УДК 517.524

Д. І. Боднар (Тернопіл. нац. економ. ун-т),
Р. І. Дмитришин (Прикарпат. нац. ун-т ім. В. Стефаника, Івано-Франківськ)

БАГАТОВИМІРНІ ПРИЄДНАНІ ДРОБИ З НЕРІВНОЗНАЧНИМИ ЗМІННИМИ І КРАТНІ СТЕПЕНЕВІ РЯДИ

We establish the conditions of existence and uniqueness of a multidimensional associated fraction with independent variables corresponding to a given formal multiple power series and deduce explicit relations for the coefficients of this fraction. The relationship between the multidimensional associated fraction and the multidimensional J-fraction with independent variables is demonstrated. The convergence of the multidimensional associated fraction with independent variables is investigated in some domains of the space $\mathbb{C}^N$. The expansions of some functions into the corresponding two-dimensional associated fractions with independent variables are constructed and the efficiency of approaching of the obtained expansions by approximants is shown.

Встановлено умови існування й єдиності багатовимірного приєднаного дробу з нерівнозначними змінними, відповідного заданого формального кратного степеневого ряду, знайдено явні формули обчислення коефіцієнтів такого дробу та показано його зв'язок із багатовимірним J-дробом із нерівнозначними змінними. Досліджено збіжність багатовимірного приєднаного дробу з нерівнозначними змінними в деяких областях простору $\mathbb{C}^N$. Побудовано розвинення деяких функцій у відповідний двовимірний приєднаний дріб із нерівнозначними змінними і показано ефективність наближення підхідними дробами отриманих розкладів.

1. Вступ. При наближенні аналітичних функцій багатьох змінних, які зображені формальними кратними степеневими рядами, гіллястими ланцюговими дробами використовується принцип відповідності. Загальну теорію відповідності розроблено і викладено у монографії [1, с. 148–160].

Принцип відповідності тісно пов'язує аналітичну теорію неперервних дробів із таблицями Паде, які введено у статті [2]. Дослідженню збіжності апроксимацій Паде присвячено роботи А. О. Гончара, О. І. Аптєкарєва, В. І. Буслаєва, С. П. Суєтіна, О. А. Пекарського, Є. М. Нікішина, Є. А. Рахманова, В. М. Русака, Є. О. Ровби та ін. У роботі [3] запропоновано метод узагальнених моментних зображень для побудови і вивчення раціональних апроксимацій Паде аналітичних і спеціальних функцій. Цей метод А. П. Голуб застосував для побудови і дослідження сумісних апроксимацій Паде, апроксимацій Паде – Чебишова, Паде – Ерміта і двоточкових апроксимацій Паде [4].

У цій статті досліджуються питання відповідності гіллястих ланцюгових дробів із нерівнозначними змінними, які за своєю структурою є багатовимірним аналогом кратних степеневих рядів. Дроби такого виду введено в роботі [5] у зв'язку із дослідженням збіжності гіллястих ланцюгових дробів із додатними елементами для встановлення аналога критерію Зейделя збіжності неперервних дробів. У випадку двох гілок розгалуження у статті [6] встановлено оцінку наближення функції такими дробами при виконанні умов типу Слешинського – Прінгсгейма, а в [7] застосовано такі дроби до задач інтерполяції функцій двох змінних. Подальше дослідження у випадку фіксованих значень змінних — гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду — отримало продовження у роботах Т. М. Антонової, О. Є. Баран, М. М. Бубняк, в яких досліджено властивості та збіжність таких дробів.

У статті [8] запропоновано алгоритм побудови багатовимірного C-дробу, відповідного до формального кратного степеневого ряду. Цей алгоритм застосовано у роботі [9] при побудові відповідного і приєднаного гіллястих ланцюгових дробів із нерівнозначними змінними до формального кратного степеневого ряду. Відповідність двовимірних приєднаних дробів із нерівнозначними змінними досліджено у статті [10], де побудовано алгоритм розвинення формального подвійного степеневого ряду у відповідний двовимірний приєднаний дріб із нерівнозначними змінними і показано його зв'язок із двовимірним J-дробом із нерівнозначними змінними. При цьому використано різні підходи до побудови згаданих вище алгоритмів, і, як наслідок, різні умови їхнього існування та структур побудованих дробів.

Метою даної статті вивчення відповідності багатовимірних приєднаних дробів із нерівнозначними змінними

$$1+\sum_{i_1=1}^{N}\frac{a_{i(1)}z_{i_1}}{1+b_{i(1)}z_{i_1}}+\sum_{i_2=1}^{i_1}\frac{(-1)^{\delta_{i_1,i_2}}a_{i(2)}z_{i_1}z_{i_2}}{1+b_{i(2)}z_{i_2}}+\sum_{i_3=1}^{i_2}\frac{(-1)^{\delta_{i_2,i_3}}a_{i(3)}z_{i_2}z_{i_3}}{1+b_{i(3)}z_{i_3}}+\ldots, \tag{1}$$

де N — фіксоване натуральне число, $a_{i(k)},\ b_{i(k)},\ i(k)\in\mathcal{I}_k,\ k\geq 1,$ — комплексні числа,

$$\mathcal{I}_k=\big\{i(k)\colon i(k)=(i_1,i_2,\ldots,i_k),\ 1\leq i_p\leq i_{p-1},\ 1\leq p\leq k,\ i_0=N\big\},$$

$a_{i(k)}\neq 0$ для всіх $i(k)\in\mathcal{I}_k,\ k\geq 1,\ \delta_{i,j}$ — символ Кронекера, $\mathbf{z}=(z_1,z_2,\ldots,z_N)\in\mathbb{C}^N$, з метою побудови алгоритму розвинення формального кратного степеневого ряду

$$L(\mathbf{z})=\sum_{|m(N)|\geq 0}c_{m(N)}\mathbf{z}^{m(N)}, \tag{2}$$

де $c_{m(N)}$ — комплексні числа, $m(N)=(m_1,m_2,\ldots,m_N),\ m_p\in\mathbb{Z}_+,\ 1\leq p\leq N,\ |m(N)|=$ $=m_1+m_2+\ldots+m_N,\ 0(N)=(0,0,\ldots,0),\ c_{0(N)}=1,\ \mathbf{z}^{m(N)}=z_1^{m_1}z_2^{m_2}\ldots z_N^{m_N},\ \mathbf{z}\in\mathbb{C}^N$, у відповідний багатовимірний приєднаний дріб із нерівнозначними змінними для наближення аналітичних функцій багатьох змінних, які зображені кратними степеневими рядами. Крім цього, продовжено дослідження збіжності багатовимірних приєднаних дробів із нерівнозначними змінними, розпочате в роботі [15].

2. Відповідність багатовимірних приєднаних дробів із нерівнозначними змінними. Нехай $\mathcal{L}$ — множина всіх формальних кратних степеневих рядів вигляду (2). Очевидно, що ця множина утворює кільце з одиницею відносно операцій додавання і множення рядів. Задамо відображення $\lambda\colon\mathcal{L}\to\mathbb{Z}_+\cup\{\infty\}$ за таким правилом: $\lambda(L(\mathbf{z}))=\infty$, якщо $L(\mathbf{z})\equiv 0$; $\lambda(L(\mathbf{z}))=n$, якщо $L(\mathbf{z})\not\equiv 0$, де n — найменший степінь однорідних поліномів, для яких $c_{m(N)}\neq 0$, тобто $n=|m(N)|$.

Розглянемо послідовність раціональних функцій $f_n(\mathbf{z})=P_{m_n}(\mathbf{z})/Q_{l_n}(\mathbf{z}),\ n\geq 1$, де $P_{m_n}(\mathbf{z})$ і $Q_{l_n}(\mathbf{z})$ — поліноми степеня m_n і l_n відповідно, $\mathbf{z}\in\mathbb{C}^N$ причому $Q_{l_n}(0,0,\ldots,0)\neq 0$.

