція всієї мережі на введені значення вхідних параметрів. Для того щоб мережу можна було застосовувати надалі, її колись треба "натренувати" на отриманих раніше даних, для яких відомі і значення вхідних параметрів, і правильні відповіді на них. Тренування полягає в підборі ваг між нейронних зв'язків, що забезпечують найбільшу близькість відповідей мережі до відомих правильних відповідей.

Основним недоліком нейронно-мережевої парадигми є необхідність мати дуже великий обсяг навчальної вибірки. Інший суттєвий недолік полягає в тому, що навіть натренована нейронна мережа являє собою чорний ящик. Знання, зафіксовані як ваги кількох сотень між нейронних зв'язків, абсолютно не піддаються аналізу та інтерпретації людиною (відомі спроби дати інтерпретацію структурі налаштованої нейронної мережі виглядають непереконливими – система " KINOsuite - PR").

Приклади нейромережевих систем – BrainMaker (CSS ), NeuroShell (Ward Systems Group), OWL ( HyperLogic ). Вартість їх досить значна: \$ 1500-8000.

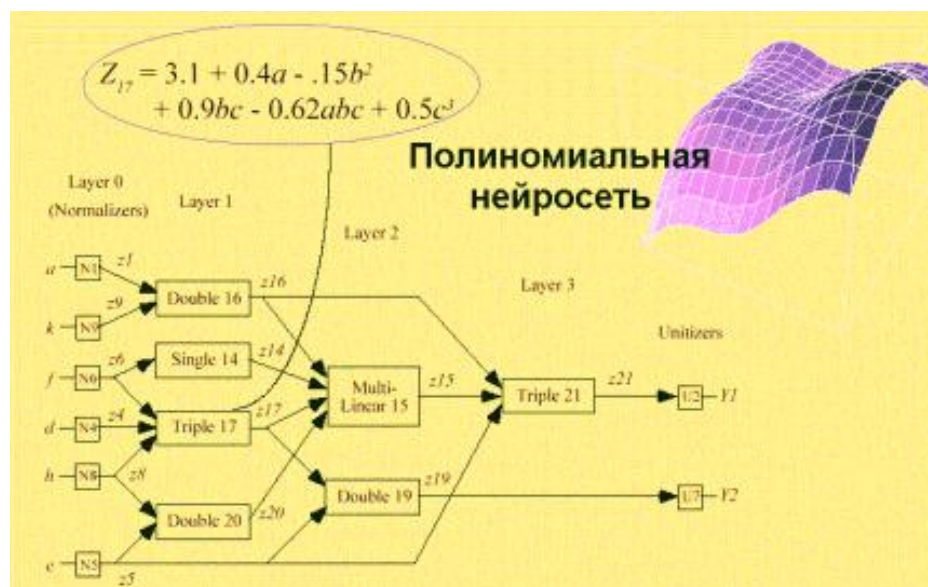


Рис. 1.4. Поліноміальна нейронна мережа

**Системи міркувань на основі аналогічних випадків.** Ідея систем case based reasoning – CBR – на перший погляд вкрай проста. Для того щоб зробити прогноз на майбутнє чи вибрати правильне рішення, ці системи знаходять у минулому близькі аналоги наявної ситуації і вибирають ту ж відповідь, який був для них правильним. Тому цей метод ще називають методом "найближчого сусіда" (nearest neighbour ). Останнім часом поширення отримав також термін memory based reasoning, який акцентує увагу, що рішення приймається на підставі всієї інформації, накопиченої в пам'яті.

Системи CBR показують непогані результати в найрізноманітніших задачах. Головним їх мінусом вважають те, що вони взагалі не створюють будь-

яких моделей або правил, узагальнюючих попередній досвід у виборі рішення вони ґрунтуються на всьому масиві доступних історичних даних, тому неможливо сказати, на основі яких конкретно факторів CBR системи будують свої відповіді.

Інший мінус полягає в свавіллі, який допускають системи CBR при виборі міри "близькості". Від цієї міри найрішучішим чином залежить обсяг безлічі прецедентів, які потрібно зберігати в пам'яті для досягнення задовільною класифікації або прогнозу.

Приклади систем, що використовують CBR, – KATE tools (Acknosoft, Франція), Pattern Recognition Workbench (Unica, США).

**Дерева рішень (decision trees)** є одним з найбільш популярних підходів до вирішення завдань Data Mining. Вони створюють ієрархічну структуру класифікуючи правил типу "ЯКЩО ... ТО ..." (if-then), що має вигляд дерева. Для прийняття рішення, до якого класу віднести деякий об'єкт або ситуацію, потрібно відповісти на питання, що стоять у вузлах цього дерева, починаючи з його кореня. Запитання мають вигляд "значення параметра А більше х?". Якщо відповідь позитивна, здійснюється перехід до правого вузла наступного рівня, якщо негативний – то до лівого вузла; потім знову слід питання, пов'язане з відповідним вузлом.

Популярність підходу пов'язана як би з наочністю і зрозумілістю. Але дерева рішень принципово не здатні знаходити "кращі" (найбільш повні і точні) правила в даних. Вони реалізують наївний принцип послідовного перегляду ознак і "чіпляють" фактично оскільки справжніх закономірностей, створюючи лише ілюзію логічного висновку.

Разом з тим, більшість систем використовують саме цей метод. Найвідомішими є See5/C5.0 (RuleQuest, Австралія), Clementine (Integral Solutions, Великобританія), SIPINA (University of Lyon, Франція), IDIS (Information Discovery, США), KnowledgeSeeker (ANGOSS, Канада). Вартість цих систем варіюється від 1 до 10 тис. дол.

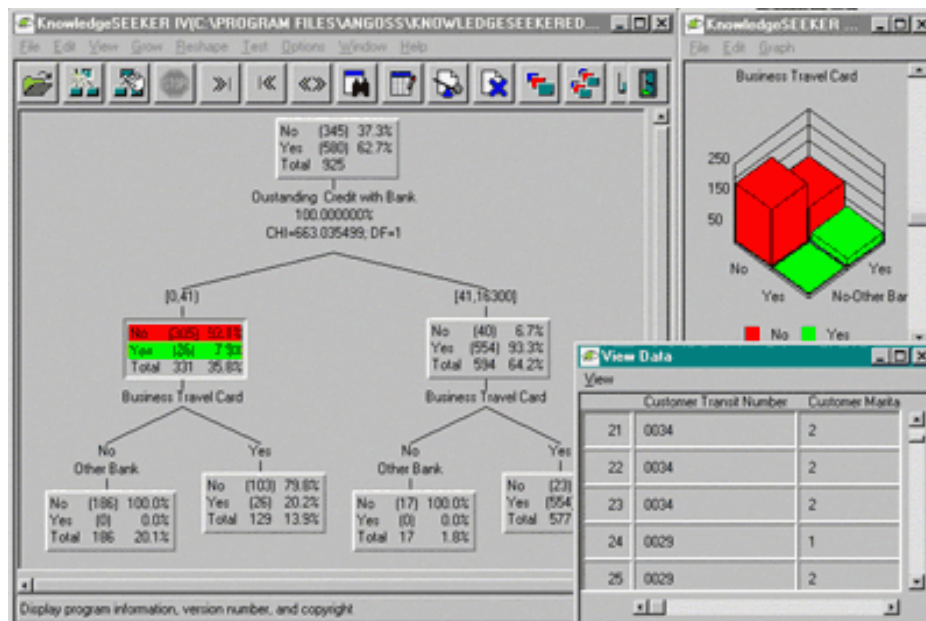


Рис. 1.5. Система KnowledgeSeeker обробляє банківську інформацію

**Еволюційне програмування.** Проілюструємо сучасний стан даного підходу на прикладі системи PolyAnalyst – вітчизняної розробки, що отримала сьогодні загальне визнання на ринку Data Mining. У даній системі гіпотези про вид залежності цільової змінної від інших змінних формуються у вигляді програм на деякій внутрішній мові програмування. Процес побудови програм будується як еволюція у світі програм (цим підхід трохи схожий на генетичні алгоритми). Коли система знаходить програму, більш або менш задовільно виражає шукану залежність, вона починає вносити до неї невеликі модифікації і відбирає серед побудованих дочірніх програм ті, які підвищують точність. Таким чином система "вирощує" кілька генетичних ліній програм, які конкурують між собою в точності висловлювання шуканої залежності. Спеціальний модуль системи PolyAnalyst переводить знайдені залежності з внутрішньої мови системи на зрозумілу користувачеві мову (математичні формули, таблиці та ін.).

Інший напрям еволюційного програмування пов'язане з пошуком залежності цільових змінних від інших у формі функцій якогось певного виду. Наприклад, в одному з найбільш вдалих алгоритмів цього типу – методі групового урахування аргументів (МГУА) залежність шукають у формі

поліномів. В даний час з продаються в Росії систем МГУА реалізований в системі NeuroShell компанії Ward Systems Group. Вартість систем до \$500.

**Генетичні алгоритми.** Data Mining не основна область застосування генетичних алгоритмів. Їх потрібно розглядати скоріше як потужний засіб вирішення різноманітних комбінаторних завдань і завдань оптимізації. Проте генетичні алгоритми увійшли зараз в стандартний інструментарій методів Data Mining, тому вони і включені в даний огляд.

Перший крок при побудові генетичних алгоритмів – це кодування вихідних логічних закономірностей в базі даних, які іменують хромосомами, а весь набір таких закономірностей називають популяцією хромосом. Далі для реалізації концепції відбору вводиться спосіб зіставлення різних хромосом. Населення обробляється за допомогою процедур репродукції, мінливості (мутацій), генетичної композиції. Ці процедури імітують біологічні процеси. Найбільш важливі серед них: випадкові мутації даних в індивідуальних хромосомах, переходи (кросинговер) і рекомбінація генетичного матеріалу, що міститься в індивідуальних батьківських, та міграції генів. У ході роботи процедур на кожній стадії еволюції виходять популяції з усе більш доскональними індивідуумами.

Генетичні алгоритми зручні тим, що їх легко розпаралелювати. Наприклад, можна розбити покоління на кілька груп і працювати з кожною з них незалежно, обмінюючись час від часу кількома хромосомами. Існують також і інші методи розпаралелювання генетичних алгоритмів.

Генетичні алгоритми мають ряд недоліків. Критерій відбору хромосом і використовувані процедури є евристичними і далеко не гарантують знаходження "кращого" рішення. Як і в реальному житті, еволюцію може "заклинити" на який-небудь непродуктивною гілці. І, навпаки, можна навести приклади, як два неперспективних батька, які будуть виключені з еволюції генетичним алгоритмом, виявляються здатними призвести високоефективного нащадка. Це особливо стає помітно при вирішенні високо розмірних завдань зі складними внутрішніми зв'язками.



Прикладом може служити система GeneHunter фірми Ward Systems Group. Його вартість – близько \$ 1000.

**Алгоритми обмеженого перебору** були запропоновані в середині 60-х років М.М. Бонгард для пошуку логічних закономірностей в даних. З тих пір вони продемонстрували свою ефективність при вирішенні безлічі завдань із всіляких областей.

