

9. Y. Chen, A.G. Hashimoto. Kinetic of Methane Fermentation // *Biotechnology and Bioengineering*. – 1978. – Vol. 8 – P. 269-282.
10. Дивак Т.М. Параметрична ідентифікація інтервального різницевого оператора на прикладі макромоделі розподілу вологості у листі гіпсокартону в процесі його сушіння / Т. М. Дивак // Інформаційні технології та комп'ютерна інженерія. – 2012. – № 3. – С. 79-85.
11. Гелетуха Г. Г. Біогаз зі звалищ. Перспективи використання в Україні/ Гелетуха Г. Г., Копейкін К. О. // Зелена енергетика. – 2002. – №1. – С. 13–16. – ISSN 1684-2294.
12. Бойлс Д. Биоэнергия: технология, термодинамика, издержки. / Бойлс Д.; Пер. з англ. – М. : Агропромиздат, 1987. – 152 с.
13. Norazwina Zaino. Kinetics of Biogas Production from Banana Stem Waste, Biogas, Dr. Sunil Kumar (Ed.). – 2012 – P. 395-408. – ISBN: 978-953-51-0204-5, InTech.

References

1. B. Baader, M. Brenderfer, M.I. Serebryanny. Biogas: Theory and Practice. – Moscow, *Kolos*, 1982. – 148 p. (in Russian).
2. D.V. Bohlayenko, B.I. Adamchuk, V.P. Shaporev. Biomass as an Alternative Energy // The Ukrainian Congress of Ecologists: Intern. scientific-technical conf., 4-7 October 2006: abstracts reported. – Vinnytsya, 2006. – P. 215.
3. I.V. Dekhtiar. Analysis of control factors of anaerobic microbial fermentation processes in biogas plants // III Ukrainian School-Seminar of Young Scientists and Students "Modern Computer Information Technology" (ASIT'2013): materials. – Ternopil, 2013. – P.21-22.
4. Wu B. Three-dimensional numerical simulation model of biogas production for anaerobic digesters / B.Wu, E.L.Bibeau, K.G.Gebremedhin // *Canadian biosystems engineering*. – Volume 51. – 2009. – P. 81-87.
5. M. P. Dyvak, Ye. O. Martsenyuk, Yu. R. Pigovskyy, T. M. Dyvak, "Identification of discrete dynamic process models with interval uncertainty in biogas installation processing organic waste", *Informatics, Cybernetics and Computer Science of Scientific Papers*, Issue 11 (164). – Donetsk National Technical University, 2010. – P. 181-188.
6. I. Dekhtiar, T. Dyvak, Ye. Martsenyuk. Features of biogas production process and methods of its modeling // 12-th International Conference "The Experience of Designing and Application of CAD Systems in Microelectronics" Polyana Svalyava (Zakarpattia) UKRAINE 19-23 February 2013. – P.66-68.
7. Monod, J. The Technique of Continuous Culture Theory and Applications. – 1950 – Ann. Inst. Pasteur, Vol. 79. – P. 390-410.
8. M.P. Dyvak. The mathematical modeling problems of static systems with interval data / M.P. Dyvak - Ternopil - Economic thought, 2011. - 216 p.
9. Y. Chen, A.G. Hashimoto. Kinetic of Methane Fermentation // *Biotechnology and Bioengineering*. –1978. – Vol. 8 – P. 269-282.
10. T.M. Dyvak. Parametric identification of interval difference operator for example macromodel moisture distribution in drywall sheets in the process of drying / T.M. Dyvak // *Information technology and computer engineering*. – 2012. – № 3. – P. 79-85.
11. G.G. Geletukha, K.O. Kopeykin, "Biogas from landfills. Prospects in Ukraine" // *Green Energy*, Issue 1, 2002. – P. 13-16. – ISSN 1684-2294. (in Ukrainian)
12. D. Boyls, "Bioenergy: technology, thermodynamics, costs", *Agropromizdat*. – Moscow, 1987. – 152 p. (in Russian).
13. Norazwina Zaino. Kinetics of Biogas Production from Banana Stem Waste, Biogas, Dr. Sunil Kumar (Ed.). – 2012 – P. 395-408. – ISBN: 978-953-51-0204-5, InTech.

Рецензія/Peer review : 23.5.2014 р.