Послідовність $\{f_n(\mathbf{z})\}$ відповідна до ряду (2) в точці $\mathbf{z}=(0,0,\ldots,0)$, якщо

$$\lim_{n\to+\infty}\lambda\left(L(\mathbf{z})-L\big(f_n(\mathbf{z})\big)\right)=+\infty,$$

де $L(f_n(\mathbf{z}))$ — розвинення функції $f_n(\mathbf{z})$ у ряд Тейлора в точці $\mathbf{z}=(0,0,\ldots,0)$. Порядок відповідності $f_n(\mathbf{z})$ визначається формулою $\nu_n=\lambda\big(L(\mathbf{z})-L(f_n(\mathbf{z}))\big)$. Це означає, що розвинення $f_n(\mathbf{z})$ у формальний кратний степеневий ряд збігається з $L(\mathbf{z})$ за всіма однорідними поліномами до степеня ν_n-1 включно.

Нехай

$$g_n(\mathbf{z}) = 1 + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{a_{i(1)} z_{i_1}}{1 + b_{i(1)} z_{i_1}} + \sum_{i_2=1}^{i_1} \frac{(-1)^{\delta_{i_1,i_2}} a_{i(2)} z_{i_1} z_{i_2}}{1 + b_{i(2)} z_{i_2}} + \dots + \sum_{i_n=1}^{i_{n-1}} \frac{(-1)^{\delta_{i_{n-1},i_n}} a_{i(n)} z_{i_{n-1}} z_{i_n}}{1 + b_{i(n)} z_{i_n}}$$

— n-й підхідний дріб багатовимірного приєднаного дробу з нерівнозначними змінними (1), $n \geq 1$. Відповідність багатовимірного приєднаного дробу з нерівнозначними змінними (1) до формального кратного степеневого ряду (2) означає, що послідовність $\{g_n(\mathbf{z})\}$ є відповідною до $L(\mathbf{z})$.

Теорема 1. *Для багатовимірного приєднаного дробу з нерівнозначними змінними* (1) *існує єдиний формальний кратний степеневий ряд вигляду* (2), *до якого цей дріб буде відповідним. Порядок відповідності n-го підхідного дробу $g_n(\mathbf{z})$ дорівнює $\nu_n = 2n+1$, $n \geq 1$, і, отже, розвинення $g_n(\mathbf{z})$ у ряд Тейлора в точці $\mathbf{z} = (0, 0, \dots, 0)$ має вигляд*

$$L(g_n(\mathbf{z})) = \sum_{|m(N)|=0}^{2n} c_{m(N)} \mathbf{z}^{m(N)} + \sum_{|m(N)| \geq 2n+1} \gamma_{m(N)}^{(n)} \mathbf{z}^{m(N)}, \quad n \geq 1,$$

де $\gamma_{m(N)}^{(n)} \in \mathbb{C}$, $|m(N)| \geq 2n+1$, $n \geq 1$, $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N$.

Доведення можна провести за схемою доведення теореми 1 [11].

3. Алгоритм побудови відповідного багатовимірного приєднаного дробу з нерівнозначними змінними. Побудуємо та дослідимо алгоритм розвинення формального кратного степеневого ряду (2) у відповідний багатовимірний приєднаний дріб із нерівнозначними змінними (1).

Нехай $e_0 = e_{i(0)} = (0, 0, \dots, 0)$, $e_r = (\delta_{r,1}, \delta_{r,2}, \dots, \delta_{r,N})$ — мультиіндекс, $\delta_{r,s}$ — символ Кронекера, $1 \leq r, s \leq N$. Введемо множини мультиіндексів

$$\mathcal{E}_k = \left\{ e_{i(k)} : e_{i(k)} = e_{i_1, i_2, \dots, i_k} = e_{i_1} + e_{i_2} + \dots + e_{i_k},\ i(k) \in \mathcal{I}_k \right\}, \quad k \geq 1,$$

і відображення $\varphi \colon \mathcal{I}_k \to \mathcal{E}_k$, таке, що $\varphi(i(k)) = e_{i(k)}$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$. Можна показати, що відображення φ є бієктивним.

Позначимо $p_{e_{i(k)}} = a_{i(k)}$, $q_{e_{i(k)}} = b_{i(k)}$, $e_{i(k)} \in \mathcal{E}_k$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$. Тоді багатовимірний приєднаний дріб із нерівнозначними змінними (1) можна записати

$$1 + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{p_{e_{i(1)}} z_{i_1}}{1 + q_{e_{i(1)}} z_{i_1}} + \sum_{i_2=1}^{i_1} \frac{(-1)^{\delta_{i_1,i_2}} p_{e_{i(2)}} z_{i_1} z_{i_2}}{1 + q_{e_{i(2)}} z_{i_2}} + \sum_{i_3=1}^{i_2} \frac{(-1)^{\delta_{i_2,i_3}} p_{e_{i(3)}} z_{i_2} z_{i_3}}{1 + q_{e_{i(3)}} z_{i_3}} + \dots \qquad (3)$$

Формальний кратний степеневий ряд (2) за умови, що $c_{m(N)} \neq 0$, $|m(N)| = 1$, запишемо у вигляді

$$L(\mathbf{z}) = 1 + P_{e_0}(z_1) + \sum_{i_1=2}^{N} c_{e_{i(1)}} z_{i_1} R_{e_{i(1)}}(\mathbf{z}),$$

де

$$P_{e_0}(z_1) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{ne_1} z_1^n, \qquad R_{e_{i(1)}}(\mathbf{z}) = \sum_{\substack{|m(N)| \geq 0 \\ m_i = 0,\ i_1+1 \leq i \leq N}} \frac{c_{m(N)+e_{i(1)}}}{c_{e_{i(1)}}} \mathbf{z}^{m(N)}.$$

Нехай

$$H_{e_{i(1)}}(n)=\begin{vmatrix} c_{e_{i(1)}} & c_{2e_{i(1)}} & \ldots & c_{ne_{i(1)}} \\ c_{2e_{i(1)}} & c_{3e_{i(1)}} & \ldots & c_{(n+1)e_{i(1)}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{ne_{i(1)}} & c_{(n+1)e_{i(1)}} & \ldots & c_{(2n-1)e_{i(1)}} \end{vmatrix}\neq 0, \quad n\geq 1, \tag{4}$$

при $i_1=1$ (зауважимо, що $H_{e_1}(n)$ — визначник Ганкеля, який позв'язано із формальним степеневим рядом $P_{e_0}(z_1)$). Тоді згідно з теоремою 7.14 [1, с. 244–248] існують числа p_{ne_1}, q_{ne_1}, $n\geq 1$, такі, що $p_{ne_1}\neq 0$, $n\geq 1$, і

$$1+\sum_{n=1}^{\infty} c_{ne_1}z_1^n \sim 1+\frac{p_{e_1}z_1}{1+q_{e_1}z_1}\,\underset{-}{}\,\frac{p_{2e_1}z_1^2}{1+q_{2e_1}z_1}\,\underset{-}{}\,\frac{p_{3e_1}z_1^2}{1+q_{3e_1}z_1}\,\underset{-}{}\,\ldots=1+F_{e_0}(z_1),$$

де символ $\sim$ означає відповідність між формальним степеневим рядом і неперервним дробом. Коефіцієнти p_{ne_1} і q_{ne_1}, $n\geq 1$, обчислюються за формулами

$$p_{ne_{i(1)}}=\frac{H_{e_{i(1)}}(n)H_{e_{i(1)}}(n-2)}{\big(H_{e_{i(1)}}(n-1)\big)^2}, \qquad q_{ne_{i(1)}}=\frac{\chi_{e_{i(1)}}(n-1)}{H_{e_{i(1)}}(n-1)}-\frac{\chi_{e_{i(1)}}(n)}{H_{e_{i(1)}}(n)}, \quad n\geq 1, \tag{5}$$

де $H_{e_{i(1)}}(-1)=H_{e_{i(1)}}(0)=1$, $\chi_{e_{i(1)}}(0)=0$, $\chi_{e_{i(1)}}(1)=c_{2e_{i(1)}}$,

$$\chi_{e_{i(1)}}(n)=\begin{vmatrix} c_{e_{i(1)}} & c_{2e_{i(1)}} & \ldots & c_{(n-1)e_{i(1)}} & c_{(n+1)e_{i(1)}} \\ c_{2e_{i(1)}} & c_{3e_{i(1)}} & \ldots & c_{ne_{i(1)}} & c_{(n+2)e_{i(1)}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{ne_{i(1)}} & c_{(n+1)e_{i(1)}} & \ldots & c_{(2n-2)e_{i(1)}} & c_{2ne_{i(1)}} \end{vmatrix}, \tag{6}$$

при $i_1=1$.

