УДК 517.524

Д. І. Боднар, Х. Й. Кучмінська

ГІЛЛЯСТІ ЛАНЦЮГОВІ ДРОБИ
(до 30-річчя виходу першої публікації)

Проаналізовано різні підходи до багатовимірних узагальнень ланцюгових (неперервних) дробів і проведено огляд досліджень з теорії гіллястих ланцюгових дробів і їх застосувань.

Використовуючи інтерпретацію ланцюгового дробу у вигляді графу і розглядаючи більш загальні графи типу дерева, В. Я. Скоробогатько дав означення багатовимірного аналогу ланцюгового дробу, яке отримало назву гіллястого ланцюгового дробу (ГЛД). Хоча деякі часткові випадки ГЛД зустрічалися і раніше, наприклад, у роботі Ilse Pratje [62] вони виникли при розгляді композицій відображень Жуковського

$$w_n = \frac{a_n}{2}\left(\frac{w_{n+1}}{a_{n+1}} + \frac{a_{n+1}}{w_{n+1}}\right), \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

у В. П. Терскіх [41] — при дослідженні механічних коливань у різних енергетичних установках в суднобудуванні, проте вони не стали предметом самостійного дослідження.

Перша робота, присвячена гіллястим ланцюговим дробам загального вигляду

$$b_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}} := b_0 + \sum_{i_1=1}^{N} \cfrac{a_{i_1}}{b_{i_1} + \sum\limits_{i_2=1}^{N} \cfrac{a_{i_1 i_2}}{b_{i_1 i_2} + \ddots}}, \tag{1}$$

де $a_{i_1 i_2 \ldots i_k}$, $b_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ — комплексні числа, опублікована в 1966 році в працях Другої конференції молодих математиків України, що відбулася в Києві [35]. У цій роботі було запропоновано означення ГЛД, встановлено формули для підрахунку чисельників і знаменників підхідних дробів, що згодом отримали назву формул з пропрідженнями. Була сформульована одна достатня ознака збіжності ГЛД (1) і вказано на можливі застосування нового математичного апарату.

Про інтенсивність початкових досліджень нового об'єкту та інтерес до нього свідчить перша наукова конференція, присвячена ланцюговим дробам, проведена у Львові у вересні 1975 р. [45], яка зібрала науковців з різних куточків колишнього СРСР (Даугавпілс, Йошкар-Ола, Київ, Ленінград, Мінськ, Москва, Одеса, Ставрополь, Таганрог, Тамбов, Томськ, Харків, Чернівці). З цього часу гіллясті ланцюгові дроби стали предметом дискусій і обговорення на чисельних наукових конференціях, школах і семінарах різного рівня. Зокрема, на останній міжнародній школі-семінарі "Ланцюгові дроби, їх узагальнення та застосування" (18–25 вересня 1994 р., Верхнє Синевидне — Львів) [19] було представлено результати досліджень останніх років відомих наукових шкіл як на Україні, так і за її межами. З запрошеними доповідями виступили професори Хокон Воделанд (Норвегія) та Яцек Гілевич (Франція), взяли участь Ненсі Вишінскі (США), Мацей Піндор (Польща), Петро Шулеманов (Росія). Було обговорено перспективу розвитку досліджень цього напрямку, сформульовано нові гіпотези і задачі. Однак, повернімося до історії, до спроб узагальнення поняття ланцюгового (неперервного) дробу.

Зауважимо, що ще при розв'язанні діофантової нерівності

$$|ax - by \pm c| < 1, \qquad a, b, c \in \mathbb{R}_+, \qquad x, y \in \mathbb{Z},$$

японський математик Katahiro Tekebe зробив першу спробу узагальнити поняття ланцюгового дробу, про що стверджує Genvei Nakane у 1728 р. [51] (про цей маловідомий факт нам повідомив дослідник історії математики І. І. Герасим). Вважалось, що перше узагальнення ланцюгового дробу належить Л. Ейлеру [50]. Алгоритм Ейлера розвинули і узагальнили А. Пуанкаре і К. Якобі [52], однак, як стверджує Г. Вороний [12], запропоновані алгоритми були формальним узагальненням ланцюгового дробу і не застосовними для опису алгебраїчних ірраціональностей вищих степенів (періодичні ланцюгові дроби описують квадратичні ірраціональності). Л. Діріхле і Л. Кронекер розглянули саме таке узагальнення, яке виявилось ефективним для розв'язання згаданої задачі. З нової точки зору до цих питань підійшли Г. Вороний і Г. Мінковський [12]. Усі ці алгоритми узагальнювались і досліджувались у роботах багатьох математиків, зокрема О. М. Хованського [43], О. Перрона [60], V. Brun'a [47], G. Szekeres'a [66].

Основна ідея В. Я. Скоробогатька полягала в тому, щоб побудувати таке багатовимірне узагальнення ланцюгового дробу, яке було б аналогом ланцюгового дробу для функцій багатьох змінних. Цю вимогу не задовольняло жодне з попередніх узагальнень.