Надрукована/Printed :25.6.2014 р.

УДК 519.6

О.В. ВОВКОДАВ, Р.М. ПАСІЧНИК
Тернопільський національний економічний університет

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ДИНАМІКИ ПУЛЬСУ ТА ТИСКУ ПРИ ОЦІНЦІ ДОПУСТИМОСТІ ФІЗИЧНИХ НАВАНТАЖЕНЬ

В даній роботі представлено математичну модель динаміки пульсу та тиску при оцінці допустимості фізичних навантажень, яку можна використовувати для прогнозування рівнів основних показників при проходженні процесу реабілітації після захворювань серцево-судинної системи. Проведено ідентифікацію даної моделі та доведено адекватність.

Ключові слова: математична модель, серцево-судинна система, ідентифікація, прогноз, артеріальний пульс, артеріальний тиск.

O.V. VOVKODAV, P.M. PASICHNYK
Ternopil National Economic University

Mathematical models of the dynamics of pulse and pressure when assessing the acceptability of physical activity

In this paper a mathematical model of the heart rate and pressure in assessing the admissibility of physical activities that can be used to predict the levels of key indicators during the passage of the rehabilitation after diseases of the cardiovascular system is presented. The identification of this model is conducted and proved adequate.

Keywords: mathematical model, cardiovascular system, identification, predict, heart rate, blood pressure.

Вступ

На початковій стадії реабілітації після завершення лікування захворювань серцево-судинної системи організм починає адаптуватися до дозованих фізичних навантажень. При цьому навіть тривалі функціональні навантаження, які для здорового організму не спричиняють змін пульсу та тиску, суттєво збурюють серцево-судинну систему хворого, спричиняючи збільшення значень пульсу та тиску. В процесі

реабілітації важливо дозувати фізичні навантаження таким чином, щоб забезпечити тренування серцево-судинної системи із помітним нетривалим ростом пульсу та тиску, не допускаючи перевищення їх субмаксимальних значень.

Постановка задачі

Емпіричні планування програми реабілітації на початковій стадії реабілітації може приводити до виходу за межі оптимального максимуму навантажень для конкретного організму. Математичне моделювання динаміки пульсу та тиску під дією фізичного навантаження для цього періоду реабілітації дозволяє випробувати різні види навантажень попередньо на математичній моделі і, лише відібравши оптимальну конфігурацію, включати їх в програму реабілітації. На сьогоднішній день в літературі не розглядаються математичні моделі реакції серцево-судинної системи на дозовані фізичні навантаження на початковій стадії реабілітації. Зокрема в роботі [1] побудована модель толерантності до субмаксимальних фізичних навантажень орієнтованих на використання велоергометрії. В роботах [2-5] описано ряд феноменологічних моделей які включають параметри, що важко вимірюються в умовах реабілітації. Тому вони мають лише теоретичне значення. Таким чином, побудова моделі динаміки пульсу та тиску при оцінці допустимості фізичних навантажень складає актуальну задачу, розв'язанню якої присвячена дана робота.

Математична модель динаміки пульсу та тиску

Клінічна практика проходження процесу реабілітації після захворювань серцево-судинними захворюваннями передбачає лише аналіз пульсу та тиску. При цьому інформативнішою складовою даного аналізу є артеріальний тиск. Це обумовлене тим, що на перших етапах процесу реабілітації хворий може отримувати певну частину антикоагуляційних препаратів, які, розріджуючи кров, дестабілізують значення артеріального пульсу [6]. Для побудови адекватної структури моделі проведені експерименти використовуючи тест ходьби із тривалостями t_r . В клінічній практиці часто фіксують значення пульсу та тиску після ходьби тривалістю 3, 6, та 9 хв. Оскільки при дії фізичних навантажень значення пульсу H та тиску P зростають від нормальних значень H_0, P_0 із їх відновленням після припинення навантажень будемо моделювати прирости h, p пульсів та тисків:

$$h = H - H_0 \quad (1)$$

$$p = P - P_0 \quad (2)$$

Аналіз отриманих даних виявив, що значення h, p зростають при збільшенні тривалості виконуваної роботи за степеневим законом. Це дозволило ввести наступну характеристику втомлюваності організму хворого:

$$R(t) = \begin{cases} r_0 + t^a, & t < t_r \\ 0, & t \geq t_r \end{cases} \quad (3)$$

Вважаємо, що після припинення ходьби втомлюваність дорівнює 0. При виконанні роботи, втомлюваність зростає за степеневим законом, де a характеризує стан організму, а $r_0 \gg 1$ – деякий додатковий параметр. Аналіз процесу росту параметрів h, p при виконуваний роботі дозволив допустити пропорційність швидкості цього росту похідній від функції втомлюваності.