Таким чином, можемо записати

$$L(\mathbf{z})\sim 1+F_{e_0}(z_1)+\sum_{i_1=2}^{N} c_{e_{i(1)}}z_{i_1}R_{e_{i(1)}}(\mathbf{z}).$$

Нехай i_1 — довільне натуральне число, причому $2\leq i_1\leq N$, і $H_{e_{i(1)}}(n)\neq 0$, $n\geq 1$, де $H_{e_{i(1)}}(n)$, $n\geq 1$, визначаються формулами (4). Тоді згідно з теоремою 7.14 [1, с. 244–248] існують числа $p'_{ne_{i(1)}}$, $q'_{ne_{i(1)}}$, $n\geq 1$, такі, що $p'_{ne_{i(1)}}\neq 0$, $n\geq 1$, і

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{ne_{i(1)}}z_{i_1}^n \sim \frac{p'_{e_{i(1)}}z_{i_1}}{1+q'_{e_{i(1)}}z_{i_1}}\,\underset{-}{}\,\frac{p'_{2e_{i(1)}}z_{i_1}^2}{1+q'_{2e_{i(1)}}z_{i_1}}\,\underset{-}{}\,\frac{p'_{3e_{i(1)}}z_{i_1}^2}{1+q'_{3e_{i(1)}}z_{i_1}}\,\underset{-}{}\,\ldots\,.$$

Коефіцієнти $p'_{ne_{i(1)}}$, $q'_{ne_{i(1)}}$, $n\geq 1$, обчислюються за формулами

$$p'_{ne_{i(1)}}=\frac{H_{e_{i(1)}}(n)H_{e_{i(1)}}(n-2)}{\big(H_{e_{i(1)}}(n-1)\big)^2}, \qquad q'_{ne_{i(1)}}=\frac{\chi_{e_{i(1)}}(n-1)}{H_{e_{i(1)}}(n-1)}-\frac{\chi_{e_{i(1)}}(n)}{H_{e_{i(1)}}(n)}, \quad n\geq 1,$$

де $H_{e_{i(1)}}(-1) = H_{e_{i(1)}}(0) = 1,\ \chi_{e_{i(1)}}(0) = 0,\ \chi_{e_{i(1)}}(1) = c_{2e_{i(1)}}$, а $H_{e_{i(1)}}(n)$ і $\chi_{e_{i(1)}}(n)$ визначаються відповідно формулами (4) і (6).

Позначимо через

$$R'_{e_{i(1)}}(\mathbf{z}) = \sum_{\substack{|m(N)|\geq 0 \\ m_i=0,\ i_1+1\leq i\leq N}} c_{m(N)}^{e_{i(1)}} \mathbf{z}^{m(N)} \tag{7}$$

— формальний кратний степеневий ряд, обернений до $R_{e_{i(1)}}(\mathbf{z})$. Коефіцієнти формального кратного степеневого ряду (7) однозначно визначаються за допомогою рекурентних формул

$$c_{m(N)}^{e_{i(1)}} = -\sum_{|r(N)|=1}^{|m(N)|} c_{m(N)-r(N)}^{e_{i(1)}} \frac{c_{r(N)+e_{i(1)}}}{c_{e_{i(1)}}}, \quad m_i = 0, \quad i_1+1 \leq i \leq N, \quad |m(N)| \geq 1,$$

де $c_{0(N)}^{e_{i(1)}} = 1$, причому $c_{m(N)}^{e_{i(1)}} = 0$, якщо існує індекс i, $1 \leq i \leq N$, такий, що $m_i < 0$. Формальний кратний степеневий ряд (7) за умов, що $c_{e_{i(2)}}^{e_{i(1)}} \neq 0$, $1 \leq i_2 \leq i_1$, і

$$c_{ne_{i_{k+1}}}^{e_{i(k)}} = 0, \quad 1 \leq i_{k+1} \leq i_k - 1, \quad n \geq 1, \tag{8}$$

при $k = 1$ можна записати у вигляді

$$R'_{e_{i(1)}}(\mathbf{z}) = 1 + c_{e_{i(1)}}^{e_{i(1)}} z_{i_1} + z_{i_1} P_{e_{i(1)}}(z_1) + \sum_{i_2=2}^{i_1} c_{e_{i(2)}}^{e_{i(1)}} z_{i_1} z_{i_2} R_{e_{i(2)}}(\mathbf{z}),$$

де

$$P_{e_{i(1)}}(z_1) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{e_{i(1)}+ne_1}^{e_{i(1)}} z_1^n, \qquad R_{e_{i(2)}}(\mathbf{z}) = \sum_{\substack{|m(N)|\geq 0 \\ m_i=0,\ i_2+1\geq i\leq N}} \frac{c_{m(N)+e_{i(2)}}^{e_{i(1)}}}{c_{e_{i(2)}}^{e_{i(1)}}} \mathbf{z}^{m(N)}.$$

Тоді $R_{e_{i(1)}}(\mathbf{z})$ запишемо у вигляді

$$R_{e_{i(1)}}(\mathbf{z}) = \left(1 + c_{e_{i(1)}}^{e_{i(1)}} z_{i_1} + z_{i_1} P_{e_{i(1)}}(z_1) + \sum_{i_2=2}^{i_1} c_{e_{i(2)}}^{e_{i(1)}} z_{i_1} z_{i_2} R_{e_{i(2)}}(\mathbf{z})\right)^{-1}.$$

Оскільки $c_{e_{i(1)}} = p'_{e_{i(1)}}$, $c_{e_{i(1)}}^{e_{i(1)}} = -c_{2e_{i(1)}}/c_{e_{i(1)}} = q'_{e_{i(1)}}$, то покладемо $p_{e_{i(1)}} = p'_{e_{i(1)}}$ і $q_{e_{i(1)}} = q'_{e_{i(1)}}$.

Таким чином,

$$L(\mathbf{z}) \sim 1 + F_{e_0}(z_1) + \sum_{i_1=2}^{N} \frac{p_{e_{i(1)}} z_{i_1}}{1 + q_{e_{i(1)}} z_{i_1} + z_{i_1} P_{e_{i(1)}}(z_1) + \sum_{i_2=2}^{i_1} c_{e_{i(2)}}^{e_{i(1)}} z_{i_1} z_{i_2} R_{e_{i(2)}}(\mathbf{z})}.$$

Далі, нехай i_1 — довільне натуральне число, причому $2 \leq i_1 \leq N$, і

$$H_{e_{i_k},i_{k+1}}^{e_{i(k)}}(n) = \begin{vmatrix} c_{e_{i_k},i_{k+1}}^{e_{i(k)}} & c_{e_{i_k}+2e_{i_{k+1}}}^{e_{i(k)}} & \ldots & c_{e_{i_k}+ne_{i_{k+1}}}^{e_{i(k)}} \\ c_{e_{i_k}+2e_{i_{k+1}}}^{e_{i(k)}} & c_{e_{i_k}+3e_{i_{k+1}}}^{e_{i(k)}} & \ldots & c_{e_{i_k}+(n+1)e_{i_{k+1}}}^{e_{i(k)}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{e_{i_k}+ne_{i_{k+1}}}^{e_{i(k)}} & c_{e_{i_k}+(n+1)e_{i_{k+1}}}^{e_{i(k)}} & \ldots & c_{e_{i_k}+(2n-1)e_{i_{k+1}}}^{e_{i(k)}} \end{vmatrix} \neq 0, \quad n \geq 1, \tag{9}$$

при $k = 1$, $i_2 = 1$. Тоді згідно з теоремою 7.14 [1, с. 244–248] існують числа $p_{e_{i(1)}+ne_1}$ і $q_{e_{i(1)}+ne_1}$, $n \geq 1$, такі, що $p_{e_{i(1)}+ne_1} \neq 0$, $n \geq 1$, і

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{e_{i(1)}+ne_1}^{e_{i(1)}} z_1^n \sim \frac{p_{e_{i(1)}+e_1} z_1}{1 + q_{e_{i(1)}+e_1} z_1} - \frac{p_{e_{i(1)}+2e_1} z_1^2}{1 + q_{e_{i(1)}+2e_1} z_1} - \frac{p_{e_{i(1)}+3e_1} z_1^2}{1 + q_{e_{i(1)}+3e_1} z_1} - \ldots = F_{e_{i(1)}}(z_1).$$