1. Основними засобами дослідження ланцюгових дробів

$$b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \ddots}} \tag{2}$$

є рекурентні співвідношення Валліса [43, 67]

$$\begin{gathered} A_n = b_n A_{n-1} + a_n A_{n-2}, \\ B_n = b_n B_{n-1} + a_n B_{n-2}, \\ A_{-1} = 1, \qquad A_0 = 0, \qquad B_{-1} = 0, \qquad B_0 = 1, \end{gathered} \tag{3}$$

для чисельників A_n і знаменників B_n підхідних дробів дробу (2), які найбільше застосовувались до середини XX століття, та композиції дробово-лінійних відображень і пов'язані з ними області елементів і області значень дробу (2), що суттєво використовується сьогодні [53, 57].

Першою проблемою, яка виникла при дослідженні властивостей ГЛД, було встановлення для них багатовимірних аналогів рекурентних формул (3). В роботі [3] показано, що відношення двох лінійно незалежних розв'язків складніших рекурентних рівнянь

$$y_n = a_n y_{n-1} + b_n y_{n-2} + c_n y_{n-3}, \qquad n = 1, 2, \dots,$$

де $a_n, b_n, c_n \in \mathbb{C}$, є гіллястим ланцюговим дробом з двома гілками розгалужень спеціального вигляду. Мабуть, для ГЛД загального вигляду простих рекурентних співвідношень типу формул Валліса не існує. Як уже відзначалось, у роботах [34, 35] був запропонований перший варіант формул для чисельників A_n і знаменників B_n n-го підхідного дробу ГЛД (1):

$$\frac{A_n}{B_n} = b_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{n} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}}.$$

Сформулюємо ці результати, отримані В. Я. Скоробогатьком, використовуючи інші, відмінні від запропонованих у [34], позначення. Зауважимо, що доведення цих формул до цього часу не опубліковані. Впорядкуємо часткові відношення m-го поверху ГЛД (1):

$$\frac{a_{11\ldots1}}{b_{11\ldots1}}, \qquad \frac{a_{11\ldots2}}{b_{11\ldots2}}, \qquad \ldots, \qquad \frac{a_{NN\ldots N}}{b_{NN\ldots N}}. \tag{4}$$

Нехай r — довільне ціле число ($0 \le r \le N^m$) і $j_1, j_2, \ldots, j_r$ — довільний набір натуральних чисел таких, що $1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_r \le N^m$, коли $r \ge 1$. Розглянемо фігурний підхідний дріб ГЛД (1), який збігається з його m-м підхідним дробом, у якому всі m-ні часткові відношення, які мають в (4) порядкові номери $j_1, j_2, \ldots, j_r$, замінено на 0/1. Позначимо через

$$A_m\begin{pmatrix} 0 \\ j_1 j_2 \ldots j_r \end{pmatrix}, \qquad B_m\begin{pmatrix} 0 \\ j_1 j_2 \ldots j_r \end{pmatrix}$$

його чисельник і знаменник відповідно. Справджуються формули [11]

$$A_{m+1} = \sum_{j(r)} A_m\begin{pmatrix} 0 \\ j_1 j_2 \ldots j_r \end{pmatrix} \prod_{i(m)} c_{i(m)},$$

$$B_{m+1} = \sum_{j(r)} B_m\begin{pmatrix} 0 \\ j_1 j_2 \ldots j_r \end{pmatrix} \prod_{i(m)} c_{i(m)},$$

де добуток береться за всіма можливими наборами індексів $i_1, i_2, \ldots, i_m$, сума береться за всіма можливими r ($0 \le r \le N^m$) і $j_1, j_2, \ldots, j_r$ ($1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_r \le N^m$, якщо $r \ge 1$), $c_{i(m)} = a'_{i(m)}$, якщо $i(m)$ в (4) має один з порядкових номерів $j_1, j_2, \ldots, j_r$, $c_{i(m)} = b'_{i(m)}$ у протилежному випадку і

$$\frac{a'_{i(m)}}{b'_{i(m)}} = \sum_{i_{m+1}=1}^{N} \frac{a_{i(m+1)}}{b_{i(m+1)}}.$$

Інший, ще складніший, варіант формул для A_n і B_n гіллястого ланцюгового дробу з двома гілками розгалужень, що використовував просторові матриці, був встановлений І. Ф. Клюйником і І. П. Пустомельниковим (див. [11, с.51–55]). Ці формули не отримали поки що дальшого розвитку і застосування, однак при їх встановленні авторами було вперше запропоновано скорочені позначення для запису ГЛД.

В роботі [14] вказано формули для чисельника і знаменника другого підхідного дробу ГЛД з двома гілками розгалужень у вигляді визначників. Загальні формули було встановлено лише для ланцюгових дробів з розгалуженнями вверх і вниз. В монографії [1] доведено відповідні формули для ГЛД загального вигляду.

