Р. В. Руська

ТЕОРІЯ ІМОВІРНОСТІ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА В ПСИХОЛОГІЇ

Навчальний посібник

ТЕРНОПІЛЬ
2020

Розглянуто та схвалено на засіданні кафедри прикладної математики
протокол № 7 від 11 березня 2020р.

Руська Р.В.: Теорія імовірності та математична статистика в психології: Навч.посіб.– Тернопіль.– 2020. –с. 112

У навчальному посібнику викладено основні теоретичні положення теорії імовірності та математико-статистичних досліджень і напрями розвитку сучасних математико-статистичних методів у психології. Теоретичний матеріал супроводжується великою кількістю професійно спрямованих прикладів. Навчальний посібник спрямований на набуття вмінь користування математико-статистичними методами обробки інформації у психологічних дослідженнях. Навчальний посібник розрахований на студентів та слухачів вищих навчальних закладів, що навчаються за напрямом “Психологія”, і для всіх, хто займається психологічними дослідженнями.

Передмова

З історії психології відомо, що психофізика почала свій розвиток із установлення математичних закономірностей (формула Вебера-Фехнера). В даний час математичні процедури обов'язково входять у такі розділи психології як психометрика, психодіагностика, диференціальна психологія, психогенетика, використовує структурне моделювання. Використання математичних методів дозволяє науково відібрати і систематизувати дані, а також дозволяє виявити закономірності, які на перший погляд не завжди очевидні. Математична обробка результатів, які отримані в ході проведення психологічних досліджень, є одним із найважливіших етапів наукового пошуку. Висновки, до яких приходить дослідник при вивченні певних психологічних явищ, не можуть розглядатися як істинні, якщо вони не підкріплені математичними розрахунками. Психологічні явища, які вивчаються дослідником, повинні бути перевірені з точки зору їх статистичної значимості, тобто відповідати умовам статистичної достовірності. Психолог, який повинен підготувати висновки про психологічний стан індивіду та надати професійні рекомендації, зобов’язаний провести порівняння індивідуальних показників із показниками, згідно норми, за допомогою методів математичної статистики.

Математико-статистичні методи розширили можливості психологічних досліджень та підвищили надійність їх результатів. Основою математичної статистики є теорія ймовірностей. Тому перший розділ посібника містить виклад основних положень теорії ймовірностей та математичної статистики. У другому розділі розглянуто аналіз зв’язку між змінними. У третьому розділі посібника розглядається регресійний аналіз. В четвертому – методи статистичного висновку. В п’ятому – порівняння розподілів.

У цьому посібнику автор намагався викласти матеріал максимально просто, приділяючи увагу застосуванню розглядуваних методів.

РОЗДІЛ І.КЛАСИЧНІ МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ

§ 1.1. ВИЗНАЧЕННЯ ЙМОВІРНОСТІ

ІМОВІРНІСТЬ ПОДІЇ

В своїй роботі психолог досить часто стикається з проблемою вимірювання індивідуально-психологічних особливостей, таких, наприклад, як креативність, нейротизм, імпульсивність, властивості нервової системи і т.п. Для цього розробляються спеціальні вимірювальні процедури, втому числі і тести. Крім того в психології широко використовуються експериментальні методи. Головне полягає втому, що в ході експерименту характеристики, що вивчаються, можуть отримувати кількісне вираження. Кількісні дані, отримані внаслідок ретельно спланованого експерименту за допомогою спеціальних вимірювальних процедур, в подальшому використовуються для математико-статистичної обробки. Вимірювання може бути визначене як приписування чисел об'єктам або подіям, яке здійснюється за певними правилами.

Масовими називають явища, умови спостереження яких можуть багаторазово відтворюватись у часі чи просторі.

Випадковими масовими явищами називають такі, умови спостереження яких неоднозначно пов'язані з результатом цих спостережень.

Якщо неможливо однозначно пов'язати результати спостереження з умовами, в яких явище спостерігається, для вивчення випадкових масових явищ застосовують принцип групування, який полягає:

1) у визначенні множини всіх можливих результатів спостережень, які спостерігались чи можуть спостерігатися;

2) у визначенні частоти появи тих чи інших результатів.

Кожне відтворення умов спостережень та фіксацію його результатів називають ще дослідом, експериментом та ін. Послідовність n (натуральне число) результатів спостережень досліджуваного випадкового масового явища називають вибіркою і записують у вигляді:

$a_1, a_2, \ldots, a_n$,

де: a_1 – перший елемент вибірки; a_2 – другий елемент вибірки; a_n – n-й елемент вибірки.

Приклад. Стать новонародженої дитини: *Х, Х, Х, Д, Х, Х, Д Д*. n=8.

Приклад. Темперамент (холерик, сангвінік, меланхолік, флегматик): *Х, М, М, С, С, М, С, С, Ф*. n=9.

Приклад. Зріст (см): 165, 170, 180, 187, n=4.

Кількість елементів вибірки n називають об'ємом вибірки і позначають N. З умов випадковості, спостереження, визначають за всіма можливими результатами, що спостерігалися чи могли спостерігатися. Цю множину позначають через Ω і називають простором елементарних подій чи достовірною подією. Результати, з яких складається множина Ω, називають елементарними подіями ω. Для прикладу 1 маємо таке: стать новонародженої дитини: $\Omega=\{Х,Д\}$, $\omega_1=Х$, $\omega_2=Д$; для прикладу 2 – темперамент: $\Omega=\{Х, М, С, Ф\}$, якщо вважати, що існують 4 типи темпераменту (холерик, меланхолік, сангвінік, флегматик), $\omega_1=Х$, $\omega_2=М$, $\omega_3=С$, $\omega_4=Ф$; для 3 – зріст (см): $\Omega = [165, 187]$ є множиною дійсних чисел, хоча в цьому випадку діапазон можливих значень зросту можна обрати й іншим шляхом.

Будь-яка підмножина A простору елементарних подій називається випадковою подією. Елементарні події, що входять в A, називаються сприятливими для A. Подія A настає, якщо настає яка-небудь елементарна подія, що входить в A. Сама множина Ω називається **достовірною** подією, порожня множина ∅ – **неможливою подією**.

Операцією над подіями називають перетворення однієї чи більше подій, результатом якого є нова подія.

Об'єднанням (***сумою***) двох подій A і B називають подію $A \cup B$ ($A+B$), яка відбувається тоді, коли відбувається принаймні одна з подій А або B (тобто подія A, або подія B, або обидві разом).

Перетином (***добутком***) двох подій A і B називають подію $A \cap B$ ($A \cdot B$), яка відбувається тоді, коли відбуваються обидві події A і B. Події A і B називаються несумісними, якщо $A \cap B=\emptyset$.

Різницею подій A і B називають подію $A \backslash B$, яка відбувається тоді, коли відбувається подія A і не відбувається подія B. Кажуть, що подія A спричиняє подію B, якщо подія B відбувається кожний раз, коли відбувається подія A. Позначається це $A \subset B$.

Події A і B називаються **рівносильними**, якщо поява однієї з цих подій спричиняє появу другої події, тобто $A \subset B$ та $B \subset A$.

Подія $\bar{A}$ називається протилежною до події A, якщо $\bar{A}$ відбувається тоді і тільки тоді, коли не відбувається А.

Сума, добуток та різниця в початковому визначенні перетворюють дві або більше подій, тому їх називають *бінарними* і позначають так само, як для арифметичних відповідників. Заперечення застосовується до однієї події, тому його називають *унарним*.

Якщо простір елементарних подій $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$ є скінченною множиною і всі елементарні події рівноможливі – це означає, що немає об'єктивних причин вважати одну з елементарних подій більш ймовірною порівняно з іншими. Нехай A – випадкова подія, що містить m сприятливих елементарних подій ($N(A)=m$).

Ймовірністю випадкової події A називається відношення числа результатів випробування, сприятливих для A, до числа всіх рівноможливих і попарно несумісних результатів випробування:

$$P(A) = \frac{m}{n} \tag{1.1}$$

Властивості ймовірності:

1. Для кожної події $A \subset \Omega$ справджується нерівність:

$$0 \le P(A) \le 1.$$

2. Ймовірність достовірної події дорівнює 1:

$$P(\Omega)=1.$$

3. Ймовірність неможливої події дорівнює нулю:

$$P(\emptyset)=0.$$

4. Якщо події A і B несумісні, тобто $A \cap B = \emptyset$, тоді:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

5. Якщо $A \subset B$, тоді $P(A) \le P(B)$.

Статистичні ймовірності. Нехай проведено N незалежних випробувань, в кожному з яких подія A може відбутися. Припустимо, що подія A відбулася

M раз ($M \leq N$). Число $\frac{M}{N}$ називається **відносною частотою** події A. Відносну частоту можна знайти тільки після проведення випробувань. В багатьох випадках відносна частота події A стабілізується при великому N. Відносні частоти при різних N відрізняються мало і коливаються біля деякого сталого числа. Такі події називаються **статистично стійкими**.

Число, до якого збігаються відносні частоти події, називається **статистичною ймовірністю події**.

Кажуть, що відносна частота $\frac{M}{N}$ прямує за ймовірністю до числа p, якщо для довільного числа $\varepsilon>0$ ймовірність того, що $\left|\frac{M}{N}-p\right|<\varepsilon$ прямує до одиниці при $N\to\infty$, тобто

$$P\left(\left|\frac{M}{N}-p\right|<\varepsilon\right)=1.$$

Позначатимемо збіжність за ймовірністю так:

$$\frac{M}{N}\xrightarrow{P}p, N\to\infty.$$

Число p називається **статистичною ймовірністю** статистично стійкої події, якщо відносна частота цієї події прямує за ймовірністю до числа p при $N\to\infty$, тобто

$$\frac{M}{N}\xrightarrow{P}p, N\to\infty.$$

Мірою множини на прямій, площині, у просторі є відповідно довжина, площа та об'єм відповідної геометричної фігури.

Нехай множина всіх наслідків даного експерименту утворює деяку множину Ω, що має додатну скінченну міру $m(\Omega)>0$ (довжину, площу, об'єм тощо). При цьому подіями вважають ті частини $A\subset\Omega$, що також мають міру. Тоді ймовірність $P(A)$ кожної такої події $A\subset\Omega$ можна визначати відношенням міри множини A до міри множини Ω, тобто:

$$P(A)=\frac{mes(A)}{mes(\Omega)}. \qquad (1.2)$$

Зауважимо, що формула (1.1) є частинним випадком формули (1.2), оскільки кількість елементів також є мірою, яка визначена для будь-якої підмножини A скінченної множини Ω: $mes(A)=m$, $mes(\Omega)=n$.

Приклад. Два студенти домовились зустрітись за кавою між дванадцятою і половиною першої дня. Той, хто прийде на зустріч першим, чекає на іншого 15 хвилин, після чого йде. Яка ймовірність, що вони зустрінуться?

Розв'язання: Оскільки прихід кожного із студентів рівноможливий в будь-який момент часу між дванадцятою та половиною першої, то простір Ω можна розглядати як множину точок (x, y) квадрата $[0; 0,5]\times[0; 0,5]$ (мал. 1). Будь-яка підмножина цієї множини буде елементом σ-алгебри S . Імовірність P довільної події A введемо як відношення площі фігури, утвореної точками, що складають цю подію, до площі всього квадрата, тобто $P(A) = S_A / \tfrac{1}{4} = 4S_A$. Введена таким чином імовірність відповідає властивостям імовірності (1-3).

Позначимо через B подію "студенти зустрінуться". Подія B здійсниться, якщо моменти приходу кожного зі студентів відрізнятимуться не більше, ніж на ¼ години. Таким чином події B відповідатиме множина точок квадрата, координати яких задовольнятимуть нерівності $|x-y| \le \frac{1}{4}$. На мал. 1.1 ця множина заштрихована.

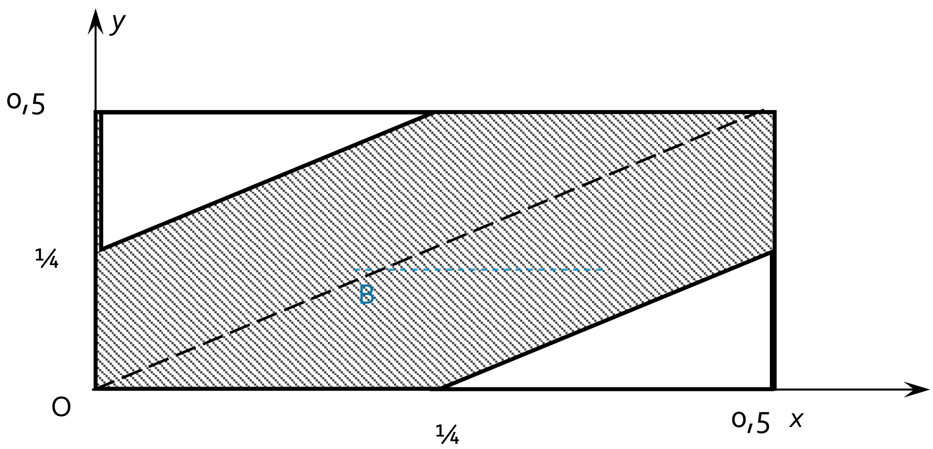


Рис. 1.1

Тоді

$$P(B) = 4S_B = 4\cdot\left(0,25 - 2\cdot\frac{0,25\cdot 0,25}{2}\right) = 0,75.$$

СТАНДАРТНІ МЕТОДИ РОЗРАХУНКІВ ПО СХЕМАХ КЛАСИЧНИХ ІМОВІРНОСТЕЙ

Для того, щоб мати деякі стандартні методи при розрахунках по схемах класичних імовірностей розглянемо два основні принципи комбінаторики. Комбінаторикою називають розділ математики, що вивчає правила групування елементів множини.

Основне правило комбінаторики. Між скінченними множинами A та B можна встановити взаємно однозначну відповідність тоді і тільки тоді, коли вони мають однакову кількість елементів.

Принцип суми. Нехай $n(A)$, $n(B)$ – кількості елементів скінченних неперетинних множин A та B відповідно. Тоді для множини $C=A\cup B$ кількість елементів

$$n(C)=n(A)+n(B). \tag{1.3}$$

Принцип добутку. Нехай потрібно послідовно виконати k дій, причому першу дію можна виконати n_1 способом, після чого другу дію – n_2 способами і так далі до k-ї дії, яку можна виконати n_k способами. Тоді всі k дій можна виконати $n_1 \cdot n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ способами.

Розміщення, перестановки, комбінації:

Нехай M – множина, що містить n елементів.

Означення. Розміщенням із n елементів по k називають довільну впорядковану підмножину з k елементів із множини M. Два розміщення вважають різними не тільки тоді, коли вони складаються з різних елементів, але й тоді, коли вони складаються з однакових елементів, але відрізняються порядком їх розташування. Кількість розміщень з n елементів по k ($k\leq n$) позначають A_n^k і обчислюють за формулою:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} \tag{1.4}$$

Означення. Розміщенням з повтореннями з n елементів по k називають довільну впорядковану підмножину з k елементів із множини M (елементи не обов’язково різні).

Кількість розміщень із повтореннями з n елементів по k обчислюють за формулою:

$$\overline{A_n^k} = n^k \tag{1.5}$$

Зауваження. $\overline{A_n^k}$ – це кількість способів, якими можна розкласти k різних предметів у n ящиків.

Приклад. Скласти всі двозначні числа з трьох цифр 3, 5, 7 (числа з однаковими цифрами не враховувати).

Розв'язання. Маємо 35, 37, 53, 57, 73, 75. Загальну кількість різних чисел можна підрахувати за формулою (1.4): $A_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = 3! = 2 \cdot 3 = 6$

Приклад. У ліфт шістнадцятиповерхового будинку зайшло на першому поверсі 10 осіб. Скількома способами вони можуть вийти з ліфта, починаючи з другого поверху?

Розв'язання. Задача зводиться до розкладання 10 предметів у 15 ящиків. Кількість таких способів дорівнює $\overline{A_{15}^{10}} = 15^{10}$.

Означення. Розміщення з n елементів по n називають **перестановками**. Різні перестановки відрізняються лише порядком розташування елементів.

Кількість перестановок з n елементів дорівнює добутку всіх натуральних чисел від 1 до n

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \cdot n = n! \qquad (1.6)$$

Означення. Перестановками з повтореннями називають розміщення з n елементів, які мають однотипні елементи. Кількість різних перестановок з повторенням, які можна утворити з n елементів, серед яких є k_1елементів першого типу, k_2елементів другого типу, … , k_m елементів m-го типу,

$$P_n(k_1, k_2, \ldots k_m) = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_m!} \qquad (1.7)$$

Приклад. Скількома способами можна скласти список з п'яти студентів?

Розв'язання. За формулою (1.6) отримаємо: $P_n = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

Приклад. Скільки різних «слів» можна утворити перестановкою літер у слові «психологія»?

Розв'язання. Слово «психологія» містить n=10 літер. Літер одного типу: «п» – одна, «с» – одна, «и» – одна, «х» – одна, «о» – дві, «л» – одна, «г» – одна, «і» – одна, «я» – одна. За формулою (1.7) отримаємо:

$$P_{10}(1,1,1,1,2,1,1,1,1) = \frac{10!}{1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = 1814400$$

Означення. Комбінацією (сполукою) з n елементів по k називають довільну підмножину з k елементів із множини M, яка відрізняється одна від одної принаймні одним елементом.

Порядок розташування елементів у комбінаціях не має значення. Кількість комбінацій з n елементів по k (k≤n) позначають C_n^k та обчислюють за формулою

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}! \tag{1.8}$$

Означення. Комбінацією з повтореннями з n елементів по k називають довільну множину з k елементів із множини M (елементи не обов'язково різні).

Кількість комбінацій з повтореннями з n елементів по k обчислюють за формулою

$$\overline{\widetilde{N}_n^k} = \widetilde{N}_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} \tag{1.9}$$

Зауваження. $\overline{\widetilde{N}_n^k}$ – це кількість способів, якими можна розкласти k однакових предметів по n ящиках.

Приклад. На конференції присутні 30 студентів. Скількома способами можна обрати президію у складі трьох осіб?

Розв'язання. Кількість способів дорівнює кількості комбінацій із 30 елементів по 3: $C_{30}^3 = \frac{30!}{3!27!} = \frac{27\cdot 29\cdot 30}{2\cdot 3} = 4060$

Приклад. У кондитерській є 6 різних сортів тістечок. Скількома способами можна купити 8 тістечок?

Розв'язання. Шукане число $\overline{\widetilde{N}_6^8} = \widetilde{N}_{6+8-1}^8 = \frac{13!}{8!5!} = \frac{9\cdot 10\cdot 11\cdot 12\cdot 13}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 1287$

ФОРМУЛА ПОВНОЇ ЙМОВІРНОСТІ

Якщо події $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ утворюють повну систему несумісних подій, то $A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n = A$ і

$$P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)+\ldots+P(A_n)=1. \tag{1.10}$$

Якщо при знаходженні ймовірності події у випробуванні ніяких додаткових умов, крім умов самого випробування, не накладається, то знайдена ймовірність називається ***безумовною***.

Якщо накладаються додаткові умови, то знайдену ймовірність називають ***умовною***.

Умовною ймовірністю $P_A(B)$ називають імовірність події B, знайдену в припущенні, що подія A здійснилася.

Умовна ймовірність $P_A(B)$ дорівнює відношенню ймовірності добутку подій A і B до ймовірності події A, тобто

$$P_A(B) = \frac{P(AB)}{P(A)}. \qquad (1.11)$$

Приклад. В урні є 5 білих і 4 чорних кульки. З неї послідовно без повернення виймають дві кульки. Знайти ймовірність, що друга кулька виявилась білою, якщо: а) перша кулька була білою? б) перша кулька була чорною?

Розв'язання: Введемо позначення: A — перша кулька була білою; B — перша кулька була чорною; C— друга кулька виявиться білою.

а) Якщо перша кулька виявилась білою, то в урні залишилось 4 білих і 4 чорних кульки. Тому ймовірність, що друга кулька виявиться білою дорівнює $P_A(C) = \frac{4}{8} = 0{,}5$.

б) Якщо перша кулька виявилась чорною, то в урні залишилось 5 білих і 3 чорних кульки. Тому ймовірність, що друга кулька виявиться білою дорівнює $P_B(C) = \frac{5}{8} = 0{,}625$.

З другого боку ймовірність, що перша кулька виявилась білою дорівнює $P(A) = \frac{5}{9}$. Знайдемо ймовірність $P(AC)$. Всеможливих послідовних виборів двох кульок є $9 \cdot 8 = 72$. Сприятливих для AC несумісних рівноможливих виходів є $5 \cdot 4 = 20$. Тому $P(AC) = \frac{20}{72} = \frac{5}{18}$ $P_A(C) = \frac{P(AC)}{P(A)} = \frac{5/18}{5/9} = 0{,}5$. Аналогічно $P(B) = \frac{4}{9}$, $P(BC) = \frac{4 \cdot 5}{72} = \frac{5}{18}$ і $P_B(C) = \frac{P(BC)}{P(B)} = = \frac{5/18}{4/9} = 0{,}625.$

Формула для обчислення ймовірності добутку двох подій.

$$P(AB) = P(A)P_A(B) = P(B)P_B(A) \qquad (1.12)$$

Дві події A і B називаються *незалежними*, якщо ймовірність однієї з них не залежить від того, чи інша подія відбулась, тобто $P(A) = P_B(A)$ чи $P(B) = P_A(B)$. Очевидно, для незалежних подій справджується формула

$$P(AB) = P(A)P(B). \qquad (1.13)$$

Дві події незалежні, якщо ймовірність їх добутку дорівнює добутку їх імовірностей.

Для довільних подій A і B справджується формула

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B). \qquad (1.14)$$

Нехай подія A може здійснитись за умови здійснення однієї з несумісних подій $B_1,\ B_2, \dots,\ B_n$, які утворюють повну групу. Нехай відомі імовірності $P(B_k), P_{B_k}(A), k = (\overline{1,n})$.

Імовірність події

A, яка може відбутися тільки після появи однієї з подій $B_1,\ B_2, \dots,\ B_n$, які утворюють повну групу, знаходиться за формулою:

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + \dots + P(B_n)P_{B_n}(A). \qquad (1.15)$$

Формула (1.15) носить назву ***формули повної ймовірності***.

Приклад. Агентство із страхування цивільної відповідальності водіїв розділяє їх на три групи: група тих, що практично не ризикують, група тих, що іноді ризикують і група тих, що дуже часто ризикують. Агентство вважає, що з усіх водіїв, які застрахували автомобілі, 30% належить до першої групи, 50% – до другої групи і 20% – до третьої. Ймовірність того, що протягом року водій з першої групи хоча б один раз потрапить в аварію, складає 0,01, для водія з другої групи – 0,02, а для водія з третьої групи – 0,09. Яка ймовірність, що навмання вибраний водій потрапить в аварію протягом року?

Розв'язання: Введемо позначення: A – водій потрапить в аварію протягом року, B_1 – водій належить до першої групи, B_2 – водій належить до другої групи, B_3 – водій належить до третьої групи. Тоді $P(B_1) = 0{,}3$, $P(B_2) = 0{,}5$, $P(B_3) = 0{,}2$, $P_{B_1}(A) = 0{,}01$, $P_{B_2}(A) = 0{,}02$, $P_{B_3}(A) = 0{,}09$. За формулою повної ймовірності:

$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + P(B_3)P_{B_3}(A) = 0{,}3 \cdot 0{,}01 + 0{,}5 \cdot 0{,}02 + 0{,}2 \cdot 0{,}09 = 0{,}031.$

ФОРМУЛИ БАЙЄСА

Нехай подія A може здійснитись за умови здійснення однієї з несумісних подій $B_1,\ B_2, \dots,\ B_n$, які утворюють повну систему. Події $B_1,\ B_2, \dots,\ B_n$ називають *гіпотезами*. Якщо подія A у випробуванні здійснилась, то повинна здійснитись одна з подій $B_1,\ B_2, \dots,\ B_n$. Виникає питання про переоцінку ймовірностей гіпотез при умові, що подія A у випробуванні здійснилась.

За формулою ймовірність добутку подій A і B_i дорівнює $P(AB_i) = P(A)P_A(B_i) = P(B_i)P_{B_i}(A)$, тому

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i)P_{B_i}(A)}{P(A)} \tag{1.16}$$

або

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i)P_{B_i}(A)}{P(B_1)P_{B_1}(A)+P(B_2)P_{B_2}(A)+\dots+P(B_n)P_{B_n}(A)}. \tag{1.16*}$$

Формули (1.16,1.16*) називають *формулами Байєса* або *формулами ймовірностей гіпотез*. Вони дозволяють переоцінити ймовірність гіпотез після того, як подія здійснилась.

Приклад. В умовах попереднього прикладу знайти ймовірність, що водій, який потрапив в аварію протягом року, належить до третьої групи.

Розв'язання: За формулами Байєса $P_A(H_3) = \dfrac{P(H_3)P_{H_3}(A)}{P(A)} = \dfrac{0,2\cdot 0,09}{0,031} \approx 0,58$.

ОСНОВНІ РОЗПОДІЛИ ДИСКРЕТНИХ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

РОЗПОДІЛ БЕРНУЛЛІ

Цілочисельна випадкова величина розподілена за рівномірним законом, рівномірно розподілена, якщо імовірності в законі розподілу мають вид:

$$p_k = P(X = k) = \frac{1}{n}, k = \overline{1,n}. \tag{1.17}$$

Розподіл Бернуллі відіграє фундаментальну роль в теорії ймовірностей, оскільки він є моделлю будь-якого випадкового експерименту, виходами якого є дві протилежні події.

БІНОМІНАЛЬНИЙ РОЗПОДІЛ

Нехай проводиться n випробувань з можливими виходами A або $\overline{A}$ в кожному випробуванні, причому подія A має сталу ймовірність p появи в одній спробі (схема Бернуллі). Тоді ймовірність появи події A k раз в n спробах дорівнює:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}. \tag{1.18}$$

де: $q = 1 - p$.

Розподіл випадкової величини *X*, яка дорівнює кількості появи події *A* в *n* випробуваннях називається *біномінальним розподілом*. Випадкову величину X можна розглядати як суму $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$, де X_i — випадкова величина з розподілом Бернуллі, яка характеризує появу події A в i–ому випробуванні. Тому математичне сподівання, дисперсія та середнє квадратичне відхилення розподіленої за біномінальним розподілом випадкової величини дорівнюють:

$$M(X) = np, \quad D(X) = npq, \quad \sigma(X) = \sqrt{npq}. \tag{1.19}$$

ПУАССОНІВСЬКИЙ РОЗПОДІЛ

Випадкова величина *X* має розподіл Пуассона з параметром $\lambda > 0, \lambda = np \leq 9$ і достатньо малим $p \ll 0{,}1$ якщо

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} . k = 0,1,2,3, \dots n, n \to \infty \tag{1.20}$$

Математичне сподівання, дисперсія та середньоквадратичне відхилення випадкової величини з розподілом Пуассона дорівнюють:

$$M(X) = \lambda, \quad D(X) = \lambda, \quad \sigma(X) = \sqrt{\lambda}. \tag{1.21}$$

Розподіл Пуассона відповідає схемі Бернуллі з великим *n*, тому цей закон розподілу називають розподілом імовірностей масових рідкісних подій.