Ці алгоритми обчислюють частоти комбінацій простих логічних подій у підгрупах даних. Приклади простих логічних подій:  $X = a$  ;  $X < a$  ;  $X \geq a$  ;  $a < X < b$  та ін, де  $X$  – який або параметр, " $a$ " і " $b$ " – константи. Обмеженням служить довжина комбінації простих логічних подій ( у М. Бонгард вона дорівнювала 3). На підставі аналізу обчислених частот робиться висновок про корисність тієї чи іншої комбінації для встановлення асоціації в даних, для класифікації, прогнозування.

Найбільш яскравим сучасним представником цього підходу є система WizWhy підприємства WizSoft. Хоча автор системи Абрахам Мейдан не розкриває специфіку алгоритму, покладеного в основу роботи WizWhy, за результатами ретельного тестування системи були зроблені висновки про наявність тут обмеженого перебору (вивчалися результати, залежно часу їх отримання від числа аналізованих параметрів та ін.).

Автор WizWhy стверджує, що його система виявляє ВСЕ логічні if-then правила в даних. Насправді це, звичайно, не так. По-перше, максимальна довжина комбінації в if-then правилі в системі WizWhy дорівнює 6, і, по-друге, з самого початку роботи алгоритму виробляється евристичний пошук простих логічних подій, на яких потім будується весь подальший аналіз. Зрозумівши ці особливості WizWhy, неважко було запропонувати найпростішу тестову задачу, яку система не змогла взагалі вирішити. Інший момент – система видає рішення за прийнятний час тільки для порівняно невеликої розмірності даних.

Проте, система WizWhy є на сьогоднішній день одним з лідерів на ринку продуктів Data Mining. Це не позбавлене підстав. Система постійно демонструє

більш високі показники при вирішенні практичних завдань, ніж всі інші алгоритми. Вартість системи близько \$4000, кількість продажів – 30000.

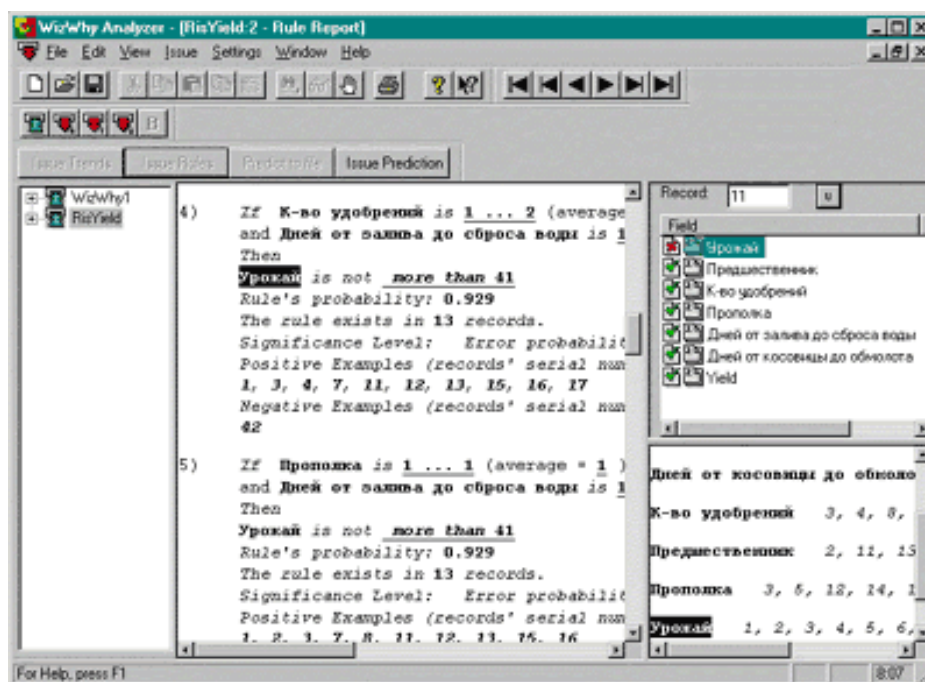


Рис. 1.6. Система WizWhy виявила правила, що пояснюють низьку врожайність деяких сільськогосподарських ділянок

**Системи для візуалізації багатовимірних даних.** В тій чи іншій мірі засоби для графічного відображення даних підтримуються всіма системами Data Mining. Разом з тим, досить значну частку ринку займають системи, що спеціалізуються виключно на цій функції. Прикладом тут може служити програма DataMiner 3D словацької фірми Dimension5 (5-ий вимір).

У подібних системах основну увагу сконцентровано на доброзичливості користувацького інтерфейсу, що дозволяє асоціювати з аналізованими показниками різні параметри діаграми розсіювання об'єктів (записів) бази даних. До таких параметрів належать колір, форма, орієнтація щодо власної осі, розміри та інші властивості графічних елементів зображення. Крім того, системи візуалізації даних забезпечені зручними засобами для масштабування і обертання зображень. Вартість систем візуалізації може досягати декількох сотень доларів.

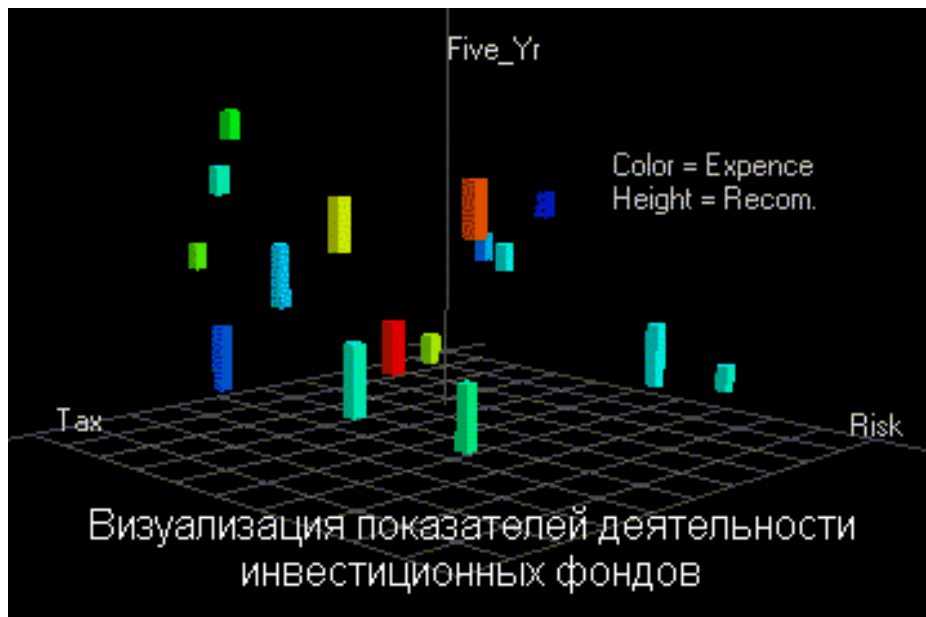


Рис. 1.7. Візуалізація даних системою DataMiner 3D

Загальний алгоритм аналізу Data Mining. Методика аналізу з використанням Data Mining базується на різних алгоритмах видобутку закономірностей у вхідних даних. Таких алгоритмів є багато, але вони не можуть гарантувати якісного кінцевого результату, бо існує багато чинників, що можуть вплинути на сам хід аналізу.

### 1.5. Якісний аналіз даних з використанням DM.

Для якісного аналізу будь-яких даних слід дотримуватися загальної схеми використання DM:

1. Висування гіпотез;
2. Збір та систематизація даних;
3. Підбір адекватної моделі;
4. Тестування та інтерпретація отриманих даних;
5. Використання у реальних умовах.

Ця схема не залежить від предметної області та сфери діяльності. Вона є універсальною.

#### 1. Висування гіпотез.

Гіпотезою тут будемо вважати припущення про вплив певних факторів на процес, що досліджується.

Автоматизувати процес висування гіпотез є вкрай складно, тому, цю задачу мають вирішувати експерти – фахівці в предметній області.

Слід довіритися їх досвіду та здоровому глузду, максимально використати ці знання про предмет досліджень і зібрати як найбільше гіпотез/припущень.

Зазвичай, добрі результати надають тактики «круглого столу» або «мозкової атаки». На початку слід зібрати та систематизувати всі ідеї, а оцінювати їх пізніше. В результаті повинен бути складений перелік з описів всіх факторів досліджуваного об'єкту.

Наприклад, Для задачі прогнозування попиту товару потрібно скласти перелік факторів, що впливатимуть на об'єкт і експертно оцінити суттєвість кожного з них. Така оцінка не є вирішальною, але від неї починають відштовхуватися.

Сезон	100
День тижня	80
Об'єм продажів за попередні тижні	100
Об'єм продажів за аналогічний період минулого року	95
Рекламна компанія	60
Маркетингові заходи	40
Якість продукції	50
Бренд	25
Коливання ціни від середньо ринкової	60
Наявність подібного товару в конкурентів	15

Згодом, під час аналіз, може з'ясуватися, що фактор, який експерти оцінили як важливий, буде мати незначний вплив на процес і навпаки.

## **2. Збір та систематизація даних.**

### **2.1. Збір даних.**

Для аналізу потрібно як найбільше даних, бо це надає можливість оцінити вплив максимальної кількості показників. Згодом, простіше відхилити певну частину даних, аніж розпочинати новий збір.

Методи збору:

#### **1. Отримання даних з внутрішніх джерел.**

Це не складно, бо така інформація зазвичай зберігається в облікових системах у табличній формі, де існують різні механізми отримання звітів та експортування даних.

## **2. Отримання відомостей з непрямих даних.**

Наприклад, потрібно оцінити реальний фінансовий стан мешканців певного регіону. Існує кілька категорій товару (авто), що різняться за ціною – для незаможних, середнього класу, заможних. Якщо отримати звіт про продажі товару в цьому районі і проаналізувати пропорції, то робиться висновок: чим більшим є відсоток продажів дорогого товару, тим заможнішими є мешканці.

## **3. Використання відкритих джерел.**

До широкого загалу надаються статистичні збірники, звіти корпорацій, результати маркетингових досліджень, соціологічні опитування.

## **4. Влаштування власних маркетингових досліджень та подібних заходів по збору даних.**

Це зазвичай є дорогим заходом, але доволі ефективним.

## **5. Наповнення даних згідно експертних оцінок співробітниками організації.**

Слід оцінити вартість збору даних, що потрібні для аналізу. Одні дані беруться з публічних інформаційних джерел, інші мають бути оплачені, дані про діяльність конкурентів можуть бути доволі дорогими.

Вартість збору інформації різними методами суттєво різняться за ціною та витраченим часом, тому, слід вважати на співвідношення теперішніх витрат з майбутніми результатами.

Від даних, які експерти вважають несуттєвими, певна річ, можна відмовитися, але від значущих даних не можна, бо аналіз буде базуватися у цьому випадку на другорядних факторах і відповідно, отримана модель буде надавати нестабільні та невірні результати.

### **1.6. Дані, набір даних та їх атрибутів**

У широкому розумінні дані – це **факти, текст, графіки, картинки, звуки, аналогові або цифрові відео-сегменти**. Дані можуть бути отримані в

результаті вимірювань, експериментів, арифметичних і логічних операцій. Дані повинні бути представлені у формі, придатній для зберігання, передачі і обробки. Іншими словами, дані – це необроблений матеріал, що надається постачальниками даних і використовується споживачами для формування інформації на основі даних.

У таблиці 1.1 представлена двовимірна таблиця, що представляє собою набір даних.

Таблиця 1.1.