Нехай

$$C_{ik} = \begin{pmatrix} c_{ii} & c_{i,i+1} & \cdots & c_{ik} \\ c_{i+1,i} & c_{i+1,i+1} & \cdots & ci+1,k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{ki} & c_{k+1,i+1} & \cdots & c_{kk} \end{pmatrix}, \qquad i = 0, 1; \quad k = 1, 2, \ldots,$$

— матриці, елементи яких зв'язані з компонентами ГЛД (1) наступним чином. Якщо

$$p = j_1 N^{m-1} + j_2 N^{m-2} + \cdots + j_m, \qquad 1 \le j_n \le N, \quad n = 1, 2, \ldots, m,$$

— розвинення натурального числа p, яке завжди єдиним чином визначається, то $c_{pp} = b_{j(m)}$, $p = \overline{1,k}$; $c_{pq} = a_{j(m)i_{m+1}}$, $c_{qp} = -1$, якщо $q = Nm + i_{m+1}$, $1 \le i_{m+1} \le N$, $p = \overline{1,k}$; $c_{00} = b_0$, $c_{0q} = a_q$, $c_{q0} = -1$, $q = \overline{1,N}$; $c_{pq} = 0$ в усіх інших випадках. Для чисельників A_n і знаменників B_n n-го підхідного дробу ГЛД (1) справджуються формули:

$$A_n = \det C_{ol}, \qquad B_n = \det C_{1,l}, \qquad l = N + N^2 + \dots + N^n.$$

За аналогією з одновимірним випадком для визначення ГЛД було застосовано і композицію багатовимірних дробово-лінійних відображень [11], але, оскільки композиції N-вимірних дробово-лінійних відображень не утворюють групи, то їх використання не є настільки ефективним, як в одновимірному випадку [53, 57, 67].

2. Ще з часів свого виникнення ланцюгові дроби тісно пов'язані з теорією чисел [53]. Тому можна було припустити, що апарат ГЛД дозволить розв'язувати складніші задачі. Дійсно, в деяких алгоритмах теорії чисел (Ейлера, Остроградського, Якобі) та їх узагальненнях природно виникають ГЛД [11, 21, 22]. Відомо [11, 53], що алгебраїчні ірраціональності другого порядку описуються правильними періодичними ланцюговими дробами. Цій проблемі присвячені роботи багатьох відомих математиків: К. Якобі [52], О. Перрона [60], Г. Вороного [12]. Ще в 1839 році Ерміт у листі до Якобі поставив провідним математикам XIX століття проблему: дати повну арифметичну характеристику алгебраїчних ірраціональностей n-го степеня. Спроба застосувати ГЛД до цієї задачі була зроблена на початку 70-х років Ф. О. Пасічняком [29], який зобразив алгебраїчну ірраціональність n-го степеня періодичним гіллястим ланцюговим дробом. Однак виявилось, що отримані періодичні ГЛД не є правильними.

Більш загальну задачу щодо зображення довільного дійсного числа правильним гіллястим ланцюговим дробом поставив В. Я. Скоробогатько в 1990 році. Останні роки свого життя він присвятив, зокрема, розв'язанню цієї задачі.

Нехай α — довільне дійсне число. Побудуємо алгоритм розвинення α у ГЛД вигляду

$$\alpha = b_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{1}{b_{i(k)}}, \tag{5}$$

де $b_0 = [\alpha]$, $b_{i(k)} \in \mathbb{N}$ [8]. Опишемо суть алгоритму у припущені, що $N = 2$, $0 < \alpha < 1$. На першому кроці розглянемо множину пар натуральних чисел $P^{(1)} = (p_1, p_2)$ таких, що

$$\alpha < \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}.$$

Елементи b_1 і b_2 першого поверху ГЛД (5) виберемо з умови

$$\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} = \min_{P^{(1)}} \left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \right),$$

причому, якщо такі пари (b_1, b_2) визначаються неоднозначно, то за b_1 вибираємо мінімально можливе.

На другому кроці розглянемо множину натуральних чисел

$$P^{(2)} = (p_{11}, p_{12}, p_{21}, p_{22})$$

таких, що

$$\frac{1}{b_1 + \dfrac{1}{p_{11}} + \dfrac{1}{p_{12}}} + \frac{1}{b_2 + \dfrac{1}{p_{21}} + \dfrac{1}{p_{22}}} > \alpha.$$

Виберемо елементи $b_{i_1 i_2}$ $(1 \leq i_k \leq 2,\ k = 1,2)$ ГЛД (5) з умови

$$\sum_{i_1=1}^{2} \frac{1}{b_{i_1} + \sum\limits_{i_2}^{2} \frac{1}{b_{i_1 i_2}}} = \min_{P^2} \sum_{i_1=1}^{2} \frac{1}{b_{i_1} + \sum\limits_{i_2=1}^{2} \frac{1}{p_{i_1 i_2}}}. \tag{6}$$

Якщо такі елементи рівності (6) визначаються неоднозначно, то виберемо за b_{11} мінімально можливе. Якщо знову елементи b_{12}, b_{21}, b_{22} визначаються неоднозначно, виберемо b_{12} мінімально можливим і т.д.

Запропонований алгоритм у випадку $N = 1$ еквівалентний алгоритму Евкліда.

3. В загальному, коефіцієнтами ГЛД (1) можуть бути дійсні чи комплексні функції. Якщо вони є поліномами від багатьох змінних, тоді підхідні дроби таких ГЛД є багатовимірними раціональними функціями, тому ГЛД можна розглядати як один з конструктивних агрегатів для побудови дробово-раціональних наближень. Очевидно, що вибір різних типів поліномів, як і в одновимірному випадку, приводить до різних конструкцій функціональних ГЛД, взагалі кажучи, не еквівалентних між собою в тому сенсі, що не існує відображення, яке перетворює одну конструкцію в іншу. Розгляд функціональних ГЛД (1) природно вимагає розв'язання нового класу задач: інтерполяція і наближення функції від багатьох змінних різними типами ГЛД, дослідження як рівномірної, так і поточкової збіжності функціональних ГЛД, вивчення апроксимаційних властивостей відповідних дробів.