Коефіцієнти $p_{e_{i(1)}+ne_1}$ і $q_{e_{i(1)}+ne_1}$, $n \geq 1$, обчислюються за формулами

$$p_{e_{i(k)}+ne_{i_{k+1}}} = \frac{H^{e_{i(k)}}_{e_{i_k,i_{k+1}}}(n) H^{e_{i(k)}}_{e_{i_k,i_{k+1}}}(n-2)}{\left(H^{e_{i(k)}}_{e_{i_k,i_{k+1}}}(n-1)\right)^2}, \; q_{e_{i(k)}+ne_{i_{k+1}}} = \frac{\chi^{e_{i(k)}}_{e_{i_k,i_{k+1}}}(n-1)}{H^{e_{i(k)}}_{e_{i_k,i_{k+1}}}(n-1)} - \frac{\chi^{e_{i(k)}}_{e_{i_k,i_{k+1}}}(n)}{H^{e_{i(k)}}_{e_{i_k,i_{k+1}}}(n)}, \tag{10}$$

де $n \geq 1$, $H^{e_{i(k)}}_{e_{i_k,i_{k+1}}}(-1) = H^{e_{i(k)}}_{e_{i_k,i_{k+1}}}(0) = 1$, $\chi^{e_{i(k)}}_{e_{i_k,i_{k+1}}}(0) = 0$, $\chi^{e_{i(k)}}_{e_{i_k,i_{k+1}}}(1) = c^{e_{i(k)}}_{e_{i_k}+2e_{i_{k+1}}}$,

$$\chi^{e_{i(k)}}_{e_{i_k,i_{k+1}}}(n) = \begin{vmatrix} c^{e_{i(k)}}_{e_{i_k,i_{k+1}}} & c^{e_{i(k)}}_{e_{i_k}+2e_{i_{k+1}}} & \ldots & c^{e_{i(k)}}_{e_{i_k}+(n-1)e_{i_{k+1}}} & c^{e_{i(k)}}_{e_{i_k}+(n+1)e_{i_{k+1}}} \\ c^{e_{i(k)}}_{e_{i_k}+2e_{i_{k+1}}} & c^{e_{i(k)}}_{e_{i_k}+3e_{i_{k+1}}} & \ldots & c^{e_{i(k)}}_{e_{i_k}+ne_{i_{k+1}}} & c^{e_{i(k)}}_{e_{i_k}+(n+2)e_{i_{k+1}}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c^{e_{i(k)}}_{e_{i_k}+ne_{i_{k+1}}} & c^{e_{i(k)}}_{e_{i_k}+(n+1)e_{i_{k+1}}} & \ldots & c^{e_{i(k)}}_{e_{i_k}+(2n-2)e_{i_{k+1}}} & c^{e_{i(k)}}_{e_{i_k}+2ne_{i_{k+1}}} \end{vmatrix}, \tag{11}$$

при $k = 1$, $i_2 = 1$.

Таким чином,

$$L(\mathbf{z}) \sim 1 + F_{e_0}(z_1) + \sum_{i_1=2}^{N} \frac{p_{e_{i(1)}} z_{i_1}}{1 + q_{e_{i(1)}} z_{i_1} + z_{i_1} F_{e_{i(1)}}(z_1)} + \sum_{i_2=2}^{i_1} c^{e_{i(1)}}_{e_{i(2)}} z_{i_1} z_{i_2} R_{e_{i(2)}}(\mathbf{z}).$$

Нехай i_2 — довільне натуральне число, причому $2 \leq i_2 \leq i_1 - 1$, і $H^{e_{i(1)}}_{e_{i(2)}}(n) \neq 0$, $n \geq 1$, де $H^{e_{i(1)}}_{e_{i(2)}}(n)$, $n \geq 1$, визначаються формулами (9) при $k = 1$. Тоді згідно з теоремою 7.14 [1, с. 244–248] існують числа $p'_{e_{i(1)}+ne_{i_2}}$ і $q'_{e_{i(1)}+ne_{i_2}}$, $n \geq 1$, такі, що $p'_{e_{i(1)}+ne_{i_2}} \neq 0$, $n \geq 1$, і

$$\sum_{n=1}^{\infty} c^{e_{i(1)}}_{e_{i(1)}+ne_{i_2}} z_{i_2}^n \sim \frac{p'_{e_{i(2)}} z_{i_2}}{1 + q'_{e_{i(2)}} z_{i_2}} - \frac{p'_{e_{i(1)}+2e_{i_2}} z_{i_2}^2}{1 + q'_{e_{i(1)}+2e_{i_2}} z_{i_2}} - \frac{p'_{e_{i(1)}+3e_{i_2}} z_{i_2}^2}{1 + q'_{e_{i(1)}+3e_{i_2}} z_{i_2}} - \ldots.$$

Коефіцієнти $p'_{e_{i(1)}+ne_{i_2}}$ і $q'_{e_{i(1)}+ne_{i_2}}$, $n \geq 1$, обчислюються за формулами

$$p'_{e_{i(1)}+ne_{i_2}} = \frac{H^{e_{i(1)}}_{e_{i(2)}}(n) H^{e_{i(1)}}_{e_{i(2)}}(n-2)}{\left(H^{e_{i(1)}}_{e_{i(1)}}(n-1)\right)^2}, \qquad q'_{e_{i(1)}+ne_{i_2}} = \frac{\chi^{e_{i(1)}}_{e_{i(2)}}(n-1)}{H^{e_{i(1)}}_{e_{i(2)}}(n-1)} - \frac{\chi^{e_{i(1)}}_{e_{i(2)}}(n)}{H^{e_{i(1)}}_{e_{i(2)}}(n)}, \quad n \geq 1,$$

де $H^{e_{i(1)}}_{e_{i(2)}}(-1) = H^{e_{i(1)}}_{e_{i(2)}}(0) = 1$, $\chi^{e_{i(1)}}_{e_{i(2)}}(0) = 0$, $\chi^{e_{i(1)}}_{e_{i(2)}}(1) = c^{e_{i(1)}}_{2e_{i_2}}$, а $H^{e_{i(1)}}_{e_{i(2)}}(n)$ і $\chi^{e_{i(1)}}_{e_{i(2)}}(n)$ визначаються відповідно формулами (9) і (11) при $k = 1$.

Позначимо через

$$R'_{e_{i(2)}}(\mathbf{z}) = \sum_{\substack{|m(N)| \geq 0 \\ m_i = 0,\, i_2+1 \leq i \leq N}} c^{e_{i(2)}}_{m(N)} \mathbf{z}^{m(N)} \tag{12}$$

формальний кратний степеневий ряд, обернений до $R_{e_{i(2)}}(\mathbf{z})$. Коефіцієнти формального кратного степеневого ряду (12) однозначно визначаються за допомогою рекурентних формул

$$c_{m(N)}^{e_{i(k)}} = -\sum_{|r(N)|=1}^{|m(N)|} c_{m(N)-r(N)}^{e_{i(k)}} \frac{c_{r(N)+e_{i_{k-1},i_k}}^{e_{i(k-1)}}}{c_{e_{i_{k-1},i_k}}^{e_{i(k-1)}}}, \quad m_i = 0, \quad i_k + 1 \le i \le N, \quad |m(N)| \ge 1, \quad (13)$$

де $c_{0(N)}^{e_{i(k)}} = 1$, причому $c_{m(N)}^{e_{i(k)}} = 0$, якщо існує індекс i, $1 \le i \le N$, такий, що $m_i < 0$, при $k = 2$. Формальний кратний степеневий ряд (12) за умов (8) при $k = 2$ і за умов $c_{e_{i_2,i_3}}^{e_{i(2)}} \ne 0$, $1 \le i_3 \le i_2$, запишемо у вигляді

$$R'_{e_{i(2)}}(\mathbf{z}) = 1 + c_{e_{i_2}}^{e_{i(2)}} z_{i_2} + z_{i_2} P_{e_{i(2)}}(z_1) + \sum_{i_3=2}^{i_2} c_{e_{i_2,i_3}}^{e_{i(2)}} z_{i_2} z_{i_3} R_{e_{i(3)}}(\mathbf{z}),$$