НЕПЕРЕРВНІ РОЗПОДІЛИ

РІВНОМІРНИЙ РОЗПОДІЛ

Випадкова величина називається рівномірно розподіленою на відрізку [*a*; *b*], якщо густина її розподілу

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a;b] \\ 0, & x \notin [a;b] \end{cases} \tag{1.22}$$

Функція розподілу такої випадкової величини описується рівністю

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<a\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & x\in[a;b]\\ 1, & x>b\end{cases} \qquad (1.23)$$

Її математичне сподівання, дисперсія і середнє квадратичне відхилення відповідно дорівнюють

$$M(X)=\frac{a+b}{2},\quad D(X)=\frac{(b-a)^2}{12},\quad \sigma(X)=\frac{b-a}{2\sqrt{3}}. \qquad (1.24)$$

ПОКАЗНИКОВИЙ (ЕКСПОТЕНЦІЙНИЙ) РОЗПОДІЛ

Випадкова величина має показниковий розподіл, якщо її густина розподілу

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \lambda e^{-\lambda x}, & x\geq 0\end{cases},\quad (\lambda>0) \qquad (1.25)$$

Її функція розподілу задається рівністю

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\leq 0\\ 1-e^{-\lambda x}, & x>0\end{cases} \qquad (1.26)$$

Математичне сподівання, дисперсія і середнє квадратичне відхилення випадкової величини розподіленої за експотенційним законом дорівнюють:

$$M(X)=\frac{1}{\lambda},\quad D(X)=\frac{1}{\lambda^2},\quad \sigma(X)=\frac{1}{\lambda}. \qquad (1.27)$$

НОРМАЛЬНИЙ РОЗПОДІЛ

Випадкова величина є нормально розподілена (або розподіл Гауса), якщо густина її розподілу задається рівністю

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}. \qquad (1.28)$$

Функція нормального розподілу має вигляд

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}dt. \qquad (1.29)$$

Числові характеристики нормально розподіленої випадкової величини дорівнюють

$$M(X)=a,\quad D(X)=\sigma^2,\quad \sigma(X)=\sigma. \qquad (1.30)$$

Імовірність попадання нормально розподіленої випадкової величини в заданий інтервал визначається за формулою

$$P(\alpha \le X \le \beta) = F(x_2) - F(x_1) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right) \qquad (1.31)$$

При використанні цієї формули слід пам’ятати, що функція Лапласа $\Phi(x)$ є непарною функцією, тобто $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

§ 1.2. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

ВИМІРЮВАЛЬНІ ШКАЛИ

Числове представлення об'єктів або подій дозволяє оперувати складними поняттями в більш скороченій формі.

Вимірювання – приписування чисел об'єктам або подіям, яке здійснюється за певними правилами. Ці правила повинні встановлювати відповідність між деякими властивостями об'єктів, що розглядаються, з одного боку, і ряду чисел – з іншою. З іншої сторони *вимірювання* – це процедура, за допомогою якої об'єкт, що вимірюється, порівнюється з деяким еталоном і отримує чисельне вираження в певному масштабі або шкалі.

Вимірювальна шкала – інструмент для вимірювання безперервних властивостей об'єкта; являє собою числову систему, де відносини між різними властивостями об'єктів виражені властивостями числового ряду.

Шкали поділяють на неметричні і метричних. Відповідно до цього в психології говорять і про два підходи до психологічних вимірювань: метричний (більш точний) і неметричний (менш точний).

До неметричних відносяться *номінальна – шкала найменувань* та *рангова – шкала порядку*. До метричних відносяться *шкала інтервалів* та *шкала відношень*.

Найпростіша ***номінальна шкала*** називається дихотомічною. При вимірюваннях за дихотомічною шкалою ознаки, що вимірюються, можна кодувати двома символами або цифрами, наприклад 0 і 1, або буквами А і Б, а також будь-якими двома відмінними один від одного символами. Ознака, виміряна за дихотомічною шкалою, називається альтернативною. Прикладом такої типології є класичні темпераменти: холерик, сангвінік, меланхолік і флегматик.

Шкала порядку. Якщо можна встановити порядок розташування психологічних об'єктів відповідно до вираженості у них якоїсь властивості, то використовується порядкова шкала.

Порядкова шкала дозволяє зафіксувати ранг, або місце, кожного значення змінної по відношенню до інших значень.

Таблиця 1.1. Характеристика вимірювальних шкал С. Стівенса

ШКАЛА	ХАРАКТЕРИСТИКА	МАТЕМАТИЧНІ ОПЕРАЦІЇ	ПРИКЛАДИ
Номінальна	У межах цієї шкали об'єкти класифікуються, а класи позначаються номерами. Таким чином, число тут слугує лише назвою певного класу, а тому нічого не говорить про властивості об'єкту, крім того, що він належить до певного класу. Частковим випадком шкали найменувань є дихотомічна шкала.	встановлення рівності	Колір очей, номери гравців спортивної команди, автомобільні чи інвентарні номери, типи темпераменту тощо.
Рангова	У межах цієї шкали об'єкти розташовуються в порядку спадання чи зростання у них певної якості. При цьому кожній градації якості приписується свій порядковий номер (ранг). Фактично, об'єкти лише впорядковуються. Особливість шкали – однакові різниці між сусідніми рангами не означають однакової різниці між ступенями прояву виміряної якості.	встановлення відношень "більше-менше"	Нагороди за заслуги, військові ранги, місця на олімпіаді, ранжування досліджуваних за проявами індивідуальних рис.
Інтервальна	У межах цієї шкали існує одиниця вимірювання, з допомогою якої можна не лише впорядкувати об'єкти, але й приписати їм числа так, щоб однакові різниці між числами виражали однакові відмінності у проявах вимірюваної якості. Особливість шкали – довільний нуль, який не говорить про відсутність якості у об'єкта.	встановлення рівності інтервалів (різниць)	Календарний час, шкала температур за Цельсієм.

Пропорційна	У межах цієї шкали числа мають такі ж властивості, як і в шкалі інтервалів, але, крім того, відношення чисел виражають кількісні відношення ступенів прояву явища. Особливість шкали – наявність абсолютного нуля, який означає відсутність явища	встановлення рівності відношень	Зріст, вага, температура за Кельвіном, рівень інтелекту, мотивація тощо.

Розрізнюють шкалу *суворого порядку* (сувора впорядкованість) і *шкалу слабкого порядку* (слаба впорядкованість). У першому випадку на елементах безлічі реалізовуються відношення «більше» і «менше», а у другому – «не більше або одинаково» і «менше або одинаково». Значення величин можна замінювати квадратами, логарифмами, нормалізувати і т.д.

У порядковій (ранговой) шкалі повинно бути не менше трьох класів (груп): наприклад, відповіді на питальник: «так», «не знаю», «немає»; або – низький, середній, високий; і т.п., з тим розрахунком, щоб можна було розставити виміряні ознаки по порядку. Від класів просто перейти до чисел, якщо вважати, що нижчий клас отримує ранг (код або цифру) 1, середній – 2, вищий – 3 (або навпаки). Чим більше число класів, на які розбита вся експериментальна сукупність, тим ширші можливості статистичної обробки отриманих даних і перевірки статистичних гіпотез.

Шкала інтервалів. За допомогою шкали інтервалів можна порівнювати два об'єкти. При цьому з'ясовують, на скільки більш або менш виражена певна властивість у одного об'єкта, ніж у іншого. Шкала інтервалів має масштабну одиницю, але положення нуля на ній довільне.

Шкала відношень. Шкалу відношень називають також шкалою рівних відношень. Особливістю цієї шкали є наявність абсолютного (твердо фіксованого) нуля, який означає повну відсутність якої-небудь властивості або ознаки. Шкала відношень показує дані про вираженість властивостей об'єктів, коли можна сказати, у скільки разів один об'єкт більше або менше іншого. Це можливе лише тоді, коли крім визначення рівності, рангового порядку, рівності інтервалів відомо рівність відношень.

Шкали можуть бути і багатомірними: шкальована ознака в цьому випадку має ненульові проекції на два (або більше) відповідних параметри.

Векторні властивості, на відміну від скалярних, є багатомірними. ***Шкалювання*** – метод моделювання реальних процесів за допомогою числових систем.

До основних процедур шкалювання відносяться:

1) парне порівняння об'єктів;

2) віднесення об'єктів до категорій і т.д.

Більшість соціальних і психологічних об'єктів неможливо суворо фіксувати відносно місця і часу їх існування, через що вони не піддаються прямому вимірюванню. Тому виникає питання про специфіку числової системи, що може співвіднестися з емпіричними даними такого роду. Різні методи шкалювання якраз служать особливими прийомами трансформації якісних характеристик в деяку числову змінну.

Загальний процес шкалювання складається з конструювання за певними правилами самої шкали і включає два етапи:

1) на етапі збору даних, від методів якого залежить вигляд соціально-психологічної інформації, створюється емпірична система досліджуваних об'єктів і фіксуються типи відношень між ними;

2) на етапі аналізу даних, від методів якого залежить обсяг інформації, будується числова система, що моделює відношення емпіричної системи об'єктів; іноді цей етап означається як вибір і реалізація методу шкалювання.

Є два типи задач, що вирішуються за допомогою шкалювання:

1) числове відображення сукупності об'єктів за допомогою їх усередненої групової оцінки; в цьому випадку відображення здійснюється за допомогою шкали оцінок;

2) числове відображення внутрішніх характеристик індивідів за допомогою фіксації їх відношення до деякого соціально-психологічного явища; в цьому випадку відображення здійснюється за допомогою шкали установок.

Отже, шкали розрізнюються не тільки за математичними властивостями, але і різними способами збору інформації. У кожній шкалі застосовуються певні методи аналізу даних. В залежності від типу задач, що вирішуються з допомогою шкалювання, будуються або шкали оцінок, або шкали для вимірювання соціальних установок. У практиці психологічних досліджень кожна шкала – незалежно від рівня вимірювання – має спеціальну назву, пов'язану з найменуванням властивості об'єкта, що вивчається.

Шкала оцінок – методичний прийом, що дозволяє розподілити сукупність об'єктів, що вивчаються, по мірі вираженості загальної для них властивості.

Шкала установок – прийом, що дозволяє порівнювати індивідів по величині, інтенсивності і стійкості їх відношення до явища, що вивчається

§ 1.3. СТАТИСТИЧНЕ СПОСТЕРЕЖЕННЯ

Статистичне спостереження – це процес науково організованого планомірного збору даних.

Види статистичного спостереження:

1. За часом реєстрації фактів:

- поточне, систематичний запис фактів по мірі їх виникнення
- періодичне, реєстрація фактів через строго визначені проміжки часу,
- одночасне, реєстрація фактів по мірі їх необхідності в певний момент часу;

2. За кількістю досліджуваних:

- суцільне, вивчаються всі досліджувані певної сукупності,
- несуцільне: вибіркове, дає характеристику всієї сукупності на основі обстеження її частини; спостереження основного масиву – спостерігаються об’єкти, які займають найбільшу питому вагу в досліджуваній сукупності,
- монографічне, детальне і глибоке вивчення окремих одиниць досліджуваної сукупності.

3. За способами статистичне спостереження ділять на:

- безпосереднє, отримання відомостей шляхом особистого огляду, підрахунку і т.д.,
- документальне, отримання інформації з певних документів,
- опитування, отримання інформації зі слів опитуваного.

До принципів статистичного спостереження відносять:

1. Формулювання мети дослідження – слід визначити мету дослідження, інакше буде зібрано багато непотрібної інформації, і мало – потрібної.

2. Визначення об'єкта дослідження – слід визначити, яке коло явищ досліджується і в якому аспекті.
3. Розробка програми дослідження – в якій послідовності і які факти вивчатимуться.

Отримані з допомогою статичного спостереження матеріали можуть бути відповідним чином оброблені і на основі обробки можна зробити певні висновки про досліджуваний процес чи явище.

Всі методи кількісної обробки прийнято розділяти на первинні та вторинні. Первинна статистична обробка націлена на впорядкування інформації про об'єкт і предмет вивчення. На цій стадії «сирі» відомості групуються за тими чи іншими критеріями, що заносяться у зведені таблиці. Первинно оброблені дані дають можливість дослідникові зрозуміти характер всієї сукупності даних в цілому: про їх однорідність-неоднорідність, компактність-розкиданість, чіткість-розмитість і т.д. Ця інформація чітко спостерігається в візуальних формах представлення даних і дає відомості про їх розподіл. До основних методів первинної статистичної обробки відносяться: обчислення мір центральної тенденції, мір розкиду (мінливості) даних та квантилі розподілу.

Первинний статистичний аналіз всієї сукупності отриманих у дослідженні даних надає можливість охарактеризувати її в гранично стислому вигляді і відповісти на два головних запитання: 1) яке значення найбільш характерне для вибірки; 2) чи великий розкид даних щодо цього характерного значення, тобто яка варіативність даних.

Для вирішення першого запитання обчислюються міри центральної тенденції, для вирішення другого – міри мінливості (або розкиду).

§ 1.4. МІРИ ЦЕНТРАЛЬНОЇ ТЕНДЕНЦІЇ

Мірами центральної тенденції називають чисельні показники типових властивостей емпіричних даних, зокрема:

Мода (Мо) – це значення, яке найбільш часто зустрічається у вибірці, тобто число з найбільшою частотою.

Якщо всі значення в групі зустрічаються з однаковою частотою, то вважається, що моди немає.

***Приклад*:** (1, 2, 3, 4)

Якщо два сусідніх значення мають однакову частоту і більше частоти будь-якого іншого значення, мода є середнє цих двох значень.

***Приклад*:** Мо(1, 2, 2, 3, 3, 4)=2,5

Якщо те ж саме відноситься до двох несуміжних значень, то існує дві моди, а група оцінок є бімодальною.

***Приклад*:** Мо(1, 1, 1, 2, 3, 4, 5, 5, 5)=1 та 5

Середнє арифметичне значень (вибіркове середнє або середнє) $\bar{x}$ – це результат ділення суми всіх значень (x) на їх кількість (n).

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad (2.1)$$

***Приклад*:** знайти середній бал здачі сесії, якщо результати здачі екзаменів такі: 80, 90, 60, 78, 66, 90.

Розв'язання: $\bar{x} = (80 + 90 + 60 + 78 + 66 + 90)/6 = 77{,}3$

Медіана (Ме) – це значення, яке приходиться на середину упорядкованої послідовності емпіричних даних.

Якщо ряд містить непарну кількість значень, то медіана є центральним значенням: Ме(11,13,25,48,49)=25

Якщо ряд містить парну кількість значень, то медіана обраховується як середнє двох центральних значень: Ме(11,13,25,48)=19

Якщо ряд достатньо великий, то щоб знайти місце медіани варто використати таку формулу:

$$N_{Me} = \frac{n+1}{2} \qquad (2.2)$$

Міри мінливості даних – це статистичні показники, що дозволяють судити про ступінь однорідності отриманої множини даних, її компактності. Найбільш поширені в психологічних дослідженнях показники: розмах, дисперсія, стандартне відхилення.

Розмах (R) – це інтервал між максимальним і мінімальним значеннями ознаки. Він визначається легко і швидко, але чутливий до випадкових даних особливо при малій кількості досліджуваних. Це найпростіша міра відхилення. Розмах визначається лише крайніми значеннями ознаки

$$R = x_{max} - x_{min} \qquad (2.3)$$

Приклад :R(10 20 30 40 50)=40 та R(10 10 10 10 50)=40

Коефіцієнт осциляції відображає відносні коливання крайніх значень ряду відносно середнього показника.

$$K_o = \frac{R}{\bar{x}} \cdot 100\% \qquad (2.4)$$

Приклад :Знайдемо коефіцієнти осциляції для двох вище наведених рядів:

K_{o1}=(40/30)*100%=133%; K_{o2}=(40/18)*100%=222%

Таким чином, видно, що в другому ряду крайні значення коливаються відносно середнього більше, ніж в першому

Дисперсія (D) обчислюються тільки для інтервальних та абсолютних шкал. Дисперсія є середнім арифметичним значенням квадратів відхилень окремих значень ознаки від їхнього середнього арифметичного значення:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1} \qquad (2.5)$$

Приклад :

Дані	80	90	70	78	75	82	85	80	∑=640	$\bar{x} = 80$
$x_i - \bar{x}$	0	10	-10	-2	-5	2	5	0		
$(x_i - \bar{x})^2$	0	100	100	4	25	4	25	0	∑=254	

$$\sigma^2 = \frac{254}{8-1} \approx 36{,}29$$

Стандартне відхилення (δ) застосовуються для інтервальних та абсолютних даних. Щоб її визначити необхідно з дисперсії розрахувати квадратний корінь.

$$s_x = \sqrt{\sigma^2} \qquad (2.6)$$

Приклад :

$$s_x = \sqrt{36{,}29} = 6{,}02$$

Для того, щоб мати змогу порівнювати ряди, слід щоб виконувалася така вимога до отриманих значень:

$$\bar{x} - 3s_x \le x \le \bar{x} + 3s_x \qquad (2.7)$$

Крім того, стандартне відхилення застосовують для обчислення коефіцієнта варіації.

Коефіцієнт варіації відображає відносні коливання всіх значень ряду відносно його середнього арифметичного.

$$V = \frac{s_x}{\bar{x}} \cdot 100\% \qquad (2.8)$$

Квантиль – це точка на числовій осі виміряної ознаки, яка ділить всю сукупність упорядкованих даних на дві групи з відомим співвідношенням їх чисельності.

Процентилі – це 99 точок – значень ознаки (P_1 ... P_{99}), які ділять упорядковану (за зростанням) множину даних на 100 частин, які рівні за чисельністю. Наприклад, при визначенні 10-го процентиля, P_{10}, спочатку всі значення ознаки упорядковуються за зростанням. Потім відраховується 10% досліджуваних, що мають найменшу вираженість ознаки. P_{10} буде відповідати тому значенню ознаки, яке відокремлює ці 10% досліджуваних від решти 90%.

Квартилі – це 3 точки – значення ознаки (P_{25}, P_{50}, P_{75}), які ділять упорядковану (за зростанням) множину даних на 4 рівні за чисельністю частини. Перший квартиль відповідає 25-му процентилю, другий – 50-му процентилю або медіані, третій квартиль відповідає 75-му процентилю.

Процентилі і квартилі використовуються для визначення частоти виникнення тих чи інших значень (або інтервалів) виміряної ознаки або для виділення підгруп і окремих досліджуваних, які найбільш типові або нетипові для даної множини спостережень.

РОЗДІЛ II. АНАЛІЗ ЗВ'ЯЗКУ МІЖ ЗМІННИМИ

§2.1. МІРИ ЗВ'ЯЗКУ В ПАРАМЕТРИЧНІЙ СТАТИСТИЦІ

Основними задачами психології є: пошук зв'язку між явищами (змінними), чи пов'язані між собою вік та інтелект? Чи є зв'язок між мотивацією досягнення дітей та їх агресивною поведінкою в іграх? Чи зв'язані активність підлітків та їх статус у групі? Ці та багато інших питань пов'язані із задачею пошуку зв'язку. Другою задачею є виявлення впливу. Що на що впливає – мотивація досягнення на рівень агресії чи агресія на мотивацію досягнення? Чи призводить підвищена активність підлітків до зростання їх статусу у групі, чи навпаки, підвищення статусу впливає на зростання рівня активності? Це і є типові задачі, пов'язані з виявлення напрямку та форми впливу явищ одне на одне.

Розглянемо першу задачу (пошук зв'язку). Вважається, що дві чи більше змінних пов'язані між собою, коли їх значення розподілені узгоджено – коли систематично зміна однієї змінної в певному напрямку супроводжується зміною іншої змінної в іншому напрямку. Так, коли зростання рівня втоми супроводжується зростанням кількості помилок, говорять про існування прямого зв'язку між цими явищами. З іншого боку, між явищами буде обернений зв'язок, коли, наприклад, збільшення часу роботи за комп'ютером супроводжується зменшенням кількості правильних операцій.

Друга задача (аналіз впливу) випливає із проблеми, які ставить перша задача – якщо між явищами існує зв'язок, то чи означає це, що одне з них впливає на інше? А якщо так, то що на що впливає? Виявляється, методи пошуку зв'язку на ці питання не дають відповіді. Дійсно, справедливим може бути як те, що втома впливає на зростання кількості помилок, так і те, що збільшення кількості помилок призводить до нервового виснаження, і відповідно, до зростання кількості помилок. Водночас, обидва досліджувані явища можуть бути обумовлені сторонніми, не врахованими у дослідженні чинниками – емоційним чи фізичним станом, сімейними проблемами досліджуваних, впливом самого дослідника тощо.

Для аналізу впливу одного явища на інше можна використати лише один дійсно надійний та валідний підхід – проведення експерименту. Суть експерименту полягає у тому, що дослідник систематично змінює одне з явищ, яке знаходиться у нього під контролем, і спостерігає, як буде змінюватися інше явище. У цьому випадку необхідно розрізнення двох типів змінних: незалежних та залежних.

Незалежна змінна – явище, яке знаходиться під контролем експериментатора, і яке він може змінювати відповідно до наперед визначеної експериментальної процедури.

Залежна змінна – явище, яке змінюється під впливом незалежної змінної.

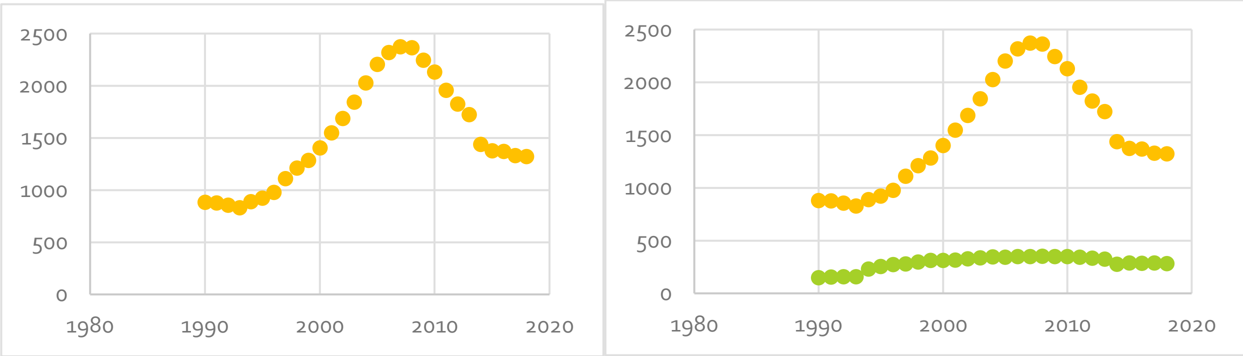
Так, при необхідності перевірити вплив втоми на кількість помилок, експериментатор повинен змінювати рівень втоми досліджуваних і спостерігати, скільки помилок вони зроблять. При перевірці впливу кількості помилок на рівень втоми експериментатор повинен непомітно для досліджуваних втручатися у процес їх роботи, штучно варіюючи кількість помилок, і спостерігаючи за їх рівнем втоми. Слід пам'ятати, що коли ми говоримо про залежні змінні – маємо на увазі задачу пошуку зв'язку, а коли говоримо про залежну та незалежну змінні – маємо на увазі задачу аналізу впливу.

ЗАГАЛЬНЕ ПОНЯТТЯ ПРО ЗВ'ЯЗОК

Зв'язок між змінними може бути двох типів – функціональний та статистичний.

Функціональний зв'язок – одному значенню однієї змінної відповідає лише одне значення іншої змінної.

Графік функціонального зв'язку наведено на рисунку 3.1. а). **Статистичний зв'язок** – одному значенню однієї змінної може відповідати декілька значень другої змінної (рис. 3.1. б).



а) б)

Рис. 3.1 Функціональний та статистичний зв’язки

Функціональний зв’язок є математично наближеним способом описання зв’язку між реальними процесами. Статистичний зв’язок відображає реальну картину цього зв’язку, однак, не дає можливості її узагальнення.

Для визначення зв’язку між змінними будують діаграми розсіювання. На осі абсцис відзначають значення незалежної змінної *(x),* на осі ординат – значення залежної змінної *(y)*.

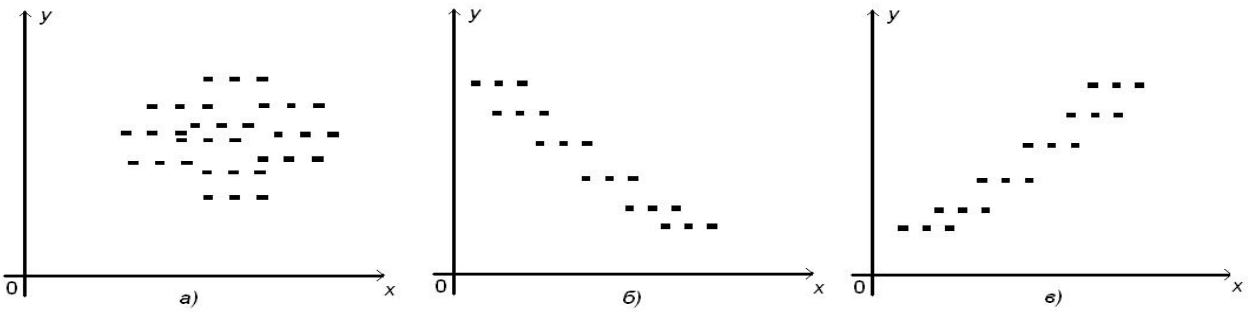


Рис. 3.2 Діаграма розсіювання: а) зв'язок між *y* та *x* відсутній; б) зв'язок - лінійний, спадний; в) зв'язок - лінійний, зростаючий

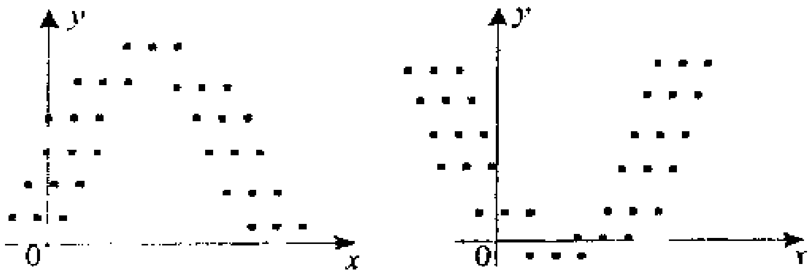


Рис. 3.3 Діаграми розсіювання - зв'язок між *y* та *x* параболічний

Міри зв'язку виявляють співвідношенням, як правило, між двома змінними, які виміряні на одній вибірці. Ці зв'язки визначають через обчислення коефіцієнтів кореляції.

Кореляційний аналіз для двох випадкових величин складається з:

• побудови кореляційного поля і складання кореляційної таблиці;

• обчислення вибіркових коефіцієнтів кореляції і кореляційних відносин;

• перевірки статистичної значущості зв'язку.

Основне призначення кореляційного аналізу – виявлення зв'язку між двома або більше досліджуваними змінними, яка розглядається як спільна узгоджена зміна двох досліджуваних характеристик.

Коефіцієнт кореляції є відносною мірою зв'язку між двома факторами. Значення його лежать в межах від -1 до 1 $-1 \leq r \leq 1$.

Після проведення розрахунків дослідник, як правило, відбирає тільки найбільш сильні кореляції, які в подальшому інтерпретуються:

- сильний або тісний зв'язок при $r \geqslant 0{,}7$;
- середній при $0{,}5 \leqslant r < 0{,}7$;
- помірний при $0{,}3 \leqslant r < 0{,}5$;
- слабкий при $0{,}2 \leqslant r < 0{,}3$;
- дуже слабкий при $r < 0{,}2$.

Критерієм для відбору «досить сильних» кореляцій може бути як абсолютне значення самого коефіцієнта кореляції так і відносна величина цього коефіцієнта, яка визначається за рівнем статистичної значущості (від 0,01 до 0,1), який залежить від розміру вибірки. У малих вибірках для подальшої інтерпретації коректніше відбирати сильні кореляції на підставі рівня статистичної значущості. Для досліджень, які проведені на великих вибірках, краще використовувати абсолютні значення коефіцієнтів кореляції.

Вибір методу обчислення коефіцієнта кореляції, в першу чергу, залежить від:

- типу шкали, в якій виміряні змінні (номінальна, рангова, інтервальна, абсолютна);

- виду нормальності розподілу даних.

КОРЕЛЯЦІЯ МЕТРИЧНИХ ЗМІННИХ КОЕФІЦІЄНТ КОРЕЛЯЦІЇ R-ПІРСОНА

Для вивчення взаємозв'язку двох метричних змінних, виміряних на одній і тій же вибірці, застосовується коефіцієнт кореляції *r*-Пірсона.

$$r_{xy} = \frac{n\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{n\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\sqrt{n\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}} \tag{3.1}$$

або:

$$r_{xy} = \frac{n\sum_{i=1}^{n}x_i y_i - \sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}y_i}{\sqrt{\left(n\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - \sum_{i=1}^{n}(x_i)^2\right)\left(n\sum_{i=1}^{n}y_i^2 - \sum_{i=1}^{n}(y_i)^2\right)}} \tag{3.1*}$$

$$r_{xy} = \frac{s_{xy}}{s_x s_y} \tag{3.2}$$

де:

$$s_{xy} = \frac{\sum(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{n-1} \text{ – коваріація} \tag{3.3}$$

Сам коефіцієнт характеризує наявність тільки лінійного зв'язку між ознаками. Коефіцієнт лінійної кореляції є параметричним методом і його коректне застосування можливо тільки в тому випадку, якщо дані двох змінних відрізняється від нормального виду в незначній мірі.