Двовимірна таблиця "об'єкт-атрибут"

		Атрибути				
Об'єкти	Код клієнта	Вік	Сімейний статус	Прибуток	Клас	
	1	19	неодр.	1234	1	
	2	23	одр.	1222	1	
	3	34	одр.	2700	1	
	4	24	неодр.	2343	1	
	5	26	одр.	1765	2	
	6	32	розл.	2652	1	
	7	19	неодр.	1200	2	
	8	22	неодр.	1765	2	
	9	40	одр.	1998	1	
	10	43	розл.	4332	1	

По горизонталі таблиці розташовуються атрибути об'єкта або його ознаки. По вертикалі таблиці – об'єкти. Об'єкт описується як набір атрибутів. Об'єкт також відомий як запис, випадок, приклад, рядок таблиці і т.д.

**Атрибут** – властивість, що характеризує об'єкт. Наприклад : колір очей людини, температура води і т.д. Атрибут також називають змінною, полем таблиці, виміром, характеристикою.

**Змінна** (variable) – властивість або характеристика, загальна для всіх досліджуваних об'єктів, прояв якої може змінюватися від об'єкта до об'єкта.

**Значення** (value) змінної є проявом ознаки.

При аналізі даних, як правило, немає можливості розглянути всю сукупність об'єктів, що нас цікавить. Вивчення дуже великих обсягів даних є дорогим процесом, що вимагає великих затрат часу, а також неминуче призводить до помилок, пов'язаних з людським фактором.

Цілком достатньо розглянути деяку частину всієї сукупності, тобто вибірку, і отримати цікаву для нас інформацію на її підставі.

Однак розмір вибірки повинен залежати від різноманітності об'єктів, представлених у генеральній сукупності. У вибірці повинні бути представлені різні комбінації і елементи генеральної сукупності.

**Генеральна сукупність** (population) – вся сукупність досліджуваних об'єктів, що цікавить дослідника.

**Вибірка** (sample) – частина генеральної сукупності, певним способом відібрана з метою дослідження та отримання висновків про властивості та характеристики генеральної сукупності.

**Параметри** – числові характеристики генеральної сукупності.

**Статистики** – числові характеристики вибірки. Часто дослідження ґрунтуються на гіпотезах. Гіпотези перевіряються за допомогою даних.

**Гіпотеза** – припущення щодо параметрів сукупності об'єктів, яке має бути перевірено на її частині.

**Гіпотеза** – частково обґрунтована закономірність знань, що служить або для зв'язку між різними емпіричними фактами, або для пояснення факту групи фактів.

Приклад гіпотези: між показниками тривалості життя та якістю харчування є зв'язок. У цьому випадку метою дослідження може бути пояснення змін конкретної змінної, в даному випадку – тривалості життя. Припустимо, існує гіпотеза, що залежна змінна (тривалість життя) змінюється залежно від деяких причин (якість харчування, спосіб життя, місце проживання і т.д.), які і є незалежними змінними.

Однак змінна першопочатково не є залежною або незалежною, вона стає такою після формулювання конкретної гіпотези. Залежна змінна в одній гіпотезі може бути незалежною в іншій.

**Вимірювання** – процес присвоєння чисел характеристикам досліджуваних об'єктів згідно певного правила.

У процесі підготовки даних вимірюється не сам об'єкт, а його характеристики.

**Шкала** – правило, відповідно до якого об'єктам присвоюються числа.

Багато інструментів Data Mining при імпорті даних з інших джерел пропонують вибрати тип шкали для кожної змінної та/або вибрати тип даних для вхідних і вихідних змінних (символьні, числові, дискретні і безперервні).

Користувачеві такого інструменту необхідно володіти цими поняттями.

**Змінні можуть бути числовими даними або символічними.**

Числові дані, у свою чергу, можуть бути дискретними і безперервними.

**Дискретні дані** являються значеннями ознаки, загальне число яких скінченне або нескінченне, але може бути підраховане за допомогою натуральних чисел від одного до нескінченності.

Приклад дискретних даних. Тривалість маршруту тролейбуса (кількість варіантів тривалості скінченне): 10, 15, 25 хв.

**Безперервні дані** – дані, значення яких можуть набувати якого-завгодно значення в деякому інтервалі. Вимірювання безперервних даних передбачає велику точність.

Приклад безперервних даних: температура, висота, вага, довжина і т.д.

**Шкали.** Існує п'ять типів шкал вимірювань: номінальна, порядкова, інтервальна, відносна і дихотомічна.

**Номінальна шкала** (nominal scale) – шкала, яка містить тільки категорії; дані в ній не можуть упорядковуватися, з ними не можуть бути зроблені ніякі арифметичні дії.

Номінальна шкала складається з назв, категорій, імен для класифікації і сортування об'єктів або спостережень за деякою ознакою.



Приклад такої шкали: професії, місто проживання, сімейний стан.

Для цієї шкали застосовні тільки такі операції: дорівнює (=), не дорівнює ( $\neq$ ).

**Порядкова шкала** (ordinal scale) – шкала, в якій числа присвоюють об'єктам для позначення відносної позиції об'єктів, але не величини відмінностей між ними.

Шкала вимірювань дає можливість ранжувати значення змінних. Вимірювання ж у порядковій шкалі містять інформацію лише про порядок проходження величин, але не дозволяють сказати "наскільки одна величина більше іншої, або" "наскільки вона менше інший".

Приклад такої шкали: місце (1-ше, 2-ге, 3-є), яке команда отримала на змаганнях, номер студента в рейтингу успішності (1-й, 23-й, і т.д.), при цьому невідомо, наскільки один студент успішніше іншого, відомий лише його номер у рейтингу.

Для цієї шкали застосовні тільки такі операції: рівно (=), не дорівнює ( $\neq$ ), більше ( $>$ ), менше ( $<$ ).

**Інтервальна шкала** (interval scale) – шкала, різниці між значеннями якої можуть бути обчислені, проте їх відношення не мають сенсу.

Ця шкала дозволяє знаходити різницю між двома величинами, має властивості номінальної та порядкової шкал, а також дозволяє визначити кількісну зміну ознаки. Приклад такої шкали: температура води в морі вранці – 19 градусів, ввечері – 24, тобто вечірня на 5 градусів вище, але не можна сказати, що вона в 1,26 разів вище.

Номінальна і порядкова шкали є дискретними, а інтервальна шкала – безперервною, вона дозволяє здійснювати точні вимірювання ознаки і виробляти арифметичні операції додавання, віднімання, множення, ділення.

Для цієї шкали застосовні тільки такі операції: одно (=), не дорівнює ( $\neq$ ), більше ( $>$ ), менше ( $<$ ), операції додавання (+) і віднімання ( $-$ ).

**Відносна шкала** (ratio scale) – шкала, в якій є певна точка відліку і можливі відносини між значеннями шкали. Приклад такої шкали: вага

новонародженої дитини (4 кг і 3 кг). Перша в 1,33 рази важче. Ціна на картоплю в супермаркеті вище в 1,2 рази, ніж ціна на ринку.

Відносні та інтервальні шкали є числовими.

Для цієї шкали можуть бути застосовані тільки такі операції: рівно (=), не дорівнює ( $\neq$ ), більше (>), менше (<), операції додавання (+) і віднімання (-), множення (\*) і ділення (/).

**Дихотомічна шкала** (dichotomous scale) – шкала, яка містить тільки дві категорії. Приклад такої шкали: стать (чоловіча і жіноча).

Приклад використання різних шкал для вимірювань властивостей різних об'єктів, в даному випадку температурних умов, наведено в таблиці даних, зображеної в табл. 1.2.

Таблиця 1.2.

Множина вимірювань властивостей різних об'єктів

Номер об'єкту	Професія (номінальна шкала)	Середній бал (інтервальна шкала)	Освіта (порядкова шкала)
1	Слюсар	22	середня
2	Вчений	55	вища
3	вчитель	47	вища

Приклад використання різних шкал для вимірювань властивостей однієї системи, в даному випадку температурних умов, наведено в таблиці даних, зображеній в табл. 1.3.

Таблиця 1.3.

Множина вимірювань властивостей однієї системи

Дата змінення	Хмарність (номінальна шкала)	Температура о 7 годині (інтервальна шкала)	Сила вітру (порядкова шкала)
3 жовтня	Хмарно	22°C	Сильний вітер
4 жовтня	Напівхмарно	17°C	Слабкий вітер
5 жовтня	Ясно	23°C	Дуже сильний вітер

**Типи наборів даних.** Найбільш часто зустрічаються дані, що складаються з записів (record data).

Приклади таких наборів даних: табличні дані, матричні дані, документальні дані, транзакційні або операційні.

**Табличні дані** – дані, що складаються з записів, кожен з яких складається з фіксованого набору атрибутів.

**Транзакційні дані** представляють собою особливий тип даних, де кожен запис, що являється транзакцією, включає набір значень.

Приклад транзакційної бази даних, що містить перелік покупок клієнтів магазину, наведено на рис. 1.8.

TID	Items
1	Bread, Coke, Milk
2	Beer, Bread
3	Beer, Coke, Diaper, Milk
4	Beer, Bread, Diaper, Milk
5	Coke, Diaper, Milk

Рис. 1.8. Приклад транзакційних даних

**Графічні дані.** Приклади графічних даних: молекулярні структури; графі (рис. 1.9); карти.

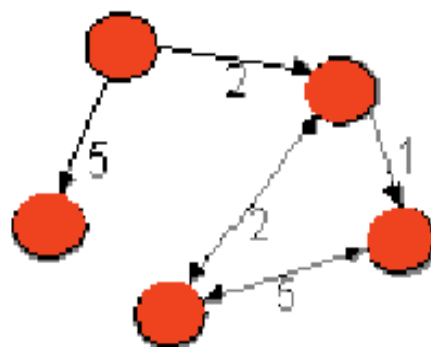


Рис. 1.9. Приклад графу

За допомогою карт, наприклад, можна відстежити зміни об'єктів в часі і просторі, визначити характер їх розподілу на площині або в просторі.

Перевагою графічного представлення даних є велика простота їх сприйняття, ніж, наприклад, табличних даних.

Приклад карти, що є картою Кохонена (моделлю нейронних мереж), представлений на рис. 1.10.

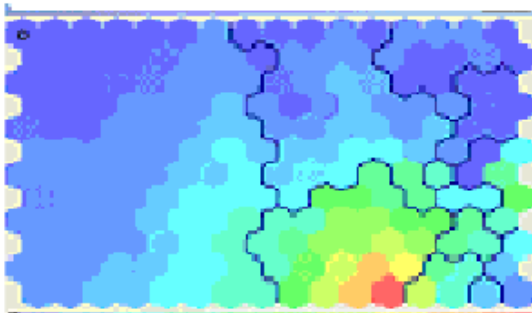


Рис. 1.10. Приклад даних типу "Карта Кохонена" хімічні дані

Хімічні дані представляють собою особливий тип даних. Приклад таких даних: Молекула бензолу  $C_6H_6$ .

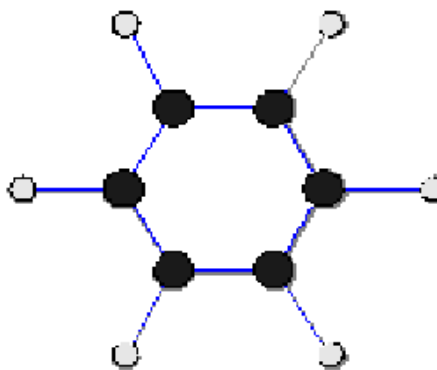


Рис. 1.11. Приклад хімічних даних

### 1.7. Формати зберігання даних

Одна з основних особливостей даних сучасного світу полягає в тому, що їх стає дуже багато.