Перше формальне розвинення гіпергеометричної функції Аппеля від двох змінних у ГЛД спеціального вигляду отримано ще в 1966 році [13], проте питання збіжності і загального вигляду елементів цього дробу не досліджувалось.

З введенням поняття частинних обернених різниць П. І. Боднарчуком [11] було зроблено першу спробу узагальнити інтерполяційну формулу Тіле (Thiele [33]) у вигляді дробу (1) з лінійними частинними чисельниками $x_k - x_{ki}$ ($k = 1, \ldots, N$) і знаменниками, що є певними співвідношеннями частинних обернених різниць при допущенні, що вузли інтерполяції ($x_{1i}, x_{2i}, \ldots, x_{ni}$) задані [10]. Однак обгрунтування запропонованого алгоритму вимагало симетричності частинних обернених різниць, що не випливало з введених означень. Крім того, питання встановлення вигляду залишкового члена інтерполяційної формули залишалося відкритим. Наступний крок по вдосконаленню цього алгоритму полягав в уточненні поняття частинних обернених різниць (введено поняття основних і допоміжних точок інтерполяції) і строгому доведенні існування інтерполяційного ГЛД [16, 17, 55]. Розглянувши граничний випадок, коли всі вузли інтерполяції зливаються в одну точку, отримано апроксимаційну формулу типу Тіле для функції багатьох змінних [16]. Подальші дослідження в цьому напрямку як у Львові [33, 55], так і в інших математичних осередках [48, 49, 63, 64] велися для функцій від двох змінних. Для інтерполяційних формул у вигляді двовимірних ланцюгових дробів було отримано формули залишків [17, 56, 64].

Одним з найбільш поширених методів розвинення аналітичних функцій в ланцюгові дроби є побудова ланцюгових дробів, відповідних до заданих степеневих рядів [44, 53, 67]. Нагадаємо, що дріб називається відповідним до степеневого ряду, якщо розвинення його кожного n-го підхідного дробу ($n = 1, 2, \ldots$) збігається з вихідним степеневим рядом включно до членів степеня n. Цікавим виявився той факт, що граничний випадок інтерполяційної формули Тіле є відповідним ланцюговим дробом до заданого формального степеневого ряду.

Перша конструкція двовимірного відповідного ланцюгового дробу (ДЛД) була запропонована Х. Й. Кучмінською [15] та M. O'Donohoe і J. A. Murphy [58]:

$$\mathop{\mathrm{D}}_{i=0}^{\infty} \frac{a_{ii}xy}{b_{ii} + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=i+1}^{\infty} \dfrac{a_{ji}x}{b_{ji}} + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=i+1}^{\infty} \dfrac{a_{ij}y}{b_{ij}}}. \tag{7}$$

Під час стажування у Львові у професора В. Я. Скоробогатька W. Siemaszko запропонував іншу конструкцію ДЛД [56, 63]:

$$1 + F_{00} + \mathop{\mathrm{D}}_{i=1}^{\infty} \frac{b_{i0}x}{1 + F_{io}} + \mathop{\mathrm{D}}_{i=1}^{\infty} \frac{b_{0i}y}{1 + F_{0i}}, \qquad F_{ij} = \mathop{\mathrm{D}}_{p=1}^{\infty} \frac{b_{p+i,p+j}\,xy}{1}. \tag{8}$$

До конструкції ДЛД (7) незалежно прийшли і A. Cyut та B. Verdonk [48, 49]. У відповідних ДЛД (7) і (8) не всі часткові чисельники були лінійними функціями; умова лінійності, що має місце в одновимірному випадку для нормальних рядів, привела до наступної конструкції відповідного ГЛД, отриманої Д. І. Боднаром [4]:

$$b_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{2} \frac{b_{i(k)} z_{i_k}}{1}. \tag{9}$$

Із умови відповідності для визначення 2^n елементів n-го поверху $b_{i(n)}$ можна записати лише $(n+1)$ рівняння, тому відповідний ГЛД вигляду (9) визначається неоднозначно. Досягнення однозначності такого дробу відбувається за рахунок накладення додаткових умов на коефіцієнти дробу (9).

Питання збіжності ГЛД тривалий час залишалося відкритим. Підходи, що використовувалися в теорії ланцюгових дробів, виявилися тут незастосовними. Однак, як вже зазначалося, перша спроба сформулювати ознаку збіжності для ГЛД на основі формули для підхідних дробів з прорідженнями була зроблена ще в перших роботах [32]. Крім того, було обгрунтовано збіжність для ГЛД спеціального вигляду, що є розв'язком деякого диференціального рівняння [31].

Принципову роль при розв'язанні проблеми збіжності ГЛД відіграла формула різниці між підхідними дробами [7], яка дала поштовх для дослідження збіжності різних типів гіллястих ланцюгових дробів [46]. Вдалося встановити багато аналогів класичних ознак збіжності, серед яких, на наш погляд, найважливішими є аналоги теорем Зейделя, Ворпіцького, Слешинського–Прингсгейма, Ван Флека, параболічних теорем. Детальний огляд цих результатів викладено в роботах [1, 2, 5, 6, 18, 37, 46, 54].