При обробці даних «вручну» необхідно обчислити коефіцієнт кореляції, а потім визначити *p*-рівень значущості (з метою перевірки даних користуються таблицями критичних значень, які складені для цього критерію).

Для статистичного рішення про прийняття або відхилення H_0 зазвичай встановлюють p=0,05, а для великого обсягу вибірки досліджуваних (100 і більше) p=0,01.

Якщо p<0,05, H_0 відхиляється і робиться змістовний висновок, що виявлений статистично достовірний (значущий) зв'язок між досліджуваними змінними (позитивний чи негативний в залежності від знака кореляції).

Коли p>0,05, H_0 не відхиляється, змістовний висновок обмежений констатацією, що зв'язок (статистично достовірний) не виявлений.

Якщо зв'язок не виявлено, але є підстави вважати, що зв'язок насправді існує, слід перевірити можливі причини недостовірності зв'язку.

Приклад: Визначити, чи існує зв'язок між рівнем успішності учнів та їх особистісною тривожністю.

Розв'язання: Після проведення дослідження ми отримуємо два ряди даних. Обчислимо коефіцієнт лінійної кореляції Пірсона для того, щоб встановити характер зв'язку між ними. Для спрощення обчислень дані записуємо у таблицю

№	**Учні**	**Успішність (x)**	**Тривожність (y)**	x^2	y^2	xy
1	Антонюк В.	10	48	100	2304	480
2	Борейко Ю.	12	49	144	2401	588
3	Волошин Т.	10	45	100	2025	450
4	Гевко Ю.	9	38	81	1444	342
5	Дубова Л.	8	34	64	1156	272
6	Кухаренко Д.	7	25	49	625	175
7	Кушіль Р.	10	42	100	1764	420
8	Марченко Ф.	9	41	81	1681	369
9	Нечипор К.	11	43	121	1849	473
10	Окіл Н.	10	46	100	2116	460
11	Парфутко Н.	12	48	144	2304	576
12	Римар З.	8	23	64	529	184
	$\sum$	116	482	1148	20198	4789

$$r_{xy} = \frac{12 \cdot 4789 - 116 \cdot 482}{\sqrt{(12 \cdot 1148 - 116^2)(12 \cdot 20198 - 482^2)}} = 0{,}87$$

Зв'язок між між рівнем успішності учнів та їх особистісною тривожністю сильний, тобто тривожність сильно впливає на успішність.

Для оцінки значимості r_{xy} користуються таблицею критичних значень.

Якщо отриманий показник $r_{xy} > r_{табл}$ на одному з рівнів значимості, то він є статистично достовірним.

Так як для p=0,05 $r_{табл}$=0,58, то виявлений статистично достовірний (значущий) зв'язок між досліджуваними змінними

§2.2. МІРИ ЗВ'ЯЗКУ В НЕПАРАМЕТРИЧНІЙ СТАТИСТИЦІ

По відношенню до потреб пошуку зв'язку дані можуть бути виміряні 4-ма способами:

1. Вимірювання в дихотомічній шкалі найменувань – за допомогою 0 та 1 фіксується наявність чи відсутність прояву певної ознаки (0-чоловік, 1 – жінка; 0-учень, 1-студент ...).

2. Вимірювання в дихотомічній шкалі найменувань з припущенням про нормальний розподіл даних – робиться припущення, що точніші дані могли

Таблиця 3.1 Залежність типу коефіцієнта кореляції від способу вимірювання

<table>
<tr><th>x
y</th><th>Вимірювання в дихотомічній шкалі найменувань</th><th>Вимірювання в дихотомічній шкалі найменувань з припущенням про нормальний розподіл даних</th><th>Вимірювання в порядковій шкалі</th><th>Вимірювання в шкалах інтервалів чи відношень</th></tr>
<tr><td>Вимірювання в дихотомічній шкалі найменувань</td><td>Коефіцієнт φ</td><td>Коефіцієнт φ (в більшості випадків)</td><td rowspan="2">Бісеріальний ранговий коефіцієнт кореляції Кертена і Гласна</td><td>Точковий бісеріальний коефіцієнт кореляції</td></tr>
<tr><td>Вимірювання в дихотомічній шкалі найменувань з припущенням про нормальний розподіл даних</td><td>Коефіцієнт φ (в більшості випадків</td><td>Тетрахоричний коефіцієнт кореляції</td><td>Бісеріальний коефіцієнт кореляці</td></tr>
<tr><td>Вимірювання в порядковій шкалі</td><td colspan="2">Бісеріальний ранговий коефіцієнт кореляції Кертена і Гласна</td><td>Коефіцієнт рангової кореляції Спірмена або τ Кендалла</td><td>Міра не існує. Слід шкалу інтервалів перетворити в рангову</td></tr>
<tr><td>Вимірювання в шкалах інтервалів чи відношень</td><td>Точковий бісеріальний коефіцієнт кореляції</td><td>Бісеріальний коефіцієнт кореляції</td><td>Міра не існує. Слід шкалу інтервалів перетворити в рангову</td><td>Коефіцієнт кореляції Пірсона</td></tr>
</table>

б забезпечити нормальний розподіл, але ті дані, що є, можуть бути закодовані лише як такі, що перевищують чи ні певний рівень ознаки.
3. Вимірювання в порядковій шкалі – дані є послідовними рангами.
4. Вимірювання в шкалах інтервалів чи відношень – дані є інтервальними величинами чи відношеннями.

Коли дані розподілені не нормально, або коли вони виміряні в інших шкалах, до них застосовуються інші коефіцієнти кореляції, залежить від типу шкали, в якій було проведено вимірювання (табл. 3.1).

КОРЕЛЯЦІЯ ДИХОТОМІЧНИХ ЗМІННИХ

При порівнянні двох змінних, виміряних в дихотомічній шкалі, мірою кореляційної зв'язку служить так званий **коефіцієнт φ**, який представляє собою коефіцієнт кореляції для дихотомічних даних. Величина коефіцієнта φ лежить в інтервалі між +1 та -1. Він може бути як позитивним, так і негативним, характеризуючи напрямок зв'язку двох дихотомічних ознак.

Коефіцієнт φ можна обчислити методом кодування, а також використовуючи так звані чотирьохклітинні таблиці або таблицю спряженості. Для застосування коефіцієнта кореляції φ необхідно дотримуватися таких умов:

- порівнювані ознаки повинні бути виміряні в дихотомічній шкалі;
- число ознак в порівнюваних змінних X і Y має бути однаковим.

Коефіцієнт φ можна обчислити за формулою:

$$\varphi = \frac{p_{xy} - p_x p_y}{\sqrt{p_x q_x p_y q_y}} \qquad (3.4)$$

де: p_{xy} – частка людей, що мають одиницю по x та по y одночасно;
p_x – частка людей, що мають одиницю по x;
p_y – частка людей, що мають одиницю по y;
q_x – частка людей, що мають нуль по x;
q_y – частка людей, що мають нуль по y;
$q_x = 1 - p_x$; $q_y = 1 - p_y$.

Коефіцієнт φ можна обчислити користуючись таблицею спряженості ознак, яка має в загальному такий вигляд:

Таблиця спряженості ознак

		Змінна Х		Всього
		0	**1**	
Змінна У	**0**	a	b	a+b
	1	c	d	c+d
Всього		a+c	b+d	n

$$\varphi = \frac{bc-ad}{\sqrt{(a+c)(b+d)(a+b)(c+d)}} \qquad (3.4^*)$$

Приклад: Визначити чи сімейний стан відображається на якості викладання педагогів, якщо*: Х* – сімейний стан *(0-неодружений, 1 – одружений), а У –* якість викладання *(0 – якість підвищилась, 1 – якість не змінилась).*

Х: (0,1,0,0,1,1,0,1,0,0,0,1)

У: (0,1,1,0,1,0,0,1,0,1,0,1)

Розв'язання:

$p_{xy} = \frac{4}{12}$ – частка людей, що мають одиницю по *x* та по *y* одночасно;

$p_x = \frac{5}{12}$ – частка людей, що мають одиницю по *x*;

$p_y = \frac{6}{12}$ – частка людей, що мають одиницю по *y*;

$q_x = \frac{7}{12}$ – частка людей, що мають нуль по *x*;

$q_y = \frac{6}{12}$ – частка людей, що мають нуль по *y*;

$$\varphi = \frac{\frac{4}{12} - \frac{5}{12} \cdot \frac{6}{12}}{\sqrt{\frac{5}{12} \cdot \frac{7}{12} \cdot \frac{6}{12} \cdot \frac{6}{12}}} = \frac{\frac{18}{144}}{\frac{35,5}{144}} = 0,51$$

Коефіцієнт φ за таблицею спряженості ознак:

Таблиця спряженості ознак

		Змінна *x*		Всього
		0	**1**	
Змінна *y*	**0**	5	1	6
	1	2	4	6
Всього		7	5	12

$$\varphi = \frac{1 \cdot 2 - 5 \cdot 4}{\sqrt{7 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 6}} = \frac{18}{35,5} = 0,51$$

Отже сімейний стан середньо впливає на якість викладання педагогів.

ТОЧКОВИЙ БІСЕРІАЛЬНИЙ КОЕФІЦІЄНТ КОРЕЛЯЦІЇ

У тих випадках коли одна змінна вимірюється в дихотомічній шкалі (змінна *X*), а інша в шкалі інтервалів або відносин (змінна *Y*), використовується **бісеріальний коефіцієнт** кореляції. Цей коефіцієнт змінюється в діапазоні від -1 до +1, але його знак для інтерпретації результатів не має значення.

Для його застосування необхідно дотримуватися таких умов:

• порівнювані ознаки повинні бути виміряні в різних шкалах: одна X – в дихотомічній шкалі; інша Y – в шкалі інтервалів або відносин;

• змінна Y повинна мати нормальний закон розподілу;

• число варіюючих ознак в порівнюваних змінних X і Y має бути однаковим.

Бісеріальний коефіцієнт кореляції обраховується за формулою:

$$r_{tb} = \frac{\bar{y}_1 - \bar{y}_0}{s_y}\sqrt{\frac{n_1 n_0}{n(n-1)}} \qquad (3.5)$$

де: s_y – стандартне відхилення *У*: $s_y = \sqrt{\frac{\sum(y_i-\bar{y})^2}{n-1}}$; $\bar{y}_1$ – середнє арифметичне змінної *У*, пораховане для об'єктів, що мають по *X* одиницю; $\bar{y}_0$ – середнє арифметичне змінної *У*, пораховане для об'єктів, що мають по X нуль; n_1 – кількість об'єктів по *X*, які мають одиницю; n_0 – кількість об'єктів по *X*, які мають нуль; n – загальна кількість об'єктів.

Приклад: знайти зв'язок між статтю та рівнем успішності

№	Стать (1-ч, 0-ж) (x)	Успішність (y)	$(y_i - \bar{y})$	$(y_i - \bar{y})^2$	$\bar{y}_1$	$\bar{y}_0$
1	0	9	0	0		9
2	1	12	3	9	12	
3	0	10	1	1		10
4	0	9	0	0		9
5	1	8	-1	1	8	
6	1	9	0	0	9	
7	1	9	0	0	9	
8	0	7	-2	4		7
9	1	11	2	4	11	
10	0	6	-3	9		6
11	1	12	3	9	12	
12	1	6	-3	9	6	
	$\sum$	108		46	$\bar{y}_1 = 9{,}57$	$\bar{y}_0 = 8{,}2$

$s_y = \sqrt{\frac{46}{11}}$=2,04;

$r_{tb} = \frac{9{,}57-8{,}2}{2{,}04}\sqrt{\frac{7\cdot 5}{12\cdot 11}} = 0{,}35$

Отже стать на рівень успішності впливає слабо.

ТЕТРАХОРИЧНИЙ КОЕФІЦІЄНТ КОРЕЛЯЦІЇ

Обидві змінні дихотомічні, засновані на нормальних розподілах: міра - тетрахоричний коефіцієнт кореляції r_{tet}. Вважаємо, що нам багато чого відомо про вимірювану змінної, хоча ми маємо лише її вельми грубі вимірювання.

Наприклад, складена письмова контрольна для оцінки здатності силогістичного мислення. При цьому вважається, що здатність робити правильні висновки з безлічі силогізмів – нормально розподілена характеристика, хоча використання однієї лише контрольної дозволить тільки визначити групу тих, хто відповідає правильно (всім їм буде приписана 1), і групу відповідають неправильно (з оцінкою 0).

Дві змінні X і $У$ вимірюються дихотомічній шкалі, хоча вважають, що більш дорогі і широкі дії могли б забезпечити приблизно нормальні розподілу змінних.

Однак, внаслідок відсутності ліцензії на тестові методики, які вимірюють ці якості точно, ми змушені скористатися спрощеним варіантом, який може сказати лише, є чи немає мотивації досягнення (X: 0 та 1) та є чи немає тривожності (У: 0 та 1). Для обчислення тетрахоричного коефіцієнту кореляції використовують таблицю спряженості ознак:

Таблиця спряженості ознак

		Змінна X		Всього
		0	**1**	
Змінна У	**0**	a	b	a+b
	1	c	d	c+d
Всього		a+c	b+d	n

$$r_{tet} = cos\frac{180^{\circ}}{1+\sqrt{bc/ad}} \qquad (3.6)$$

Зауваження: цей показник має певні обмеження: його можна застосовувати лише у випадках, коли величина $\frac{a+b}{n}$ або $\frac{b+d}{n}$ незначно відхиляється від 0,50. У випадках, коли ці величини більше 0,7 чи менше 0,3 – використовувати цю формулу взагалі не можна, оскільки вона дає значну похибку (завищує прямий зв'язок).

Приклад: визначити чи залежність кількість правильних відповідей на тести від статті:

Таблиця спряженості ознак

		Змінна *x*		Всього
		0	**1**	
Змінна *y*	**0**	5	1	6
	1	2	4	6
Всього		7	5	12

$$\frac{a+b}{n} = \frac{6}{12} = 0{,}5\ ;\ \frac{b+d}{n} = \frac{5}{12} = 0{,}41$$

$$r_{tet} = cos\frac{180^{\circ}}{1+\sqrt{(1\cdot 2)/(5\cdot 4)}} = cos136{,}75 = 0{,}095$$

Кількість правильних відповідей не залежить від статті.

БІСЕРІАЛЬНИЙ КОЕФІЦІЄНТ КОРЕЛЯЦІЇ

У тих випадках коли одна змінна вимірюється в дихотомічній шкалі (змінна X), а інша в шкалі інтервалів або відносин (змінна Y) – з припущенням нормальності, то використовується бісеріальний коефіцієнт кореляції:

$$r_{bis} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_0}{s_x} \cdot \frac{n_1 n_0}{un\sqrt{n^2 - n}} \tag{3.7}$$

де: $\bar{x}_1$– середнє арифметичне значення змінної *X*, пораховане для об'єктів, які мають 1 по *У*;

$\bar{x}_0$– середнє арифметичне значення змінної *X*, пораховане для об'єктів, які мають 0 по *У*

s_x– стандартне відхилення змінної *X*

n_1 – кількість об'єктів, які мають 1 по У

n_0 – кількість об'єктів, які мають 0 по *У*

n – загальна кількість об'єктів; *u* – висота нормованого нормального розподілу в точці, за якою лежить n_1/n відсотків його площі (величину шукають по таблицях)

Особливістю цього коефіцієнту кореляції є те, що він може виходити за межі (-1; +1), однак, це означає лише, що гіпотеза нормальності для нашої вибірки виявилася некоректною.

Цей коефіцієнт змінюється в діапазоні від -1 до +1, але його знак для інтерпретації результатів не має значення.

Для його застосування необхідно дотримуватися таких умов:

• порівнювані ознаки повинні бути виміряні в різних шкалах: одна X – в дихотомічній шкалі; інша Y – в шкалі інтервалів або відносин;

• змінна Y повинна мати нормальний закон розподілу;

• число варіюючих ознак в порівнюваних змінних X і Y має бути однаковим.

Приклад: визначити як час затрачений на підготовку одного питання до іспиту X (хв) впливає на відповідь на додаткове питання на екзамені Y (0 – не відповів, 1 – відповів).

X	15	8	20	7	11	19	5	11	6	14	10	12	18	16	9	17	13	7
Y	1	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	0	0

Розв'язання: для зручності обчислень дані заносимо в таблицю:

№	Час затрачений на вивчення x	Відповідь на додаткове питання y	$x-\bar{x}$	$(x-\bar{x})^2$	X	
					y=0	y=1
1	15	1	2,9	8,3		15
2	8	0	-4,1	16,9	8	
3	20	1	7,9	62,2		20
4	7	1	-5,1	26,1		7
5	11	1	-1,1	1,2		11
6	19	1	6,9	47,5		19
7	5	0	-7,1	50,6	5	
8	11	1	-1,1	1,2		11
9	6	0	-6,1	37,3	6	
10	14	1	1,9	3,6		14
11	10	0	-2,1	4,5	10	
12	12	1	-0,1	0,0		12
13	18	1	5,9	34,7		18
14	16	0	3,9	15,1	16	
15	9	1	-3,1	9,7		9
16	17	1	4,9	23,9		17
17	13	0	0,9	0,8	13	
18	7	0	-5,1	26,1	7	
	∑=218,			**369,8**	∑=65	∑=153
	$\bar{x}=12,1$				$\bar{x}_0=9,3$	$\bar{x}_1=13,9$

$$s_x=\sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n-1}}=\sqrt{\frac{369,8}{18-1}}=4,7$$

Так як u – висота нормованого нормального розподілу в точці, за якою лежить n_1/n відсотків його площі (величину шукають по таблицях). Розглянемо як знайти u – висоту без таблиць. Для цього скористаємось основними законами неперервних випадкових величин. Зокрема, імовірність того, що нормально розподілена величина при випробувані набере значення з інтервалу (α, β) обчислюється за формулою:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)$$

В нашому випадку, маємо справу з нормованим нормальним розподілом, отже $\sigma = 1, a = 0,\ \beta = \infty$

$$P(\alpha < X < \infty) = \Phi(\infty) - \Phi(\alpha)$$

Оскільки $n_1/n=11/18=0{,}61$, тоді

$$\Phi(\infty) - \Phi(\alpha) = 0{,}61$$

$$0{,}5 - \Phi(\alpha) = 0{,}61$$

$$\Phi(\alpha) = 0{,}11$$

З таблиці значень інтегральної функції Лапласа – $\Phi(0{,}28) = 0{,}11$,

$$\Phi(\alpha) = \Phi(0{,}28)$$

$\alpha = 0{,}28$

Для знаходження u – використовуємо значеннями функції Гаусса:

$u=\varphi(0{,}28)=0{,}3836$

$$r_{bis} = \frac{13{,}9 - 9{,}3}{4{,}7} \cdot \frac{11 \cdot 7}{0{,}3836 \cdot 18 \cdot \sqrt{18^2 - 18}} = \frac{354{,}2}{567{,}69} = 0{,}62$$

Отже час вивчення матеріалу середньо впливає на правильну відповідь.

КОЕФІЦІЄНТ РАНГОВОЇ КОРЕЛЯЦІЇ СПІРМЕНА

Дана процедура є найбільш простою та доступною серед множини аналітичних методів. Її можна використовувати як для малих, так і для великих вибірок.

У випадку, коли обидві змінні виміряні в порядкових шкалах, використовують ранговий коефіцієнт кореляції Спірмена.

$$r_s = 1 - \frac{6\sum_{i=1}^{n} d_i^2}{n^3 - n} \tag{3.8}$$

де: $d_i=rangx_i-rangy_i$ – різниця між рангами, які властиві двом характеристикам i-го об'єкта; n –кількість об'єктів, що рангуються.

Алгоритм:

Крок 1. Розставляємо ранги по $\boldsymbol{x}$ в порядку зростання (спадання).

Крок 2. Розставляємо ранги по $\boldsymbol{y}$ в порядку зростання (спадання).

Зауваження. Якщо $\boldsymbol{x}$ в порядку зростання то $\boldsymbol{y}$ – теж в порядку зростання, якщо $\boldsymbol{x}$ в порядку спадання, то $\boldsymbol{y}$ – спадання.

Крок 3. Шукаємо різницю між рангами: $d_i=rangx_i-rangy_i$.

Крок 4. Кожну різницю між рангами: d_i підносимо до квадрату і шукаємо суму.

Крок 5. Рахуємо ранговий коефіцієнт кореляції Спірмена підставляючи всі значення в формулу.

Крок 6. Робимо висновок щодо зв'язку/впливу.

Приклад: припустимо, що ми провели дослідження в академічній групі і визначили: наскільки студенту подобається предмет (Х), а також його викладач (У) по 20 бальній системі

№	Прізвище ім'я студента	подобається група (Х)	подобається куратор (У)	Ранг x	Ранг y	d	d^2
1	Антонюк В.	15	19	6	2	4	16
2	Борейко Ю.	8	15	13	6	7	49
3	Волошин Т.	18	12	3	9	-6	36
4	Гевко Ю.	9	18	12	3	9	81
5	Дубова Л.	3	14	17	7	10	100
6	Кухаренко Д.	10	7	11	14	3	9
7	Кушіль Р.	19	10	2	11	-9	81
8	Марченко Ф.	13	6	8	15	-7	49
9	Нечипор К.	17	4	4	17	-13	169
10	Окіл Н.	1	13	18	8	10	100
11	Парфутко Н.	20	5	1	16	-15	225
12	Ратушко М.	14	3	7	18	-11	121
13	Римар З.	16	11	5	10	-5	25
14	Савіцький О.	6	17	15	4	11	121
15	Сеник Я.	11	16	10	5	5	25
16	Строгуш С.	5	9	16	12	4	16
17	Ткачук В.	7	20	14	1	13	169
18	Шуплат Д.	12	8	9	13	-4	16
							1408

Розв'язання: ранжуємо по спаданню – найбільшому балу присвоюємо ранг 1, з тих що залишились – найбільшому присвоюємо ранг 2 і т.д.

Знаходимо різницю рангів; підносимо отримані значення да квадрату та сумуємо.

Рахуємо коефіцієнт рангової кореляції Спірмена:

$r_s = 1 - \frac{6 \cdot 1408}{18^3 - 18} = |-0{,}45|$

Отже, цікавість до предмету не сильно залежить від ставлення до викладача.

Зауваження:

Однак, при обчисленні коефіцієнта кореляції Спірмена може виникнути проблема зв’язаних рангів. Уявімо, що наш експерт не зміг прорангувати 1, 3 та 4 досліджуваних. В такому випадку їм слід приписати ранги за таким правилом: Уявно все ж таки проставити цим досліджуваним ранги (1, 2, 3), потім знайти їх середнє арифметичне і реально проставити їм знайдений середній ранг (2). Подальше рангування слід продовжувати вже не з 2, а з того рангу, на якому закінчилося уявне рангування (після 3). Такі ранги називають зв’язаними.

КОЕФІЦІЄНТ τ –КЕНДАЛЛА

Коефіцієнт τ-Кендалла є альтернативним коефіцієнтом для обчислення зв’язку в тих же випадках, що і коефіцієнт рангової кореляції Спірмена, але ґрунтується на дещо інших припущеннях.:

Для підрахунку коефіцієнта τ-Кендалла використовують такий алгоритм:

1. Розставляємо ранги по x в порядку зростання (спадання).
2. Розставляємо ранги по y в порядку зростання (спадання).

Зауваження. Якщо x в порядку зростання то y – теж в порядку зростання, якщо x в порядку спадання, то y – спадання.

3. Впорядковують ранги по одній із змінних.
4. Підраховується кількість “співпадань” (P): для кожного об’єкта підраховується, скільки разів його ранг по У виявляється менше від рангів об’єктів, які знаходяться нижче нього.
5. Підраховується кількість “інверсій” (Q): для кожного об’єкта підраховується, скільки разів його ранг по У виявляється більше, ніж ранги об’єктів, які знаходяться нижче.

6. Обчислюється коефіцієнт τ за формулою:

$$\tau = \frac{\sum P - \sum Q}{(n^2 - n)/2} \tag{3.9}$$

де: P – кількість співпадань, Q – кількість інверсій, n - загальна кількість об’єктів.

Приклад: припустимо, що ми провели дослідження в академічній групі – наскільки студенту подобається предмет (Х), а також його викладач (У) по 20 бальній системі. Необхідно визначити як впливає відношення до предмету до ставлення до викладача використовуючи коефіцієнт τ- Кендалла.

Розв’язання: Спочатку проводимо ранжування по *х* потім по *у* (найбільшому балу присвоюємо ранг 1, з тих що залишились – найбільшому присвоюємо ранг 2 і т.д.).

№	Прізвище ім’я студента	подобається група (Х)	подобається куратор (У)	Ранг *х*	Ранг *у*
1	Антонюк В.	15	19	6	2
2	Борейко Ю.	8	15	13	6
3	Волошин Т.	18	12	3	9
4	Гевко Ю.	9	18	12	3
5	Дубова Л.	3	14	17	7
6	Кухаренко Д.	10	7	11	14
7	Кушіль Р.	19	10	2	11
8	Марченко Ф.	13	6	8	15
9	Нечипор К.	17	4	4	17
10	Окіл Н.	1	13	18	8
11	Парфутко Н.	20	5	1	16
12	Ратушко М.	14	3	7	18
13	Римар З.	16	11	5	10
14	Савіцький О.	6	17	15	4
15	Сеник Я.	11	16	10	5
16	Строгуш С.	5	9	16	12
17	Ткачук В.	7	20	14	1
18	Шуплат Д.	12	8	9	13

1. Впорядковують ранги по одній із змінних.
2. Підраховується кількість “співпадань” (Р): для кожного об’єкта підраховується, скільки разів його ранг по У виявляється менше від рангів об’єктів, які знаходяться нижче нього.

3. Підраховується кількість “інверсій” (Q): для кожного об’єкта підраховується, скільки разів його ранг по У виявляється більше, ніж ранги об’єктів, які знаходяться нижче.

Обчислюється коефіцієнт τ за формулою:

$$\tau = \frac{54-99}{(18^2-18)/2} = 0{,}29$$

Отже, цікавість до предмету слабо залежить від ставлення до викладача.

№	Ранг x	Ранг y	Впорядковані ранги		Співпадання (P)	Інверсії (Q)
			x	y		
1	6	2	1	16	2	15
2	13	6	2	11	6	10
3	3	9	3	9	7	8
4	12	3	4	17	1	13
5	17	7	5	10	5	8
6	11	14	6	2	11	1
7	2	11	7	18	0	11
8	8	15	8	15	0	10
9	4	17	9	13	1	8
10	18	8	10	5	5	3
11	1	16	11	14	0	7
12	7	18	12	3	5	1
13	5	10	13	6	3	2
14	15	4	14	1	4	0
15	10	5	15	4	3	0
16	16	12	16	12	0	2
17	14	1	17	7	1	0
18	9	13	18	8	0	0
				$\sum$	**54**	**99**

Як можна помітити, τ-Кендалла та *r*-Спірмена для одних і тих же даних дають різні числові результати. Причина – в різних логіках побудови коефіцієнтів. Якщо *r*-Спірмена можна проінтерпретувати як коефіцієнт Пірсона для рангових величини, то τ-Кендалла відображає різницю ймовірностей між тим, що дані в обох рядах даних мають однаковий порядок і тим, що дані в обох рядах даних мають різний порядок.

Якщо є, зв’язані ранги то формула застосовується у вигляді:

$$\tau = \frac{\sum P - \sum Q}{\sqrt{(n^2-n)/2-K_x}\cdot\sqrt{\sqrt{(n^2-n)/2-K_y}}} \qquad (3.10)$$

де:

$$K_x = \frac{\sum n_x(n_x-1)}{2}, K_y = \frac{\sum n_y(n_y-1)}{2}$$

n_x- число зв'язаних рангів у кожній групі зв'язків по Х,

n_y - число зв'язаних рангів у кожній групі зв'язків по У.