*Можливі чотири аспекти роботи з даними:*

- визначення даних;
- обчислення;
- маніпулювання;
- обробка (збір, передача тощо).

При маніпулюванні даними використовується структура даних типу "файл". Файли можуть мати різні формати.

Більшість інструментів Data Mining дозволяють імпортувати дані з різних джерел, а також експортувати результуючі дані в різні формати.

Дані для експериментів зручно зберігати в якомусь одному форматі.

У деяких інструментах Data Mining ці процедури називаються імпорт / експорт даних, інші дозволяють напряму відкривати різні джерела даних і зберігати результати Data Mining в одному із запропонованих форматів.

Найбільш поширені формати, згідно з опитуванням "Формати зберігання даних", представлені на рис. 1.12.

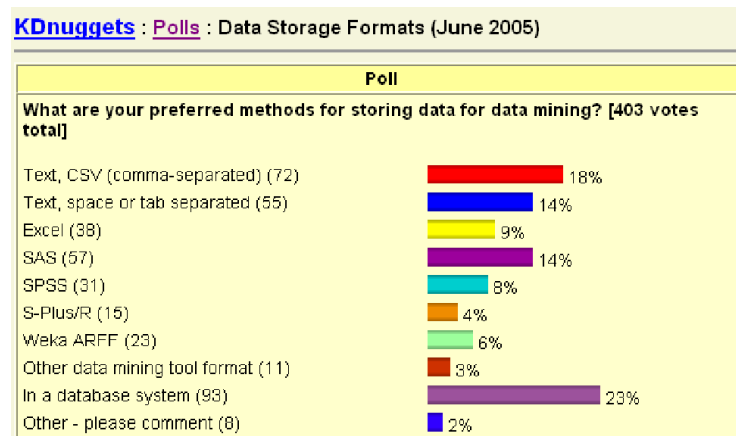


Рис. 1.12. Найбільш поширені формати зберігання даних

Найбільше число опитаних (23%) вважають за краще зберігати дані у форматі тієї бази даних, яку вони використовують. У форматі Text, CSV – 18%, по 14% опитаних зберігають дані у форматі Text, space or tab separated і SAS; в форматі Excel – 9%, SPSS – 8%, S-Plus/R – 4%, Weka ARFF – 6%, в інших форматах інструментів Data Mining – 2%.

Як бачимо з результатів опитування, найбільш поширеним форматом зберігання даних для Data Mining виступають бази даних.

## 2. Задачі інтелектуального аналізу даних

### 2.1. Завдання Data Mining

В основу технології Data Mining покладена концепція шаблонів, що представляють собою закономірності. В результаті виявлення цих, прихованих

від неозброєного ока закономірностей вирішуються завдання інтелектуального аналізу даних. Різним типам закономірностей, які можуть бути виражені у формі, зрозумілій людині, відповідають певні завдання інтелектуального аналізу даних.

**Завдання** (tasks) Data Mining іноді називають закономірностями (regularity) або техніками (techniques). Єдиної думки щодо того, які завдання слід відносити до Data Mining, немає.

Більшість авторитетних джерел перераховують наступні завдання: класифікація, кластеризація, прогнозування, асоціація, візуалізація, аналіз і виявлення відхилень, оцінювання, аналіз зв'язків, підведення підсумків.

**Класифікація (Classification).** Найбільш проста і поширена задача Data Mining. В результаті рішення задачі класифікації виявляються ознаки, які характеризують групи об'єктів досліджуваного набору даних – класи; за цими ознаками новий об'єкт можна віднести до того чи іншого класу.

Методи рішення. Для вирішення завдання класифікації можуть використовуватися методи: найближчого сусіда (Nearest Neighbor), K-найближчого сусіда (k-Nearest Neighbor); байєсовські мережі (Bayesian Networks); індукція дерев рішень; нейронні мережі (neural networks).

**Кластеризація (Clustering)** є логічним продовженням ідеї класифікації. Це завдання більш складне, особливість кластеризації полягає в тому, що класи об'єктів спочатку не визначені. Результатом кластеризації є розбиття об'єктів на групи.

Приклад методу розв'язання задачі кластеризації: навчання "без вчителя" особливого виду нейронних мереж – самоорганізованих карт Кохонена.

**Асоціація (Associations).** У ході вирішення задачі пошуку асоціативних правил відшукуються закономірності між пов'язаними подіями в наборі даних.

Відмінність асоціації від двох попередніх завдань Data Mining: пошук закономірностей здійснюється не на основі властивостей аналізованого об'єкта, а між кількома подіями, які відбуваються одночасно.

Найбільш відомий алгоритм вирішення задачі пошуку асоціативних правил – алгоритм Apriori.

**Послідовність (Sequence), або послідовна асоціація (sequential association).** Послідовність дозволяє знайти тимчасові закономірності між транзакціями. Задача послідовності подібна асоціації, але її метою є встановлення закономірностей не між одночасно наступаючими подіями, а між подіями, пов'язаними в часі (тобто відбуваються з деяким певним інтервалом у часі). Іншими словами, послідовність визначається високою ймовірністю ланцюжка пов'язаних у часі подій.

Фактично, асоціація є окремим випадком послідовності з тимчасовим лагом, рівним нулю. Цю задачу Data Mining також називають задачею знаходження послідовних шаблонів (sequential pattern).

Правило послідовності: після події X через певний час відбудеться подія Y.

*Приклад. Після покупки квартири мешканці в 60% випадків протягом двох тижнів купують холодильник, а протягом двох місяців в 50% випадків купується телевізор. Рішення даної задачі широко застосовується в маркетингу і менеджменті, наприклад, при управлінні циклом роботи з клієнтом (управління життєвим циклом клієнта).*

**Прогнозування (Forecasting).** В результаті рішення задачі прогнозування на основі особливостей історичних даних оцінюються пропущені або ж майбутні значення цільових чисельних показників.

Для вирішення таких завдань широко застосовуються методи математичної статистики, нейронні мережі та ін.

**Визначення відхилень або викидів (Deviation Detection),** аналіз відхилень або викидів. Мета розв'язання даної задачі – виявлення та аналіз даних, що найбільш відрізняються від загальної множини даних, виявлення так званих нехарактерних шаблонів.

**Оцінювання (оцінка).** Завдання оцінювання зводиться до передбачення безперервних значень ознаки.

**Аналіз зв'язків (Link Analysis)** – задача знаходження залежностей в наборі даних.

**Візуалізація (Visualization, Graph Mining).** В результаті візуалізації створюється графічний образ аналізованих даних. Для вирішення задачі візуалізації використовуються графічні методи, що показують наявність закономірностей в даних.

Приклад методів візуалізації – подання даних у 2-D і 3-D вимірах.

**Підведення підсумків (Summarization)** – завдання, мета якого – опис конкретних груп об'єктів з аналізованого набору даних.

## **2.2. Задачі інтелектуального аналізу даних**

Згідно класифікації за стратегіями, задачі Data Mining поділяються на такі групи:

- навчання з учителем;
- навчання без вчителя;
- інші.

Категорія навчання з учителем представлена наступними задачами Data Mining: класифікація, оцінка, прогнозування.

Категорія навчання без вчителя представлена задачею кластеризації.

У категорію «інші» входять задачі, не включені в попередні дві стратегії.

**Задачі** інтелектуального аналізу даних, залежно від використовуваних моделей, можуть бути **дескриптивними і прогнозуючими**.

Відповідно до цієї класифікації, **задачі Data Mining** представлені **групами описових і прогнозуючих завдань**.

У результаті рішення описових (descriptive) задач аналітик отримує шаблони, що описують дані, які піддаються інтерпретації.

Ці задачі описують загальну концепцію аналізованих даних, визначають інформативні, підсумкові, відмінні особливості даних. Концепція описових завдань передбачає характеристику і порівняння наборів даних.

Характеристика набору даних забезпечує короткий і стислий опис деякого набору даних.



Порівняння забезпечує порівняльний опис двох або більше наборів даних.

Прогнозуючі (predictive) ґрунтуються на аналізі даних, створенні моделі, передбаченні тенденцій або властивостей нових або невідомих даних.

Досить близьким до вищезгаданої класифікації є розділення задач Data Mining на наступні:

- a. дослідження та відкриття;
- b. прогнозування та класифікація;
- c. пояснення і опис.

**Автоматичне дослідження і відкриття** (вільний пошук). *Приклад задачі: виявлення нових сегментів ринку.*

Для вирішення даного класу задач використовуються методи кластерного аналізу прогнозування та класифікація.

*Приклад задачі: передбачення зростання обсягів продажів на основі поточних значень.*

**Методи:** регресія, нейронні мережі, генетичні алгоритми, дерева рішень.

*Задачі класифікації та прогнозування становлять групу так званого індуктивного моделювання, в результаті якого забезпечується вивчення аналізованого об'єкта або системи. У процесі вирішення цих завдань на основі набору даних розробляється загальна модель або гіпотеза.*

**Пояснення й опис.** *Приклад задачі: характеристика клієнтів за демографічними даними і історіями покупок.*

**Методи:** дерева рішень, системи правил, правила асоціації, аналіз зв'язків.

*Якщо дохід клієнта більше, ніж 50 умовних одиниць, і його вік – понад 30 років, тоді клас клієнта – перший.*

В інтерпретації узагальненої моделі аналітик отримує нове знання. Групування об'єктів відбувається на основі їх подібності.

*Отже, у попередній лекції нами були розглянуті методи Data Mining і дії, що виконуються в рамках стадій інтелектуального аналізу даних. Щойно ми розглянули основні завдання інтелектуального аналізу даних.*

Нагадаємо, що головна цінність Data Mining – це практична спрямованість даної технології, шлях від сирих даних до конкретного знання, від постановки завдання до готового додатку, за підтримки якого можна приймати рішення.

Велика кількість понять, які об'єдналися в Data Mining, а також різноманітність методів, що підтримують дану технологію, починаючому аналітику можуть нагадати мозаїку, частини якої мало пов'язані між собою.

Як же ми можемо зв'язати в одне ціле задачі, методи, дії, закономірності, додатки, дані, інформацію, рішення?

**Розглянемо два потоки:**

1. Дані – інформація – знання і рішення
2. Завдання – дії і методи рішення – програми

Ці потоки є "двома сторонами однієї медалі", відображенням одного процесу, результатом якого має бути знання і прийняття рішення.

**Від даних до рішень.** Для початку розглянемо перший потік. На рис. 2.1. показаний зв'язок понять «дані», «інформація» і «рішення», яка виникає в процесі прийняття рішень.