4. Якісні зміни в обчислювальній математиці сприяли розвитку багатьох нових і вдосконаленню відомих методів з метою прискорення їх збіжності, обчислювальної стійкості, економії машинної пам'яті. Як виявилось на практиці, цим вимогам в достатній мірі задовольняють ланцюгові дроби [33].

Ефективність застосування ланцюгових і гіллястих ланцюгових дробів в обчислювальній математиці, зокрема, пов'язана з властивістю їх обчислювальної стійкості. Важливе значення відіграють формули, що виражають абсолютні і відносні похибки при обчисленні ГЛД через абсолютні чи відносні похибки їх компонент [1, 5, 24, 28, 33]. Досліджено питання обчислювальної стійкості ГЛД з додатними елементами, з елементами, що задовольняють умовам багатовимірних аналогів теорем Ворпіцького, Слешинського–Прингсгейма та ін.

Однією з перших задач, пов'язаних із застосуванням ГЛД в обчислювальній математиці, було встановлення зв'язку з гіллястими ланцюговими дробами лінійних однорідних рекурентних рівнянь [11], що в подальшому використовувалось для побудови чисельного методу розв'язання задачі Коші для лінійного диференціального рівняння

$$y^{(k)} - \sum_{i=0}^{k-1} p_i(x) y^{(i)} = 0, \tag{10}$$

в якому всі $p_i(x)$ є неперервними функціями на сегменті $[a, b]$. При цьому використовувалась апроксимація рівняння (10) системою скінченно–різницевих рівнянь [11].

В роботі [31] був запропонований інший підхід для зображення логарифмічної похідної розв'язку рівняння (10) гіллястим ланцюговим дробом при умові, що функції $p_i(x) \in \mathbb{C}^{\infty}_{[a,b]}$, $i = 1, \ldots, k$; $p_0(x) \equiv 1$.

З допомогою дробово-раціональних виразів, що містять певне число довільних параметрів, утворених, зокрема, на основі розвинення у ланцюгові або гіллясті ланцюгові дроби, побудовано чисельні методи розв'язування диференціальних та інтегральних рівнянь [9, 20, 30, 36]. Знайдено сімейство параметрів, які дозволяють отримувати інформацію про величину головного члена похибки без додаткових обчислень правої частини диференціального рівняння, що вигідно відрізняє запропоновані формули від відповідних двосторонніх методів Рунге–Кутта [30]. Побудовано і досліджено різницеву схему розв'язування крайової задачі для квазілінійного рівняння параболічного типу.

Запропоновані методи виявились ефективними при розв'язуванні жорстких диференціальних рівнянь [9].

Найпоширенішим методом розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь є метод Гауса, який дозволяє знайти розв'язки системи n-го порядку за допомогою $(2/3)n^3$ арифметичних операцій, але цей метод не завжди є стійкий до похибок заокруглення. За допомогою ГЛД побудовано інші економічні чисельно стійкі методи розв'язування лінійних алгебраїчних рівнянь [25, 33, 65].

Про можливість застосування ГЛД для розв'язування таких систем свідчить такий приклад. Нехай

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = a_{i,n+1}, \qquad i = \overline{1, n},$$

— задана система лінійних алгебраїчних рівнянь з $\det \|a_{ij}\| \neq 0$. Не обмежуючи загальності, припустимо, що всі алгебраїчні доповнення відмінні від нуля. Використовуючи правило Крамера, зобразимо x_1 у вигляді відношення визначників. Розкриваючи ці визначники за стовпцями, якими вони відрізняються, отримаємо

$$x_1 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,n+1} A_{i1}}{\sum\limits_{i=1}^{n} a_{i1} A_{i1}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_{i,n+1}}{a_{i1} + \sum\limits_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} \dfrac{a_{k1}}{A_{i1}/A_{k1}}}.$$

Алгебраїчні доповнення A_{i1} і A_{k1} відрізняються тільки однією стрічкою. Саме по цій стрічці зробимо, як і раніше, розвинення відношення визначників A_{i1}/A_{k1} і т. д. Однак запропонований алгоритм вимагає великого числа арифметичних операцій (порядку $n!$). М. О. Недашковський модифікував цей алгоритм, мінімізуючи повторення однакових операцій і довівши число операцій до $(4/3)n^3$ [26]. Ці методи були застосовані до розв'язування алгебраїчних рівнянь з λ–матрицями [26]. За допомогою ГЛД побудовані інші ефективні методи розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь [38, 39]. Крім того, ГЛД були застосовані для підрахунку багатократних інтегралів [27].