Приклад: припустимо, що ми провели дослідження в академічній групі – наскільки студенту подобається предмет (Х), а також його викладач (У) по 20 бальній системі. Необхідно визначити як впливає відношення до предмету до ставлення до викладача використовуючи коефіцієнт τ- Кендалла.

Розв'язання: Спочатку проводимо ранжування по *x* потім по *y* (оскільки числа повторюються то використовуємо зв'язані ранги.).

№	Подобає-ться група (Х)	Подобаєть-ся куратор (У)	Ранг *x*	Ранг *y*	Впорядковані ранги		Співпада-ння (Р)	Інвер-сії (Q)
					x	*y*		
1	8	5	9,5	12,5	2	18	0	17
2	10	2	2	18	2	8,5	8	7
3	9	8	5,2	6,5	2	12,5	4	8
4	9	4	5,2	14,5	5,2	6,5	8	4
5	10	7	2	8,5	5,2	14,5	2	9
6	9	10	5,2	2	5,2	2	10	0
7	3	6	17	10,5	5,2	10,5	4	6
8	7	4	11,5	14,5	5,2	6,5	6	3
9	1	3	18	16,5	9,5	4,5	6	2
10	10	5	2	12,5	9,5	12,5	3	4
11	4	3	16	16,5	11,5	14,5	2	5
12	6	10	13,5	2	11,5	2	5	0
13	6	7	13,5	8,5	13,5	2	5	0
14	9	6	5,2	10,5	13,5	8,5	3	1
15	8	9	9,5	4,5	15	4,5	3	0
16	7	10	11,5	2	16	16,5	0	1
17	9	8	5,2	6,5	17	10,5	1	0
18	5	9	15	4,5	18	16,5	0	0
						Σ	**70**	**67**

$$K_x = \frac{3 \cdot 2 + 5 \cdot 4 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1}{2} = 16,$$

$$K_y = \frac{2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1}{2} = 10$$

$$\tau = \frac{70 - 67}{\sqrt{(18^2 - 18)/2 - 16} \cdot \sqrt{\sqrt{(18^2 - 18)/2 - 10}}} = \frac{3}{11{,}7 \cdot 11{,}96} = 0{,}02$$

Отже, цікавість до предмету слабо залежить від ставлення до викладача.

БІСЕРІАЛЬНИЙ КОЕФІЦІЄНТ РАНГОВОЇ КОРЕЛЯЦІЇ

Одна змінна виміряна в дихотомічній шкалі найменувань, а друга – в порядковій шкалі. Він розроблений на основі тих же методів, що і коефіцієнт τ-Кендалла. Якщо немає змоги дістати детальної методики, користуються оцінкою психолога-експерта, який ранжує досліджуваних за їх рівнем досліджуваної озкаки.

Алгоритм розв’язання:

1) впорядкувати ранги,

2) розписати ранги по принципу належності до 1 чи до 0,.

3) підрахувати кількість співпадань та інверсій.

Кількість співпадінь рахується для рангів в стовпчику 1 і рівна кількості об’єктів, які знаходяться в стовпчику 0 нижче взятого рангу в стовпчику 1.

Кількість інверсій рахується для рангів у стовпчику 1 і рівна кількості об’єктів, які знаходяться в стовпчику 1 нижче взятого рангу стовпчику 0.

Після цього підраховується сума співпадінь та інверсій і підставляється у формулу:

$$r_{rb} = \frac{\sum P - \sum Q}{n_0 \cdot n_1} \tag{3.11}$$

де: n_0 – кількість нулів по дихотомічній змінній,

n_1 – кількість одиниць по дихотомічній змінній.

Ця формула була виведена Кертеном, а дослідник Гласс довів, що вона алгебраїчно еквівалентна такій формулі:

$$r_{rb} = \frac{2 \cdot (\bar{y}_1 - \bar{y}_0)}{n} \tag{3.11*}$$

де: $\bar{y}_1$ – середній ранг об’єктів, що мають по X одиницю,

$\bar{y}_0$ – середній ранг об'єктів, що мають по X нуль.

Таким чином, можна користуватися будь-яким з цих двох коефіцієнтів, залежно від того, який Вам зручніше. Однак, слід пам'ятати, що при розрахунках в межах рангових шкал з'являється проблема зв'язаних рангів. У таких випадках наведені вище формули застосовувати не можна, а тому слід уникати таких ситуацій.

Приклад: Проведено дослідження зв'язку між статтю та рівнем тривожності результаті отримали такі дані:

X (стать, 1 – ч, 0 - ж)	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0
$У$ (тривожність)	8	6	1	4	2	10	3	9	7	5

Розв'язання: 1) впорядковуєм ранги по *у*, в порядку спадання: від найбільшого до найменшого;

2) розписуєм ранги по принципу належності до 1 чи до 0;

3) підрахувати кількість співпадань та інверсій.

№	***У* тривожність**	***Х* стать, 1 – ч, 0 - ж**	**Ранги по У**		**Співпадання (P)**	**Інверсії (Q)**
			X=1	**X=0**		
1	10	1	10		6	
2	9	1	9		6	
3	8	0		8		2
4	7	1	7		5	
5	6	0		6		1
6	5	0		5		1
7	4	1	4		3	
8	3	0		3		
9	2	0		2		
10	1	0		1		
∑			∑/4=7,5	∑/6=4,17	∑=**20**	∑=**4**

$$r_{rb} = \frac{\sum P - \sum Q}{n_0 \cdot n_1} = \frac{20 - 4}{6 \cdot 4} = \frac{16}{24} = 0{,}67$$

$$r_{rb} = \frac{2 \cdot (\bar{y}_1 - \bar{y}_0)}{n} = \frac{2 \cdot (7{,}5 - 4{,}17)}{10} = \frac{6{,}66}{10} = 0{,}67$$

Результати за формулами Кертена та Гласса однакові. Знайдений коефіцієнт свідчить, що рівень тривожність середньо залежить від статті.

РОЗДІЛ III.РЕГРЕСІЙНИЙ АНАЛІЗ

§3.1. ФОРМА ТА РІВНЯННЯ ЗВЯЗКУ

ЛІНІЙНА ФОРМА ЗВ'ЯЗКУ

Раніше ми зазначали, що пошук зв'язку між явищами є однією з основних задач будь-якої науки.

Першим кроком до побудови регресійної моделі є *ідентифікація змінних* (спостережуваних величин. Треба визначити яка із спостережуваних величин є ознакою (залежною величиною, пояснюваною змінною, функцією), а які величини є незалежними (аргументами, пояснюючими змінними, факторами). Якщо ми записуємо, що

$$y = f(x) \tag{4.1}$$

то вважаємо, що змінні є ідентифіковані і *y*, в цьому випадку, пояснювана змінна, x - пояснююча.

Другим етапом до побудови регресійної моделі є *специфікація моделі,* а саме: на основі даних ряду досліду потрібно визначити аналітичну форму зв'язку (4.1).

Найчастіше специфікацію проводять з допомогою хмарки точок (діаграми розсіювання). На осі абсцис відзначають значення незалежної змінної *(x),* на осі ординат – значення залежної змінної *(y).*

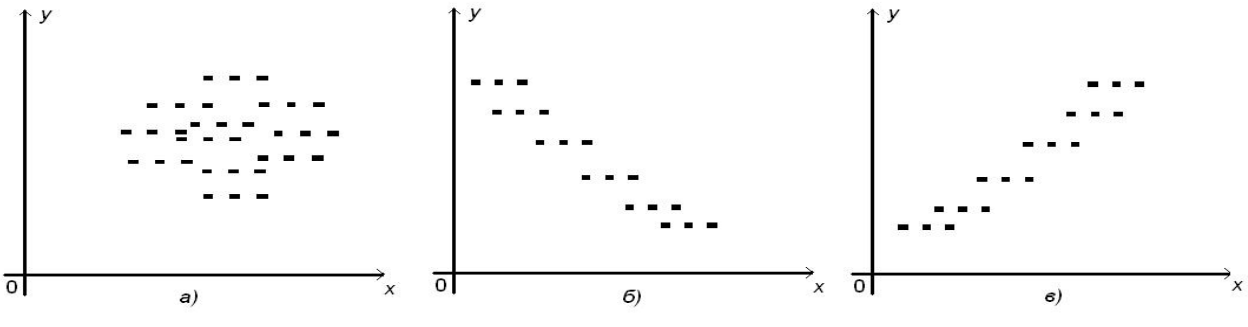


Рис. 4.1. Діаграма розсіювання: а) зв'язок між *y* та *x* відсутній; б) зв'язок - лінійний, спадний; в) зв'язок - лінійний, зростаючий

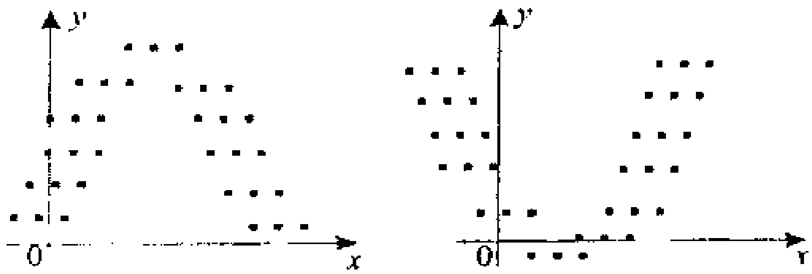


Рис. 3.2. Діаграми розсіювання - зв'язок між y та x параболічний

За виглядом діаграми розсіювання можна висунути гіпотезу про лінійність чи не лінійність зв'язку між змінними.

Третій етап – оцінка параметрів моделі.

Четвертий – аналіз моделі по залишках.

Припустимо, що в результаті специфікації ми переконалися, що залежність між y та x – лінійна, тоді (3.1) набере вигляду:

$$y = a + bx + u \qquad (4.2)$$

де: a та b– невідомі детерміновані параметри;

$y = \{y_1, \quad y_2, \quad y_3, \quad \cdots \quad y_n\}$ — умовно залежна змінна (результативна змінна) (умовно – тому що ми на основі кореляційного та регресійного аналізу не можемо визначити, що є причиною, а що – наслідком),

$x = \{x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad \cdots \quad x_n\}$ – умовно незалежна змінна (факторна змінна);

u - випадкова складова, збурення, $u = \{u_1, \quad u_2, \quad u_3, \quad \cdots \quad u_n\}$.

Необхідність введення в модель (4.2) випадкового доданку u, через помилки виміру.

Практично моделі (2.2) не існує, її потрібно оцінити деяким рівнянням

$$\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x \qquad (4.3)$$

де $\hat{a}$ та $\hat{b}$ називаються статистичними оцінками параметрів a та b і знаходяться на основі вибіркових даних. Якщо розглянути (3.3) як пряму на площині, то $\hat{a}$ – перетин з віссю ординат, $\hat{b}$– нахил прямої до осі абсцис. $\hat{b}$ також визначає зміну результативного показника при зміні x на одиницю. Значення $\hat{y}$, показують середнє значення залежної змінної y при заданому x_i у припущенні, що єдиною причиною зміни y є змінна x, а випадкова збурена змінна u прийняла значення, рівне нулеві. Розкид спостережених значень змінної y довкола $\hat{y}$ зумовлений впливом множини неврахованих факторів. Різниця між y_i і розрахунковим $\hat{y}$, називається *залишком* (відхиленням), який дає числову оцінку значення збурення *u.* Отже, він визначається $u_i = y_i - \hat{y}_i$ $i = 1, \ldots n$. Чим менше значення u_i, тим краще підібрана пряма. На цьому ґрунтується метод найменших квадратів, до якого ми переходимо.

Взагалі, існує необмежена кількість прямих $\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x$, які можна провести через множину спостережуваних точок. Щоб знати, яку пряму вибрати, потрібно користуватись певним критерієм. *Згідно методу найменших квадратів* (МНК) потрібно провести пряму таким чином, щоб сума квадратів залишків була мінімальною. Тобто ідея МНК полягає в побудові цільової функції, яка мінімізує суму квадратів відхилень $u_i = y_i - \hat{y}_i$ (див. рис. 4.1).

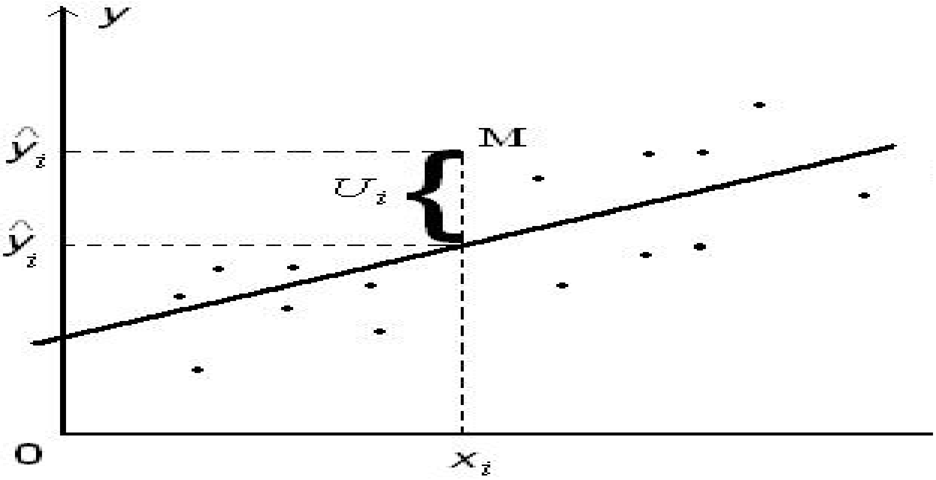


Рис. 4.1 Відхилення теоретичних значень від фактичних

Згідно критерію маємо для всієї сукупності точок:

$$\sum_{i=1}^{n} u_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \hat{a} - \hat{b}x\right)^2 = f\left(\hat{a}, \hat{b}\right) \rightarrow min$$

Щоб дослідити функцію двох змінних на *min*, знаходимо її часткові похідні і прирівнюємо їх до нуля.

$$\frac{d\left(\sum_{i=1}^{n} u_i^2\right)}{d\hat{a}} = -2\sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \hat{a} - \hat{b}x\right) = 0$$

$$\frac{d\left(\sum_{i=1}^{n} u_i^2\right)}{d\hat{b}} = -2\sum_{i=1}^{n} x_i\left(y_i - \hat{a} - \hat{b}x\right) = 0$$

Звідки отримаємо систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{n} y_i = n\hat{a} + \hat{b}\sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} y_i\, x_i = \hat{a}\sum_{i=1}^{n} x_i + \hat{b}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\end{cases} \qquad (4.4)$$

яка називається *нормальною системою МНК.* Розв'язавши систему одержимо статистичні оцінки. Зокрема, якщо систему розв'язати методом Крамера, то отримаємо:

$$\hat{a} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i x_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2},\ \hat{b} = \frac{n\sum_{i=1}^{n} y_i x_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \qquad (4.5)$$

Другий спосіб, без розв'язання системи. Поділимо перше рівняння системи (4.4) на *n*

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} = \hat{a} + \hat{b}\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

і введемо позначення для середніх арифметичних $\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}$, $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$. Тоді рівняння набуде вигляду

$$\bar{\mathrm{y}} = \bar{\mathrm{a}} + \bar{\mathrm{b}}\mathrm{x} \qquad (4.6)$$

Таким чином, оціночна пряма проходить через точку, координати якої є середні арифметичні вибіркових даних. Віднімемо (3.6) від (3.3):

$\hat{\mathrm{y}}_{\mathrm{i}} - \bar{\mathrm{y}} = \hat{\mathrm{b}}(\mathrm{x}_{\mathrm{i}} - \bar{\mathrm{x}})$ тобто отримаємо

$$\hat{\mathrm{y}}_{\mathrm{i}} = \bar{\mathrm{y}} + \hat{\mathrm{b}}(\mathrm{x}_{\mathrm{i}} - \bar{\mathrm{x}}) \qquad (4.6^*)$$

Нехай позначимо прирости (відхилення від середнього арифметичного) через

$\mathrm{y}_{\mathrm{i}} - \bar{\mathrm{y}} = \Delta\mathrm{y}_{\mathrm{i}}$, $\mathrm{x}_{\mathrm{i}} - \bar{\mathrm{x}} = \Delta\mathrm{x}_{\mathrm{i}}$, тоді $\hat{\mathrm{y}}_{\mathrm{i}} = \bar{\mathrm{y}} + \hat{\mathrm{b}}\Delta\mathrm{x}_{\mathrm{i}}$.

Згідно критерію маємо

$$\sum_{i=1}^{n} u_i^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \bar{y} - \hat{\mathrm{b}}\Delta\mathrm{x}_{\mathrm{i}}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\Delta y_i - \hat{\mathrm{b}}\Delta\mathrm{x}_{\mathrm{i}}\right)^2 = f\left(\hat{\mathrm{b}}\right) \to min$$

Щоб дослідити функцію на *min*, знаходимо її похідну по $\hat{\mathrm{b}}$ і прирівняємо її до нуля:

$$\frac{d\left(\sum_{i=1}^{n} u_i^2\right)}{d\hat{\mathrm{b}}} = -2\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i\left(\Delta y_i - \hat{\mathrm{b}}\Delta x_i\right) = 0$$

Звідси отримаємо

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \Delta y_i = \hat{b} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i^2$$

Отже, статистичну оцінку $\hat{b}$можна обчислити за формулою:

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \Delta y_i}{\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i^2} \qquad (4.7)$$

а оцінку $\hat{a}$ згідно (4.6)

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} \qquad (4.7^*)$$

За формулами (4.7) і (4.7*) обчислюються статистичні оцінки по МНК через прирости (відхилення від середніх арифметичних). Формулу (4.7) можна записати у вигляді

$$\hat{b} = \frac{cov(x,y)}{var(x)},$$

оскільки, за означенням, коефіцієнт коваріації між x та y дорівнює

$$cov(x,y) = \frac{1}{n}\sum_{i-1}^{n}(x_i - \bar{x})\,(y_i - \bar{y}),$$

а дисперсія змінної x визначається за формулою

$$\sigma^2(x) = var(x) = \frac{1}{n}\sum_{i-1}^{n}(x_i - \bar{x})^2.$$

Лінія регресії не точно описує всю сукупність даних – за означенням вона максимально наближається до всіх точок діаграми розсіювання. Тому існує можливість відхилення даних від лінії регресії. Чим більше це відхилення, тим менш ефективною є регресія, і навпаки, чим менше це відхилення, тим регресія більш очевидна і ефективна.

Величину, яка характеризує похибку рівняння регресії (середню квадратичну похибку рівняння, вибіркове стандартне відхилення від лінії регресії) шукають так:

1. Обчислити всі теоретичні значення ”залежної” змінної за формулою регресії.

2. Знайти різниці між теоретичними та експериментальними значеннями ”залежної” змінної.

3. Піднести різниці до квадрату та знайти їх суму.

4. Поділити суму квадратів на n-2.

5. Знайти квадратний корінь з отриманого числа. Формула для обчислення похибки рівняння регресії виглядає так:

$$s_{yx} = \sqrt{\frac{\sum(\hat{y} - y)^2}{n-2}}$$

Приклад: На основі даних про коефіцієнт зменшення премії на підприємстві та продуктивності праці на ньому

x- коефіцієнт премії до заробітної плати	3,2	2,5	2,1	1,62	1,35	1,33	1,17	1,25	1,1
y-продуктивність праці	105,4	114,9	120,3	150,1	152,4	163,3	171,4	185,1	195,1

необхідно:

1) провести специфікацію моделі;

2) розрахувати оцінки $\hat{a}$та$\hat{b}$ *методом найменших квадратів:*

- за системою нормальних рівнянь;
- через відхилення від середніх;

Розв'язання:

1) Специфікацію моделі здійснюємо за допомогою діаграми розсіювання. У прямокутній декартовій системі координат *xOy* будуємо точки $(x_i;y_i)$, i=1,2,…9, координати яких визначаються за табл..1. (див рис.4.2).

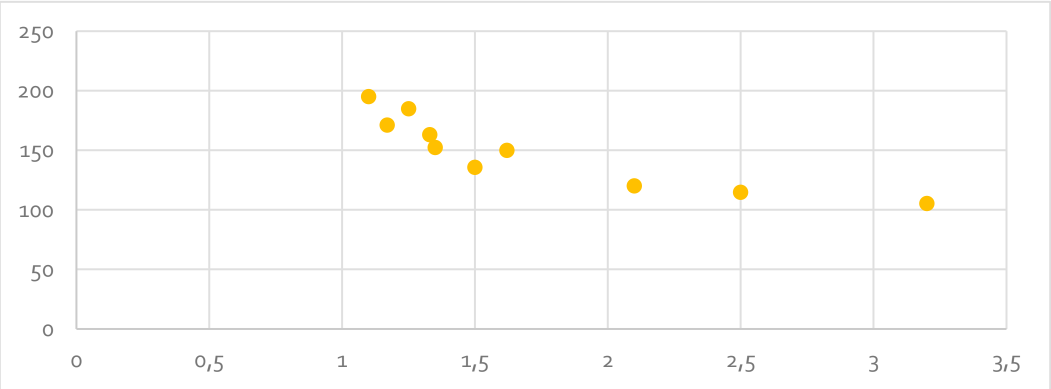


Рис. 4.2 Специфікація моделі

Переконавшись, з графіку, що залежність між факторами *x* і показником *y* лінійна, знаходимо оціночне рівняння $\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x$.

2) Оцінки параметрів $\hat{a}$та$\hat{b}$методу найменших квадратів:

за системою нормальних рівнянь:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} y_i = n\hat{a} + \hat{b}\sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} y_i x_i = \hat{a}\sum_{i=1}^{n} x_i + \hat{b}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{cases}$$

Будуємо розрахункову таблицю:

№	x_i	y_i	$x_i\, y_i$	x_i^2
1	3,2	105,4	337,28	10,24
2	2,5	114,9	287,25	6,25
3	2,1	120,3	252,63	4,41
4	1,62	150,1	243,162	2,6244
5	1,35	152,4	205,74	1,8225
6	1,33	163,3	217,189	1,7689
7	1,17	171,4	200,538	1,3689
8	1,25	185,1	231,375	1,5625
9	1,1	195,1	214,61	1,21
$\sum$	15,62	1358	2189,774	31,2572

Система рівнянь у числах набуде вигляду:

$$\begin{cases} 1358 = 9\hat{a} + 15{,}62\hat{b} \\ 2189{,}8 = 15{,}62\hat{a} + 31{,}26\hat{b} \end{cases}$$

Її можна розв’язати довільним методом. Розв’яжемо за допомогою методу Крамера. Оцінки будуть розраховуватися за формулами:

$$\hat{a} = \frac{1358 \cdot 31{,}2572 - 15{,}62 \cdot 2189{,}774}{9 \cdot 31{,}2572 - 15{,}62^2} = 220{,}8122$$

$$\hat{b} = \frac{9 \cdot 2189{,}774 - 15{,}62 \cdot 1358}{9 \cdot 31{,}2572 - 15{,}62^2} = -40{,}2887.$$

Ці ж оцінки знайдемо не розв’язуючи системи нормальних рівнянь. Згідно МНК через відхилення від середніх значень

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \Delta y_i}{\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i^2},$$

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$$

$$\hat{b} = \frac{-167{,}11}{4{,}1478222} = -40{,}2887,$$

$$\hat{a} = 150{,}8889 + 40{,}2887 \cdot 1{,}735556 = 220{,}8122.$$

Оцінки параметрів за двома методами однакові. Рівняння регресії матиме вид:

$$\hat{y} = 220{,}8 - 40{,}29x$$

розрахункова таблиця

№	x_i	y_i	$\bar{x}_i$	$\bar{y}_i$	Δx_i	Δy_i	$(\Delta x_i)^2$	$\Delta x_i \Delta y_i$
1	3,2	105,4			1,464444	-45,4889	2,1445975	-66,616
2	2,5	114,9			0,764444	-35,9889	0,5843753	-27,5115
3	2,1	120,3			0,364444	-30,5889	0,1328198	-11,148
4	1,62	150,1	1,735556	150,8889	-0,11556	-0,78889	0,0133531	0,09116
5	1,35	152,4			-0,38556	1,511111	0,1486531	-0,58262
6	1,33	163,3			-0,40556	12,41111	0,1644753	-5,0334
7	1,17	171,4			-0,56556	20,51111	0,3198531	-11,6002
8	1,25	185,1			-0,48556	34,21111	0,2357642	-16,6114
9	1,1	195,1			-0,63556	44,21111	0,4039309	-28,0986
$\sum$	15,62	1358					4,1478222	-167,11

§3.2. ВИДИ РІВНЯННЯ РЕГРЕСІЇ

Лінія регресії може бути не лише прямою, але і кривою. Використовують ряд типових кривих регресії, для яких розроблені свої рівняння:

експотенційна: $y = a_0 a_1^x$

степенева (мультиплікативна): $y = a_0 x^{a_1}$

зворотна: $y = a_0 + a_1 \dfrac{1}{x}$

квадратична: $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$

модифікована експонента: $y = a_0 a_1^x + a_2$

логістична крива: $y = \dfrac{1}{a_0 a_1^x + a_2}$

де *f(x)* — одна з функцій зростання; ε — випадкова величина.

Як і у випадку з простою лінійною регресією, основне завдання полягає в розрахунку невідомих параметрів кривих зростання і подальшому аналізі обраної моделі. Оцінку невідомих параметрів проводять по-різному: експоненційні функції шляхом логарифмічних перетворень зводять до лінійної регресії, квадратичні функції зводять до багатофакторної регресії, для інших використовують ітеративні методи, метод трьох точок, метод Тейла тощо. В цьому розділі ми особливу увагу звернемо на функції зростання, які шляхом перетворень зводяться до лінійної регресії. Для таких функцій зберігається вся методологія досліджень, яку ми детально розглядали у випадку простої лінійної регресії. Крім того, ми розглянемо найпоширеніші в сучасному аналізі криві, які не зводяться шляхом елементарних перетворень до лінійної регресії, але параметри яких можна легко розрахувати спеціальними спрощеними методами.

Спираючись на метод найменших квадратів, ми можемо одержати чисельні значення оцінок параметрів для всіх залежностей і обчислити в кожному випадку значення функції помилок, тобто суму квадратів різниць значень результативної змінної, що спостерігалися, і що розраховувалися за відповідною формулою. Найбільш адекватною досліджуваному процесу природно вважати ту модель, для якої ця сума буде мінімальною.

Особливістю регресійних моделей є те, що параметри $a_0, a_1, \dots a_m$ і відхилення u входять у них лінійно. Не всі залежності задовольняють цій вимозі. Інші моделі нелінійні щодо параметрів і їх необхідно шляхом перетворень зводити до лінійних моделей. Покажемо як здійснювати оцінку параметрів.

Розглянемо функцію $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$.

В цій функції робимо заміну $x=t_1$, $x^2=t_2$ тоді квадратична функція звелася до лінійної відносно факторів t_1, t_2. На практиці часто застосовуються крім методів заміни методи логарифмування і знаходження оберненого значення.

У випадку логарифмічної функції регресії $\hat{y} = a_0 + a_1 \ln x$ одержуємо:

$$\begin{cases} n\hat{a}_0 + \hat{a}_1 \sum_{i=1}^{n} \ln x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \\ a_0 \sum_{i=1}^{n} \ln x_i + \hat{a}_1 \sum_{i=1}^{n} \ln^2 x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \ln x_i \end{cases} \quad (4.8)$$

Якщо обрано гіперболічну залежність $\hat{y} = a_0 + a_1x^{-1}$ то, поклавши $t=x^{1}$, для визначення оцінок $\hat{a}_0$ і $\hat{a}_1$ приходимо до системи рівнянь

$$\begin{cases} n\hat{a}_0 + \hat{a}_1 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{t_i} = \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \hat{a}_0 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{t_i} + \hat{a}_1 \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{t_i}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i \frac{1}{t_i} \end{cases} \quad (4.9)$$

Якщо вихідна модель характеризується показниковою функцією:

$\hat{y} = a_0 \cdot a_1^x$, то покладаємо $y = a_0 \cdot a_1^x \cdot e^u$ і після логарифмування одержуємо лінійну регресійну модель: $y^* = a_0^* + a_1^* x + u$, ($y^* = ln\, y$, $a_0^* = ln\, a_0$, $a_1^* = ln\, a_1$).