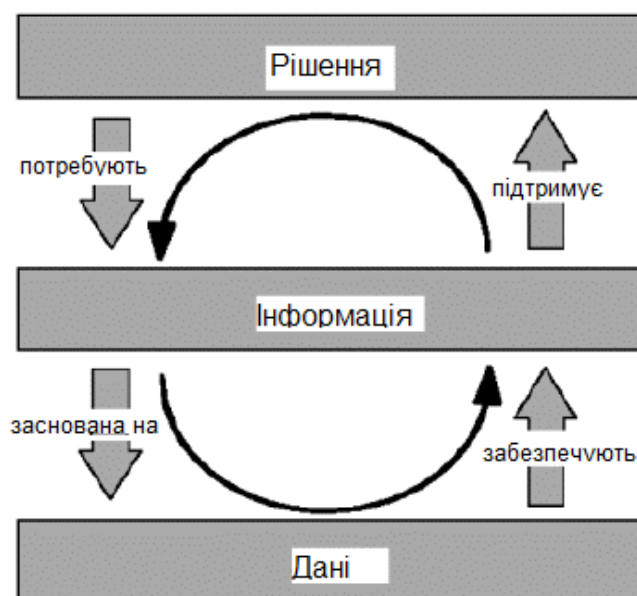


Рис. 2.1. Рішення, інформація і дані

Як видно з рисунка, даний процес являється циклічним. Прийняття рішень потребує інформації, яка заснована на даних. Дані забезпечують інформацію, яка підтримує рішення і т.д.

Розглянуті поняття є складовою частиною так званої інформаційної піраміди, в основі якої знаходяться дані, наступний рівень – це інформація, потім йде рішення, завершує піраміду рівень знання. У міру просування вгору по інформаційній піраміді обсяги даних переходять у цінність рішень, тобто цінність для бізнесу. А, як відомо, метою Business Intelligence є перетворення обсягів даних у цінність бізнесу.

Тепер підійдемо до цього ж процесу з іншого боку. Розглянемо рис. 2.2.

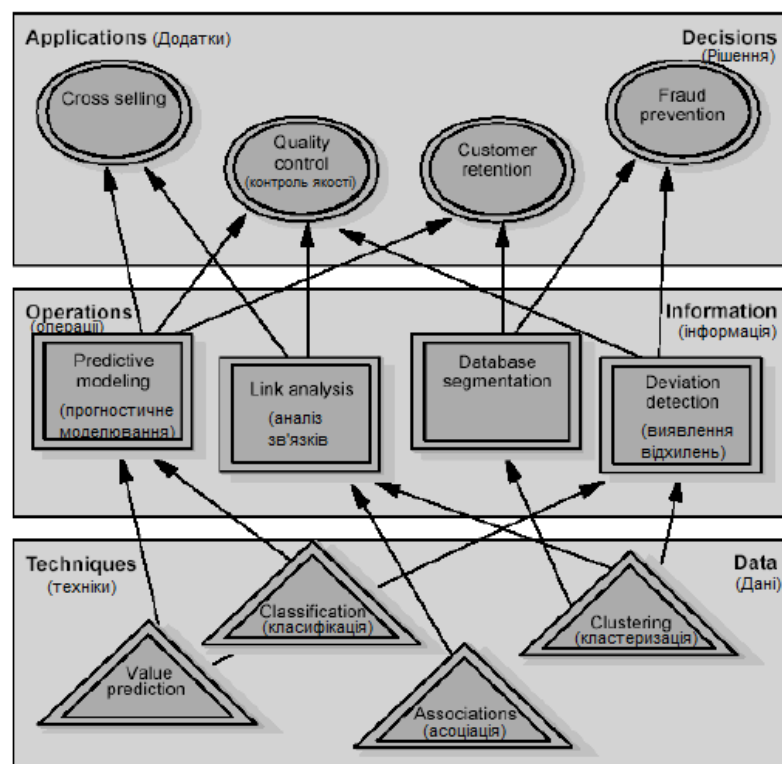


Рис. 2.2. Задачі, дії, додатки

Слід зазначити, що рівні аналізу (дані, інформація, знання) практично відповідають етапам еволюції аналізу даних, яка відбувалася протягом останніх років.

### 2.3. Рівні аналізу

**Верхній – рівень додатків** – є рівнем бізнесу (якщо ми маємо справу із завданням бізнесу), на ньому менеджери приймають рішення. Наведені приклади додатків: перехресні продажі, контроль якості, утримування клієнтів.

**Середній – рівень дій** – за своєю суттю є рівнем інформації, саме на ньому виконуються дії Data Mining; на рисунку наведені такі дії: прогностичне моделювання, аналіз зв'язків, сегментація даних та інші.

**Нижній – рівень визначення задачі інтелектуального аналізу даних**, яку необхідно розв'язати стосовно даних, що є в наявності, на малюнку наведені завдання передбачення числових значень, класифікація, кластеризація, асоціація.

Розглянемо таблицю, що демонструє зв'язок цих понять.

Таблиця 2.1.

Рівні Data Mining

рівень 3	Додатки	утримання клієнтів	знання DM	результат
рівень 2	Дії	прогностичне моделювання	інформація	метод аналізу
рівень 1	Задачі	Класифікація	дані	запити

Нагадаємо, що для вирішення задачі класифікації результати роботи першої стадії (індукції правил) використовуються для віднесення нового об'єкта, з певною впевненістю, до одного з відомих, визначених класів на підставі відомих значень.

Розглянемо задачі утримання клієнтів (визначення надійності клієнтів фірми).

**Дані** – база даних по клієнтах. Є дані про клієнта (вік, стать, професія, дохід). Певна частина клієнтів, скориставшись продуктом фірми, залишилася їй вірна; інші клієнти більше не купували продукти фірми. На цьому рівні ми визначаємо тип завдання – це завдання класифікації.

**На другому рівні визначаємо дію – прогностичне моделювання.** За допомогою прогностичного моделювання ми з певною частиною впевненості можемо віднести новий об'єкт, в даному випадку, нового клієнта, до одного з відомих класів – постійний клієнт, або це, швидше за все, його разова покупка.

**На третьому рівні ми можемо скористатися додатком для прийняття рішення.** У результаті придбання знань, фірма може істотно знизити витрати, наприклад, на рекламу, знаючи заздалегідь, яким із клієнтів слід активно розсилати рекламні матеріали.

Таким чином, протягом кількох лекцій ми визначилися з поняттями "дані", "завдання", "методи", "дії".

Зараз зупинимося на ще не розглянутому понятті інформації. Незважаючи на поширеність даного поняття, ми не завжди можемо точно його визначити і відрізнити від поняття даних. Інформація, за своєю суттю, має багатогранну природу. З розвитком людства, в тому числі, з розвитком комп'ютерних технологій, інформація набуває все нових і нових властивостей.

#### **2.4. Інформація. Властивості інформації**

**Інформація** (лат. інформація) –

1. будь-які повідомлення про що-небудь;
2. відомості, що є об'єктом зберігання, переробки і передачі (наприклад генетична інформація);
3. в математиці (кібернетиці) – кількісна міра усунення невизначеності (ентропія), міра організації системи; в теорії інформації – розділ кібернетики, що вивчає кількісні закономірності, які пов'язані зі збором, передачею, перетворенням і обчисленням інформації.

**Інформація** – будь-які, невідомі раніше відомості про якусь подію, сутності, процеси і т.п., є об'єктом деяких операцій, для яких існує змістовна інтерпретація.

Під операціями тут мається на увазі сприйняття, передача, перетворення, зберігання і використання. Для сприйняття інформації необхідна деяка сприймаюча система, яка може інтерпретувати її, перетворювати, визначати відповідність певним правилам і т.п. Таким чином, поняття інформації слід розглядати тільки при наявності джерела і одержувача інформації, а також каналу зв'язку між ними.

**Властивості інформації:**

- **Повнота інформації.** Це властивість характеризує якість інформації і визначає достатність даних для прийняття рішень, тобто інформація повинна містити весь необхідний набір даних.

Приклад. "Продажі товару *A* почнуть скорочуватися" Ця інформація неповна, оскільки невідомо, коли саме вони почнуть скорочуватися.

Приклад повної інформації. "Починаючи з першого кварталу, продажі товару *A* почнуть скорочуватися". Цієї інформації достатньо для прийняття рішень.

- **Достовірність інформації.** Інформація може бути **достовірною** і **недостовірною**. У недостовірній інформації присутній інформаційний шум, і чим він вищий, тим нижче достовірність інформації.

- **Цінність інформації.** Цінність інформації не може бути абстрактною. Інформація повинна бути корисною і цінною для певної категорії користувачів.

- **Адекватність інформації.** Це властивість характеризує ступінь відповідності інформації реальному об'єктивному стану. Адекватна інформація – це повна і достовірна інформація.

- **Актуальність інформації.** Інформація повинна бути актуальною, тобто НЕ застарілою. Це властивість інформації характеризує ступінь відповідність інформації справжнього моменту часу.

- **Ясність інформації.** Інформація повинна бути зрозуміла для того кола осіб, для якого вона призначена.

- **Доступність інформації.** Доступність характеризує міру можливості отримати певну інформацію. На це властивість інформації впливають одночасно доступність даних і доступність адекватних методів.

- **Суб'єктивність інформації.** Інформація носить суб'єктивний характер, вона визначається ступенем сприйняття суб'єкта (одержувача інформації).

#### **Вимоги, що пред'являються до інформації:**

- **Динамічний характер інформації.** Інформація існує тільки в момент взаємодії даних і методів, тобто в момент інформаційного процесу. Решту часу вона перебуває в стані даних.

- **Адекватність використовуваних методів.** Інформація витягується з даних. Проте в результаті використання одних і тих же даних може з'являтися різна інформація. Це залежить від адекватності вибраних методів обробки вихідних даних.

**Дані**, за своєю суттю, є **об'єктивними**. **Методи** є **суб'єктивними**, в основі методів лежать алгоритми, суб'єктивно складені та підготовлені. Таким чином, інформація виникає і існує в момент діалектичної взаємодії об'єктивних даних і суб'єктивних методів.

Для бізнесу інформація є вихідною складовою прийняття рішень.

Всю інформацію, що виникає в процесі функціонування бізнесу та управління ним, можна класифікувати певним чином. Залежно від **джерела одержання, інформацію** поділяють на **внутрішню** і **зовнішню** (наприклад, інформація, що описує явища, що відбуваються за межами фірми, але мають до неї безпосереднє відношення).

Також **інформація** може бути класифікована на **фактичну** і **прогнозну**. До фактичної інформації про бізнес відноситься інформація, що характеризує доконаний факт, вона є точною. Прогнозна інформація розраховується або передбачається, тому її не можна вважати точною, вона може мати певну похибку.

**Знання** – сукупність фактів, закономірностей і евристичних правил, за допомогою яких вирішується поставлене завдання.

Отже, формування інформації відбувається в процесі збору та передачі, тобто обробки даних. Яким же чином із інформації отримують знання?

Все частіше істинні знання утворюються на основі розподілених взаємозв'язків різномірної інформації. Коли інформація зібрана і передана для отримання явно не визначеного заздалегідь результату, то ви отримуєте знання. Сама по собі інформація в чистому вигляді безглузда. Звідси випливає висновок, що інформація – це чисте тактичне знання, передане у вигляді символів і за допомогою будь-яких прикладних засобів.

За визначенням Денхема Грея, "знання – це абсолютне використання інформації і даних, спільно з потенціалом практичного досвіду людей, здібностями, ідеями, інтуїцією, переконаністю і мотиваціями".

**Знання** мають певні **властивості**, які відрізняють їх від інформації.

**1. Структурованість.** Знання повинні бути "розкладені по полицках".

**2. Зручність доступу і засвоєння.** Для людини – це здатність швидко зрозуміти і запам'ятати або, навпаки, згадати, для комп'ютерних знань – засоби доступу до знань.