де

$$P_{e_{i(2)}}(z_1) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{e_{i_2}+ne_1}^{e_{i(2)}} z_1^n, \qquad R_{e_{i(3)}}(\mathbf{z}) = \sum_{\substack{|m(N)|\ge 0\\ m_i=0,\ i_3+1\ge i\le N}} \frac{c_{m(N)+e_{i_2,i_3}}^{e_{i(2)}}}{c_{e_{i_2,i_3}}^{e_{i(2)}}} \mathbf{z}^{m(N)}.$$

Тоді $R_{e_{i(2)}}(\mathbf{z})$ можна записати

$$R_{e_{i(2)}}(\mathbf{z}) = \left(1 + c_{e_{i_2}}^{e_{i(2)}} z_{i_2} + z_{i_2} P_{e_{i(2)}}(z_1) + \sum_{i_3=2}^{i_2} c_{e_{i_2,i_3}}^{e_{i(2)}} z_{i_2} z_{i_3} R_{e_{i(3)}}(\mathbf{z})\right)^{-1}.$$

Оскільки

$$c_{e_{i(2)}}^{e_{i(1)}} = p'_{e_{i(2)}}, \qquad c_{e_{i_2}}^{e_{i(2)}} = -\frac{c_{e_{i_2}+e_{i(2)}}^{e_{i(1)}}}{c_{e_{i(2)}}^{e_{i(1)}}} = q'_{e_{i(2)}},$$

$$c_{2e_{i(1)}}^{e_{i(1)}} = -\frac{c_{e_{i(1)}}^{e_{i(1)}} c_{2e_{i(1)}} + c_{3e_{i_2}}}{c_{e_{i(1)}}} = -\frac{c_{3e_{i(1)}} c_{e_{i(1)}} - \left(c_{2e_{i(1)}}\right)^2}{\left(c_{e_{i(1)}}\right)^2} = -p'_{2e_{i(1)}},$$

$$c_{e_{i(1)}}^{2e_{i(1)}} = -\frac{c_{3e_{i(1)}}^{e_{i(1)}}}{c_{2e_{i(1)}}^{e_{i(1)}}} = -\frac{c_{2e_{i(1)}}^{e_{i(1)}} c_{2e_{i(1)}} + c_{e_{i(1)}}^{e_{i(1)}} c_{3e_{i(1)}} + c_{4e_{i(1)}}}{c_{e_{i(1)}}^{e_{i(1)}} c_{2e_{i(1)}} + c_{3e_{i(1)}}} =$$

$$= \frac{c_{2e_{i(1)}}}{c_{e_{i(1)}}} - \frac{c_{4e_{i(1)}} c_{e_{i(1)}} - c_{3e_{i(1)}} c_{2e_{i(1)}}}{c_{3e_{i(1)}} c_{e_{i(1)}} - \left(c_{2e_{i(1)}}\right)^2} = q'_{2e_{i(1)}},$$

то покладемо $p_{e_{i(2)}} = p'_{e_{i(2)}}$, $p_{2e_{i(1)}} = p'_{2e_{i(1)}}$, $q_{e_{i(2)}} = q'_{e_{i(2)}}$ і $q_{2e_{i(1)}} = q'_{2e_{i(1)}}$.

Таким чином,

$$L(\mathbf{z}) \sim 1 + F_{e_0}(z_1) +$$

$$+ \sum_{i_1=2}^{N} \frac{p_{e_{i(1)}} z_{i_1}}{1 + q_{e_{i(1)}} z_{i_1} + z_{i_1} F_{e_{i(1)}}(z_1)} + \sum_{i_2=2}^{i_1} \frac{(-1)^{\delta_{i_1,i_2}} p_{e_{i(2)}} z_{i_1} z_{i_2}}{1 + q_{e_{i(2)}} z_{i_2} + z_{i_2} P_{e_{i(2)}}(z_1)} + \sum_{i_3=2}^{i_2} c_{e_{i_2,i_3}}^{e_{i(2)}} z_{i_2} z_{i_3} R_{e_{i(3)}}(\mathbf{z}).$$

Обчислюючи далі коефіцієнти $c_{m(N)}^{e_{i(k)}}$, $m_j = 0$, $i_k + 1 \le j \le N$, $|m(N)| \ge 1$, $i_r \ne 1$, $1 \le r \le$ $\le k$, $e_{i(k)} \in \mathcal{E}_k$, $k \ge 3$, за допомогою рекурентних формул (13) і продовжуючи процес ітерації, за умов (4) при $1 \le i_1 \le N$, (9) при $1 \le i_{k+1} \le i_k,\ k \ge 1,\ e_{i(k)} \in \mathcal{E}_k$ і (8) при $e_{i(k)} \in \mathcal{E}_k,\ k \ge 1$, для формального кратного степеневого ряду (2) отримуємо багатовимірний приєднаний дріб із нерівнозначними змінними (3), де $p_{e_{i(k)}},\ q_{e_{i(k)}},\ e_{i(k)} \in \mathcal{E}_k,\ k \ge 1$, визначаються формулами (5) і (10).

Таким чином, побудовано рекурентний алгоритм обчислення коефіцієнтів багатовимірного приєднаного дробу з нерівнозначними змінними (3), відповідного до заданого формального кратного степеневого ряду (2). Відповідність багатовимірного приєднаного дробу з нерівнозначними змінними (3) до формального кратного степеневого ряду (2) можна довести за схемою, запропонованою в роботі [12].

Отже, справджується така теорема.

Теорема 2. *Багатовимірний приєднаний дріб із нерівнозначними змінними* (1) *є відповідним до заданого формального кратного степеневого ряду* (2) *тоді і лише тоді, коли виконуються умови* (4) *при* $1 \le i_1 \le N$, (9) *при* $1 \le i_{k+1} \le i_k,\ e_{i(k)} \in \mathcal{E}_k,\ k \ge 1$, *і* (8) *при* $e_{i(k)} \in \mathcal{E}_k$, $k \ge 1$.

4. Відповідність багатовимірних J-дробів із нерівнозначними змінними. У багатовимірному приєднаному дробі з нерівнозначними змінними (2) покладемо $z_i = 1/\xi_i,\ 1 \le i \le N$, знехтуємо першим членом, що дорівнює 1, і проведемо перетворення еквівалентності (див. [13, с. 29–33]), поклавши $\rho_{i(k)} = \xi_{i_k},\ i(k) \in \mathcal{I}_k,\ k \ge 1$. В результаті отримаємо багатовимірний J-дріб із нерівнозначними змінними

$$\sum_{i_1=1}^{N} \frac{a_{i(1)}}{b_{i(1)} + \xi_{i_1} +} \sum_{i_2=1}^{i_1} \frac{(-1)^{\delta_{i_1,i_2}} a_{i(2)}}{b_{i(2)} + \xi_{i_2}} + \sum_{i_3=1}^{i_2} \frac{(-1)^{\delta_{i_2,i_3}} a_{i(3)}}{b_{i(3)} + \xi_{i_3}} + \ldots, \tag{14}$$

де $a_{i(k)},\ b_{i(k)},\ i(k) \in \mathcal{I}_k,\ k \ge 1,$ — комплексні числа, причому $a_{i(k)} \ne 0,\ i(k) \in \mathcal{I}_k,\ k \ge 1,$ $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N) \in \mathbb{C}^N$.

Послідовність раціональних функцій $\{f_n(\boldsymbol{\xi})\}$, де $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{C}^N$, є відповідною до формального кратного ряду Лорана

$$L^*(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{|m(N)| \ge 0} \frac{c_{m(N)}}{\boldsymbol{\xi}^{m(N)}}, \tag{15}$$

де $c_{m(N)} \in \mathbb{C},\ |m(N)| \ge 0,\ \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{C}^N$, у точці $\boldsymbol{\xi} = (\infty, \infty, \ldots, \infty)$, якщо послідовність $\{f_n(1/z_1, 1/z_2, \ldots, 1/z_N)\}$ є відповідною до формального кратного степеневого ряду в точці $\mathbf{z} = (0, 0, \ldots, 0)$, отриманого із (15) заміною ξ_i на $1/z_i,\ 1 \le i \le N$.