Далі маємо:

$$\begin{cases} n\hat{a}_0^* + \hat{a}_1^* \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n ln\, y_i \\ \hat{a}_0^* \sum_{i=1}^n x_i + \hat{a}_1^* \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i\, ln\, y_i \end{cases} \qquad (4.10)$$

Якщо вихідна модель описується функцією $\hat{y} = e^{a_0 + \frac{a_1}{x}}$, то, з метою отримання лінійної регресійної моделі, покладаємо $y = e^{a_0 + \frac{a_1}{x} + u}$

Після логарифмування одержуємо $y^* = a_0 + \frac{a_1}{x} + u$ ($y^* = ln\, y$).

Далі маємо

$$\begin{cases} n\hat{a}_0 + \hat{a}_1 \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} = \sum_{i=1}^n ln\, y_i \\ \hat{a}_0 \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} + \hat{a}_1 \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i^2} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \cdot ln\, y_i \end{cases} \qquad (4.11)$$

Припустимо, що моделююча функція $\hat{y} = \frac{1}{a_0 + a_1 x}$ тоді зв'язок між змінними y і x будемо шукати у вигляді $y = \frac{1}{a_0 + a_1 x + u}$, що приводить до наступної перетвореної (лінійної) моделі $\frac{1}{y} = a_0 + a_1 x + u$. Тепер

$$\begin{cases} n\hat{a}_0 + \hat{a}_1 \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{y_i} \\ \hat{a}_0 \sum_{i=1}^n x_i + \hat{a}_1 \sum_{i=1}^n {x_i}^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{y_i} \end{cases} \qquad (4.12)$$

Якщо моделююча функція $\hat{y} = \frac{1}{a_0 + a_1\, ln\, x}$, то покладаємо $y = \frac{1}{a_0 + a_1\, ln\, x + u}$ відповідно лінійна модель $\frac{1}{y} = a_0 + a_1\, ln\, x + u$. Далі маємо:

$$\begin{cases} n\hat{a}_0 + \hat{a}_1 \sum_{i=1}^n ln\, x_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{y_i} \\ a_0 \sum_{i=1}^n ln\, x_i + \hat{a}_1 \sum_{i=1}^n ln^2\, x_i = \sum_{i=1}^n \frac{ln\, x_i}{y_i} \end{cases} \qquad (4.13)$$

У випадку залежності $\hat{y} = \frac{x}{a_0 + a_1 x}$ або $\hat{y} = \frac{1}{a_1 + \frac{a_0}{x}}$ маємо $y = \frac{1}{a_1 + \frac{a_0}{x} + u}$, $\frac{1}{y} = a_1 + \frac{a_0}{x} + u$. Система нормальних рівнянь, що відповідає лінійній моделі, така:

$$\begin{cases} n\hat{a}_1 + \hat{a}_0 \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{y_i} \\ \hat{a}_1 \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} + \hat{a}_0 \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i^2} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i {y_i}_i} \end{cases} \qquad (4.14)$$

РОЗДІЛ IV. МЕТОДИ СТАТИСТИЧНОГО ВИСНОВКУ

§4.1. СТАТИСТИЧНІ ГІПОТЕЗИ

Дані отримані в результаті експерименту на будь-якій вибірці слугують основою для судження про генеральну сукупність. Однак, в силу дії випадкових імовірнісних причин, оцінка параметрів генеральної сукупності, що зроблена на основі експериментальних (вибіркових) даних, завжди буде супроводжуватися похибкою, а тому подібного роду оцінки повинні розглядатися як приблизні, а не остаточні. Подібні припущення про властивості та параметри генеральної сукупності отримали назву статистичних гіпотез.

Гіпотеза – це висловлювання, істинність чи хибність якого не відома, але може бути встановлена експериментально.

Каузальна гіпотеза – висловлювання стосовно причин та пояснень того чи іншого явища.

Гіпотези є двох рівнів. Перший рівень – експериментальна психологічна гіпотеза, другий рівень – статистична гіпотеза.

Психологічна гіпотеза – розумне, обґрунтоване та розвинуте припущення.

Статистична гіпотеза – це просте твердження відносно невідомого параметра.

Психологічна та статистична гіпотези знаходяться у відношенні підпорядкування – статистична гіпотеза формулюється на основі психологічної гіпотези, але не всі психологічні гіпотези можна перевірити статистичними методами, і не всі статистичні гіпотези мають науковий інтерес для психології.

Статистичні гіпотези поділяють на два типи: нульову та альтернативну.

Нульова гіпотеза (H_0) – гіпотеза про відсутність різниць в значеннях порівнювальних ознак. Наприклад H_0: ($x_1 – x_2 = 0$, де x_1, x_2 – порівнювальні значення ознак). Іншими словами, нульова гіпотеза – це те, що треба спростувати, якщо перед нами стоїть завдання довести значущість різниць.

Альтернативна гіпотеза (H_1) – гіпотеза про значущість різниць в значеннях порівнювальних ознак.

Експериментальна гіпотеза – це альтернативна гіпотеза, яку ми хочемо довести. Наприклад, H_1: ($x_1 \neq x_2$; x_1, x_2 – порівнювальні значення ознак).

Направлені гіпотези:

H_0: $x_1 \leq x_2$; (x_1 відрізняється (менше або дорівнює) від x_2),

H_1: $x_1 > x_2$.

Ненаправлені гіпотези.

H_0: x_1 не відрізняється від x_2 ($x_1 = x_2$);

H_1: x_1 відрізняється від x_2 ($x_1 \neq x_2$).

Перевірка гіпотез здійснюється за допомогою критеріїв оцінки відмінностей ознак Існують параметричні і непараметричні критерії статистичної оцінки відмінностей ознак

Статистичні критерії – це правила, що забезпечують надійну поведінку порівнювальних ознак (тобто прийняття істинної та відхилення хибної гіпотези) з високою ймовірністю.

Статистичні критерії можуть визначати як метод розрахунку певного числа, так і саме число. Статистичні критерії поділяються на параметричні і непараметричні.

Параметричні критерії – критерії, що засновані на нормальному розподілі генеральної сукупності.

Непараметричні критерії – критерії, що не базуються на припущенні про тип розподілу генеральної сукупності і які не включають у формулу розрахунку параметри розподілу, а засновані на оперуванні частотами або рангами з використанням порядкових та інтервальних шкал.

Як показує практика, більшість даних, отриманих у психологічних дослідженнях, не розподілені нормально, тому використання параметричних критеріїв при аналізі результатів може привести до похибок у статистичних висновках. У цих випадках непараметричні критерії стають більш дієвими, тобто здатними з більшою достовірністю відкидати нульову гіпотезу.

Рівень статистичної значущості як характеристика критерію, – це імовірність того, що ми вважаємо різниці значень ознак суттєвими, а вони насправді випадкові.

Рівень значущості – це імовірність відхилення нульової гіпотези H_0 в той час, як вона вірна (зв'язку немає).

Коли ми вказуємо, що відмінності достовірні на 5% рівні значущості, (або при $\rho \leq 0{,}05$), то маємо на увазі, що ймовірність того, що відмінності все таки достовірні, складає 0,05.

Саме статистична значущість (ρ – рівень значущості) є кількісною оцінкою надійності зв'язку: чим менша ця ймовірність, тим надійніший зв'язок.

Отже, перевіряючи статистичну гіпотезу, слід врахувати можливі помилки, які можуть статися з різних причин. Розглянемо таку схему.

Для генеральної сукупності правильна гіпотеза	У результаті застосування критерію прийнята гіпотеза	
	нульова (H_0)	альтернативна (H_1)
Нульова (H_0)	Немає помилки	Помилка першого роду
Альтернативна (H_1)	Помилка другого роду	Немає помилки

Як бачимо, можливі чотири варіанти співвідношення реальної ситуації в генеральній сукупності і висновків процедури тестування. У двох з них висновки збігаються з реаліями і тому правильні. В інших двох випадках висновки будуть неправильними.

Традиційно розрізняють похибки першого та другого роду.

Похибка, яка полягає у тому, що ми відхилили H_0 у той час, як вона вірна, називається похибкою першого роду. Імовірність похибки першого роду позначається α і називають її рівнем значущості критерію. Якщо імовірність похибки – α, то імовірність вірного рішення $(1–\alpha)$. Чим менше α, тим більша імовірність правильного рішення

Відхилення нульової гіпотези (про відсутність відмінностей) і прийняття альтернативної гіпотези (про статистичну достовірність відмінностей) здійснюється за правилом.

<u>**Правило:**</u> Якщо емпіричне значення критерію дорівнює критичному значенню ($X^2_{емп} \geq X^2_{кр}$) (відповідно для $\rho \leq 0{,}05$), або перевищує його, то H_0

відхиляється, але ми ще не можемо виразно прийняти H_1 (існує ймовірність похибки α). Якщо емпіричне значення критерію дорівнює критичному значенню ($X^2_{емп} \geq X^2_{кр}$) (для $\rho \leq 0{,}01$), або перевищує його, то H_0 відхиляється і приймається H_1.

Зауваження: Виключення складають критерій знаків – G, критерій T–Вілконсона і критерій U–Манна-Уітні, що встановлюють зворотні співвідношення.

Потужність критерію – це його спроможність виявляти розбіжності, якщо вони є, тобто це здатність критерію відхиляти H_0 (про відсутність розбіжностей), якщо вона невірна.

Похибка, яка полягає у тому, що ми прийняли H_0 у той час, як вона невірна, називається похибкою другого роду. Імовірність похибки другого роду позначається – β.

Потужність критерію – це його здатність не допустити похибку другого роду, тобто потужності критерію відповідає величина (1 – β).

Рівень статистичної значущості визначають по різному при перевірці направлених (з використанням одностороннього критерію) і ненаправлених (з використанням двостороннього критерію) статистичних гіпотез.

§4.2. ВИЯВЛЕННЯ ВІДМІННОСТЕЙ У РІВНІ ПРОЯВУ ОЗНАКИ

Досить часто перед дослідником у психології стоїть задача виявлення відмінностей між двома, трьома і більше вибірками досліджуваних, або довести, що ці відмінності відсутні.

Проблема доведення відсутності відмінностей характерна для формуючих експериментів, коли необхідно довести еквівалентність експериментальної та контрольної груп до експерименту:

$$O_1 \to X \to O_2$$

$$O_1^* \to\to\to O_2^*$$

де: X – експериментальний вплив (психологічні консультації);

O_1 та O_1^* – стани експериментальної та контрольної груп до експерименту;

O_2 та O_2^* – стани експериментальної та контрольної груп після експерименту.

Для того, щоб результати експерименту були валідними, необхідно щоб була виконана умова:

$$O_1 = O_1^*$$

Це і є задача виявлення відмінностей в рівні прояву ознаки. Вирішити цю задачу дозволяють такі статистичні критерії:

СТАТИСТИЧНИЙ КРИТЕРІЙ U-МАННА-УІТНІ

U-критерій Манна-Уітні використовується для порівняння між собою результатів досліджень у двох незалежних вибірках. Формальним критерієм незалежності вибірок є відсутність кореляції між ними. Застосувавши критерій Манна-Уітні ми дізнаємося, наскільки статистично значимі відмінності між двома незалежними вибірками і, відповідно, наскільки впевнено можна робити висновки про ці відмінності.

Також за допомогою цього критерію можна робити висновок про незначимість відмінностей між вибірками – це необхідно, наприклад, коли ми хочемо переконатися, що показники контрольної та експериментальної групи до експерименту не відрізняються, або хочемо довести, що середні показники однакові.

Алгоритм розрахунку U-критерій Манна-Уітні

1. Обчисліть середні арифметичні для обох вибірок ($\bar{x}_1$ та $\bar{x}_2$);
2. Сформулюйте нульову і альтернативну статистичні гіпотези (H_0 та H_1):

H_0 – відмінності між $\bar{x}_1$ та $\bar{x}_2$випадкові (або їх взагалі не існує).

H_1 – відмінності між $\bar{x}_1$ та $\bar{x}_2$достовірні, значимі.

3.Дані обох груп об'єднайте у один ряд, розташувавши їх у порядку зростання.

Щоб не заплутатися, де яка група, дані однієї групи кодують 1 а другої групи – 2 або, якщо зручніше, Е та К відповідно.

4. Значення об'єднаного ряду проранжуйте (присвойте кожному числу його ранг).
5. Знайдіть суми рангів для обох груп (R_1 та R_2).
6. Обчисліть значення (U) за формулою:

$$U = n_1 \cdot n_2 + \frac{n_{R_{max}}(n_{R_{max}}+1)}{2} - R_{max} \quad (4,15)$$

де: n_1 – кількість досліджуваних в 1 групі; n_2 – кількість досліджуваних в 2 групі;

$n_{R_{max}}$ – кількість досліджуваних у групі із більшою ранговою сумою;

R_{max} – найбільша рангова сума.

7. За допомогою таблиці критичних значень критерію U-Манна-Уітні. У комірці, що відповідає обсягам першої та другої вибірок (n_1 та n_2), знайдіть критичне значення U-критерія $U_{крит}$.

8. Порівняйте обчислене вами $U_{емп}$ та знайдене у таблиці $U_{крит}$.

Якщо $U_{емп} \leqslant U_{крит}$ приймається гіпотеза H_1 на рівні $p \leqslant 0{,}05$;

якщо $U_{емп} > U_{крит}$ – приймається гіпотеза H_0.

Зауваження: При обчисленні U-критерія ми зіштовхуємося із необхідністю рангування. Якщо жодне число у наборі даних не повторюється, рангування здійснюється без особливих проблем. Однак може статися, що 2 і більше досліджуваних матимуть однакові показники. Тоді користуємось зв'язаними рангами.

Прийняття гіпотези H_0 дає підстави стверджувати, що значимих відмінностей між вибірками (за параметром, що досліджувався) не виявлено.

Прийняття гіпотези H_1 на рівні $p \leqslant 0{,}05$ дає підстави для такого висновку: за параметром, що досліджувався, між групами виявлено відмінності, статистично значимі на рівні $p \leqslant 0{,}05$.

Зі статистичної точки зору це означає, що у 5% випадків ми можемо помилитися і виявлені нами відмінності не проявляться. Інакше кажучи, якщо ми повторно проведемо дослідження із вибіркою 100 осіб, то 5 із них не підпадуть під виявлену закономірність.

Обмеження застосування Критерій Манна-Уітні є непараметричним, тобто при його застосуванні знімається вимога нормальності розподілу і вимога рівності дисперсії. В цьому плані критерій менш вимогливий, ніж його параметричний аналог – t-критерій Стьюдента для незалежних вибірок, застосування якого вимагає і перевірки нормальності розподілу, і порівняння дисперсії за додатковими статистичними критеріями. Водночас

U-критерій менш чутливий, ніж t-критерій. Застосовуючи критерій Манна-Уітні, слід також знати деякі обмеження, які стосуються обсягів вибірок.

По-перше, мінімальний обсяг вибірок – по 3 особи. Якщо в одній вибірці 2 особи, у іншій має бути мінімум 5. Максимальний обсяг вибірок – по 60 осіб. Ще однією проблемою є зв'язані ранги, які впливають на результат обчислень. Якщо зв'язаних рангів небагато, їх вплив незначний і просто ігнорується. Якщо ж доля зв'язаних рангів є великою (більше половини), результати можуть бути суттєво спотворені. У цьому випадку буде доцільним використовувати інші критерії.

Приклад: З метою з'ясування необхідності психологічної роботи в лікарні адміністрацією було запрошено на тимчасову роботу психолога. Психолог, щоб довести важливість і необхідність своєї роботи, вирішив побудувати її за експериментальним планом. Він обрав для дослідження дві палати, причому в одній з них він проводив регулярні психологічні консультації та бесіди, а в іншій – нічого не робив. Для діагностики змін у самопочутті пацієнтів він використав опитування лікарів – до початку своєї роботи він опитав їх відносно емоційного стану пацієнтів в обох палатах, і таке ж опитування провів після завершення терміну своєї роботи (через 2 тижні). Отже, ми маємо експеримент, в якому:

$$O_1 \to X \to O_2$$

$$O_1^* \to\to\to O_2^*$$

де: X – експериментальний вплив (психологічні консультації);

O_1 та O_2 – опитування лікарів відносно самопочуття експериментальної групи (групи, з якою проводилися психологічні консультації) до та після експерименту;

O_1^* та O_2^* – опитування лікарів відносно самопочуття контрольної групи (групи, з якою не проводилися психологічні консультації) до та після експерименту.

Перш за все, необхідною умовою вдалості експерименту є відсутність відмінностей між експериментальною та контрольною групами до експерименту. Адже, навіть, якби лікарі помітили різницю в емоційних станах пацієнтів обох палат, то це могло б бути обумовлено лише тим, що в палаті, в якій працював психолог, були більш оптимістичніші пацієнти. Саме тому перевірка рівності $O_1 = O_1^*$ є обов'язковою! Здійснимо перевірку за U-критерієм Манна-Уітні, якщо лікарі поставили пацієнтам бали за 20-бальною такі:

n_1 та n_2	ПОЗИТИВНИЙ ЕМОЦІЙНИЙ СТАН (до експерименту)	
	ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНА ГРУПА (палата 1)	КОНТРОЛЬНА ГРУПА (палата 2)
1	15	10
2	8	15
3	10	8
4	6	8
5	20	4
6	9	19
7	14	6
8	7	9
9	15	7
10	8	15
11	16	8
12		17
13		14
14		16
15		20
	$\bar{x}_1$ =11,6	$\bar{x}_2$ =11,7

Розв'язання: Виходячи з середніх показників можемо припустити, що в обох групах емоційні стани приблизно однакові.

Для того, щоб перевірити це припущення, висунемо дві гіпотези:

H_0 – відмінності між $\bar{x}_1$ та $\bar{x}_2$випадкові (або їх взагалі не існує). Отже, наші групи подібні і ми можемо взяти вибрану групу як контрольну.

H_1 – відмінності між $\bar{x}_1$ та $\bar{x}_2$ достовірні, значимі. Вони можуть бути викликані великим розмахом значень індивідуальних показників, і тоді необхідно змінити або контрольну, або експериментальну групу.

Перевіримо висунуті гіпотези:

1. Дані обох груп об'єднаєм у нову таблицю, розташувавши їх в порядку збільшення показників. Показники експериментальної групи кодуємо літерою Е, а контрольної групи – К.
2. Кожному значенню отриманого ряду присвоюємо його ранг. Якщо в ряду є декілька однакових числових значень, то використовують правило зв'язаних рангів.
3. Знаходимо суму рангів окремо для експериментальної (ΣR_1) і контрольної (ΣR_2) груп: ΣR_1=147,5; ΣR_2=200
4. Обчислюємо значення U-критерію:

$$U = 11 \cdot 15 + \frac{15(15+1)}{2} - 200 = 85$$

№	Група	Емоційний стан	Ранг	№	Група	Емоційний стан	Ранг
1	К	4	1	**14**	К	10	13,5
2	Е	6	2,5	**15**	Е	14	15,5
3	К	6	2,5	**16**	К	14	15,5
4	Е	7	4,5	**17**	Е	15	18,5
5	К	7	4,5	**18**	Е	15	18,5
6	Е	8	8	**19**	К	15	18,5
7	Е	8	8	**20**	К	15	18,5
8	К	8	8	**21**	Е	16	21,5
9	К	8	8	**22**	К	16	21,5
10	К	8	8	**23**	К	17	23
11	Е	9	11,5	**24**	К	19	24
12	К	9	11,5	**25**	Е	20	25,5
13	Е	10	13,5	**26**	К	20	25,5

5. За таблицею U-критерію знайдемо критичне значення U-критерію для $n_1 = 11$ і $n_2 = 15$: $U_{крит} = 44$

Оскільки $U = 85 > U_{крит} = 44$, то приймаємо гіпотезу H_0. Отже, відмінності між нашими групами незначні, тому вибрану групу можна взяти як контрольну.

Після завершення терміну своєї роботи (через 2 тижні) стан пацієнтів став таким:

n_1 та n_2	ПОЗИТИВНИЙ ЕМОЦІЙНИЙ СТАН (після експерименту)	
	ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНА ГРУПА (палата 1)	КОНТРОЛЬНА ГРУПА (палата 2)
1	18	11
2	18	13
3	10	10
4	19	7
5	20	6
6	17	14
7	17	7
8	19	8
9	19	9
10	17	16
11	20	6
12		18
13		12
14		14
15		20
	$\bar{x}_1$ =17,64	$\bar{x}_2$ =11,4

Середні показники відрізняються, то можна припустити, що позитивний емоційний стан у експериментальній групі зріс не випадково, а завдяки формуючому експерименту. Для того, щоб перевірити це припущення, висунемо дві гіпотези:

H_0 – відмінності між $\bar{x}_1$ та $\bar{x}_2$ випадкові. Експеримент не вдався.

H_1 – відмінності між $\bar{x}_1$ та $\bar{x}_2$ достовірні, значимі. Отже, емоційний стан в експериментальній групі зріс завдяки роботі психолога.

Перевіримо висунуті гіпотези за алгоритмом, що вже використовували.

№	Група	Емоційний стан	Ранг	№	Група	Емоційний стан	Ранг
1	К	6	1,5	**14**	К	16	14
2	К	6	1,5	**15**	Е	17	16
3	К	7	3,5	**16**	Е	17	16
4	К	7	3,5	**17**	Е	17	16
5	К	8	5	**18**	Е	18	19
6	К	9	6	**19**	Е	18	19
7	Е	10	7,5	**20**	К	18	19
8	К	10	7,5	**21**	Е	19	22
9	К	11	9	**22**	Е	19	22
10	К	12	10	**23**	Е	19	22
11	К	13	11	**24**	Е	20	25
12	К	14	12,5	**25**	Е	20	25
13	К	14	12,5	**26**	К	20	25

$\Sigma R_1=141{,}5$; $\Sigma R_2=209{,}5$

4. Обчислюємо значення U-критерію:

$$U = 11 \cdot 15 + \frac{11(11+1)}{2} - 209{,}5 = 21{,}5$$

За таблицею U-критерію знайдемо критичне значення U-критерію для $n_1=11$ і $n_2=15$: $U_{крит}=44$

Оскільки $U=21{,}5<U_{крит}=44$, то приймаємо гіпотезу H_1. Відмінності між нашими групами достовірні і значимі. Отже, робота психолога покращила стан пацієнтів.

§4.3. СТАТИСТИЧНИЙ КРИТЕРІЙ, t – КРИТЕРІЙ СТЬЮДЕНТА

Для порівняння вибіркових середніх величин, які належать до двох сукупностей даних, і для вирішення питання про те, чи відрізняються середні значення статистично достовірно один від одного, використовують t-критерій Стьюдента або його непараметричні аналоги.

Критерій t-Стьюдента використовується у трьох випадках:

1) порівняння середніх показників двох залежних вибірок (t-критерій для залежних вибірок);

2) порівняння середніх показників двох незалежних вибірок (t-критерій для незалежних вибірок);

3) порівняння середнього показника однієї вибірки із певною заданою величною (t-критерій для однієї вибірки).

Застосувавши критерій Стьюдента, ми дізнаємося, наскільки статистично значимі відмінності між двома вибірками і, відповідно, наскільки впевнено можна робити висновки про ці відмінності.

Критерій Стьюдента вимагає дотримання двох вимог:

а) відповідності числових даних параметрам нормального розподілу; б) рівності дисперсії двох вибірок, які порівнюються між собою.

Алгоритм застосування t-критерію Стьюдента:

1. Перевірка нормальності розподілу даних у вибірках, що порівнюються.
2. Перевірка рівності (гомогенності) дисперсії незалежних вибірок або перевірка наявності прямого кореляційного зв'язку між залежними вибірками.
3. Власне обчислення t-критерію (схема обчислення критерію різниться залежно від того, порівнюються залежні чи незалежні вибірки; однаковий чи різний обсяг вибірок).
4. Порівняння отриманого емпіричного значення t-критерію із критичним табличним значенням і висновок про підтвердження чи спростування нульової гіпотези про відсутність відмінностей.

Обчислення t-критерію Стьюдента

Перевірка нормальності розподілу даних у вибірках, що порівнюються. На нормальність перевіряють обидві вибірки. Для цього розраховують для кожної вибірки емпіричні значення асиметрії та ексцесу та порівнюють їх із критичними значеннями.

Емпіричне значення асиметрії розраховується за такою формулою:

$$A = \frac{\sum \vartheta_i^3}{n} \quad (4.16)$$

Формула для емпіричної величини ексцесу має такий вигляд:

$$E = \frac{\sum \vartheta_i^4}{n} - 3 \quad (4.17)$$

Для обчислення величин μ слід знайти середнє арифметичне ($\bar{x}$) та стандартне відхилення (σ) і потім розрахувати значення μ, за формулою:

$$\vartheta_i = \frac{x_i - \bar{x}}{\sigma} \quad (4.18)$$

Розрахунок стандартного відхилення роблять за формулою:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \quad (4.19)$$

Для розрахунків критичних значень асиметрії та ексцесу користуються формулами:

$$A_{кр} = 3 \cdot \sqrt{\frac{6 \cdot (n-1)}{(n+1)(n+3)}} \quad (4.20)$$

$$E_{кр} = 5 \cdot \sqrt{\frac{24 \cdot n(n-2)(n-3)}{(n+1)^2(n+3)(n+5)}} \quad (4.21)$$

У всіх випадках *n* – обсяг вибірки. Далі емпіричні значення асиметрії та ексцесу порівнюють із критичними значеннями. Рішення про нормальність розподілу даних приймають, якщо отримані емпіричні значення менші за критичні. Перевірка нормальності розподілу є обов'язковою процедурою для t-критерію Стьюдента, оскільки він був розроблений виключно для аналізу даних, розподілених нормально.

Зауваження: перевірка нормальності полягає у аналізі відмінностей між частотним розподілом, побудованим на основі ваших даних, і нормальним розподілом, тому позитивним результатом є підтвердження нульової гіпотези – отримання статистично не значимого результату, при якому ($p>0{,}05$ $k_1=n_1-1$, $k_2=n_2-1$). Якщо перевірка нормальності дала негативний результат ($p<0{,}05$) – скористайтеся непараметричними критеріями.

Для перевірки гомогенності дисперсій пропонують використовувати критерій F-Фішера (який теж є параметричним). Для цього формулюють дві статистичні гіпотези: H$_0$: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ (дисперсії обох вибірок рівні) H$_1$: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ (дисперсії обох вибірок нерівні) Для проведення обчислень необхідно скористатися формулою F-критерію Фішера:

$$F_{\text{ем}} = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \tag{4.22}$$

Критичні значення ($F_{\text{крит}}$) шукають у таблиці критичних значень F-критерію Фішера для перевірки ненаправлених альтернатив. Якщо $F_{\text{емп}} \geq F_{\text{крит}}$ – приймають рішення про підтвердження гіпотези про нерівність дисперсій на рівні $p<0,05$ і, відповідно, слід застосовувати не критерій Стьюдента у стандартній формі, а модифікований критерій Стьюдента для незалежних вибірок із негомогенними дисперсіями.

Приклад: перевіримо чи можна застосувати критерій Стюдента до нашого прикладу. Перевіримо для вхідних даних.

Розв'язання: побудуємо розрахункову таблицю для обрахування асиметрії і ексцесу.