Інтегральний ланцюговий дріб — континуальний аналог гіллястого ланцюгового дробу, отриманий в результаті заміни в цьому дробі символів підсумовування на символи інтегрування. Нехай $\tau^i = (\tau_1, \ldots, \tau_i) \in [a, b]^i = G_i$. Вираз вигляду

$$b_0 + \int_a^b \cfrac{a_1(\tau^1)dg_1(\tau_1)}{b_1(\tau^1) + \int_a^b \cfrac{a_2(\tau^2)dg_2(\tau_2)}{b_2(\tau^2) + \ddots + \int_a^b \cfrac{a_i(\tau^i)dg_i(\tau_i)}{b_i(\tau^i) + \ddots}}},$$

де b_0 — стала, $a_i(\tau^i)$, $b_i(\tau^i)$, $g_i(\tau_i)$ — обмежені неперервні функції відповідно в G_i і $[a, b]$, а інтеграли розглядаються в сенсі Стілтьєса, називається інтегральним ланцюговим дробом. Це поняття введено М. С. Сявавком [23, 40]. Можливі більш загальні конструкції таких дробів [38].

У вигляді інтегральних ланцюгових дробів зображено розв'язки інтегральних рівнянь Фредгольма, Вольтерра, Вінера–Хопфа, еволюційний оператор. Вони були застосовані для розв'язування диференціальних рівнянь з квадратичною нелінійністю, нелінійних інтегральних рівнянь Гаммерштейна, а також рівнянь Амбарцумяна–Чандрасекхара і Лена–Емдена [38, 59].

Гіллясті ланцюгові дроби отримали також застосування в електротехніці для синтезу багатополюсників, для побудови математичних моделей транзисторів [33], в теоретичній фізиці: у вигляді ГЛД зображено масовий оператор квазічастинок, що взаємодіють з фононами [42], ГЛД з операторними елементами були застосовані при розв'язанні рівняння Шредінгера [61].

„В теорії ланцюгових і, особливо, гіллястих ланцюгових дробів є ще багато нерозв'язаних проблем, зокрема, стосовно питань збіжності. Відкритим залишається широке поле діяльності для узагальнення отриманих результатів методами та засобами функціонального аналізу" (В. Я. Скоробогатько, Передмова до збірника „Цепные дроби" [45]).

1. *Боднар Д. И.* Ветвящиеся цепные дроби. – К.: Наук. думка, 1986. – 176 с.
2. *Боднар Д. И.* Вопросы аналитической теории ветвящихся цепных дробей: Дис. ... докт. физ.–мат. наук. – Львов, 1989.– 305 с.
3. *Боднар Д. И.* Некоторые применения ветвящихся цепных дробей в вычислительной математике // Вычисл. матем. в современном научно–техн. прогрессе. Вычисл. методы в алгебре, прикладной матем., в системах обработки данных и АСУ: Научн. конф. 26–28 сентября 1974. – К., 1974. – С. 94–103.
4. *Боднар Д. И.* Соответствующие ветвящиеся цепные дроби с линейными частными числителями для двойного степенного ряда // Укр. мат. журн. – 1991. – 43, N º 4. – С. 474–482.
5. *Боднар Д. І., Воделанд Х., Кучмінська Х. Й., Сусь О. М.* Про стійкість гіллястих ланцюгових дробів // Мат. методы и физ.–мех. поля. – 1994.– Вып.37.– С. 3–7.
6. *Боднар Д. И., Кучминская Х. И.* Абсолютная сходимость четной и нечетной части двумерной соответствующей цепной дроби // Там же.– 1983.– Вып.18.– С. 30–34.
7. *Боднар Д. И., Олексив И. Я.* О сходимости ветвящихся цепных дробей с неотрицательными членами // Укр. мат. журн. – 1976.– **28**, N º 3.– С. 373–377.

8. *Боднар Д. И., Скоробогатько В. Я.* Алгоритм разложения действительного числа в правильную ветвящуюся цепную дробь и его применение в электротехнике. Республ. научн.-теорет. конф. „Теория чисел и ее приложения", Ташкент, 26–28 сентября 1990 г.: Тез. докл. – Ташкент:1990. - С. 17.

9. *Боднарчук П. И.* Исследование по теории дробно-рациональных приближений и решению жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений: Дис. ... докт. физ.-мат. наук. – Львов, 1988. – 301 с.

10. *Боднарчук П. И., Кучминская Х. И.* Интерполяционная и функциональная формулы для функций многих переменных в виде ветвящихся цепных дробей // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1975. – Вып.2. – С. 31–36.

11. *Боднарчук П. І., Скоробогатько В. Я.* Гіллясті ланцюгові дроби та їх застосування. – К.: Наук. думка, 1974. – 272 с.

12. *Вороной Г. Ф.* Собрание сочинений. – К.: Изд-во АН УССР.– 1952.– Т.1.– 400 с.

13. *Дронюк Н. С.* Розклад деяких функцій у гіллясті ланцюгові дроби // Друга наук. конф. молодих математиків України. – К.: Наук. думка, 1966.– С. 185–189.

14. *Крупка З. И., Шмойлов В. И.* О параллельном вычислении алгоритмов, представленных ветвящимися цепными дробями // Многопроцессорные вычисл. структуры. – 1980. – Вып.2. – С. 78-80.

15. *Кучмінська Х. Й.* Відповідний і приєднаний гіллясті ланцюгові дроби для подвійного степеневого ряду // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1978. – № 7. – С. 614–618.

16. *Кучминская Х. И.* Интерполяция и аппроксимация функций цепными и ветвящимися цепными дробями: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Львов, 1976. – 143 с.