Для поєднання різних характеристик зміни приростів параметрів h, p при виконанні роботи та при її відсутності використаємо перемикачі факторів впливу на ці процеси, що базуються на функції втомлюваності. Зокрема фактор зростання параметрів доповнимо множником:

$$I(t) = \frac{R(t)}{(1 + R(t))} \quad (4)$$

а фактор стабілізації, множником $1 - I(t)$. При цьому:

$$I(t) \approx \begin{cases} 1, & t < t_r \\ 0, & t > t_r \end{cases} \quad (5)$$

Враховуючи наведені допущення, отримуємо для опису динаміки h, p наступну задачу Коші для сукупності диференціальних рівнянь:

$$h'(t) = A_1 R'(t) \frac{R(t)}{(1 + R(t))} - \left(1 - \frac{R(t)}{(1 + R(t))} \right) A_2 h^{A_3}(t) \quad (6)$$

$$p'(t) = B_1 R'(t) \frac{R(t)}{(1+R(t))} - \left(1 - \frac{R(t)}{(1+R(t))}\right) B_2 p^{B_3}(t) \quad (7)$$

$$h(0) = 0 \quad (8)$$

$$p(0) = 0 \quad (9)$$

де A_1, B_1 – показники впливу динаміки ходьби на зміни пульсу та тиску, A_2, B_2 – показники швидкості відновлення організму після припинення ходьби, A_3, B_3 – коефіцієнти степенів впливу пульсу та тиску на процес відновлення організму після припинення ходьби.

Ідентифікація математичної моделі динаміки пульсу та тиску

Для здійснення формалізації опису процесу ідентифікації введемо вектор \mathbf{C} невідомих параметрів моделі (6)-(9):

$$\mathbf{C} = (A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3,) \quad (10)$$

Розв’язання системи диференціальних рівнянь здійснюємо за допомогою неявного методу Гіра 5-го порядку. Процедуру ідентифікації параметрів системи диференціальних рівнянь здійснимо на основі середньоквадратичного критерію:

$$\sum_{t=t_0}^{t_n} \left[(H_0 + h(\mathbf{C}, t) - H_t)^2 + (P_0 + p(\mathbf{C}, t) - P_t)^2 \right] \rightarrow \min \quad (11)$$

$$\mathbf{C}_i \geq 0 \quad (12)$$

на основі алгоритму Левенберга-Марквардта із використанням методу дзеркальних відображень, що запропонований Ю. Піговським [7].

Динаміка пульсу та тиску зафіксована при виконанні тесту ходьби деякого пацієнта на чотирьох етапах початкового періоду реабілітації представлена в таблиці 1.

Таблиця 1

Рівні значень пульсу (Н1-Н4) та тиску (P1-P4)

t	H1	H2	H3	H4	P1	P2	P3	P4
0	65	64	62	60	120	118	115	110
3	68	69	70	66	122	125	120	117
6	75	76	80	68	127	130	128	120
9	85	92	90	80	140	138	135	125
12	64	65	72	64	118	121	120	112
15	60	62	70	60	120	117	116	110
18	58	62	64	58	120	120	110	111
21	59	60	63	59	120	119	109	110

Ці дані були використані для ідентифікації моделі (6)-(9). При цьому значення параметрів $r_0 = 20, A_3 = B_3 = 2$ підбрано експериментально за окремою процедурою.