Розрахункова таблиця для експериментальної групи

№	x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$\vartheta_i = \dfrac{x_i - \bar{x}}{\sigma}$	ϑ_i^3	ϑ_i^4
1	15	3,36	11,31	0,74	0,41	0,30
2	8	-3,64	13,22	-0,80	-0,51	0,41
3	10	-1,64	2,68	-0,36	-0,05	0,02
4	6	-5,64	31,77	-1,24	-1,91	2,37
5	20	8,36	69,95	1,84	6,23	11,47
6	9	-2,64	6,95	-0,58	-0,20	0,11
7	14	2,36	5,59	0,52	0,14	0,07
8	7	-4,64	21,50	-1,02	-1,06	1,08
9	15	3,36	11,31	0,74	0,41	0,30
10	8	-3,64	13,22	-0,80	-0,51	0,41
11	16	4,36	19,04	0,96	0,89	0,85
$\sum$	128		206,55		3,83	17,39

$$\sigma = \sqrt{\frac{206,55}{11-1}} = 4,54$$

$$A = \frac{3,83}{11} = 0,35 < A_{\text{кр}} = 3 \cdot \sqrt{\frac{6\cdot(11-1)}{(11+1)(11+3)}} = 1,79$$

$$E = \frac{17,39}{11} - 3 = -1,42, < E_{\text{кр}} = 5 \cdot \sqrt{\frac{24 \cdot 11(11-2)(11-3)}{(11+1)^2(11+3)(11+5)}} = 3,83$$

отримані емпіричні значення менші за критичні, що свідчить про нормальність розподілу в експериментальній групі.

Зробимо перевірку для контрольної групи аналогічно як для експериментальної:

Розрахункова таблиця для експериментальної групи

№	x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$\vartheta_i = \frac{x_i - \bar{x}}{\sigma}$	ϑ_i^3	ϑ_i^4
	10	-1,73	3,00	-0,34	-0,04	0,01
	15	3,27	10,67	0,64	0,27	0,17
	8	-3,73	13,94	-0,74	-0,40	0,29
	8	-3,73	13,94	-0,74	-0,40	0,29
	4	-7,73	59,80	-1,52	-3,53	5,38
	19	7,27	52,80	1,43	2,93	4,20
	6	-5,73	32,87	-1,13	-1,44	1,63
	9	-2,73	7,47	-0,54	-0,16	0,08
	7	-4,73	22,40	-0,93	-0,81	0,76
	15	3,27	10,67	0,64	0,27	0,17
	8	-3,73	13,94	-0,74	-0,40	0,29
	17	5,27	27,74	1,04	1,12	1,16
	14	2,27	5,14	0,45	0,09	0,04
	16	4,27	18,20	0,84	0,59	0,50
	20	8,27	68,34	1,63	4,32	7,03
	176		360,93		2,41	22,00

$$\sigma = \sqrt{\frac{360,93}{15-1}} = 5,1$$

$$A = \frac{2,41}{15} = 0,16 < A_{\text{кр}} = 3 \cdot \sqrt{\frac{6 \cdot (15-1)}{(15+1)(15+3)}} = 1,62$$

$$E = \frac{22}{15} - 3 = 1,47, < E_{\text{кр}} = 5 \cdot \sqrt{\frac{24 \cdot 15(15-2)(15-3)}{(15+1)^2(15+3)(15+5)}} = 3,9$$

отримані емпіричні значення менші за критичні, що свідчить про нормальність розподілу в контрольній групі.

Для перевірки гомогенності дисперсій потрібно скористатися формулою F-критерію Фішера:

$$F_{\text{ем}} = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = \frac{4,54^2}{5,1^2} = 0,79 < F_{\text{табл}} = 3,94$$

Отже підтверджується гіпотеза H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ (дисперсії обох вибірок рівні), тобто для них можна застосовувати критерій Стюдента для незалежних вибірок.

КРИТЕРІЙ ,t -СТЬЮДЕНТА ДЛЯ НЕЗАЛЕЖНИХ ВИБІРОК

Формальним критерієм незалежності вибірок є відсутність кореляції між ними. З точки зору змісту – незалежними є ті вибірки, між якими не можна виявити жодних зв'язків.

Обчислення t-критерію Стьюдента для незалежних вибірок (гомогенні дисперсії) здійснюють за таким алгоритмом:

1. Формулюють статистичні гіпотези:

H_0 – відмінності між $\bar{x}_1$ та $\bar{x}_2$ випадкові і незначимі.

H1 – відмінності між $\bar{x}_1$ та $\bar{x}_2$ достовірні, значимі.

2. Обчислюють емпіричне значення t-критерію ($t_{емп}$) за формулою, якщо обсяги вибірок однакові:

$$t_{ем} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{n}}} \tag{4.23}$$

$$k = 2n - 2$$

Якщо обсяги вибірок різні то емпіричне значення t-критерію ($t_{емп}$) обчислюється за формулою:

$$t_{ем} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{(n_1-1)\sigma_1^2 + (n_2+1)\sigma_2^2}{n_1+n_2-2}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \tag{4.24}$$

$$k = n_1 + n_2 - 2$$

де: $\bar{x}_1$ та $\bar{x}_2$ – середні арифметичне; σ_1^2 та σ_2^2 – дисперсії відповідних вибірок; n, n_1, n_2 – обсяги вибірок; k – число ступенів свободи.

3. Врахувавши число ступенів свободи (k) за таблицею критичних значень критерію t-Стьюдента, знаходять $t_{крит}$ і порівнюють отримані значення:

- якщо $t_{емп} \geq t_{табл}$ – приймають гіпотезу H_1;
- якщо $t_{емп} < t_{табл}$ – примають гіпотезу H_0.

Обчислення модифікованого t-критерію Стьюдента для вибірок із негомогенними дисперсіями відрізняється лише формулою для обчислення величини t та числа ступенів свободи:

$$t_{\text{ем}} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)}} \tag{4.25}$$

$$k = \frac{\left(\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2\right)^2}{\left(\sigma_1^2/n_1\right)^2/(n_1-1) + \left(\sigma_2^2/n_2\right)^2/(n_2-1)} \tag{4.26}$$

де: $\bar{x}_1$ та $\bar{x}_2$ – середні арифметичне; σ_1^2 та σ_2^2 – дисперсії відповідних вибірок; n, n_1, n_2 – обсяги вибірок; k – число ступенів свободи.

Приклад: так як ми підтвердили гіпотезу H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ (дисперсії обох вибірок рівні), тобто для них можна застосовувати критерій Стюдента для незалежних вибірок. Перевіримо статистичні гіпотези:

H_0 – відмінності між $\bar{x}_1$ та $\bar{x}_2$випадкові (або їх взагалі не існує). Отже, наші групи подібні і ми можемо взяти вибрану групу як контрольну.

H_1 – відмінності між $\bar{x}_1$ та $\bar{x}_2$ достовірні, значимі. Вони можуть бути викликані великим розмахом значень індивідуальних показників, і тоді необхідно змінити або контрольну, або експериментальну групу.

Обсяги вибірок різні то емпіричне значення t-критерію ($t_{\text{емп}}$) обчислюється за формулою:

$$t_{\text{ем}} = \frac{11{,}64 - 11{,}73}{\sqrt{\frac{(11-1)4{,}54^2 \ + (15+1)5{,}1^2}{11+15-2}\left(\frac{1}{11} + \frac{1}{15}\right)}} = 3$$

$$k = 11+15-2 = 24$$

$t_{\text{крит}}$=3,745 для p=0,001. Оскільки $t_{\text{емп}} < t_{\text{табл}}$ – приймають гіпотезу H_0. Відмінності між $\bar{x}_1$ та $\bar{x}_2$випадкові (або їх взагалі не існує). Отже, наші групи подібні і ми можемо взяти вибрану групу як контрольну.

S-КРИТЕРІЙ ДЖОНКІРА

При порівнянні трьох і більше вибірок використовують критерій S- Джонкіра для виявлення тенденцій зміни ознаки при переході від однієї вибірки до іншої.

Обмеження критерію:

- у кожній з вибірок повинно бути однакове число спостережень;

– нижня межа: не менше 3-х вибірок і не менше 2-х спостережень у кожній вибірці;

- верхня межа: не більше 6-ти вибірок і не більше 10-ти спостережень у кожній вибірці;

– вибірки незалежні;

– дані зібрані за порядковою шкалою або інтервальною.

Обчислення S- Джонкіра здійснюють за таким алгоритмом:

1.Формулюють статистичні гіпотези:

H_0: Тенденція зростання значень ознаки при переході від вибірки до вибірки є випадковою.

H_1: Тенденція зростання значень ознаки при переході від вибірки до вибірки не є випадковою.

2. Перевірити, чи виконуються обмеження критерію. Якщо кількість випробуваних у групах не співпадають, урівняти групи, орієнтуючись на кількість спостережень у меншій із груп. При цьому обирати дані для вирівнювання об'ємів вибірок потрібно з кожної вибірки випадковим чином.

3. Впорядкувати значення у кожній вибірці за зростанням.

4. Обчислити суму значень у кожній з вибірок з вирівняними об'ємами або вибіркові середні.

5. Впорядкувати вибірки зліва направо за зростанням обчислених сум чи вибіркових середніх.

6. Починаючи з найменшого значення у крайньому лівому стовпці, підрахувати для кожного індивідуального значення кількість значень, які перевищують його у всіх стовпцях справа. Обчислену суму записати поряд з числом, з яким порівнюють, у дужках (S_i).

7. Підрахувати суми показників у дужках по стовпцях.

8. Підрахувати загальну суму, просумувавши всі суми по стовпцях. Дану суму позначити як A.

$$A = \sum S_i \qquad (4.27)$$

9. Обчислити максимально ймовірну кількість перевищуючих значень, яке ми отримали б, якщо б всі значення справа були вище значень зліва:

$$B = \frac{c \cdot (c-1)}{2} \cdot n^2, \qquad (4.28)$$

де с – кількість стовпців (співставлених груп); n – кількість спостережень у кожному стовпці (групі).

10. Визначити емпіричне значення S за формулою:

$$S=2A\text{-}B \qquad (4.29)$$

12. Визначити критичне значення S за таблицею критичних точок S-критерію тенденцій Джонкіра. Якщо $S_{емп} \leq S_{кр}$, то H_0: Тенденція зростання значень ознаки при переході від вибірки до вибірки є випадковою. $S_{емп} \geq S_{кр}$.– H_1: Тенденція зростання значень ознаки при переході від вибірки до вибірки не є випадковою.

Приклад: Психолог застосовує в своїй роботі групові методи: в одній групі проводить індивідуальні консультації, в іншій – групові, в третій – індивідуально-групові. Необхідно перевірити гіпотезу – ефективність роботи зростатиме при переході від індивідуального методу до індивідуально-групового використовуючи S-критерій Джонкіра..

Відповідно, можна побудувати статистичні гіпотези:

H_0 – тенденція до зростання позитивного емоційного стану при переході від вибірки до вибірки є випадковим.

H_1 – тенденція до зростання позитивного емоційного стану при переході від першої вибірки до другої є невипадковою та значимою.

Одна з основних умов критерію – однакові обсяги вибірок, що порівнюються дорівнюють 8.

Дані, отримані дослідником через місяць після роботи з групами (перед цим було з’ясовано, що відмінності між групами досліджуваних до експерименту відсутні – у всіх приблизно однаковий емоційний стан) дано в таблиці.

	Індивідуальний метод	Груповий метод	Індивідуально-груповий метод
Емоційний стан	5	6	6
	6	9	9
	9	4	3
	2	5	5
	7	7	8
	6	3	2
	8	5	4
	5	9	9
	4	3	5
	9	7	8
	61	**58**	**59**

Для подальшої роботи необхідно організувати дані у таблицю так, щоб в межах кожної групи показники емоційного стану знаходилися в зростаючому порядку.

Після того, як дані розташовані в порядку зростання (в межах кожного стовпчика), необхідно підрахувати для кожного індивідуального значення його S_i – кількість показників, які перевищують його в правих стовпчиках. Після цього необхідно знайти суму всіх S_i.

	Груповий метод	S_i	Індивідуально-груповий метод	S_i	Індивідуальний метод
Емоційний стан	3	17	2	9	2
	3	17	3	9	4
	4	15	4	8	5
	5	11	5	6	5
	5	11	5	6	6
	6	8	6	4	6
	7	7	8	2	7
	7	7	8	2	8
	9	0	9	0	9
	9	0	9	0	9
	∑=58		**∑=59**		**∑=61**
		∑=93		**∑=46**	

$$A = 93 + 46 = 139 \qquad B = \frac{3\cdot(3-1)}{2}\cdot 8^2 = 192,$$

$$S=2\cdot 139-192=66$$

Критичне значення $S_{кр}=88$, $S_{емп}\leq S_{кр}$, то приймаємо гіпотезу H_0 – тенденція зростання значень ознаки при переході від вибірки до вибірки є випадковою і не залежало від роботи психолога.

§4.4. ОЦІНКА ДОСТОВІРНОСТІ ЗСУВУ ЗНАЧЕННЯ

КРИТЕРІЙ ЗНАКІВ (G)

Критерій знаків є непараметричним, тобто при його застосуванні знімається вимога нормальності розподілу і вимога рівності дисперсій.

Критерій знаків використовується для порівняння між собою результатів досліджень у двох залежних вибірках.

Критерій знаків дає можливість виявити загальний напрямок зсуву певних показників в одній групі після експериментального впливу. Він дозволяє виявити існування зсуву та його напрямок, однак, не дозволяє встановити інтенсивність зсуву. Критерій знаків дуже простий у використанні і належить до методів непараметричної статистики, тому його використання до великих вибірок обмежене. Важливою перевагою критерія знаків є можливість його застосування не лише до кількісних, але й до якісних показників.

Застосовувати критерій знаків варто за таким алгоритмом:

1. Обчислюють середні арифметичні для обох вибірок ($\bar{x}_1$ та $\bar{x}_2$);

2. Формулюють статистичні гіпотези:

H_0 – відмінності між $\bar{x}_1$ та $\bar{x}_2$ випадкові (або їх взагалі не існує).

H_1 – відмінності між $\bar{x}_1$ та $\bar{x}_2$ достовірні, значимі.

3. Дані обох груп записуємо поруч, щоб кожному досліджуваному відповідала його пара значень.

4. Порівнюємо пару значень кожного досліджуваного. Якщо спостерігається зростання показника – ставимо знак «+», якщо спадання – знак «-», показник не змінився – знак «=».

5. Підраховуємо кількість тих знаків, які нас цікавлять (якщо нас цікавить зростання показників – це будуть знаки «+», а якщо спадання – знаки «-»). Отримана кількість знаків і буде емпіричним значенням критерія знаків ($G_{емп}$).

6. За таблицею критичних значень критерію знаків знаходять критичне значення ($G_{крит}$).

7. Якщо $G_{емп} < G_{крит}$ – приймається гіпотеза H_0 – значимих відмінностей між вибірками (за параметром, що досліджувався) не виявлено;

якщо $G_{емп} \geq G_{крит}$ – Приймають гіпотезу H_1 на рівні $p \leqslant 0{,}05$ і дає підстави для такого висновку: за параметром, що досліджувався, між групами виявлено відмінності, статистично значимі на рівні $p \leqslant 0{,}05$. Зі статистичної точки зору це означає, що у 5% випадків ми можемо помилитися і виявлені нами відмінності не проявляться.

Приклад: Психолог проводить груповий тренінг. Його задача – вияснити чи буде ефективним даний варіант тренінгу для зменшення рівня тривожності у групі. Для цього психолог за допомогою тесту Тейлора два рази вимірював рівень тривожності у 20 учасників до та після проведення тренінгу. Перевірте припущення психолога.

№	**До тренінгу**	**Після тренінгу**	**Зсув**
1	25	27	+
2	18	20	+
3	30	26	-
4	26	20	-
5	18	18	=
6	9	11	+
7	16	14	-
8	24	20	-
9	22	22	=
10	17	19	+
11	13	18	+
12	18	18	=
13	11	11	=
14	18	16	-
15	21	25	+
16	24	29	+
17	29	28	-
18	26	26	=
19	16	17	+
20	24	23	-
	$\bar{x}_1 = 20{,}25$	$\bar{x}_2 = 20{,}4$	

З'ясуємо, що будемо вважати "типовим зсувом" і для цього зсуву визначимо коефіцієнт $G_{емп}$ (як кількість типових зсувів). Очевидно, що типовим для нас буде зсув "-" зменшення рівня тривожності $G_{емп}=7$. $G_{крит}=15$, $N=20$. $G_{емп}<G_{крит}$ – приймаємо гіпотезу H_0 – даний варіант тренінгу

для зменшення рівня тривожності у групі не дав належного результату, і варто застосовувати інший тренінг.

t -КРИТЕРІЙ СТЬЮДЕНТА ДЛЯ ЗАЛЕЖНИХ ВИБІРОК

Формальним критерієм залежності вибірок є наявність кореляції між ними. З точки зору змісту – залежними є ті вибірки, між членами якої яких можна встановити однозначну відповідність.

Обчислення t-критерію Стьюдента для залежних вибірок:

1.Статистичні гіпотези:

H_0 – відмінності між $\bar{x}_1$ та $\bar{x}_2$ випадкові і незначимі, експеримент не вдався;
H_1 – відмінності між $\bar{x}_1$ та $\bar{x}_2$ достовірні, значимі, експеримент пройшов успішно.

2. Оскільки тут ми маємо справу із залежними вибірками, фактично – із парами значень, то одиницею аналізу є різниця між цими парами значень. Саме тому спершу слід обчислити величини $x_d = x_1 - x_2$ різниці між усіма парами значень.

3. Емпіричне значення t-критерію ($t_{емп}$) за формулою:

$$\sigma_d = \sqrt{\frac{\sum(x_d - \bar{x}_d)^2}{n-1}} \qquad (4.30)$$

де: $\overline{x_d}$ – середнє арифметичне різниці пар значень; σ_d – стандартне відхилення різниці пар значень; n – обсяг вибірок; k – число ступенів свободи.

3.За таблицею критичних значень критерію t-Стьюдента, знаходять $t_{крит}$ і порівнюють отримані значення: якщо $t_{емп} \geqslant t_{крит}$ – приймають гіпотезу H_1; якщо $t_{емп} < t_{крит}$ – приймають гіпотезу H_0.

Приклад: застосуємо даний критерій до попередньої задачі.

Розв'язання: формулюємо статистичні гіпотези: H_0 – відмінності між $\bar{x}_1$ та $\bar{x}_2$ випадкові і незначимі, експеримент не вдався; H_1 – відмінності між $\bar{x}_1$ та $\bar{x}_2$ достовірні, значимі, експеримент пройшов успішно.

Для обрахування емпіричного значення t-критерію ($t_{емп}$) будуємо розрахункову таблицю.

№	До тренінгу	Після тренінгу	$x_d = x_2 - x_1$	$x_d - \bar{x}_d$	$(x_d - \bar{x}_d)^2$
1	25	27	2	1,85	3,42
2	18	20	2	1,85	3,42
3	30	26	-4	-4,15	17,22
4	26	20	-6	-6,15	37,82
5	18	18	0	-0,15	0,02
6	9	11	2	1,85	3,42
7	16	14	-2	-2,15	4,62
8	24	20	-4	-4,15	17,22
9	22	22	0	-0,15	0,02
10	17	19	2	1,85	3,42
11	13	18	5	4,85	23,52
12	18	18	0	-0,15	0,02
13	11	11	0	-0,15	0,02
14	18	16	-2	-2,15	4,62
15	21	25	4	3,85	14,82
16	24	29	5	4,85	23,52
17	29	28	-1	-1,15	1,32
18	26	26	0	-0,15	0,02
19	16	17	1	0,85	0,72
20	24	23	-1	-1,15	1,32
	$\bar{x}_1 = 20,25$	$\bar{x}_2 = 20,4$	$\overline{x_d}$=0,15		160,55

$$\sigma_d = \sqrt{\frac{160,55}{19}} = 2,9$$

$$t = \frac{0,15 \cdot \sqrt{19}}{2,9} = 0,01$$

k=19, $t_{крит}$=2,093 для p=0,05

Так як $t_{емп}$=0,01< $t_{крит}$=2,093 – приймають гіпотезу H_0 – відмінності між $\bar{x}_1$ та $\bar{x}_2$ випадкові і незначимі, експеримент не вдався.

КРИТЕРІЙ χ^2-ФРІДМАНА

Критерій χ^2-Фрідмана використовують для порівняння показників, виміряних в трьох і більше умовах на одній і тій же вибірці. Критерій дозволяє встановити, що величини показників змінюються від умови до умови, але при цьому не вказує на напрямок змін.

Обчислення критерію χ^2-Фрідмана здійснюють в такій послідовності:

1. Формулюють статистичні гіпотези:

H_0 – відмінності між групами досліджуваних показників відсутні або випадкові;

H_1 – відмінності між групами досліджуваних показників існують і є значимими.

2. Проранговують дані, отримані в різних умовах для кожного досліджуваного об'єкта (перше місце приписують найнижчому показнику)

3. а) Знаходять суми рангів по кожній з умов експерименту і загальну суму рангів $\sum T_i$.

б) Знаходять розрахункову суму рангів (це крок необхідний лише для перевірки правильності рангування).

$$\sum R_i = \frac{n \cdot (c^2 + c)}{2}, \qquad (4.31)$$

де c – кількість умов, n – кількість досліджуваних.

Якщо розрахункова сума рангів не збігається з обчисленою, то неправильно прорангували і слід виправити помилку.

4. Знаходять емпіричне значення χ^2 за формулою:

$$\chi 2 = \frac{12 \cdot \sum T_i^2}{n \cdot (c^2 + c)} - 3n \cdot (c + 1) \qquad (4.32)$$

5. З допомогою статистичних таблиць знаходять критичне значення $\chi^2_{\text{кр}}$ і порівняємо його з емпіричним $\chi^2_{\text{емп}}$.

Якщо $\chi^2_{\text{емп}} \leq \chi^2_{\text{кр}}$ – приймається гіпотеза H_0. Якщо $\chi^2_{\text{емп}} > \chi^2_{\text{кр}}$ – приймається гіпотеза H_1.

Приклад: Визначити, чи залежить студентська активність на заняттях від способу поведінки викладача. В якості різних моделей поведінки викладача скористались класифікацією лідерів К. Левіна – демократичного, ліберального, авторитарного. Активність студентів спостерігали незалежні експерти, які за 20-бальною шкалою визначали їх загальний емоційний стан, частоту відповідей, зацікавленість у занятті. У результаті проведеного дослідження було отримано такі дані:

№	Прізвище ім'я студента	Активність		
		Авторитарний стиль	**Демократичний стиль**	**Ліберальний стиль**
1	Антонюк В.	15	19	6
2	Борейко Ю.	8	15	3
3	Волошин Т.	18	12	3
4	Гевко Ю.	9	18	12
5	Дубова Л.	3	14	7
6	Кухаренко Д.	10	7	11

Розв'язання: 1. Сформулюємо статистичні гіпотези: H_0 – відмінності між трьома показниками активності відсутні або випадкові; H_1 – відмінності між трьома показниками активності існують і є значимими.

2. Проранґуємо дані, отримані в різних умовах для кожного досліджуваного студента (перше місце припишемо найнижчій активності).

№	Прізвище ім'я студента	Активність		
		Авторитарний стиль (ранг)	**Демократичний стиль (ранг)**	**Ліберальний стиль (ранг)**
1	Антонюк В.	2	3	1
2	Борейко Ю.	2	3	1
3	Волошин Т.	3	2	1
4	Гевко Ю.	1	3	2
5	Дубова Л.	1	3	2
6	Кухаренко Д.	2	1	3
	$\sum$	**11**	**15**	**10**

а) Знаходять суми рангів по кожній з умов експерименту і загальну суму рангів: $\sum T_i = 11 + 15 + 10 = 36$

б) Знаходять розрахункову суму рангів (перевірки правильності рангування): $\sum R_i = \frac{6\cdot(3^2+3)}{2} = 36$,– сума рангів збігається з обчисленою.

3.Знайдем емпіричне значення χ^2:

$$\chi 2 = \frac{12 \cdot (11^2 + 15^2 + 10^2)}{6 \cdot (3^2 + 3)} - 3 \cdot 6 \cdot (3 + 1) = 2{,}33$$

$\chi^2_{\text{кр}} = 0{,}43$ так як $\chi^2_{\text{емп}} > \chi^2_{\text{кр}}$ – приймають гіпотезу H_1 – відмінності між трьома показниками активності існують і є значимими.

В даній групі варто дотримуватись демократичного стилю викладання.

L-КРИТЕРІЙ ТЕНДЕНЦІЙ ПЕЙДЖА

Непараметричний критерій L використовують для порівняння показників, виміряних у трьох і більше різних умовах на одній і тій же вибірці досліджуваних. Він дає змогу виявити тенденції зміни величин ознаки при переході від однієї умови до іншої. Його можна розглядати як продовження тесту Фрідмана, оскільки він не лише констатує відмінності, а й зазначає напрям змін.

Перед застосуванням критерію тенденцій Пейджа потрібно перевірити такі умови-обмеження: нижня межа — два досліджуваних, кожний з яких пройшов не менше трьох замірів у різних умовах, верхня межа — 12 досліджуваних і 6 умов; дані повинні бути подані принаймні в порядковий шкалі.

Розрахунок критерію L тенденцій Пейджа зручно подати у вигляду алгоритму.

1. Перевірити, чи виконуються умови застосування критерію L.
2. Прорангувати індивідуальні значення першого досліджуваного, отримані ним у першому, другому, третьому та інших замірах. Так само прорангувати індивідуальні значення інших досліджуваних.
3. а) Знаходять суми рангів по кожній з умов експерименту і загальну суму рангів $\sum T_i$.

б) Знаходять розрахункову суму рангів (це крок необхідний лише для перевірки правильності рангування).

$$\sum R_i = \frac{n \cdot (c^2 + c)}{2}, \qquad (4.33)$$

де с – кількість умов, n – кількість досліджуваних.

Якщо розрахункова сума рангів не збігається з обчисленою, то неправильно прорангували і слід виправити помилку.

4. Розташувати всі умови в порядку зростання їх рангових сум.
5. Сформулювати основну і альтернативну гіпотези:

H_0 – збільшення індивідуальних показників при переході від першої умови до другої, а потім до третьої і далі випадкове;

H_1: – збільшення індивідуальних показників при переході від першої умови до другої, а потім до третьої і далі невипадкове.

6. Обчислити емпіричне значення L за формулою:

$$L_{\text{емп}} = \sum(T_i - i) \qquad (4.34)$$

7. Визначають критичні значення $L_{0,01}$ і $L_{0,05}$ для заданих n і c.
Якщо $L_{емп} > L_{0,01}$, гіпотезу H_0 потрібно відхилити, якщо $L_{емп} < L_{0,05}$ — прийняти. Якщо $L_{0,05} \leq L_{емп} < L_{0,01}$, гіпотеза H_0 відхиляється на рівні значущості 0,05 (або 5%).

Приклад: (умова попереднього прикладу)

Визначити, чи залежить студентська активність на заняттях від способу поведінки викладача. В якості різних моделей поведінки викладача скористались класифікацією лідерів К. Левіна – демократичного, ліберального, авторитарного. Активність студентів спостерігали незалежні експерти, які за 20-бальною шкалою визначали їх загальний емоційний стан, частоту відповідей, зацікавленість у занятті. У результаті проведеного дослідження було отримано такі дані:

№	Прізвище ім'я студента	Активність		
		Авторитарний стиль	Демократичний стиль	Ліберальний стиль
1	Антонюк В.	15	19	6
2	Борейко Ю.	8	15	3
3	Волошин Т.	18	12	3
4	Гевко Ю.	9	18	12
5	Дубова Л.	3	14	7
6	Кухаренко Д.	10	7	11

Розв'язання: 1. Сформулюємо статистичні гіпотези: H_0 – відмінності між трьома показниками активності відсутні або випадкові; H_1 – відмінності між трьома показниками активності існують і є значимими.

2. Проранґуємо дані, отримані в різних умовах для кожного досліджуваного студента (перше місце припишемо найнижчій активності).

№	Прізвище ім'я студента	Активність		
		Авторитарний стиль (ранг)	Демократичний стиль (ранг)	Ліберальний стиль (ранг)
1	Антонюк В.	2	3	1
2	Борейко Ю.	2	3	1
3	Волошин Т.	3	2	1
4	Гевко Ю.	1	3	2
5	Дубова Л.	1	3	2
6	Кухаренко Д.	2	1	3
	$\sum$	**11**	**15**	**10**

а) Знаходять суми рангів по кожній з умов експерименту і загальну суму рангів: $\sum T_i = 11 + 15 + 10 = 36$

б) Знаходять розрахункову суму рангів (перевірки правильності рангування): $\sum R_i = \frac{6 \cdot (3^2+3)}{2} = 36$,– сума рангів збігається з обчисленою.