**3. Лаконічність.** Лаконічність дозволяє швидко освоювати і переробляти знання і підвищує «коефіцієнт корисного змісту». У даний список лаконічність була додана через всім відому проблему шуму і сміттєвих документів, характерних саме для комп'ютерної інформації – Інтернету та електронного документообігу.

**4. Несуперечливість.** Знання не повинні суперечити одне одному.

**5. Процедури обробки.** Знання потрібні для того, щоб їх використовувати. Одна з головних властивостей знань – можливість їх передачі іншим і здатність робити висновки на їх основі. Для цього повинні існувати процедури обробки знань. Здатність робити висновки означає наявність процедур обробки і виведення і підготовленість структур даних для такої обробки, тобто наявність спеціальних форматів знань.

**Зіставлення і порівняння понять "інформація", "дані", "знання".**

Для того щоб впевнено оперувати поняттями "інформація", "дані", "знання", необхідно не тільки розуміти суть цих понять, а й відчувати відмінності між ними. Однак, однією інтуїтивної інтерпретації цих понять тут недостатньо. Складність розуміння відмінностей вищезазначених понять – в їх уявній синонімічності. Згадаймо, що поняття Data Mining переводиться на українську мову за допомогою цих же трьох понять: як видобуток даних, вилучення інформації, розкопування знань.

Для початку зробимо спробу розібратися в цих термінах на простих прикладах.



1. Студент, який здає іспит, потребує даних.
2. Студент, який здає іспит, потребує інформації.
3. Студент, який здає іспит, потребує знань.

При розгляді першого варіанту – студент потребує даних – виникає думка, що студенту потрібні дані, наприклад, для обчислень. Інформацією в другому варіанті може виступати конспект або підручник. У результаті їх використання студент отримує лише інформацію, яка в певних випадках може перейти у знання. Третій варіант звучить найбільш логічно.

Інформація, на відміну від даних, має сенс.

Поняття "інформація" і "знання", з філософської точки зору, є поняттями більш високого рівня, ніж "дані", яке виникло відносно недавно.

Поняття "інформації" безпосередньо пов'язано з сутністю процесів усередині інформаційної системи, тоді так поняття "знання" швидше орієнтоване на якість процесів. Поняття "знання" тісно пов'язане з процесом прийняття рішень.

Незважаючи на відмінності, розглянуті поняття, як уже зазначалося раніше, не є розрізненими і непов'язаними. Вони є частиною одного потоку: біля витоків його знаходяться дані, у процесі передачі яких виникає інформація, і в результаті використання інформації, за певних умов, виникають знання.

У темі вже зазначалося, що в процесі руху вгору в інформаційній піраміді обсяги даних переходять у цінність знань. Однак великі обсяги даних зовсім не означають і, тим більше, не гарантують отримання знань. Існує певна залежність цінності отриманих знань від якості та потужності процедур обробки даних. Типовим прикладом інформації, яку не можна перетворити в знання, є текст іноземною мовою. За відсутності словника і перекладача ця інформація взагалі не має цінності, вона не може перейти в знання. За наявності словника процес переходу від інформації до знання можливий, але тривалий і трудомісткий. За наявності перекладача інформація дійсно переходить в знання.

Таким чином, для отримання цінних знань необхідні якісні процедури обробки. Процес переходу від даних до знань займає багато часу і коштує дорого. Тому очевидно, що технологія Data Mining з її потужними і різноманітними алгоритмами є інструментом, за допомогою якого, просуваючись вгору по інформаційній піраміді, ми можемо отримувати дійсно якісні та цінні знання.

## **2.5. Задачі класифікації**

**Класифікація** є найбільш простою і водночас найбільш часто розв'язуваною задачею Data Mining. Зважаючи на поширеність задач класифікації необхідно чітко розуміння суті цього поняття.

Наведемо кілька визначень.

**Класифікація** – системний розподіл досліджуваних предметів, явищ, процесів за родами, видами, типами, з якими-небудь істотними ознаками для зручності їх дослідження; угруповання вихідних понять і розташування їх у певному порядку, що відбиває ступінь цієї схожості.

**Класифікація** – впорядкована за деяким принципом множина об'єктів, які мають подібні класифікаційні ознаки (одна або декілька властивостей), обраних для визначення схожості або відмінності між цими об'єктами.

**Класифікація вимагає дотримання наступних правил:**

- a. в кожному акті ділення необхідно застосовувати тільки одну основу;
- b. ділення повинне бути пропорційним, тобто загальний обсяг видових понять повинен дорівнювати об'єму діленого родового поняття;
- c. члени ділення повинні взаємно виключати один одного, їх об'єми не повинні перехрещуватися;
- d. ділення повинне бути послідовним.

**Розрізняють:**

- a. **допоміжну (штучну) класифікацію**, яка виробляється за зовнішньою ознакою і служить для надання множині предметів (процесів, явищ) потрібного порядку;

б. **природну класифікацію**, яка виробляється за істотними ознаками, що характеризують внутрішню спільність предметів і явищ. Вона є результатом і важливим засобом наукового дослідження, тому що передбачає і закріплює результати вивчення закономірностей об'єктів, що класифікуються.

Допоміжна класифікація створюється з метою найбільш швидкого відшукування якогось індивідуального предмету серед предметів, що класифікуються. Мета в цій класифікації визначає принцип її побудови. В основу допоміжної класифікації лягає яка-небудь зовнішня несуттєва ознака, яка, однак, виявляється корисною у процесі пошуку.

**Прикладами допоміжної класифікації** можуть бути розподіл студентів курсу в списку в алфавітному порядку або такий же розподіл бібліотечних карток в алфавітному каталозі і т.п. Знаючи порядок букв в алфавіті, ми можемо легко і швидко відшукати потрібне нам прізвище у списку або дані, що цікавлять нас в книзі, в каталозі.

Але знання того, яке місце в допоміжній класифікаційній системі займає той чи інший предмет, не дає можливості щось стверджувати про його властивості. Так, наприклад, те що студент Архипов записаний у списку першим, а студент Яковлев – останнім, нічого не говорить про їх здібності і риси характеру. Тому допоміжна класифікація не є науковою.

На відміну від допоміжної **природна класифікація** являє собою розподіл предметів за класами на підставі їх найбільш суттєвих ознак. Найбільш істотними є такі ознаки предмета, які обумовлюють інші його ознаки. Наприклад, найбільш суттєвою ознакою людини є її здатність до праці. Ця ознака зумовлює наявність у людини таких ознак, як прямоходіння, здатність до спілкування (праця передбачає колектив), здатність до мислення та ін.

**Залежно від обраних ознак**, їх поєднання і процедури розподілу понять, **класифікація може бути:**

- **простою** – розподіл родового поняття тільки за ознакою і тільки один раз до розкриття всіх видів. Прикладом такої класифікації є дихотомія,

при якій членами поділу бувають тільки два поняття, кожне з яких суперечить іншому (тобто дотримується принцип: "А і не А");

- **складною** – застосовується для поділу одного поняття за різними основами і синтезу таких простих ділень в єдине ціле.

**Прикладом** такої класифікації є періодична система хімічних елементів.

Під **класифікацією** будемо розуміти віднесення об'єктів (спостережень, подій) до одного з заздалегідь відомих класів.

**Класифікація** – це закономірність, що дозволяє робити висновок щодо визначення характеристик конкретної групи. Таким чином, для проведення класифікації повинні бути присутні ознаки, що характеризують групу, до якої належить та чи інша подія або об'єкт (зазвичай при цьому на підставі аналізу вже класифікованих подій формулюються якісь правила).

**Класифікація** відноситься до стратегії навчання з вчителем (supervised learning), яку також іменують контрольованим або керованим навчанням.

**Машинне навчання** — узагальнена назва штучної генерації знань з досвіду. Штучна система навчається на прикладах і після закінчення фази навчання може узагальнювати. Тобто система не просто вивчає наведені приклади, а розпізнає певні закономірності в даних для навчання.

Серед багатьох програмних продуктів варто згадати системи автоматичного діагностування, розпізнавання шахрайства з кредитними картками, аналіз ринку цінних паперів, класифікація ланцюжків ДНК, розпізнавання мовлення та тексту, автономні системи.

Практичне використання відбувається, переважно, за допомогою алгоритмів. Різноманітні алгоритми машинного навчання можна грубо поділити за такою схемою:

- **Навчання з вчителем** (англ. Supervised learning): алгоритм вивчає функцію на основі наданих пар вхідних та вихідних даних. При цьому, в процесі навчання, «вчитель» вказує вірні вихідні дані для кожного значення вхідних даних. Одним з розділів навчання з вчителем є машинна класифікація. Такі алгоритми застосовуються для розпізнавання текстів.

- **Навчання без вчителя** (англ. Unsupervised learning).
- **Навчання з закріпленням** (англ. Reinforcement Learning): алгоритм

навчається за допомогою тактики нагороди та покарання для максимізації вигоди для агентів (систем до яких належить компонента, що навчається)

Завданням класифікації часто називають передбачення категоріальної залежної змінної (тобто залежної змінної, що є категорією) на основі вибірки безперервних і/або категоріальних змінних.

*Наприклад*, можна передбачити, хто з клієнтів фірми є потенційним покупцем певного товару, а хто – ні, хто скористається послугою фірми, а хто – ні, і т.д. Цей тип завдань належить до завдань **бінарної класифікації**, в них залежна змінна може приймати тільки два значення (наприклад, так чи ні, 0 або 1).

Інший варіант класифікації виникає, якщо залежна **змінна** може приймати значення з деякої множини визначених класів. Наприклад, коли необхідно передбачити, яку марку автомобіля захоче купити клієнт. У цих випадках розглядається множина класів для залежної змінної.

Класифікація може бути **одновимірною** (за однією ознакою) і **багатовимірною** (за двома і більше ознаками).

**Багатовимірна класифікація** була розроблена біологами при вирішенні проблем дискримінації для класифікування організмів. Однією з перших робіт, присвячених цьому напрямку, вважають роботу Р. Фішера (1930 р.), в якій організми поділялися на підвиди залежно від результатів вимірювань їх фізичних параметрів. Біологія була і залишається найбільш затребуваним і зручним середовищем для розробки багатовимірних методів класифікації.

Розглянемо задачу класифікації на простому прикладі. Припустимо, є база даних про клієнтів туристичного агентства з інформацією про вік і доходи за місяць. Є рекламний матеріал двох видів: більш дорогий і комфортний відпочинок і дешевший, молодіжний відпочинок. Відповідно, визначені два класи клієнтів: клас 1 і клас 2. База даних наведена в табл. 2.2.

База даних клієнтів туристичного агентства.

Код клієнта	Вік	Дохід	Клас
1	18	25	1
2	22	100	1
3	30	70	1
4	32	120	1
5	24	15	2
6	25	22	1
7	32	50	2
8	19	45	2
9	22	75	1
10	40	90	2

**Завдання.** Визначити, до якого класу належить новий клієнт і який з двох видів рекламних матеріалів йому варто відсилати.

Для наочності представимо нашу базу даних у двомірному просторі (вік і дохід), у вигляді множини об'єктів, що належать класам 1 (помаранчева мітка) і 2 (сіра мітка). На рис. 2.3 наведені об'єкти з двох класів.