Результати ідентифікації моделі (6)-(9) на основі таблиці 1, а також рівні максимальних похибок представлено в таблиці 2

Таблиця 2

Отримані значення коефіцієнтів та похибок під час проведення ідентифікації

	Етапи реабілітації			
	1	2	3	4
A1	0,3801	0,4988	0,4197	0,3140
A2	0,2553	0,3131	0,0801	0,2537
B1	0,3947	0,3524	0,3197	0,2988
B2	0,8814	0,3956	0,0837	0,9294
max Err H, (%)	3,90	2,44	7,79	5,06
max Err P, (%)	1,58	3,16	3,88	3,75

Як видно з аналізу таблиці 2 максимальна похибка по пульсу склала 7,79%, а по тиску – 3,88%. Отримані результати свідчать про адекватність розробленої математичної моделі, та можливість її використання для прогнозування значень пульсу та тиску на протязі початкового періоду реабілітації.

Графічно результати ідентифікації першого та останнього експериментів представлено на рисунках 1-2.

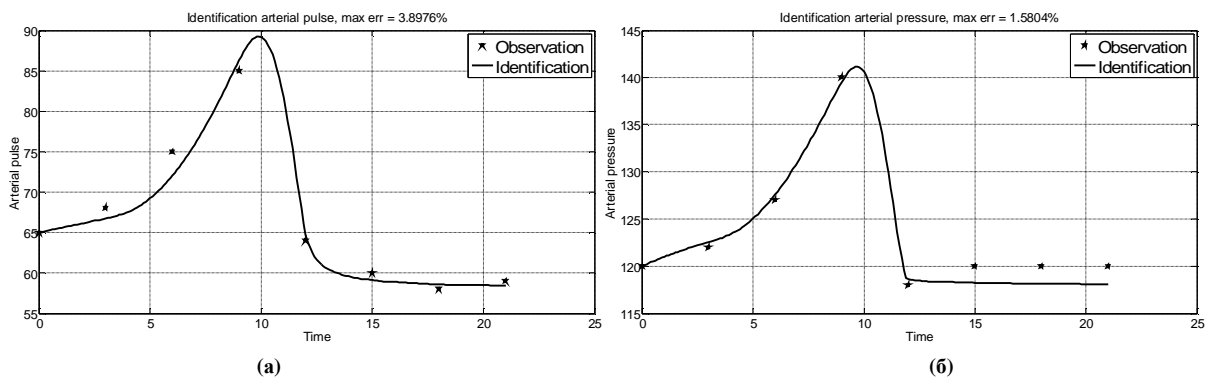


Рис. 1. Ідентифікація рівнів пульсу (а) та тиску (б) першого експерименту

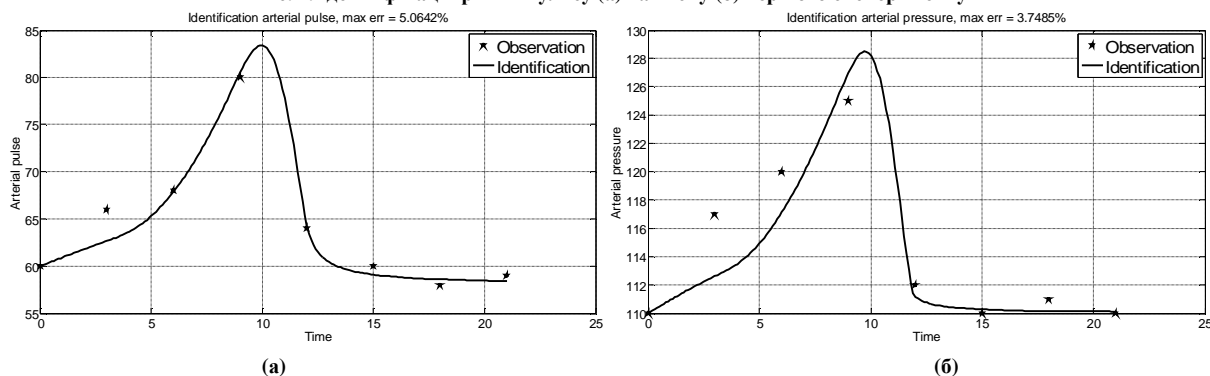


Рис. 2. Ідентифікація рівнів пульсу (а) та тиску (б) останнього експерименту

**Прогнозування параметрів
серцево-судинної системи**

Після ідентифікації отриманої математичної моделі, та доведення її адекватності, приступимо до прогнозування реакції організму на фізичне навантаження використовуючи для ідентифікації вимірювання попереднього періоду. Отримані прогнозні рівні пульсу та тиску представлено в таблиці 3.