Нехай

$$g_n^*(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i_1=1}^{N} \frac{a_{i(1)}}{b_{i(1)} + \xi_{i_1} +} \sum_{i_2=1}^{i_1} \frac{(-1)^{\delta_{i_1,i_2}} a_{i(2)}}{b_{i(2)} + \xi_{i_2}} + \ldots + \sum_{i_n=1}^{i_{n-1}} \frac{(-1)^{\delta_{i_{n-1},i_n}} a_{i(n)}}{b_{i(n)} + \xi_{i_n}}$$

— n-й підхідний дріб багатовимірного J-дробу з нерівнозначними змінними (14), $n \ge 1$. Відповідність багатовимірного J-дробу з нерівнозначними змінними (14) до формального кратного ряду Лорана (15) означає, що послідовність $\{g_n^*(\boldsymbol{\xi})\}$ є відповідною до $L^*(\boldsymbol{\xi})$.

Теорема 3. *Нехай* $g_n(\mathbf{z})$ *і* $g_n^*(\boldsymbol{\xi})$ — *n-ті підхідні дроби відповідно багатовимірного приєднаного дробу з нерівнозначними змінними* (1) *і багатовимірного J-дробу з нерівнозначними змінними* (14), *де* $z_i = 1/\xi_i,\ 1 \le i \le N$, *і багатовимірний приєднаний дріб із нерівнозначними змінними* (1) *є відповідним до формального кратного степеневого ряду* (2) *в точці* $\mathbf{z} = (0, 0, \ldots, 0)$. *Тоді*:

(А) *Для будь-якого натурального* n *справедлива рівність* $g_n(\mathbf{z}) = 1 + g_n^*(\boldsymbol{\xi})$.

(Б) *Формальне розвинення* n*-го підхідного дробу* $g_n^*(\boldsymbol{\xi})$ *у ряд Лорана в точці* $\boldsymbol{\xi} = (\infty, \infty, \ldots, \infty)$ *має вигляд*

$$g_n^*(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{|m(N)|=0}^{2n} \frac{c_{m(N)}}{\boldsymbol{\xi}^{m(N)}} + \sum_{|m(N)|\geq 2n+1} \frac{\gamma_{m(N)}^{(n)}}{\boldsymbol{\xi}^{m(N)}}, \quad n \geq 1,$$

де $\gamma_{m(N)}^{(n)} \in \mathbb{C}$, $|m(N)| \geq 2n+1$, $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{C}^N$, *і, отже, багатовимірний* J*-дріб із нерівнозначними змінними* (14) *є відповідним у точці* $\boldsymbol{\xi} = (\infty, \infty, \ldots, \infty)$ *до формального кратного ряду Лорана* (15).

Доведення є простим застосуванням теореми 2.

5. Збіжність багатовимірних приєднаних дробів із нерівнозначними змінними. Дослідимо збіжність побудованого багатовимірного приєднаного дробу з нерівнозначними змінними.

Нехай $l(N) = (l_1, l_2, \ldots, l_N)$.

Теорема 4. *Нехай для багатовимірного приєднаного дробу з нерівнозначними змінними* (1) *виконуються такі умови*:

$$\begin{aligned} &a_{i(1)} = -r_{i(1)}^2, \qquad (-1)^{\delta_{i_k, i_{k+1}}} a_{i(k+1)} = -r_{i(k+1)}^2, \\ &b_{i(k)} = i d_{i(k)}, \qquad d_{i(k)} \geq 0, \quad i(k) \in \mathcal{I}_k, \quad k \geq 1, \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{gathered} \sum_{i_1=1}^{N} \frac{(\operatorname{Im} r_{i(1)})^2}{l_{i_1}(1 - g_{i(1)})} \leq (1-\varepsilon) g_{i(0)}, \\ \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{(\operatorname{Im} r_{i(k)})^2}{l_{i_k}(1 - g_{i(k)})} \leq (1-\varepsilon) l_{i_{k-1}} g_{i(k-1)}, \qquad i(k) \in \mathcal{I}_k, \quad k \geq 2, \end{gathered} \tag{17}$$

де l_k, $1 \leq k \leq N$, *— деякі додатні числа,* ε *— стала така, що* $0 < \varepsilon < 1$, *а* $\{g_{i(k)}\}$ *— послідовність таких дійсних чисел, що*

$$g_{i(0)} \geq 0, \quad 0 \leq g_{i(k)} \leq 1 - \varepsilon, \qquad i(k) \in \mathcal{I}_k, \quad k \geq 1. \tag{18}$$

Тоді:

(А) *Для всіх* $\mathbf{z}$ *із множини*

$$R_{l(N),d,\varepsilon} = \big\{\mathbf{z} \colon \operatorname{Re}(d - i/z_k) \geq l_k, \ |\arg(d - i/z_k)| < \pi/(2(1+\varepsilon)), \ 1 \leq k \leq N\big\}, \tag{19}$$

де $d = \inf_{i(k)\in\mathcal{I}_k,\, k\geq 1} d_{i(k)}$, *послідовності парних і непарних підхідних дробів багатовимірного приєднаного дробу з нерівнозначними змінними* (1) *збігаються до скінченних значень* $p(\mathbf{z})$ *і* $q(\mathbf{z})$ *відповідно. Обидві послідовності парних і непарних підхідних дробів збігаються рівномірно на кожній компактній підмножині області* $\operatorname{Int}(R_{l(N),d,\varepsilon})$, *причому* $p(\mathbf{z})$ *і* $q(\mathbf{z})$ *будуть голоморфними функціями в області* $\operatorname{Int}(R_{l(N),d,\varepsilon})$.

(Б) *Для кожного* $\mathbf{z} \in \operatorname{Int}(R_{l(N),d,\varepsilon})$ *багатовимірний приєднаний дріб із нерівнозначними змінними* (1) *збігається до скінченного значення* $g(\mathbf{z})$, *якщо розбігається ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\max_{i(k)\in\mathcal{I}_k}|r_{i(k)}|^2\right)^{-1}. \tag{20}$$

Збіжність буде рівномірною на кожній компактній підмножині області $\mathrm{Int}(R_{l(N),d,\varepsilon})$, *а* $g(\mathbf{z})$ — *голоморфною функцією в області* $\mathrm{Int}(R_{l(N),d,\varepsilon})$.

Доведення є простим застосуванням теореми 3 [14].

Теорема 5. *Нехай для багатовимірного приєднаного дробу з нерівнозначними змінними* (1) *виконуються задовольняють умови* (16) *і умови*

$$(\mathrm{Im}(r_{i(1)}))^2\le(1-\varepsilon)l_{i_1}g_{i(0)}(1-g_{i(1)}),\quad 1\le i_1\le N, \tag{21}$$

$$(\mathrm{Im}(r_{i(k)}))^2\le(1-\varepsilon)l_{i_{k-1}}l_{i_k}g_{i(k-1)}(1-g_{i(k)}),\quad i(k)\in\mathcal{I}_k,\quad k\ge 2, \tag{22}$$

де l_k, $1\le k\le N$, — *деякі додатні числа,* ε — *стала така, що* $0<\varepsilon<1$, *а* $\{g_{i(k)}\}$ — *послідовність таких дійсних чисел, що виконуються умови* (18). *Тоді*

(А) *Для всіх* $\mathbf{z}$ *із множини*

$$Q_{l(N),d,\varepsilon}=\left\{\mathbf{z}\colon\ \sum_{k=1}^{N}\frac{l_k}{\mathrm{Re}(d-i/z_k)}\le 1,\ |\arg(d-i/z_k)|<\frac{\pi}{2(1+\varepsilon)},\ 1\le k\le N\right\}, \tag{23}$$

де $d=\inf_{i(k)\in\mathcal{I}_k,\,k\ge1}d_{i(k)}$, *послідовності парних і непарних підхідних дробів багатовимірного приєднаного дробу з нерівнозначними змінними* (1) *збігаються до скінченних значень* $p(\mathbf{z})$ *і* $q(\mathbf{z})$ *відповідно. Обидві послідовності парних і непарних підхідних дробів збігаються рівномірно на кожній компактній підмножині області* $\mathrm{Int}(Q_{l(N),d,\varepsilon})$, *причому* $p(\mathbf{z})$ *і* $q(\mathbf{z})$ *будуть голоморфними функціями в області* $\mathrm{Int}(Q_{l(N),d,\varepsilon})$.