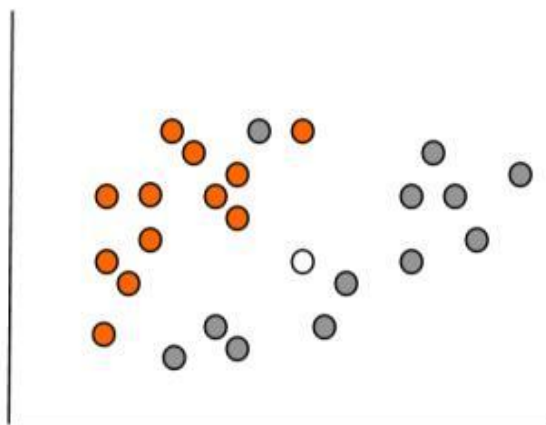


Рис. 2.3. Множина об'єктів бази даних у двомірному вимірі

Розв'язок нашої задачі буде полягати в тому, щоб визначити, до якого класу належить новий клієнт, на малюнку позначений білою міткою.

**Мета процесу класифікації** полягає в тому, щоб побудувати модель, яка використовує прогнозуючі атрибути в якості вхідних параметрів і отримує значення залежного атрибута. **Процес класифікації** полягає в розбитті множини об'єктів на класи за певним критерієм.

**Класифікатором** називається якась сутність, що визначає, якому з визначених класів належить об'єкт за вектором ознак.

Для проведення класифікації за допомогою математичних методів необхідно мати формальний опис об'єкта, яким можна оперувати, використовуючи математичний апарат класифікації. Таким описом у нашому випадку виступає база даних. Кожен об'єкт (запис бази даних) несе інформацію про деякі властивості об'єкта.

Набір вихідних даних (або вибірку даних) розбивають на **дві множини: навчальну і тестову**.

**Навчальна множина (training set)** – множина, яка включає дані, що використовуються для навчання (конструювання) моделі.

Така множина містить вхідні та вихідні (цільові) значення прикладів. Вихідні значення призначені для навчання моделі.

**Тестова (test set) множина** також містить вхідні та вихідні значення прикладів. Тут вихідні значення використовуються для перевірки працездатності моделі.

Процес класифікації складається з **двох етапів: конструювання моделі та її використання**.

**1. Конструювання моделі:** опис множини визначених класів.

- Кожен приклад набору даних відноситься до одного визначеного класу.

- На цьому етапі використовується навчальна множина, на ньому відбувається конструювання моделі.

- Отримана модель **представлена класифікаційними правилами, деревом рішень або математичною формулою**.

**2. Використання моделі:** класифікація нових або невідомих значень.

- Оцінка правильності (точності) моделі.
- Відомі значення з тестового прикладу порівнюються з результатами використання отриманої моделі.
  - Рівень точності – відсоток правильно класифікованих прикладів у тестовій множині.
  - Тестова множина, тобто множина, на якій тестується побудована модель, не повинна залежати від навчальної множини.
  - Якщо точність моделі допустима, можливе використання моделі для класифікації нових прикладів, клас яких невідомий.

Процес класифікації, а саме, конструювання моделі та її використання, представлений на рис. 2.4. і рис. 2.5.

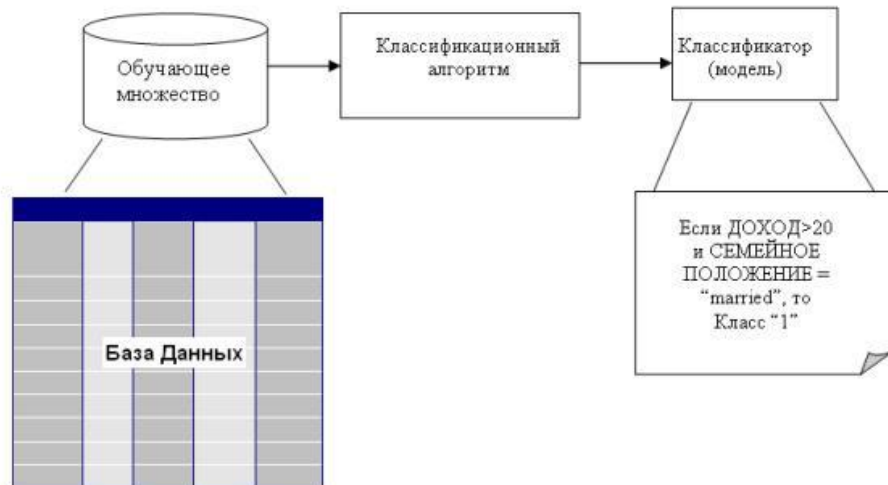


Рис. 2.4. Процес класифікації. Конструювання моделі

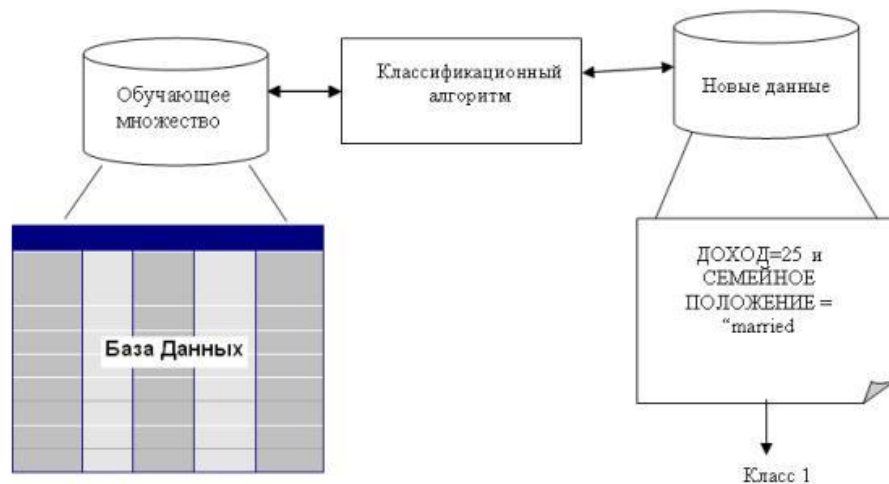


Рис. 2.5. Процес класифікації. Використання моделі



## 2.6. Методи, що застосовуються для вирішення задач класифікації

Для класифікації використовуються різні методи. Основні з них:

- Класифікація за допомогою **дерев рішень**;
- Байєсівська (наївна) класифікація;
- Класифікація за допомогою штучних нейронних мереж;
- Класифікація методом опорних векторів;
- Статистичні методи, зокрема, **лінійна регресія**;
- Класифікація за допомогою **методу найближчого сусіда**;
- Класифікація cbr-методом;
- Класифікація за допомогою генетичних алгоритмів.

Схематичне рішення задачі класифікації деякими методами (за допомогою лінійної регресії, дерев рішень і нейронних мереж) наведені на рис.

2.6 – рис. 23.8.

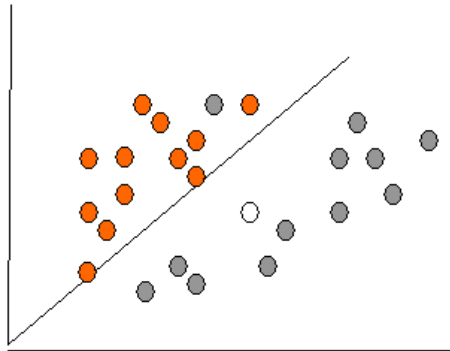


Рис. 2.6. Рішення задачі класифікації методом лінійної регресії

```
if X > 5 then grey
  else if Y > 3 then orange
    else if X > 2 then grey
      else orange
```

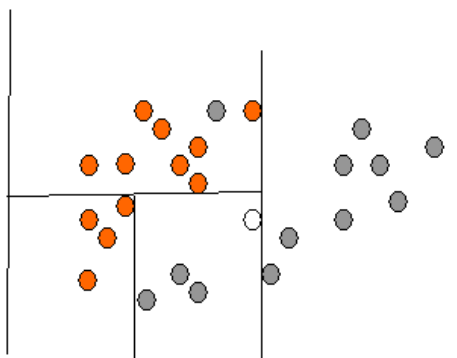


Рис. 2.7. Рішення задачі класифікації методом дерев рішень

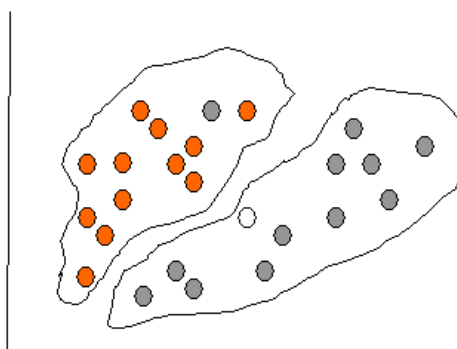


Рис. 2.8. Рішення задачі класифікації методом нейронних мереж

**Точність класифікації: оцінка рівня помилок.** Оцінка точності класифікації може проводитися за допомогою крос-перевірки. Крос-перевірка (Cross-validation) – це процедура оцінки точності класифікації на даних з тестової множини, яку також називають крос-перевірочною множиною. Точність класифікації тестової множини порівнюється з точністю класифікації навчальної множини. Якщо класифікація тестової множини дає приблизно такі ж результати по точності, як і класифікація навчальної множини, вважається, що дана модель пройшла крос-перевірку.

Поділ на навчальну і тестову множину здійснюється шляхом ділення вибірки в певній пропорції, наприклад навчальна множина – дві третини даних і тестова – одна третина даних. Цей спосіб слід використовувати для вибірок з великою кількістю прикладів. Якщо ж вибірка має малі обсяги, рекомендується застосовувати спеціальні методи, при використанні яких навчальна і тестова вибірки можуть частково перетинатися.

**Оцінювання класифікаційних методів.** Оцінювання методів слід проводити, виходячи з таких характеристик: **швидкість, робастність, інтерпретованість, надійність.**

**Швидкість** характеризує час, який потрібен на створення моделі та її використання.

**Робастність**, тобто стійкість до будь-яких порушень вихідних передумов, означає можливість роботи з зашумленими даними і пропущеними значеннями в даних.

**Інтерпретованість** забезпечує можливість розуміння моделі аналітиком.

Властивості класифікаційних правил:

- розмір дерева рішень;
- компактність класифікаційних правил.

**Надійність** методів класифікації передбачає можливість роботи цих методів при наявності в наборі даних шумів і викидів.

## **2.7. Завдання кластеризації**

Тільки що ми вивчили завдання класифікації, що відноситься до стратегії "навчання з учителем".

У цій частині лекції ми введемо поняття кластеризації, кластера, коротко розглянемо класи методів, за допомогою яких вирішується завдання кластеризації, деякі моменти процесу кластеризації, а також розберемо приклади застосування кластерного аналізу.

Завдання кластеризації схоже з завданням класифікації, є його логічним продовженням, але його відмінність в тому, що класи досліджуваного набору даних заздалегідь не зумовлені.

Синонімами терміну "кластеризація" є "автоматична класифікація", "навчання без вчителя" і "таксономія".

**Кластеризація** призначена для розбиття сукупності об'єктів на однорідні групи (кластери або класи). Якщо дані вибірки представити як точки в просторі ознак, то завдання кластеризації зводиться до визначення "згущувань точок".

Мета кластеризації – пошук існуючих структур. Кластеризація є описовою процедурою, вона не робить ніяких статистичних висновків, але дає можливість провести розвідувальний аналіз і вивчити "структуру даних".