Максимальні відносні похибки побудованих прогнозів представлено в таблиці 4.

Прогнозувати динаміку процесу реабілітації можна ідентифікувавши модель лише по спостереженню першого етапу. При цьому максимальні похибки будуть дещо більшими і складатимуть ~15% по пульсу та ~10% по тиску.

Графічно прогнозована реакція організму зображена на рисунках 3-4.

Таблиця 3

Прогнозовані рівні пульсу та тиску

\tilde{H}_2	\tilde{H}_3	\tilde{H}_4	\tilde{P}_2	\tilde{P}_3	\tilde{P}_4
66,53	70,33	77,85	118,28	119,45	121,63
70,06	74,87	80,75	121,63	122,66	124,17
76,69	83,18	86,25	127,27	128,57	128,59
91,96	101,80	99,03	139,36	141,89	138,19
72,74	75,42	83,80	118,87	123,55	122,81
67,63	71,21	78,94	118,51	120,16	121,90
67,13	70,81	78,45	118,43	119,84	121,78
66,94	70,66	78,27	118,39	119,72	121,73

Таблиця 4

Максимальні рівні похибок прогнозних значень

	Етапи реабілітації		
	1	2	3
max_Err H, (%)	11,90	10,70	11,11
max_Err P, (%)	2,69	3,93	2,61

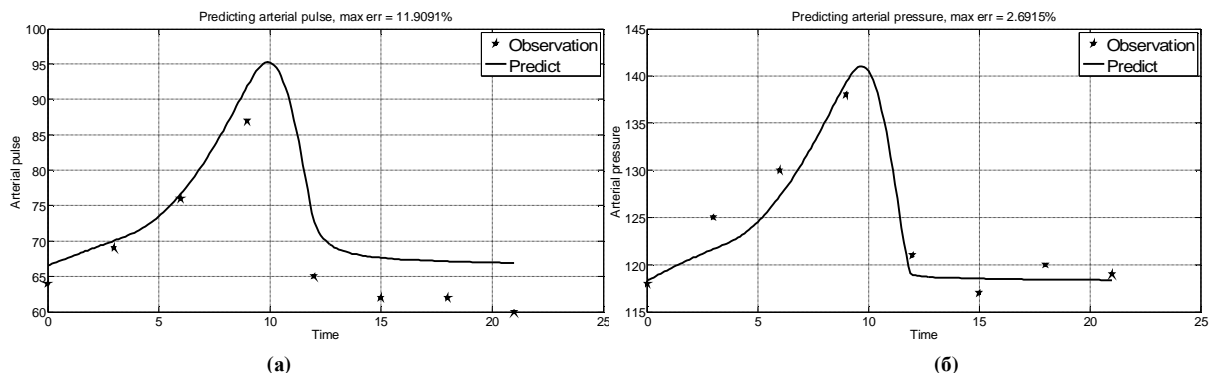


Рис. 3. Графічне представлення прогнозованої реакції пульсу (а) та тиску (б) для другого етапу

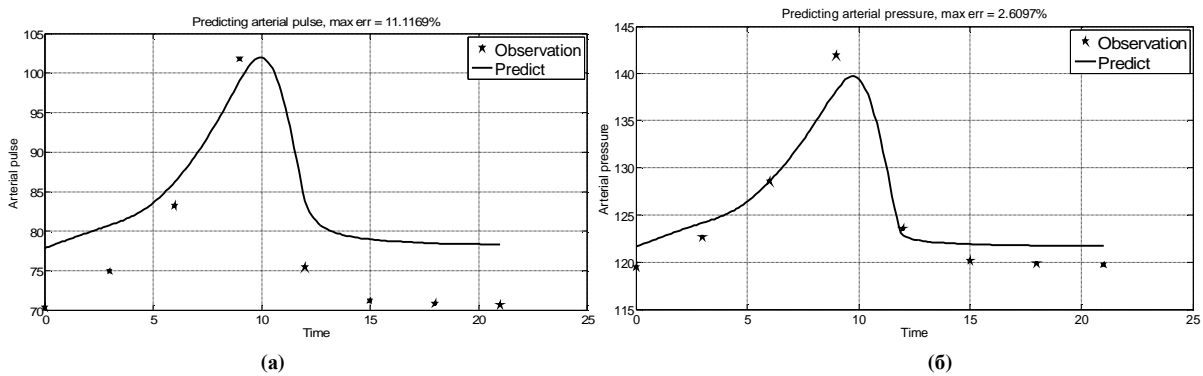


Рис. 4. Графічне представлення прогнозованої реакції пульсу (а) та тиску (б) для четвертого етапу