4. Розташувати всі умови в порядку зростання їх рангових сум.

№	Прізвище ім'я студента	Активність		
		Ліберальний стиль (ранг)	Авторитарний стиль (ранг)	Демократичний стиль (ранг)
1	Антонюк В.	1	2	3
2	Борейко Ю.	1	2	3
3	Волошин Т.	1	3	2
4	Гевко Ю.	2	1	3
5	Дубова Л.	2	1	3
6	Кухаренко Д.	3	2	1
	$\sum$	**10**	**11**	**15**

5. Сформулювати основну і альтернативну гіпотези:

H_0 – збільшення індивідуальних показників при переході від ліберального до авторитарного, а потім до демократичного стилю поведінки викладача випадкове;

H_1: – збільшення індивідуальних показників при переході від ліберального до авторитарного, а потім до демократичного стилю поведінки викладача невипадкове.

6. Обчислити емпіричне значення L за формулою:

$$L_{емп} = (10 \cdot 1) + (11 \cdot 2) + (15 \cdot 3) = 87$$

7. Визначають критичні значення $L_{0,01}$ і $L_{0,05}$ для заданих n і c.

Якщо $L_{емп}=87>L_{0,01}=81$, приймають гіпотезу H_1: – збільшення індивідуальних показників при переході від ліберального до авторитарного, а потім до демократичного стилю поведінки викладача невипадкове. Отже викладачу потрібно дотримуватись демократичного стилю поведінки.

РОЗДІЛ V. ПОРІВНЯННЯ РОЗПОДІЛІВ

§5.1. КРИТЕРІЇ ПОРІВНЯННЯ РОЗПОДІЛІВ

За даними аналізу отриманих у дослідженнях розподілів можна підтвердити чи відхилити теоретичні припущення. Якщо довести, що розподіли статистично достовірно різні, це може стати основою для побудови класифікацій задач і типологій досліджуваних.

Наприклад, можна виявити досліджуваних зі стандартним співвідношенням ознак і нестандартним співвідношенням тощо. Крім того, можна порівняти виявлені групи досліджуваних за показниками мотивації досягнення, оскільки відомо, що особи з переважанням прагнення до успіху віддають перевагу легшим методам її досягнення, де ймовірність успіху становить приблизно 0,5, а особи з переважанням прагнення уникати невдачі віддають перевагу або дуже легким, або дуже важким методам.

Часто доцільно також порівняти отриманий емпіричний розподіл з теоретичним. Наприклад, для того щоб довести, що він підпорядковується чи, навпаки, не підпорядковується нормальному закону розподілу. У практичних цілях емпіричні розподіли повинні перевірятися на "нормальність" тоді, коли необхідно використати параметричні методи і критерії.

λ-КРИТЕРІЙ КОЛМОГОРОВА-СМІРНОВА

Критерій λ використовують для порівняння двох розподілів: емпіричного з теоретичним або двох емпіричних. За його допомогою можна знайти точку, в якій сума накопичених розбіжностей між двома розподілами найбільша і, крім того, оцінити достовірність цієї розбіжності.

Перед застосуванням критерію Колмогорова-Смірнова потрібно перевірити такі умови-обмеження:

1. У випадку порівняння двох емпіричних розподілів кількість спостережень в обох вибірках не повинна бути менше 50, а при порівнянні емпіричного розподілу з теоретичним іноді допускається п'ять і більше спостережень.

2. Дані повинні подаватися принаймі в порядковій шкалі, оскільки розряди повинні бути впорядковані за зростанням або спаданням деякої ознаки, відображати якусь односпрямовану її зміну.

РОЗРАХУНОК КРИТЕРІЮ λ КОЛМОГОРОВА-СМІРНОВА ДЛЯ ДВОХ ЕМПІРИЧНИХ РОЗПОДІЛІВ:

1. Перевіряють, чи виконуються умови застосування критерію λ.

2. Формулюють основну і альтернативну гіпотези:

H_0: відмінності між двома розподілами недостовірні;

H_1: відмінності між двома розподілами достовірні.

3. В таблицю заносять розряди і відповідні частоти порівнюваних розподілів.

4. Обчислюють відносні частоти порівнюваних розподілів.

Відносна частота – відношення частот до обсягу (об’єму) вибірки:

$$\omega_{i1} = \frac{n_{i1}}{n_1} \qquad \text{та} \qquad \omega_{i2} = \frac{n_{i2}}{n_2}$$

n_1; n_2 – кількість досліджуваних у першій та другій вибірках відповідно.

5. Розраховують накопичені відносні частоти порівнюваних розподілів.

Накопичена емпірична частота– обчислюється для кожного з розрядів ознаки, починаючи з першого як сума відповідної відносної частоти та попередньої відносної частоти.

$$f_{i1} = \omega_{i1} + \sum_{i=1}^{n} \omega_{i1-1} \quad \text{та} \qquad f_{i2} = \omega_{i2} + \sum_{i=1}^{n} \omega_{i2-1}$$

6. Обчислюють абсолютні значення різниць відповідних накопичених відносних частот порівнюваних розподілів.

$$d = |f_{i1} - f_{i2}|$$

7. Знаходять найбільшу різницю – d_{max}.

8. Розраховують емпіричне значення критерію λ за формулою:

$$\lambda = d_{max}\sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}}$$

де n_1,n_2 — обсяг вибірки відповідно першої та другої.

9. При порівнянні двох емпіричних розподілів визначають рівень статистичної значущості, який відповідає отриманому значенню $\lambda_{емп}$ і на цій

основі роблять висновок про прийняття чи відхилення основної гіпотези. Якщо рівень статистичної значущості не перевищує 0,01, гіпотеза H_0 відхиляється, а якщо перевищує 0,05, ця гіпотеза приймається. В інших випадках гіпотеза H_0 відхиляється на рівні значущості, що відповідає отриманому значенню $\lambda_{емп}$.

Приклад: психолог дитячого садочку вирішив порівняти емоційний стан дітей двох однакових вікових груп, застосувавши тест Люшера Після отримання даних з'явилася необхідність порівняти два отриманих розподіли. Нехай було отримано такі дані:

Позиція чорного кольору		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Кількість дітей, що поставили чорний колір на цю позицію	Група №1	2	4	3	3	5	3	5	8	9	8
	Група №2	3	2	3	1	4	9	8	9	6	5

Розв'язання: так як, в кожній вибірці по 50 спостережень, розподіли емпіричні застосовуємо критерій Колмогорова-Смірнова.

Формулюємо гіпотези:

H_0: відмінності між двома розподілами недостовірні;

H_1: відмінності між двома розподілами достовірні.

В таблицю заносимо розряди і відповідні частоти порівнюваних розподілів. Розраховуємо накопичені емпіричні частоти та їх різницю.

№	Частоти		Відносні частоти		Накопичені емпіричні частоти		$d = \|f_{i1} - f_{i2}\|$
	n_{i1}	n_{i2}	ω_{i1}	ω_{i2}	f_{i1}	f_{i2}	
1	2	3	0,04	0,06	0,04	0,06	0,02
2	4	2	0,08	0,04	0,12	0,1	0,02
3	3	3	0,06	0,06	0,18	0,16	0,02
4	3	1	0,06	0,02	0,24	0,18	0,06
5	5	4	0,1	0,08	0,34	0,26	0,08
6	3	9	0,06	0,18	0,4	0,44	0,04
7	5	8	0,1	0,16	0,5	0,6	0,1
8	8	9	0,16	0,18	0,66	0,78	***0,12***
9	9	6	0,18	0,12	0,84	0,9	0,06
10	8	5	0,16	0,1	1	1	0
$\sum$	**50**	**50**	**1**	**1**			

Найбільша різниця – d_{max}=0,12.

Розраховуємо емпіричне значення критерію λ:

$$\lambda = 0{,}12\sqrt{\frac{50 \cdot 50}{50 + 50}} = 0{,}12 \cdot 5 = 0{,}6$$

з допомогою таблиці критерію λ Колмогорова-Смірнова рівень статистичної значимості отриманої величини p=0,45. Очевидно, що такий рівень статистичної значимості недостатній для прийняття гіпотези H_1 про значимість відмінностей між двома розподілами чорного кольору. Отже, приймаємо гіпотезу H_0.

РОЗРАХУНОК КРИТЕРІЮ λ- КОЛМОГОРОВА-СМІРНОВА ДЛЯ ПОРІВНЯННЯ ЕМПІРИЧНОГО РОЗПОДІЛУ З ТЕОРЕТИЧНИМ:

1. Перевіряють, чи виконуються умови застосування критерію λ.

2. Формулюють основну і альтернативну гіпотези:

H_0: відмінності між двома розподілами недостовірні;

H_1: відмінності між двома розподілами достовірні.

3. В таблицю заносять розряди і відповідні частоти порівнюваних розподілів.

4. Обчислюють відносну та теоретичну частоти порівнюваних розподілів.

Відносна частота – відношення частот до обсягу (об'єму) вибірки:

$$\omega_i = \frac{n_i}{n}$$

n_i; – кількість частот у емпіричній вибірці, обсяг вибірки (кількість досліджуваних).

Теоретична частота:

$$g_i = \frac{1}{k}$$

k – кількість розрядів

5. Розраховують накопичену відносну та накопичену теоретичну частоти порівнюваних розподілів.

Накопичена емпірична частота– обчислюється для кожного з розрядів ознаки, починаючи з першого як сума відповідної відносної частоти та попередньої відносної частоти.

$$f_i = \omega_i + \sum_{i=1}^{n} \omega_{i-1}$$

Накопичена теоретична частота – обчислюється аналогічно до накопиченої емпіричної частоти, але сумуються вже теоретичні частоти.

$$y_i = g_i + \sum_{i=1}^{n} g_{i-1}$$

6. Обчислюють абсолютні значення різниць відповідних накопичених частот порівнюваних розподілів.

$$d = f_i - g_i$$

7. Знаходять найбільшу різницю – d_{max}.

8. Знаходять критичне значення $d_{кр}$ за формулою:

$$d_{кр} = \begin{cases} 1{,}36/\sqrt{n}, \text{для } p \leq 0{,}05 \\ 1{,}63/\sqrt{n}, \text{для } p \leq 0{,}01 \end{cases}$$

9. Якщо $d_{max} < d_{кр}$ – приймається гіпотеза H_0, якщо $d_{max} \geq d_{кр}$ – приймається гіпотеза H_1.

Приклад: шкільний психолог вирішив оцінити емоційний стан школярів, застосувавши тест Люшера Після отримання даних з'явилася необхідність довести, що розміщення чорного кольору на перших позиціях є невипадковим. Нехай було отримано такі дані:

Позиція чорного кольору		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Кількість дітей, що поставили чорний колір на цю позицію	Група №1	8	9	8	2	4	3	3	5	3	5

Розв'язання: Сформулюємо дві альтернативні гіпотези:

H_0 – емпіричний розподіл чорного кольору значимо не відрізняється від теоретичного рівномірного розподілу,

H_1 – емпіричний розподіл чорного кольору достатньо значимо відрізняється від теоретичного рівномірного розподілу.

Для перевірки цих гіпотез проведемо ряд обчислень, які оформимо у таблицю

№	Частоти		Відносні частоти		Накопичені емпіричні частоти		$d = \|f_{i1} - f_{i2}\|$
	n_{i1}	k	ω_i	g_i	f_i	y_i	
1	8	1	0,16	0,1	0,16	0,1	0,06
2	9	1	0,18	0,1	0,34	0,2	0,14
3	8	1	0,16	0,1	0,5	0,3	0,2
4	2	1	0,04	0,1	0,54	0,4	***0,14***
5	4	1	0,08	0,1	0,62	0,5	0,12
6	3	1	0,06	0,1	0,68	0,6	0,08
7	3	1	0,06	0,1	0,74	0,7	0,04
8	5	1	0,1	0,1	0,84	0,8	0,04

9	3	1	0,06	0,1	0,9	0,9	0
10	5	1	0,1	0,1	1	1	0
∑	**50**	**10**	**1**	**1**			

Найбільша різниця – d_{max}=0,14.

Знаходим критичне значення $d_{кр}$ за формулою:

$$d_{\text{кр}} = \begin{cases} 1{,}36/\sqrt{50} = 0{,}19, \text{для } p \leq 0{,}05 \\ 1{,}63/\sqrt{50} = 0{,}23, \text{для } p \leq 0{,}01 \end{cases}$$

$d_{max}=0{,}14<d_{кр}$ – приймається гіпотеза H_0 – емпіричний розподіл чорного кольору значимо не відрізняється від теоретичного рівномірного розподілу.

КРИТЕРІЙ φ – КУТОВЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ ФІШЕРА

Непараметричний критерій φ використовують для порівняння двох вибірок за частотою виявлення певного ефекту. Критерій φ оцінює достовірність відмінностей між відсотковими частками (пропорціями) двох вибірок, в яких зареєстровано ефект, що становить інтерес. Перевага даного методу полягає в тому: дані можуть бути представлені у будь-якій шкалі, починаючи від номінальної (шкали найменувань); вибірки можуть бути як незалежними, так і залежними.

Перед застосуванням кутового перетворення Фішера потрібно перевірити такі умови-обмеження:

а) Жодна з часток, що зіставляються не повинна дорівнювати нулю.

б) Верхня межа в критерії φ відсутня – вибірки можуть бути якими завгодно великими.

в) Нижня межа – 2 спостереження в одній з вибірок.

При цьому необхідно, щоб вибірки задовольняли наступним умовам:

- якщо в одній вибірці лише 2 спостереження, то в інший повинно бути не менше 30;
- якщо в одній вибірці лише 3 спостереження, в іншій має бути не менше 7;
- якщо в одній вибірці лише 4 спостереження, друга має містити не менше 5;
- при n_1, $n_2 \geq 5$ можливі будь-які порівняння.

Алгоритм розрахунку критерію φ-Фішера

1. Визначити значення ознаки, які будуть критерієм розподілу досліджуваних на тих, що мають «ефект» , і тих, хто немає «ефекту».

2. Перевірити, чи виконуються умови застосування критерію φ.

3. Визначити відсоткові частки досліджуваних, у яких «ефект є». Записати ці відсотки поруч з відповідними їм значеннями в лівому стовпці чотирикоміркової таблиці розміром 2×2. Перший стовпець – «ефект є», другий – «ефекту немає»; перший рядок – вибірка 1 (вибірка з більшою відсотковою часткою), другий – вибірка 2 (вибірка з меншою відсотковою часткою). У відповідний спосіб заповнити таблицю.

4. Сформулювати основну і альтернативну гіпотези:

H_0: частка тих, хто має досліджуваний ефект, у вибірці 1 не більша, ніж у вибірці 2;

H_1: частка тих, хто має досліджуваний ефект, у вибірці 1 більша, ніж у вибірці 2.

5. За таблицею визначити кути φ_1 та φ_2 для порівнюваних відсоткових часток.

6. Обчислити емпіричне значення φ* за формулою

$$\varphi^* = |\varphi_1 - \varphi_1| \cdot \sqrt{\frac{n_1 \cdot n_2}{n_1 + n_2}}$$

де, n_1; n_2 – обсяг вибірки відповідно першої та другої.

За таблицею визначити рівень значущості отриманого $\varphi_{емп}$. Якщо рівень значущості отриманого $\varphi_{емп}$ менший від $p<0{,}01$ (тобто 1%), гіпотеза H_0 відхиляється і приймається гіпотеза H_1, якщо щонайменше $p \geq 0{,}05$ – приймається. В інших випадках гіпотеза H_0 відхиляється на рівні значущості, що відповідає отриманому $\varphi_{емп}$ (тобто на рівні значущості 1-5 %)

Приклад: Для виявлення рівня здатності до прийняття рішень в екстремальних умовах в двох артилерійських батереях, психологом було поставлено експеримент. Комбат за домовленістю із психологом дав кожному з членів артилерій завдання, яке вимагало роботи в швидкому темпі та нестандартного рішення. У результаті було з’ясовано, що в першій батереї з завданням справилося 12 осіб з 15, а в другій –9 із 17. Перед психологом постала задача – перевірити, чи значимі ці відмінності.

Розв’язання: Згрупуємо отримані дані у таблицю:

Батереї	Справилися з задачею	Не справилися з задачею	Всього
№1	12	3	15
№2	9	8	17

Сформулюємо дві альтернативні гіпотези:

H_0 – доля осіб, які справилися із задачею в першій батереї, не більша долі осіб, які справилися з задачею в другій батереї,

H_1 – доля осіб, які справилися із задачею в першій батереї, значимо більша долі осіб, які справилися з задачею в другій батереї.

Далі побудуємо таблицю відсоткових часток

Батереї	Справилися з задачею	Не справилися з задачею	Всього
№1	12/15=0,8	3/15=0,2	1
№2	9/17=0,53	8/17=0,47	1

По статистичній таблиці визначимо величину кута φ для батереї 1 та батереї 2: $\varphi_1(0,8)=0,179$, $\varphi_2(0,53)=0,146$

Емпіричне значення φ* за формулою

$$\varphi^* = |0{,}179 - 0{,}146| \cdot \sqrt{\frac{15 \cdot 17}{15 + 17}} = 0{,}093$$

За статистичною таблицею цього критерію рівень статистичної значимості отриманого числа становить $p>0{,}10$ – це свідчить про низьку статистичну значимість відмінностей між групами, а значить, відхиляємо гіпотезу H_1 і приймаємо гіпотезу H_0 про відсутність відмінностей між двома вибірками.

ДОДАТКИ

СТАТИСТИЧНІ ТАБЛИЦІ

СТАНДАРТНИЙ НОРМАЛЬНИЙ РОЗПОДІЛ (ФУНКЦІЯ ГАУССА)

x	Соті частини									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3725	0,3712	0,3697
0,4	0,3683	0,3668	0,3653	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0396	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0355	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001
4	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
4,1	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
4,2	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

z	Соті частини									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990
3,1	0,4990	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992	0,4993	0,4993
3,2	0,4993	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4995	0,4995	0,4995
3,3	0,4995	0,4995	0,4995	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4997
3,4	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4998
3,5	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998
3,6	0,4998	0,4998	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,7	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,8	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999

КРИТИЧНІ ЗНАЧЕННЯ R_{XY}

Об'єм вибірки	**Рівень значущості**					
	0,1	0,05	0,02	0,01	0,005	0,001
4	0,9000	0,9500	0,9800	0,9900	0,9950	0,9990
5	0,8054	0,8783	0,9343	0,9587	0,9740	0,9911
6	0,7293	0,8114	0,8822	0,9172	0,9417	0,9741
7	0,6694	0,7545	0,8329	0,8745	0,9056	0,9509
8	0,6215	0,7067	0,7887	0,8343	0,8697	0,9249
9	0,5822	0,6664	0,7498	0,7977	0,8359	0,8983
10	0,5494	0,6319	0,7155	0,7646	0,8046	0,8721
11	0,5214	0,6021	0,6851	0,7348	0,7759	0,8470
12	0,4973	0,5760	0,6581	0,7079	0,7496	0,8233
13	0,4762	0,5529	0,6339	0,6835	0,7255	0,8010
14	0,4575	0,5324	0,6120	0,6614	0,7034	0,7800
15	0,4409	0,5140	0,5923	0,6411	0,6831	0,7604
16	0,4259	0,4973	0,5742	0,6226	0,6643	0,7419
17	0,4124	0,4821	0,5577	0,6055	0,6470	0,7247
18	0,4000	0,4683	0,5425	0,5897	0,6308	0,7084
19	0,3887	0,4555	0,5285	0,5751	0,6158	0,0932
20	0,3783	0,4438	0,5155	0,5614	0,6018	0,0788
21	0,3687	0,4329	0,5034	0,5487	0,5886	0,6652
22	0,3598	0,4227	0,4921	0,5368	0,5763	0,6524
27	0,3233	0,3809	0,4451	0,4869	0,5243	0,5974
32	0,2960	0,3494	0,4093	0,4487	0,4840	0,5541
37	0,2746	0,3246	0,3810	0,4182	0,4518	0,5189
42	0,2573	0,3044	0,3578	0,3932	0,4252	0,4896
47	0,2429	0,2876	0,3384	0,3721	0,4028	0,4647
52	0,2306	0,2732	0,3218	0,3542	0,3836	0,4432
62	0,2108	0,2500	0,2948	0,3248	0,3522	0,4079
72	0,1954	0,2319	0,2737	0,3017	0,3274	0,3798
82	0,1829	0,2172	0,2565	0,2830	0,3072	0,3568
92	0,1726	0,2050	0,2422	0,2673	0,2903	0,3375
102	0,1638	0,1946	0,2301	0,2540	0,2759	0,3211
122	0,1496	0,1779	0,2104	0,2324	0,2526	0,2943
142	0,1386	0,1648	0,1951	0,2155	0,2343	0,2733

КРИТИЧНІ ЗНАЧЕННЯ КРИТЕРІЮ МАННА-УІТНІ

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
p=0,05																			
3	-	0																	
4	-	0	1																
5	0	1	2	4															
6	0	2	3	5	7														
7	0	2	4	6	8	11													
8	1	3	5	8	10	13	15												
9	1	4	6	9	12	15	18	21											
10	1	4	7	11	14	17	20	24	27										
11	1	5	8	12	16	19	23	27	31	34									
12	2	5	9	13	17	21	26	30	34	38	42								
13	2	6	10	15	19	24	28	33	37	42	47	51							
14	3	7	11	16	21	26	31	36	41	46	51	56	61						
15	3	7	12	18	23	28	33	39	44	50	55	61	66	72					
16	3	8	14	19	25	30	36	42	48	54	60	65	71	77	83				
17	3	9	15	20	26	33	39	45	51	57	64	70	77	83	89	96			
18	4	9	16	22	28	35	41	48	55	61	68	75	82	88	95	102	109		
19	4	10	17	23	30	37	44	51	58	65	72	80	87	94	101	109	116	123	
20	4	11	18	25	32	39	47	54	62	69	77	84	92	100	107	115	123	130	138
p=0,01																			
5	-	-	0	1															
6	-	-	1	2	3														
7	-	0	1	3	4	6													
8	-	0	2	4	6	7	9												
9	-	1	3	5	7	9	11	14											
10	-	1	3	6	8	11	13	16	19										
11	-	1	4	7	9	12	15	18	22	25									
12	-	2	5	8	11	14	17	21	24	28	31								
13	0	2	5	9	12	16	20	23	27	31	35	39							
14	0	2	6	10	13	17	22	26	30	34	38	43	47						
15	0	3	7	11	15	19	24	28	33	37	42	47	51	56					
16	0	3	7	12	16	21	26	31	36	41	46	51	56	61	66				
17	0	4	8	13	18	23	28	33	38	44	49	55	60	66	71	77			
18	0	4	9	14	19	24	30	36	41	47	53	59	65	70	76	82	88		
19	1	4	9	15	20	26	32	38	44	50	56	63	69	75	82	88	94	101	
20	1	5	10	16	22	28	34	40	47	53	60	67	73	80	87	93	100	107	114

(*продовження*)

n	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
p=0,05																		
21	19	26	34	41	49	57	65	73	81	89	92	105	113	121	130	138	146	154
22	20	28	36	44	52	60	69	77	85	94	102	111	119	128	136	145	154	162
23	21	29	37	46	55	63	72	81	90	99	107	116	125	134	143	152	161	170
24	22	31	39	48	57	66	75	85	94	103	113	122	131	141	150	160	169	179
25	23	32	41	50	60	69	79	89	98	108	118	128	137	147	157	167	177	187
26	24	33	43	53	62	72	82	93	103	113	123	133	143	154	164	174	185	195
27	25	35	45	55	65	75	86	96	107	118	128	139	150	160	171	182	193	203
28	26	36	47	57	68	79	89	100	111	122	133	144	156	167	178	189	200	212
29	27	38	48	59	70	82	93	104	116	127	139	150	162	173	185	196	208	220
30	28	39	50	62	73	85	96	108	120	132	144	156	168	180	192	204	216	228
31	29	41	52	64	76	88	100	112	124	137	149	161	174	186	199	211	224	236
32	30	42	54	66	78	91	103	116	129	141	154	167	180	193	206	219	232	245
33	31	43	56	68	81	94	107	120	133	146	159	173	186	199	213	226	239	253
34	32	45	58	71	84	97	110	124	137	151	164	178	192	206	219	233	247	261
35	33	46	59	73	86	100	114	128	142	156	170	184	198	212	226	241	255	269
36	35	48	61	75	89	103	117	132	146	160	175	189	204	219	233	248	263	278
37	36	49	63	77	92	106	121	135	150	165	180	195	210	225	240	255	271	286
38	37	51	65	79	94	109	124	139	155	175	185	201	216	232	247	263	278	294
39	38	52	67	82	97	112	128	143	159	175	190	206	222	238	254	270	286	302
40	39	53	69	84	100	115	131	147	163	179	196	212	228	245	261	278	294	311
p=0,01																		
21	10	16	22	29	35	42	49	56	63	70	77	84	91	98	105	113	120	127
22	10	17	23	30	37	45	52	59	66	74	81	89	96	104	111	119	127	134
23	11	18	25	32	39	47	55	62	70	78	86	94	102	109	117	125	133	141
24	12	19	26	34	42	49	57	66	74	82	90	98	107	115	123	132	140	149
25	12	20	27	35	44	52	60	69	77	86	95	103	112	121	130	138	147	156
26	13	21	29	37	46	54	63	72	81	90	99	108	117	126	136	145	154	163
27	14	22	30	39	48	57	66	75	85	94	103	113	122	132	142	151	161	171
28	14	23	32	41	50	59	69	78	88	98	108	118	128	138	148	158	168	178
29	15	24	33	42	52	62	72	82	92	102	112	123	133	143	154	164	175	185
30	15	25	34	44	54	64	75	85	95	106	117	127	138	149	160	172	182	192
31	16	26	36	46	56	67	77	88	99	110	121	132	143	155	166	177	189	200
32	17	27	37	47	58	69	80	91	103	114	126	137	149	160	172	184	195	207
33	17	28	38	49	60	72	83	95	106	118	130	142	154	166	178	190	202	214
34	18	29	40	51	62	74	86	98	110	122	134	147	159	172	184	197	209	222
35	19	30	41	53	64	77	89	101	114	126	139	152	164	177	190	203	216	229
36	19	31	42	54	67	79	92	104	117	130	143	156	170	183	196	210	223	236
37	20	32	44	56	69	81	95	108	121	134	148	161	175	189	202	216	230	244
38	21	33	45	58	71	84	97	111	125	138	152	166	180	194	208	223	237	251
39	21	34	46	59	73	86	100	114	128	142	157	171	185	200	214	229	244	258
40	22	35	48	61	75	89	103	117	132	146	161	176	191	206	221	236	251	266

(*продовження*)

n	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
p=0,05																			
22	171																		
23	180	189																	
24	188	198	207																
25	197	207	216	227															
26	206	216	226	237	247														
27	214	225	236	247	258	268													
28	223	234	245	257	268	279	291												
29	232	243	255	267	278	290	302	314											
30	240	252	265	277	289	301	313	326	338										
31	249	261	274	287	299	312	325	337	350	363									
32	258	271	284	297	310	323	336	349	362	375	389								
33	266	280	293	307	320	334	347	361	374	388	402	415							
34	275	289	303	317	331	345	359	373	387	401	415	429	443						
35	284	298	312	327	341	356	370	385	399	413	428	442	457	471					
36	292	307	322	337	352	367	381	396	411	426	441	456	471	486	501				
37	301	316	332	347	362	378	393	408	424	439	454	470	485	501	516	531			
38	310	325	341	357	373	388	404	420	436	452	467	483	499	515	531	547	563		
39	318	335	351	367	383	399	416	432	448	462	481	497	513	530	546	562	579	595	
40	327	344	360	377	394	410	427	444	460	477	494	511	527	544	561	578	594	611	628
p=0,01																			
22	142																		
23	150	158																	
24	158	166	174																
25	165	174	183	192															
26	173	182	191	201	210														
27	180	190	200	209	219	229													
28	188	198	208	218	229	239	249												
29	196	206	217	227	238	249	259	270											
30	203	214	225	236	247	258	270	281	292										
31	211	223	234	245	257	268	280	291	303	314									
32	219	231	242	254	266	278	290	302	314	326	338								
33	227	239	251	263	276	288	300	312	325	337	350	362							
34	234	247	260	272	285	298	311	323	336	349	362	375	387						
35	242	255	268	281	294	308	321	334	347	360	374	387	400	413					
36	250	263	277	290	304	318	331	345	358	372	386	399	413	427	440				
37	258	271	285	299	314	327	341	355	369	384	398	412	426	440	454	468			
38	265	280	294	308	323	337	352	366	381	395	410	424	439	453	468	482	497		
39	273	288	303	317	332	347	362	377	392	407	422	437	452	467	482	497	512	527	
40	281	296	311	326	342	357	372	388	403	418	434	449	465	480	495	511	526	542	557