Саме поняття "**кластер**" визначене неоднозначно. Перекладається поняття кластер (cluster) як "скупчення", "гроно".

**Кластер** можна охарактеризувати як групу об'єктів, що мають загальні властивості.

Характеристиками кластера можна назвати дві ознаки:

- внутрішня однорідність;
- зовнішня ізольованість.

Питання, що ставиться аналітиками при вирішенні багатьох завдань, полягає в тому, як організувати дані в наочні структури, тобто розгорнути таксономії.

Найбільше застосування кластеризація спочатку отримала в таких науках як біологія, антропологія, психологія. Для вирішення економічних завдань кластеризація тривалий час мало використовувалася через специфіку економічних даних і явищ.

У табл. 2.3 наведено порівняння деяких параметрів задач класифікації та кластеризації.

*Таблиця 2.3. Порівняння класифікації та кластеризації*

Характеристика	Класифікація	Кластеризація
<b>Контрольованість навчання</b>	Контрольоване навчання	Неконтрольоване навчання
<b>Стратегія</b>	Навчання з вчителем	Навчання без вчителя
<b>Наявність позначки класу</b>	Навчальна множина супроводжується міткою, що вказує клас, до якого належить спостереження	Мітки класу навчальної множини невідомі
<b>Підстава для класифікації</b>	Нові дані класифікуються на підставі навчальної множини	Дано множину даних з метою встановлення існування класів або кластерів даних

На рис. 2.10 схематично представлені завдання класифікації і кластеризації.

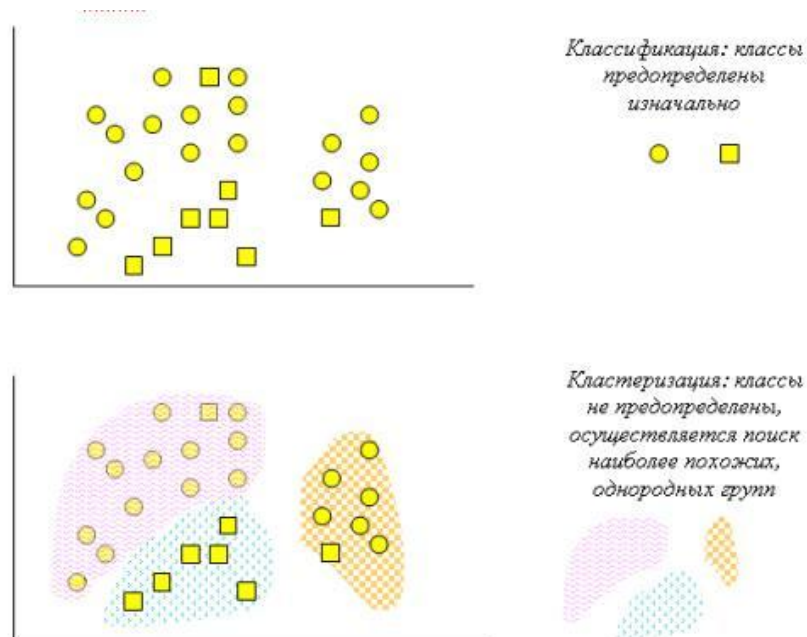


Рис. 2.10. Порівняння задач класифікації та кластеризації

Кластери можуть бути **такими, що не перетинаються**, або **ексклюзивними** (non-overlapping, exclusive), і такими, що **перетинаються** (overlapping). Схематичне зображення таких кластерів дано на рис. 2.11.

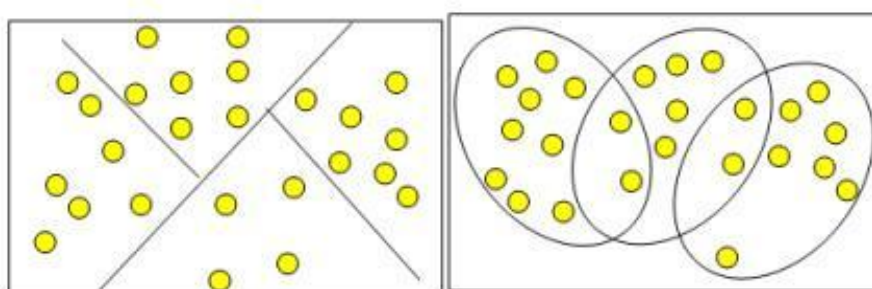


Рис. 2.11. Кластери, що не перетинаються і перетинаються

Слід зазначити, що в результаті застосування різних методів кластерного аналізу можуть бути отримані кластери різної форми. Наприклад, можливі кластери "ланцюжкового" типу, коли кластери представлені довгими "ланцюжками", кластери подовженої форми і т.д., а деякі методи можуть створювати кластери довільної форми.

Різні методи можуть прагнути створювати кластери певних розмірів (наприклад, малих або великих) або припускати в наборі даних наявність кластерів різного розміру.

Деякі методи кластерного аналізу особливо чутливі до шумів або викидів, інші – менш.

В результаті застосування різних методів кластеризації можуть бути отримані неоднакові результати, це нормально і є особливістю роботи того чи іншого алгоритму.

Дані особливості слід враховувати при виборі методу кластеризації.

Детальніше про всі властивості кластерного аналізу буде розказано в лекції, присвяченій його методам.

На сьогоднішній день розроблено більше сотні різних алгоритмів кластеризації. Деякі, найбільш часто використовувані, будуть детально описані в наступних лекціях.

Наведемо коротку характеристику підходів до кластеризації.

– *Алгоритми, засновані на поділі даних (Partitioning algorithms), в тому числі ітеративні:*

- поділ об'єктів на  $k$  кластерів;
- ітеративний перерозподіл об'єктів для поліпшення кластеризації.

– *Ієрархічні алгоритми (Hierarchy Algorithms):*

• агломерація: кожен об'єкт спочатку є кластером, кластери, з'єднуючись один з одним, формують більший кластер і т.д.

– *Методи, засновані на концентрації об'єктів (Density-based methods):*

- засновані на можливості з'єднання об'єктів;
- ігнорують шуми, знаходження кластерів довільної форми.

– *Грид-методи (Grid-based methods):*

- квантування об'єктів в грид-структури.

– *Модельні методи (Model-based):*

• використання моделі для знаходження кластерів, найбільш відповідних даним.

**Оцінка якості кластеризації** може бути проведена на основі таких процедур:

- ручна перевірка;
  - встановлення контрольних точок та перевірка на отриманих кластерах;
  - визначення стабільності кластеризації шляхом додавання в модель нових змінних;
  - створення і порівняння кластерів з використанням різних методів.
- Різні методи кластеризації можуть створювати різні кластери, і це є нормальним явищем. Однак створення схожих кластерів різними методами вказує на правильність кластеризації.

**Процес кластеризації** залежить від обраного методу і майже завжди є ітеративним. Він може стати захоплюючим процесом і включати множини експериментів з вибору різноманітних параметрів, наприклад, міри відстані, типу стандартизації змінних, кількості кластерів і т.д. Однак експерименти не повинні бути самоціллю – адже кінцевою метою кластеризації є отримання змістовних відомостей про структуру досліджуваних даних. Отримані результати вимагають подальшої інтерпретації, дослідження і вивчення властивостей і характеристик об'єктів для можливості точного опису сформованих кластерів.

## **2.8. Застосування кластерного аналізу**

Кластерний аналіз застосовується в різних областях. Він корисний, коли потрібно класифікувати велику кількість інформації. Огляд багатьох опублікованих досліджень, що проводяться за допомогою кластерного аналізу, дав Хартіган (Hartigan, 1975).

Так, в медицині використовується кластеризація захворювань, лікування захворювань або їх симптомів, а також таксономія пацієнтів, препаратів і т.д. В археології встановлюються таксономії кам'яних споруд і древніх об'єктів і т.д. У маркетингу це може бути задача сегментації конкурентів і споживачів. У менеджменті прикладом завдання кластеризації буде розбиття персоналу на різні групи, класифікація споживачів і постачальників, виявлення схожих виробничих ситуацій, при яких виникає шлюб. У медицині – класифікація

симптомів. У соціології завдання кластеризації – розбиття респондентів на однорідні групи.

### ВИКОРИСТАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Паклин Н.Б., Орешков В.И. Бизнес аналитика: от данным к знаниям: Учебное пособие. СПб.:Питер: 2013, 704 с.
2. Барсегян А.А. Технологии анализа данных:Data Mining, Visual Mining, Text Mining, OLAP. – 2007, 384с.
3. Барсегян А.А. Анализ данных и процессов: учеб. пособие / А.А. Барсегян, М.С. Куприянов, И.И. Холод, М.Д. Тесс, С. И. Елизаров. – 3-е изд., перераб. и доп. – СПб.: БХВ-Петербург, 2009. – 512 с.: ил. + CD-ROM
4. Щербаков А. Интернет-аналитика. Поиск и оценка информации в web-ресурсах. Практическое пособие. – М.: Книжный мир, 2012. – 78 стр.
5. Марманис Х., Бабенко Д. Алгоритмы интеллектуального Интернета. Передовые методики сбора, анализа и обработки данных. – Пер. с англ. – СПб.: Символ-Плюс, 2011. – 480 с., ил.
6. Матвейкин В.Г., Дмитриевский Б.С., Ляпин Н.Р. Информационные системы интеллектуального анализа. – М.: Машиностроение, 2008. – 92 с.; ил.
7. Низаметдинов Ш.У. Анализ данных: учебное пособие. М.МИФИ, 2006. 248 с.
8. Симчера В.М. Методы многомерного анализа статистических данных: учеб. пособие. – М.: Финансы и статистика, 2008. – 400 с.: ил.
9. Вовк Р.В. Моделювання міжнародних відносин: навч. посіб./ Р.В.Вовк. – К.: Знання, 2012. – 246 с.
10. Маннинг К.Д., Рагхаван П., Шютце Х. Введение в информационный поиск: PProgramming Problems. – 2010. – № 2-3. – pp. 261-270.



*Наукове видання*

О.П. Адамів, О.С. Башуцька, Д.І. Боднар,  
Л.М. Буяк, О.Г. Возняк, І.В. Данилюк, Л.В. Дума,  
А.Я. Мушак, Р.М. Пасічник, К.М. Пришляк, Н.Г. Хома.

# **МЕТОДИ ТА МОДЕЛІ УПРАВЛІННЯ СКЛАДНИМИ СИСТЕМАМИ**

**Монографія**

*За редакцією  
доктора економічних наук,  
професора Л. М. Буяк*

Підписано до друку 11.10.2021 р.  
Формат 60x84/16. Папір офсетний.  
Друк офсетний. Зам. № 21-789  
Умов.-друк. арк. 20,9. Обл.-вид. арк. 23,1.  
Тираж 300 прим.

Видавець Західноукраїнський національний університет  
вул. Львівська, 11, м. Тернопіль 46009

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи  
до Державного реєстру видавців ДК № 7284 від 18.03.2021 р.

Видавничо-поліграфічний центр «Університетська думка»  
вул. Бережанська, 2, м. Тернопіль 46009  
тел. (0352) 47-58-72  
E-mail: edition@wunu.edu.ua

Віддруковано ФО-П Шпак В. Б.  
Свідоцтво про державну реєстрацію В02 № 924434 від 11.12.2006 р.  
м. Тернопіль, бульвар Просвіти, 6/4. тел. 097 299 38 99.  
E-mail: tooums@ukr.net