Висновки

В даній роботі проаналізовано існуючі математичні моделі серцево-судинної системи людини з використанням фізичного навантаження. Оскільки жодна із моделей не може бути використана для процесу реабілітації хворих, була розроблена нова математична модель, яка дозволяє прогнозувати реакцію пульсу та тиску на фізичне навантаження для проходження процесу реабілітації після серцево-судинних хвороб хворих які направлені на подальше лікування у санаторно-профілактичні заклади. Проведено ідентифікацію моделі на основі алгоритму Левенберга-Марквардта із використанням методу дзеркальних відображень. Результати чисельних експериментів підтвердили адекватність побудованої моделі.

Література

1. Вовкодав О.В. Математична модель динаміки пульсу та тиску при оцінці толерантності серцево-судинної системи до фізичного навантаження // Вісник Хмельницького національного університету. – 2014. – №4.
2. F. Kappel and R. O. Peer, A mathematical model for fundamental regulation processes in the cardiovascular system, *Journal of Mathematical Biology* 31 (1993), no. 6, 611-631.
3. S. Timischl, A global model of the cardiovascular and respiratory system, Ph.D. thesis, University of Graz, Institute for Mathematics and Scientific Computing, 1998.
4. Magosso E. A mathematical model of cardiovascular response to dynamic exercise / Magosso E., Felicani A., Ursino M. // 23rd Annual Conference – IEEE/EMBS Oct.25-28, 2001, Istanbul, TURKEY.
5. Кюгерян С. Г. Математическая модель сердечно-сосудистой системы организма при физической нагрузке / С. Г. Кюгерян, Т. Г. Петросян // Автоматизация и системы управления, 2005. Т. LVIII, №3.
6. Швед М.І., Левицька Л.В. Сучасні стратегії лікування та реабілітації хворих на інфаркт міокарда. – Київ: Медкнига, 2013. – 144 с.
7. Пасічник Р. М., Піговський Ю. Р. Ідентифікація моделі броварного бродіння в умовах невизначеності // Вісник Вінницького політехнічного інституту. — Вінниця, 2007. — № 1. — С. 10–15.

References

1. Vovkodav O.V. Matematychna model' dynamiky pul'su ta tysku pry otsyntsi tolerantnosti sertsevo-sudynnoyi systemy do fizychnoho navantazhennya. *Visnyk Khmel'nyts'koho natsional'noho universytetu*. 2014. #4.
2. F. Kappel and R. O. Peer, A mathematical model for fundamental regulation processes in the cardiovascular system, *Journal of Mathematical Biology* 31 (1993), no. 6, 611-631.
3. S. Timischl, A global model of the cardiovascular and respiratory system, Ph.D. thesis, University of Graz, Institute for Mathematics and Scientific Computing, 1998.
4. Magosso E. A mathematical model of cardiovascular response to dynamic exercise / Magosso E., Felicani A., Ursino M. // 23rd Annual Conference – IEEE/EMBS Oct.25-28, 2001, Istanbul, TURKEY.
5. Kyuheryan S. H. Matematycheskaya model' serdechno-sosudystoy systemy orhanyzma pry fizycheskoy nahruzke / S. H. Kyuheryan, T. H. Petrosyan // Avtomatyzatsyya y systemy upravlenyya, 2005. T. LVIII, #3.
6. Shved M.I., Levyts'ka L.V. Suchasni stratehiyi likuvannya ta reabilitatsiyi khvorykh na infarkt miokarda. *Kyyiv: Medknyha*, 2013. 144 s.
7. Pasichnyk R. M., Pihovs'kyu Yu. R. Identyfikatsiya modeli brovarnoho brodinnya v umovakh nevyznachenosti // *Visnyk Vinnyts'koho politekhnichnoho instytutu*. Vinnytsya, 2007. # 1. S. 10 15.

Рецензія/Peer review : 26.5.2014 р.

Надрукована/Printed :2.7.2014 р.