(Б) *Для кожного* $\mathbf{z}\in\mathrm{Int}(Q_{l(N),d,\varepsilon})$ *багатовимірний приєднаний дріб із нерівнозначними змінними* (1) *збігається до скінченного значення* $g(\mathbf{z})$, *якщо розбігається ряд* (20). *Збіжність буде рівномірною на кожній компактній підмножині області* $\mathrm{Int}(Q_{l(N),d,\varepsilon})$, *а* $g(\mathbf{z})$ — *голоморфною функцією в області* $\mathrm{Int}(Q_{l(N),d,\varepsilon})$.

Доведення. Враховуючи умови (16) і замінюючи z_k на $1/\xi_k$, $1\le k\le N$, та застосовуючи еквівалентні перетворення $\rho_{i(k)}=1/(1+id_{i(k)}/\xi_{i_k})$, $i(k)\in\mathcal{I}_k$, $k\ge1$, багатовимірний приєднаний дріб із нерівнозначними змінними (1) зводимо до вигляду

$$1+i\sum_{i_1=1}^{N}\frac{c_{i(1)}(\boldsymbol{\xi})}{1}+\sum_{i_2=1}^{i_1}\frac{c_{i(2)}(\boldsymbol{\xi})}{1}+\sum_{i_3=1}^{i_2}\frac{c_{i(3)}(\boldsymbol{\xi})}{1}+\ldots, \tag{24}$$

де

$$c_{i(1)}(\boldsymbol{\xi})=\frac{r_{i(1)}^2}{d_{i(1)}-i\xi_{i_1}},\quad 1\le i_1\le N,$$

$$c_{i(k)}(\boldsymbol{\xi})=\frac{r_{i(k)}^2}{(d_{i(k-1)}-i\xi_{i_{k-1}})(d_{i(k)}-i\xi_{i_k})},\quad i(k)\in\mathcal{I}_k,\quad k\ge 2,$$

а $\boldsymbol{\xi}$ належить множині

$$P_{l(N),d,\varepsilon}=\left\{\boldsymbol{\xi}\colon \mathrm{Re}(d-i\xi_k)\ge l_k,\ |\arg(d-i\xi_k)|<\frac{\pi}{2(1+\varepsilon)},\ 1\le k\le N\right\}, \tag{25}$$

$$d = \inf_{i(k) \in \mathcal{I}_k,\ k \geq 1} d_{i(k)}.$$

Покладемо $1/(d_{i(k)} - i\xi_{i_k}) = u_{i(k)} e^{i\varphi_{i(k)}}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, і виберемо $p_{i(0)} = g_{i(0)}$, $p_{i(k)} = g_{i(k)} \cos(\varphi_{i(k)})$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$. Тоді з умов (21), (23) маємо

$$\sum_{i_1=1}^{N} \frac{|c_{i(1)}(\mathbf{z})| - \mathrm{Re}(c_{i(1)}(\mathbf{z}) e^{-i\varphi_{i(1)}})}{(1 - g_{i(1)}) \cos(\varphi_{i(1)})} \leq 2(1-\varepsilon) g_{i(0)},$$

звідки безпосередньо отримуємо

$$\sum_{i_1=1}^{N} \frac{|c_{i(1)}(\boldsymbol{\xi})| - \mathrm{Re}(c_{i(1)}(\boldsymbol{\xi}) e^{-i\varphi_{i(1)}})}{\cos(\varphi_{i(1)}) - p_{i(1)}} \leq 2(1-\varepsilon) p_{i(0)}.$$

Із умов (22), (23) для будь-якого мультиіндексу $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, одержуємо

$$\sum_{i_{k+1}=1}^{i_k} \frac{|c_{i(k+1)}(\mathbf{z})| - \mathrm{Re}(c_{i(k+1)}(\mathbf{z}) e^{-i(\varphi_{i(k)} + \varphi_{i(k+1)})})}{(1 - g_{i(k+1)}) \cos(\varphi_{i(k+1)})} \leq 2(1-\varepsilon) u_{i(k)} l_{i_k} g_{i(k)}. \tag{26}$$

На підставі умов (18) можемо записати

$$0 \leq p_{i(k)} \leq (1-\varepsilon) \cos\varphi_{i(k)}, \qquad i(k) \in \mathcal{I}_k, \quad k \geq 1. \tag{27}$$

Тому для кожного $\boldsymbol{\xi} \in P_{l(N),d,\varepsilon}$ і для будь-якого мультиіндексу $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, маємо

$$u_{i(k)} l_{i_k} = \frac{l_{i_k}}{|d_{i(k)} - i\xi_{i_k}|} \leq \frac{l_{i_k}}{|d - i\xi_{i_k}|} < \cos(\arg(d - i\xi_{i_k})) \leq \cos(\varphi_{i(k)}). \tag{28}$$

Застосовуючи (28) до (26), отримуємо

$$\sum_{i_{k+1}=1}^{i_k} \frac{|c_{i(k+1)}(\boldsymbol{\xi})| - \mathrm{Re}(c_{i(k+1)}(\boldsymbol{\xi}) e^{-i(\varphi_{i(k)} + \varphi_{i(k+1)})})}{\cos(\varphi_{i(k+1)}) - p_{i(k+1)}} \leq 2(1-\varepsilon) p_{i(k)}, \qquad i(k) \in \mathcal{I}_k, \quad k \geq 1.$$

Отже, елементи гіллястого ланцюгового дробу (9) задовольняють умови теореми 1 [16] з $\varphi_{i(0)} = 0$ тоді і лише тоді, коли $\boldsymbol{\xi} \in P_{l(N),d,\varepsilon}$.

Нехай

$$f_n(\boldsymbol{\xi}) = 1 + i \sum_{i_1=1}^{N} \frac{c_{i(1)}(\boldsymbol{\xi})}{1} \underset{+}{} \sum_{i_2=1}^{i_1} \frac{c_{i(2)}(\boldsymbol{\xi})}{1} \underset{+}{} \sum_{i_3=1}^{i_2} \frac{c_{i(3)}(\boldsymbol{\xi})}{1} \underset{+}{} \cdots \underset{+}{} \sum_{i_n=1}^{i_{n-1}} \frac{c_{i(n)}(\boldsymbol{\xi})}{1},$$

n-й підхідний дріб гіллястого ланцюгового дробу (24), $n \geq 1$. Із твердження (Б) теореми 1 [16] випливає, що послідовності парних і непарних підхідних дробів гіллястого ланцюгового дробу (24) збігаються до скінченних значень для всіх $\boldsymbol{\xi} \in P_{l(N),d,\varepsilon}$ і, крім того, на підставі твердження (А) цієї теореми робимо висновок, що при $n \geq 2$ значення залишків

$$Q_{i(1)}^{(n)}(\boldsymbol{\xi}) = 1 + \sum_{i_2=1}^{i_1} \frac{c_{i(2)}(\boldsymbol{\xi})}{1} \underset{+}{} \sum_{i_3=1}^{i_2} \frac{c_{i(3)}(\boldsymbol{\xi})}{1} \underset{+}{} \cdots \underset{+}{} \sum_{i_n=1}^{i_{n-1}} \frac{c_{i(n)}(\mathbf{z})}{1}, \quad 1 \leq i_1 \leq N,$$

розміщені у відповідних півплощинах

$$V_{i(1)}(\varphi_{i(1)}, p_{i(1)}) = \{w : \operatorname{Re}(we^{-i\varphi_{i(1)}}) \geq \cos(\varphi_{i(1)}) - p_{i(1)}\}, \quad 1 \leq i_1 \leq N. \tag{29}$$

Із нерівностей (27) випливає, що в області $\operatorname{Int}(P_{l(N),d,\varepsilon})$ всі $Q_{i(1)}^{(n)}(\boldsymbol{\xi}) \not\equiv 0$. Очевидно, що

$$f_n(\boldsymbol{\xi}) = 1 + i\sum_{i_k=1}^{N} \frac{c_{i(k)}(\boldsymbol{\xi})}{Q_{i(1)}^{(n)}(\boldsymbol{\xi})}, \quad n \geq 1,$$

— голоморфні функції в $\operatorname{Int}(P_{l(N),d,\varepsilon})$.