ТАБЛИЦЯ РОЗПОДІЛУ СТЬЮДЕНТА

	Довірча ймовірність						
Ступені вільно-сті	0,5	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99	0,998
1	1,000	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	318,31
2	0,861	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	22,327
3	0,765	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	10,214
4	0,741	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173
5	0,727	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	5,893
6	0,718	1,440	1,943	2,227	3,143	3,707	3,208
7	0,711	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,785
8	0,706	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	4,501
9	0,703	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,297
10	0,700	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144
11	0,697	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,025
12	0,695	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,930
13	0,694	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,852
14	0,692	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,787
15	0.691	1,341	1,753	2,131	2,602	2.947	3,733
16	0,690	1,337	1,746	2,120	2;583	2,921	3,686
17	0,689	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,646
18	0,688	1,330	1,434	2,101	2,552	2,878	3,610
19	0,688	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,579
20	0,687	1,325	1,725	2,086,	2,528	2,845	3,552
21	0,686	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,527
22	0,686	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,505
23	0,685	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,485
24	0,685	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,467
25	0,684	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,450
26	0.684	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,435
27	0,684	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,421
28	0,683	1.313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,408
29	0,683	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,396
30	0.6S3	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,385
40	0,081	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,307
60	0,679	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,232
120	0,677	1,289	1,658	1,980	2,358	2,167	3,160
□	0.674	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,090

Таблиця 11

КРИТИЧНІ ЗНАЧЕННЯ КРИТЕРІЮ S-ДЖОНКІРА

Кількість груп *c*	***p*=0,05**								
	Кількість респондентів у кожній групі *n*								
	2	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
3	10	17	24	33	42	53	64	76	88
4	14	26	38	51	66	82	100	118	138
5	20	34	51	71	92	115	140	166	194
6	26	44	67	93	121	151	184	219	250
Кількість груп *c*	***p*=0,01**								
	Кількість респондентів у кожній групі *n*								
	2	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
3	-	23	32	45	59	74	90	106	124
4	20	34	50	71	92	115	140	167	195
5	26	48	72	99	129	162	197	234	274
6	34	62	94	130	170	213	260	309	361

КРИТИЧНІ ЗНАЧЕННЯ КРИТЕРІЮ ЗНАКІВ

n	***p***		***n***	***p***		**n**	***p***		***n***	***p***	
	0,05	**0,01**		**0,05**	**0,01**		**0.05**	**0,01**		**0,05**	**0.01**
5	0	-	**27**	8	7	**49**	18	15	**92**	37	34
6	0	-	**28**	8	7	**50**	18	16	**94**	38	35
7	0	0	**29**	9	7	**52**	19	17	**96**	39	36
8	1	0	**30**	10	8	**54**	20	18	**98**	40	37
9	1	0	**31**	10	8	**56**	21	18	**100**	41	37
10	1	0	**32**	10	8	**58**	22	19	**110**	45	42
11	2	1	**33**	11	9	**60**	23	20	**120**	50	46
12	2	1	**34**	11	9	**62**	24	21	**130**	55	51
13	3	1	**35**	12	10	**64**	24	22	**140**	59	55
14	3	2	**36**	12	10	**66**	25	23	**150**	64	60
15	3	2	**37**	13	10	**68**	26	23	**160**	69	64
16	4	2	**38**	13	11	**70**	27	24	**170**	73	69
17	4	3	**39**	13	11	**72**	28	25	**180**	78	73
18	5	3	**40**	14	12	**74**	29	26	**190**	83	78
19	5	4	**41**	14	12	**76**	30	27	**200**	87	83
20	5	4	**42**	15	13	**78**	31	28	**220**	97	92
21	6	4	**43**	15	13	**80**	32	29	**240**	106	101
22	6	5	**44**	16	13	**82**	33	30	**260**	116	110
23	7	5	**45**	16	14	**84**	33	30	**280**	125	120
24	7	5	**46**	16	14	**86**	34	31	**300**	135	129
25	7	6	**47**	17	15	**88**	35	32			
26	8	6	**48**	17	15	**90**	36	33			

КРИТИЧНІ ЗНАЧЕННЯ КРИТЕРІЮ χ^2-ФРІДМАНА

n=2		n=3		n=4		n=5	
χ^2_r	p	χ^2_r	p	χ^2_r	p	χ^2_r	p
0	1.000	0.000	1.000	0.0	1.000	0.0	1.00000
1	0.833	0.667	0.944	0.5	0.931	0.4	0.95400
3	0.500	2.000	0.528	1.5	0.653	1.2	0.69100
4	0.167	2.667	0.361	2.0	0.431	1.6	0.52200
		4.667	0.194	3.5	0.273	2.8	0.36700
		6.000	0.028	4.5	0.125	3.6	0.18200
				6.0	0.069	4.8	0.12400
				6.5	0.042	5.2	0.09300
				8.0	0.005	6.4	0.03900
						7.6	0.02400
						8.4	0.00850
						10.0	0.00077

n=6		n=7		n=8		n=9	
χ^2_r	p	χ^2_r	p	χ^2_r	p	χ^2_r	p
0.00	1.00000	0.000	1.000	0.00	1.000	0.000	1.00000
0.33	0.95600	0.286	0.964	0.25	0.967	0.222	0.97100
1.00	0.74000	0.857	0.768	0.75	0.794	0.667	0.81400
1.33	0.57000	1.143	0.620	1.00	0.654	0.889	0.86500
2.33	0.43000	2.000	0.486	1.75	0.531	1.556	0.56900
3.00	0.25200	2.571	0.305	2.25	0.35500	2.000	0.39800
4.00	0.18400	3.429	0.237	3.00	0.28500	2.667	0.32800
4.33	0.14200	3.714	0.192	3.25	0.23600	2.889	0.27800
5.33	0.07200	4.571	0.112	4.00	0.14900	3.556	0.18700
6.33	0.05200	5.429	0.085	4.75	0.12000	4.222	0.15400
7.00	0.02900	6.000	0.052	5.25	0.07900	4.667	0.10700
8.33	0.01200	7.143	0.027	6.25	0.04700	5.556	0.06900
9.00	0.00810	7.714	0.021	6.75	0.03800	6.000	0.05700
9.33	0.00550	8.000	0.016	7.00	0.03000	6.222	0.04800
10.33	0.00170	8.857	0.0084	7.75	0.01800	6.889	0.03100
12.00	0.00013	10.286	0.0036	9.00	0.00990	8.000	0.01900
		10.571	0.0027	9.25	0.00800	8.222	0.01600
		11.143	0.0012	9.75	0.00480	8.667	0.01000
		12.286	0.00032	10.75	0.00240	9.556	0.00600
		14.000	0.000021	12.00	0.00110	10.667	0.00350
				12.25	0.00086	10.889	0.00290
				13.00	0.00026	11.556	0.00130
				14.25	0.000061	12.667	0.00066
				16.00	0.0000036	13.556	0.00035
						14.000	0.0002000
						14.222	0.0000970
						14.889	0.0000540
						16.222	0.0000110
						18.000	0.0000006

КРИТИЧНІ ЗНАЧЕННЯ КРИТЕРІЮ L-ПЕЙДЖА

n	***c*** – кількість умов				***p***
	3	**4**	**5**	**6**	
2	-	-	109	178	0,001
	-	60	106	173	0,01
	28	58	103	166	0,05
3	-	89	160	260	0,001
	42	87	155	252	0,01
	41	84	150	244	0,05
4	56	117	210	341	0,001
	55	114	204	331	0,01
	54	111	197	321	0,05
5	70	145	259	420	0,001
	68	141	251	409	0,01
	66	137	244	397	0,05
6	83	172	307	499	0,001
	81	167	299	486	0,01
	79	163	291	474	0,05
7	96	198	355	577	0,001
	93	193	346	563	0,01
	91	189	338	550	0,05
8	109	225	403	655	0,001
	106	220	393	640	0,01
	104	214	384	625	0,05
9	121	252	451	733	0,001
	119	246	441	717	0,01
	116	240	431	701	0,05
10	134	278	499	811	0,001
	131	272	487	793	0,01
	128	266	477	777	0,05
11	147	305	546	888	0,001
	144	298	534	869	0,01
	141	292	523	852	0,05
12	160	331	593	965	0,001
	156	324	581	946	0,01
	153	317	570	928	0,05

ν	p			ν	p		
	0,001	0,01	0,05		0,001	0,01	0,05
1	10,83	6,63	3,84	41	74,74	64,95	56,94
2	13,82	9,21	5,99	42	76,08	66,21	58,12
3	16,27	11,34	7,81	43	77,42	67,46	59,30
4	18,47	13,28	9,49	44	78,75	68,71	60,48
5	20,52	15,09	11,07	45	80,08	69,96	61,66
6	22,46	16,81	12,59	46	81,40	71,20	62,83
7	24,32	18,48	14,07	47	82,72	72,44	64,00
8	26,12	20,09	15,51	48	84,04	73,68	65,17
9	27,88	21,67	16,92	49	85,35	74,92	66,34
10	29,59	23,21	18,31	50	86,66	76,15	67,50
11	31,26	24,72	19,68	51	87,97	77,39	68,67
12	32,91	26,22	21,03	52	89,27	78,62	69,83
13	34,53	27,69	22,36	53	90,57	79,84	70,99
14	36,12	29,14	23,68	54	91,87	81,07	72,15
15	37,70	30,58	25,00	55	93,17	82,29	73,31
16	39,25	32,00	26,30	56	94,46	83,51	74,47
17	40,79	33,41	27,59	57	95,75	84,73	75,62
18	42,31	34,81	28,87	58	97,04	85,95	76,78
19	43,82	36,19	30,14	59	98,32	87,17	77,93
20	45,31	37,57	31,41	60	99,61	88,38	79,08
21	46,80	38,93	32,67	61	100,89	89,59	80,23
22	48,27	40,29	33,92	62	102,17	90,80	81,38
23	49,73	41,64	35,17	63	103,44	92,01	82,53
24	51,18	42,98	36,42	64	104,72	93,22	83,68
25	52,62	44,31	37,65	65	105,99	94,42	84,82
26	54,05	45,64	38,89	66	107,26	95,63	85,96
27	55,48	46,96	40,11	67	108,53	96,83	87,11
28	56,89	48,28	41,34	68	109,79	98,03	88,25
29	58,30	49,59	42,56	69	111,06	99,23	89,39
30	59,70	50,89	43,77	70	112,32	100,43	90,53
31	61,10	52,19	44,99	71	113,58	101,62	91,67
32	62,49	53,49	46,19	72	114,84	102,82	92,81
33	63,87	54,78	47,40	73	116,09	104,01	93,95
34	65,25	56,06	48,60	74	117,35	105,20	95,08
35	66,62	57,34	49,80	75	118,60	106,39	96,22
36	67,99	58,62	51,00	76	119,85	107,58	97,35
37	69,35	59,89	52,19	77	121,10	108,77	98,48
38	70,70	61,16	53,38	78	122,35	109,96	99,62
39	72,05	62,43	54,57	79	123,59	111,14	100,75
40	73,40	63,69	55,76	80	124,84	112,33	101,88

Рівень значущості *p* =0,01										
	k1									
k2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	4052	4999	5403	5625	5764	5859	5928	5981	6022	6056
2	98,50	99,00	99,17	99,25	99,30	99,33	99,36	99,37	99,39	99,40
3	34,12	30,82	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,35	27,23
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66	14,55
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,46	10,29	10,16	10,05
6	13,75	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,99	6,84	6,72	6,62
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,18	6,03	5,91	5,81
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,61	5,47	5,35	5,26
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,20	5,06	4,94	4,85
11	9,65	7,21	6,22	5,67	5,32	5,07	4,89	4,74	4,63	4,54
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,64	4,50	4,39	4,30

Рівень значущості *p* =0,05										
	k1									
k2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	161,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	236,8	238,9	240,5	241,9
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38	19,40
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54

КРИТИЧНІ ЗНАЧЕННЯ КРИТЕРІЮ РОЗЕНБАУМА

n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
p=0,05																
11	6															
12	6	6														
13	6	6	6													
14	7	7	6	6												
15	7	7	6	6	6											
16	7	7	7	7	6	6										
17	7	7	7	7	7	7	7									
18	7	7	7	7	7	7	7	7								
19	7	7	7	7	7	7	7	7	7							
20	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7						
21	8	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7					
22	8	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7				
23	8	8	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7			
24	8	8	8	8	8	8	8	8	8	7	7	7	7	7		
25	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	7	7	7	7	7	
26	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	7	7	7	7	7	7
p=0,01																
11	9															
12	9	9														
13	9	9	9													
14	9	9	9	9												
15	9	9	9	9	9											
16	9	9	9	9	9	9										
17	10	9	9	9	9	9	9									
18	10	10	9	9	9	9	9	9								
19	10	10	10	9	9	9	9	9	9							
20	10	10	10	10	9	9	9	9	9	9						
21	11	10	10	10	9	9	9	9	9	9	9					
22	11	11	10	10	10	9	9	9	9	9	9	9				
23	11	11	10	10	10	10	9	9	9	9	9	9	9			
24	12	11	11	10	10	10	10	9	9	9	9	9	9	9		
25	12	11	11	10	10	10	10	10	9	9	9	9	9	9	9	
26	12	12	11	11	10	10	10	10	10	9	9	9	9	9	9	9

КРИТИЧНІ ЗНАЧЕННЯ КРИТЕРІЮ ВІЛКСОНА

n	p		n	p	
	0,05	0,01		0,05	0,01
5	0	—	28	130	101
6	2	—	29	140	110
7	3	0	30	151	120
8	5	1	31	163	130
9	8	3	32	175	140
10	10	5	33	187	151
11	13	7	34	200	162
12	17	9	35	213	173
13	21	12	36	227	185
14	25	15	37	241	198
15	30	19	38	256	211
16	35	23	39	271	224
17	41	27	40	286	238
18	47	32	41	302	252
19	53	37	42	319	266
20	60	43	43	336	281
21	67	49	44	353	296
22	75	55	45	371	312
23	83	62	46	389	328
24	91	69	47	407	345
25	100	76	48	426	362
26	110	84	49	446	379
27	119	92	50	466	397

КРИТИЧНІ ЗНАЧЕННЯ D_{MAX}

n	Максимальний модуль різниці накопичених частот d_{max}		n	Максимальний модуль різниці накопичених частот d_{max}	
	p=0,05	p=0,01		p=0,05	p=0,01
5	0,6074	0,7279	50	0,1921	0,2302
10	0,4295	0,5147	60	0,1753	0,2101
15	0,3507	0,4202	70	0,1623	0,1945
20	0,3037	0,3639	80	0,1518	0,1820
25	0,2716	0,3255	90	0,1432	
30	0,2480	0,2972	100	0,1358	
40	0,2147	0,2574	>101	$1{,}36/\sqrt{n}$	$1{,}63/\sqrt{n}$

КРИТИЧНІ ЗНАЧЕННЯ КРИТЕРІЮ λ КОЛОМОГОРОВА-СМІРНОВА

λ	λ, останній десятковий знак									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,3	0,9999	9999	9999	9999	9998	9997	9995	9991	9987	9981
0,4	9971	9960	9945	9926	9903	9874	9840	9799	9753	9699
0,5	9639	9572	9496	9415	9325	9228	9124	9013	8896	8772
0,6	8642	8507	8367	8223	8073	7920	7763	7604	7442	7278
0,7	7112	6945	6777	6609	6440	6271	6104	5936	5770	5605
0,8	5441	5279	5119	4962	4806	4653	4503	4354	4209	4066
0,9	3927	3791	3657	3527	3399	3274	3154	3035	2920	2808
1,0	2700	2594	2491	2392	2295	2202	2111	2023	1938	1856
1,1	1777	1701	1626	1555	1486	1419	1356	1293	1234	1177
1,2	1123	1069	1019	0970	0923	0878	0836	0794	0755	0717
1,3	0681	0646	0613	0582	0551	0522	0495	0468	0443	0419
1,4	0397	0375	0354	0335	0316	0298	0282	0265	0250	0235
1,5	0222	0209	0196	0185	0174	0163	0154	0144	0135	0127
1,6	0119	0112	0105	0099	0092	0086	0080	0075	0070	0066
1,7	0062	0057	0054	0050	0047	0044	0041	0038	0035	0033
1,8	0031	0028	0027	0025	0023	0021	0019	0018	0017	0016
1,9	0015	0013	0013	0012	0011	0010	0009	0008	0007	0007
2,0	0007	0006	0006	0005	0005	0005	0004	00038	0003	0003
2,1	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0001	00016	00015	00014
2,2	0001	0001	0001	0001	00009	00008	00007	00007	00006	00006
2,3	00005	0001	00004	00004	00004	00003	00003	00003	00002	00002
2,4	00002	00002	00002	00001	00001	00001	00001	00001	00001	00001

РІВНІ СТАТИСТИЧНОЇ ЗНАЧИМОСТІ КРИТЕРІЮ φ^* ФІШЕРА

p	*p*, останній десятковий знак									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,00	2,91	2,81	2,7	2,62	2,55	2,49	2,44	2,39	2,35	
0,01	2,31	2,28	2,25	2,22	2,19	2,16	2,14	2,11	2,09	2,07
0,02	2,05	2,03	2,01	1,99	1,97	1,96	1,94	1,92	1,91	1,89
0,03	1,88	1,86	1,85	1,84	1,82	1,81	1,80	1,79	1,77	1,76
0,04	1,75	1,74	1,73	1,72	1,71	1,70	1,68	1,67	1,66	1,65
0,05	1,64	1,64	1,63	1,62	1,61	1,60	1,59	1,58	1,57	1,56
0,06	1,56	1,55	1,54	1,53	1,52	1,52	1,51	1,50	1,49	1,48
0,07	1,48	1,47	1,16	1,46	1,45	1,44	1,43	1,43	1,42	1,41
0,08	1,41	1,4	1,39	1,39	1,38	1,37	1,37	1,36	1,36	1,35
0,09	1,34	1,34	1,33	1,32	1,32	1,31	1,31	1,30	1,30	1,29
0,1	1,29									

n1	*n2*	*n3*	*H*	*p*	*n1*	*n2*	*n3*	*H*	*p*	*n1*	*n2*	*n3*	*H*	*p*
2	1	1	2,7000	0,500	4	4	1	6,6667	0,010	5	4	1	6,9545	0,008
2	2	1	3,6000	0,200				6.1667	0,022				6.8400	0.011
2	2	2	4,5714	0,067				4,9667	0,048				4,9855	0.044
3	1	1	3,2000	0,300				4,8667	0,054				4,8600	0,056
3	2	1	4,2857	0,100				4.1667	0.082				3,9873	0 098
			3.8571	0.133				4,0667	0,102				3,9600	0,102
3	2	2	5,3572	0,029	4	4	2	7,0364	0,006	5	4	2	7,2045	0,009
			4,7143	0,048				6,8727	0,011				7,1182	0,010
			4,5000	0,067				5,4545	0,046				5,2727	0,049
			4,4643	0,105				5,2364	0,052				5,2682	0,050
3	3	1	5,1429	0,043				4,5545	0,098				4,5409	0,098
			4,5714	0,100				4,4455	0,103				4,5182	0,101
			4,0000	0,129	4	4	3	7,1439	0,010	5	4	3	7,4449	0,010
3	3	2	6,2500	0,011				7,1364	0,011				7,3949	0,011
			5,3611	0,032				5,5985	0,049				5,6564	0,049
			5,1389	0,061				5,5758	0,051				5,6308	0,050
			4,5556	0,100				4,5455	0,099				4,5487	0,099
			4,2500	0,121				4,4773	0,102				4,5231	0,103
3	3	3	7,2000	0 004	4	4	4	7,6538	0,008	5	4	4	7,7604	0,009
			6,4889	0,011				7,5385	0,011				7,7440	0,011
			5,6889	0,029				5,6923	0,049				5,6571	0,049
			5,6000	0,050				5,6538	0,054				5,6176	0,050
			5,0667	0,086				4,6539	0,097				4,6187	0,100
			4,6222	0,100				4,5001	0,104				4,3527	0,102
4	1	1	3,5714	0,200	5	1	1	3,8571	0,143	5	5	1	7,3091	0,009
4	2	1	4,8214	0,057	5	2	1	5,2500	0,036				6,8364	0,011
			4,5000	0,076				5,0000	0,048				5,1273	0,046
			4,0179	0,114				4,4500	0,071				4,9091	0,053
4	2	2	6,0000	0,014				4,2000	0,095				4,1091	0,086
			5,3333	0,033				4,0500	0,119				4,0364	0,105
			5,1250	0,052	5	2	2	6,5333	0,008	5	5	2	7,3385	0,010
			4,4583	0,100				6,1333	0,013				7,2692	0,010
			4,1667	0,105				5,1600	0,034				5,3385	0,047
4	3	1	5,8333	0,021				5,0400	0,056				5,2462	0,051
			5,2083	0,050				4,3733	0,090				4,6231	0 097
			5,0000	0,057				4,2933	0,122				4,5077	0,100
			4,0556	0,093	5	3	1	6,4000	0,012	5	5	3	7,5780	0,010
			3,8889	0,129				4,9600	0,048				7,5429	0,010
4	3	2	6,4444	0,008				4,8711	0,052				5,7055	0,046
			6,3000	0,011				4,0178	0,095				5,6264	0,051
			5,4444	0,046				3,8400	0,123				4,3451	0,100
			5,4000	0,051	5	3	2	6,9091	0,009				4,5363	0,102
			4,5111	0,098				6,8218	0,010	5	5	4	7,8229	0,010
			4,4444	0,102				5,2509	0,049				7,7914	0,010
4	3	3	6,7455	0,010				5,1055	0,052				5,6657	0,049
			6,7091	0,013				4,6509	0,091				5,6429	0,050
			5,7909	0,046				4,4945	0,101				4,5229	0,099
			5,7273	0,050	5	3	3	7,0788	0,009				4,5200	0,101
			4,7091	0,092				6,9818	0,011	5	5	5	8,0000	0,009
			4,7000	0,101				5,6485	0,049				7,9800	0,010
								5,5152	0,051				5,7300	0,049
								4,5333	0,097				5,6600	0,051
								4,4121	0,109				4,5600	0,100

					4,5000	0,102

КРИТИЧНІ ЗНАЧЕННЯ РАНГОВОГО КОЕФІЦІЄНТА КОРЕЛЯЦІЇ СПІРМЕНА

n	*p*		*n*	*p*		*n*	*p*	
	0,05	*0,01*		*0,05*	*0,01*		*0,05*	*0,01*
5	0,94	—	17	0,48	0,62	29	0,37	0,48
6	0,85	—	18	0,47	0,6	30	0,36	0,47
7	0,78	0,94	19	0,46	0,58	31	0,36	0,46
8	0,72	0,88	20	0,45	0,57	32	0,36	0,45
9	0,68	0,83	21	0,44	0,56	33	0,34	0,45
10	0,64	0,79	22	0,43	0,54	34	0,34	0,44
11	0,61	0,76	23	0,42	0,53	35	0,33	0,43
12	0,58	0,73	24	0,41	0,52	36	0,33	0,43
13	0,56	0,70	25	0,49	0,51	37	0,33	0,43
14	0,54	0,68	26	0,39	0,50	38	0,32	0,41
15	0,52	0,66	27	0,38	0,49	39	0,32	0,41
16	0,50	0,64	28	0,38	0,48	40	0,31	0,4

ЛІТЕРАТУРА

Боснюк В.Ф. Математичні методи у психології. Курс лекцій. – Харків. 2016. – 56с.

Василенко О. А. Сенча І. А. Матемачно-статистичні методи аналізу у прикладних дослідженнях: навч. посіб. – Одеса: ОНАЗ ім. О. С. Попова, 2011. – 166 с.

Горонескуль М.М. Таблиці функцій та критичних точок розподілів. Розділи: Теорія імовірностей. Математична статистика. Математичні методи в психології. – Х.: УЦЗУ. 2009. – 90 с.

Донченко В. С., Сидоров М. В.-С.. Теорія ймовірностей та математична статистика для соціальних наук : навч. посіб. – К. : ВПЦ "Київський університет", 2015. – 400 с

Климчук В.О. Математичні методи у психології. Навчальний посібник для студентів психологічних спеціальностей. — К.: Освіта України. — 2009. — 288 с.

Кушлик-Дивульська О. І., Поліщук Н. В., Орел Б. П., Штабалюк П. І.. Теорія ймовірностей та математична статистика: навч. посіб – К: НТУУ «КПІ», 2014. – 212 с.

Олефір В.О. Математичні методи у психології: методичні вказівки з організації та планування самостійної роботи для здобувачів освітньо-кваліфікаційного рівня бакалавр за спеціальністю 052 – психологія. Харків. 2016. – 59 с.

Питьовка О.Ю.: Математичні методи в психології: Методичні рекомендації для виконання самостійної роботи студентів денної та заочної форми навчання спеціальності 053 «Психологія». Мукачево: МДУ, 2017. – 61 с.

Рудоміно-Дусятська І.А., Козубцова Л.М., Пояркова О.Ю., Соловйова Т.В., Сновида В.Є., Цитрицька Л. М. Теорія ймовірностей, теорія випадкових процесів та математична статистика (частина І). – К.: ВІТІ, 2018. – 187 с.

Руська Р.В. Математичні методи у психології. Курс лекцій. – Тернопіль. 2018. – 203 с.

Суходольский Г.В. Математические методы в психологии. – Харьков: Изд-во "Гуманитарный центр", 2004. – 284 с.

Татьянчиков А.О. Методичні рекомендації до виконання лабораторних робіт з курсу «Методи психологічного дослідження: математичні методи в психології» для студентів І курсу спеціальності 053 «Психологія». Одеса : ПНПУ імені К.Д. Ушинського, 2019. 38 с.

Телейко А. Б. Чорней Р.К.. Математико-статистичні методи в соціології та психології: Навч. посіб.– К.:МАУП,2007.—424.

Теорія ймовірностей та математична статистика у прикладах і задачах : навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / О.Б. Жильцов ; за ред. Г.О. Михаліна. — К. : Київ. ун-т ім. Б. Грінченка, 2015. — 336 с.

ЗМІСТ

§ 1.1. Визначення ймовірності 4
§ 1.2. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ 17
§ 1.3. Статистичне спостереження 21
§ 1.4. МІРИ ЦЕНТРАЛЬНОЇ ТЕНДЕНЦІЇ 22
§2.1. МІРИ ЗВ'ЯЗКУ В ПАРАМЕТРИЧНІЙ СТАТИСТИЦІ 26
§2.2. МІРИ ЗВ'ЯЗКУ В НЕПАРАМЕТРИЧНІЙ СТАТИСТИЦІ 32
§3.1. Форма та рівняння зв'язку 47
§3.2. ВИДИ РІВНЯННЯ РЕГРЕСІЇ 54
§4.1. СТАТИСТИЧНІ ГІПОТЕЗИ 57
§4.2. ВИЯВЛЕННЯ ВІДМІННОСТЕЙ У РІВНІ ПРОЯВУ ОЗНАКИ 60
§4.3. Статистичний критерій, $t -$ критерій Стюдента 67
§4.4. ОЦІНКА ДОСТОВІРНОСТІ ЗСУВУ ЗНАЧЕННЯ 76
§5.1. критерії Порівняння розподілів 85
Статистичні таблиці 93
Зміст 112