17. *Кучминская Х. И.* О приближении функций цепными и ветвящимися цепными дробями // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1980. – Вып.12. – С. 3–10.

18. *Кучминская Х. И., Боднар Д. И.* Вычислительная устойчивость разложений функций многих переменных в ветвящиеся цепные дроби // Однород. цифровые вычисл. и интегрирующие структуры. – Таганрог. – 1977. – Вып.8. – С. 145–151.

19. Ланцюгові дроби, їх узагальнення та застосування. Міжнародна школа-семінар, Верхнє Синєвидне, 18–25 вересня 1994 р.: Тези доп. – Львів : Ін-т прикладних проблем мех. і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 1994.–18 с.

20. *Максымив Е. М., Кутнив М. В.* Нелинейный явный метод численного интегрирования дифференциальных уравнений // Вестн. Львов. политехн. ин-та. – 1980. – № 141. – С. 57–58.

21. *Марко В. Ф.* Зв'язок узагальненого алгорифму Якобі з гіллястими ланцюговими дробами // Вісник Львів. політехн. ін-ту. Математика і механіка. – 1974. - № 87. – С. 14–17.

22. *Мельничук Ю. В.* О P-адических цепных дробях // Цепные дроби и их применения. – К.: Ин-т математики АН УССР. – 1976. – С. 29–31.

23. *Михальчук Р. И., Сявавко М. С.* Континуальный аналог цепных дробей // Укр. мат. журн. – 1982. – 4. - № 1. – С. 559–564.

24. *Недашковский Н. А.* О сходимости и вычислительной устойчивости ветвящихся цепных дробей некоторых типов // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1984. – Вып. 20. – С. 27–31.

25. *Недашковский Н. А.* Прямой метод решения линейных алгебраических уравнений ветвящимися цепными дробями // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1980.– № 8.– С. 24–28.

26. *Недашковський М. О.* Розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь з поліноміальними елементами і моделі паралельних обчислень: Дис. ... докт. фіз.-мат. наук. – Тернопіль, 1995. – 376 с.

27. *Огирко О. В.* Нелинейный метод приближенного расчета определенных интегралов // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1980. – Вып.11.– С. 28–31.

28. *Одноволова (Антонова) Т. Н.* Некоторые оценки погрешности вычисления интегральных цепных дробей // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1984. – № 7. – С. 19–22.

29. *Пасичняк Ф. О.* Разложение алгебраических иррациональностей в ветвящуюся цепную дробь // Цепные дроби и их применения. – К.: Ин-т математики АН УССР. – 1976. – С. 85–86.

30. *Пелех Я. Н., Крупка З. И., Солодяк М. Т.* Применение непрерывных дробей к решению уравнений, описывающих электромагнитное поле в ферромагнитных телах // Методы исследования дифференциальных и интегральных уравнений. – К.: Наук.думка, 1989. – С. 165–171.

31. *Пустомельников И. П.* Некоторые применения ветвящихся цепных дробей в теории дифференциальных уравнений. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Львов, 1970. – 120 с.
32. *Скоробогатько В. Я.* Ознаки збіжності гіллястих ланцюгових дробів // Доп. АН УРСР. Сер.А. – 1972. – № 1. – С. 27–29.
33. *Скоробогатько В. Я.* Теория ветвящихся цепных дробей и ее применения в вычислительной математике. – М.: Наука, 1983. – 312 с.
34. *Скоробогатько В. Я., Дронюк Н. С., Бобик О. І., Пташник Б. Й.* Гіллясті ланцюгові дроби // Доп. АН УРСР. Сер.А. – 1967. – № 2. – С. 131–133.
35. *Скоробогатько В. Я., Дронюк Н. С., Бобик О. І., Пташник Б. Й.* Гіллясті ланцюгові дроби і їх застосування // Друга наук. конф. молодих математиків України. – К.: Наук. думка, 1966. – С. 561–565.
36. *Слоневский Р. В.* Элементы теории ветвящихся цепных дробей и ее применения к решению дифференциальных уравнений и марковским процессам. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Львов. 1972. – 120 с.
37. *Сусь О. М.* Деякі локальні властивості двовимірних ланцюгових дробів // Мат. методи і фіз.– мех. поля . – 1995. – Вип.38. – С. 29–33.
38. *Сявавко М. С.* Інтегральні ланцюгові дроби. – К.: Наук. думка, 1994. – 205 с.
39. *Сявавко М. С.* Теория и приложение интегральных цепных дробей по мере. Дис. ... докт. физ.-мат. наук. – Львов, 1990. – 260 с.
40. *Сявавко М. С., Батюк Ю. Р.* Деякі ознаки збіжності ланцюгових дробів для функціоналів // Вісник Львів. політехн. ін-ту. – 1977. – № 119.– С. 144–146.
41. *Терских В. П.* Метод цепных дробей в применении к исследованию колебаний механических систем. – Л.: Судпромгиз. – 1955. – Т.2. – 332 с.
42. *Ткач Н. В.* Системы точных уравнений для массового оператора квазичастиц, взаимодействующих с фононами // Теорет. и матем. физика. – 1984. – **61**, № 3. – С. 400–407.
43. *Хованский А. Н.* Приложение цепных дробей и их обобщений к вопросам приближенного анализа. – М.: Гостехиздат, 1956.– 203 с.
44. *Чебышев П. Л.* Полное собрание сочинений. – М.-Л.: Изд-во АН СССР. – 1947. – Т.2. – 520 с.
45. Цепные дроби и их применения. / Под. ред. В. Я. Скоробогатько. – К.: Ин–т математики АН УССР. – 1976. – 112 с.
46. *Bodnar D., Kuchmins'ka Kh., Sus' O.* A survey of analytic theory of branched continued fractions // Communications in the Analytic Theory of Continued Fractions. – 1993. – **2**. – P. 4–23.
47. *Brun V.* Mehrdimensionale Algorithmen, welche die Eulershe Kettenbrüchentwicklung der Zahl e verrallgemeinern. In: Sammband der zu Ehren des 250 geb. Leonard Eulers. – Berlin: Akademie – Verlag. – 1959. – S. 87–100.
48. *Cuyt A., Verdonk B.* A review of branched continued fraction theory for the construction of multivariate rational approximations // Appl. Numerical Mathematics. – 1988. – **4**. – P. 263–271.
49. *Cuyt A., Verdonk B.* Multivariate rational interpolation // Computing. – 1985. – 34. – P. 41–61.
50. *Euler L.* De invertione quoteun que mediarum proportionalium citra radicum extractionem // Novi Comm. Acad. Petropol. – 1771. – **14**, № 1. – P. 188–224.
51. *Fujiwara M.* A problem of diophantine approximations in the old japanese mathematics // Proc. Acad. Tokyo. – 1939. – **15**. – P. 101–104.
52. *Jacobi K. G. J.* Allgemeine Theorie der Kettenbrüchähnlichen algorithmen in welchen jede Zahl aus drei vorhergehenden gebildet wird // J. Reine Angew.Math. – 1968. – **69**. – S. 29–64.
53. *Jones W. B., Thron W. J.* Continued Fractions: Analytic Theory and Applications. – Reading, Massachusetts: Addison–Wesley Publishing Company, 1980. – 428 p.
54. *Kuchmins'ka Kh.* Convergence criteria of two-dimensional continued fractions. In: Nonlinear Numerical Methods and Rational Approximation II (ed. Annie Cuyt). – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. – 1994. – P. 423– 431.
55. *Kuchminskaya Kh.* On approximation of functions by two-dimensional continued fractions. In: Rational approximation and its Applications in Mathematics and Physics. Lecture Notes in Math., Springer–Verlag: – 1987. – **1237**. – P. 205–216.

56. *Kuchminskaya Kh., Siemaszko W.* Rational Approximation and interpolation of functions by branched continued fractions. In: Rational Approximation and its Applications in Mathematics and Physics. Lecture Notes in Math., Springer–Verlag: – 1987. – **1237**. – P. 24–40.
57. *Lorentzen L., Waadeland H.* Continued Fractions with Application. – Amsterdam: North-Holland, 1992, – 606 p.
58. *Murphy J., O'Donohoe M.* A two-variable generalizations of the Stieltjes-type continued fractions // J. Comp.and Appl. Math. – 1978. – № 4. – P. 181–190.
59. *Pasichnik T. V.* An operator continued fraction for solution of the equation with second kind nonlinearity // Communications in the Analytic Theory of Continued Fractions. – 1995. – **4**. – P. 50–58.
60. *Perron O.* Grundlagen fur eine Theorie des Jacobischen Kettenbrüch–algorithmus // Math. Ann. – 1907. – **64**. – S. 1–76.
61. *Pindor M., Turchetti G.* Pade approximants and variational series for operator series // Nuovo Cimento A 71. – 1982. – P. 171–186.
62. *Pratje I.* Iteration der Joukowski // Abbildung und ihre Strecken–Komplexe. – Mitt. math. Semin. Giessen. – 1954. – № 48. – S- 1-54.
63. *Siemaszko W.* Branched continued fractions for double power series // J.Comp. and Appl. Math. – 1980. – **6**, № 2. – P. 121–125.
64. *Siemaszko W.* Thiele–type branched continued fractions for two–variable functions // J. Comp. Appl. Math. – 1983. – **9**. – P. 137–153.
65. *Swain S.* Continued fraction solution to systems of linear equations // J. Phys. A. Math. and General. – 1976. – **9**, № 11. – P. 1811–1821.
66. *Szekeres G.* Multidimensional continued fraction // Ann. Univ. Sci. Budapest. Sec. math. – 1970. – **13**. – P. 113-140.
67. *Wall H. S.* Analytic Theory of Continued Fractions. – New York: Van Nostrand, 1948. – 433 p.

ВЕТВЯЩИЕСЯ ЦЕПНЫЕ ДРОБИ
(к 30–летию выхода первой публикации)

Проанализированы различные подходы к многомерным обобщениям цепных (непрерывных) дробей и приведен обзор исследований по теории ветвящихся цепных дробей и их применениям.

BRANCHED CONTINUED FRACTIONS
(to the 30-anniversary of the first publication)

The different approaches to multidimensional generalizations of continued fractions are analysed and the overview of investigations on the branced continued fraction theory and its applications is proposed.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Отримано
12.10.94