Нехай

$$P_{l(N),d,\sigma,\varepsilon} = \left\{\boldsymbol{\xi} : \sum_{k=1}^{N} \frac{l_k}{\operatorname{Re}(d - i\xi_k)} < \sigma, \ |\arg(d - i\xi_k)| < \frac{\sigma\pi}{2(1+\varepsilon)}, \ 1 \leq k \leq N\right\}, \quad 0 < \sigma < 1, \tag{30}$$

— область, що міститься в $\operatorname{Int}(P_{l(N),d,\varepsilon})$, і $C = \max_{1 \leq i_1 \leq N} |a_{i(1)}^2|$. Оскільки $|\varphi_{i(1)}| < \pi/(2(1+\varepsilon))$, $1 \leq i_1 \leq N$, то з умов (27), (29) для довільного $\boldsymbol{\xi} \in P_{l(N),d,\sigma,\varepsilon} \subseteq \operatorname{Int}(P_{l(N),d,\varepsilon})$ при $n \geq 1$ маємо

$$\bigl|f_n(\boldsymbol{\xi})\bigr| \leq 1 + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{|c_{i(k)}(\boldsymbol{\xi})|}{\operatorname{Re}(Q_{i(1)}^{(n)}(\boldsymbol{\xi})e^{-i\varphi_{i(1)}})} \leq$$

$$\leq 1 + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{|r_{i(1)}^2|}{(\cos(\varphi_{i(1)}) - p_{i(k)})|d_{i(1)} - i\xi_{i_1}|} \leq 1 + \frac{\sigma C}{\varepsilon l} = M(Q_{l(N),d,\sigma,\varepsilon}),$$

де стала $M(P_{l(N),d,\sigma,\varepsilon})$ залежить лише від області (30), тобто послідовність $\{f_n(\boldsymbol{\xi})\}$ рівномірно обмежена в області $P_{l(N),d,\sigma,\varepsilon}$.

Нехай K — довільна компактна підмножина області $\operatorname{Int}(P_{l(N),d,\varepsilon})$. Покриємо K областями вигляду (20). Із цього покриття виберемо скінченне підпокриття $P_{l(N),d,\sigma_r,\varepsilon_r}$, $1 \leq r \leq k$. Нехай

$$M(K) = \max_{1 \leq r \leq k} M(P_{l(N),d,\sigma_k,\varepsilon_k}).$$

Тоді для довільного $\boldsymbol{\xi} \in K$ при $n \geq 1$ маємо $|f_n(\boldsymbol{\xi})| \leq M(K)$, тобто послідовність $\{f_n(\boldsymbol{\xi})\}$ рівномірно обмежена на кожній компактній підмножині області $\operatorname{Int}(P_{l(N),d,\varepsilon})$.

Із теореми 2.17 [13] випливає, що послідовності парних і непарних підхідних дробів гіллястого ланцюгового дробу (24) рівномірно збігаються до голоморфних функцій на кожній компактній підмножині області $\operatorname{Int}(P_{l(N),d,\varepsilon})$. Із твердження (В) теореми 1 [16] і теореми 2.17 [13] випливає, що для кожного $\boldsymbol{\xi} \in P_{l(N),d,\varepsilon}$ гіллястий ланцюговий дріб (24) збігається до скінченного значення $f(\boldsymbol{\xi})$, якщо розбігається ряд (20). Збіжність буде рівномірною на кожній компактній підмножині області $\operatorname{Int}(P_{l(N),d,\varepsilon})$, а $f(\boldsymbol{\xi})$ — голоморфною функцією в області $\operatorname{Int}(P_{l(N),d,\varepsilon})$.

Насамкінець, із (25) при $\xi_k = 1/z_k$, $1 \leq k \leq N$, отримуємо (23), а на підставі принципу еквівалентності гіллястих ланцюгових дробів (1) і (24) (див. [13, с. 29–33]) робимо висновок про справедливість тверджень (А) і (Б) теореми 5.

Теорема 6. *Нехай для багатовимірного приєднаного дробу з нерівнозначними змінними* (1) *виконуються умови* (16), *причому всі* $r_{i(k)}$ — *додатні дійсні сталі. Тоді*

(А) *Послідовності парних і непарних підхідних дробів багатовимірного приєднаного дробу з нерівнозначними змінними* (1) *збігаються до голоморфних функцій в області*

$$R_{d,\varepsilon} = \big\{\mathbf{z}\colon |\arg(d - i/z_k)| < \pi/(2(1+\varepsilon)),\ 1 \le k \le N\big\},$$

$$R_{d,\varepsilon} = \left\{\mathbf{z}\colon \left|\arg\left(d - \frac{i}{z_k}\right)\right| < \frac{\pi}{2(1+\varepsilon)},\ 1 \le k \le N\right\},$$

де $d = \inf_{i(k)\in\mathcal{I}_k,\, k\ge1} d_{i(k)}$, ε — *стала така, що* $0 < \varepsilon < 1$, *причому збіжність буде рівномірною на кожній компактній підмножині області* $R_{d,\varepsilon}$.

(Б) *Багатовимірний приєднаний дріб з нерівнозначними змінними* (1) *збігається до голоморфної функції в області* $R_{d,\varepsilon}$, *якщо розбігається ряд* (20), *причому збіжність буде рівномірною на кожній компактній підмножині області* $R_{d,\varepsilon}$.

Доведення. Якщо всі $r_{i(k)} > 0$, то умови (17) виконуються при кожному $l_k > 0$, $1 \le k \le N$. Нехай K — довільна компактна підмножина області $R_{d,\varepsilon}$. Тоді правильними є такі включення: $K \subseteq \mathrm{Int}(R_{l(N),d,\varepsilon}) \subseteq R_{d,\varepsilon}$ для деяких досить малих l_k, $1 \le k \le N$, для яких $\mathrm{Int}(R_{l(N),d,\varepsilon})$ — внутрішність множини (19). Тому теорема 6 є наслідком теореми 4.

6. Деякі приклади. Розглянемо приклади наближення деяких функцій двох змінних, які зображені формальними подвійними степеневими рядами, відповідними до двовимірних приєднаних дробів із нерівнозначними змінними.

Натуральний логарифм. Функція $f(\mathbf{z}) = 1 + \ln(1 + z_1 + z_2(1+z_1)/(1 + z_2\ln(1+z_1)))$, де $\mathbf{z} = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, розвивається в точці $\mathbf{z} = (0,0)$ у формальний подвійний степеневий ряд вигляду

$$1 - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-z_1)^k}{k} - \sum_{l=1}^{\infty}\frac{(-z_2)^l}{l}\left(\left(1 - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-z_1)^k}{k}\right)^l - \left(-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-z_1)^k}{k}\right)^l\right),$$

де $(a)_n = a(a+1)(a+3)\ldots(a+n-1)$, $n \ge 1$, $(a)_0 = 1$. Застосовуючи побудований вище алгоритм, отримуємо відповідний двовимірний приєднаний дріб із нерівнозначними змінними вигляду (3), де $N = 2$, $p_{e_2} = p_{e_1+le_2} = 1$, $q_{ke_1+le_2} = 1/2$, $k \ge 0$, $l \ge 0$, $k + l \ge 1$; $p_{(l+2)e_2} = (l+1)^2/(4(2l+1)(2l+3))$, $p_{(k+2)e_1+le_2} = (k+1)^2/(4(2k+1)(2k+3))$, $k \ge 0$, $l \ge 0$, $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^2$. Результати обчислення абсолютних похибок $\Delta_{f_n}(\mathbf{z}) = \big|f_n(\mathbf{z}) - f(\mathbf{z})\big|$ для різних значень z_1, z_2 наведено у табл. 1. Аналізуючи результатів обчислень робимо висновок, що абсолютна похибка $\Delta_{f_n}(\mathbf{z})$ наближення функції $f(\mathbf{z})$ із ростом індексу n зменшується, і в точках, близьких до нуля, якість наближення є найкращою.

Тригонометрична функція. Функція $g(\mathbf{z}) = 1 + \operatorname{tg} z_1 + \operatorname{tg}(z_2/(1 + z_2\operatorname{tg} z_1))$, де $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^2$, розвивається в точці $\mathbf{z} = (0,0)$ у формальний подвійний степеневий ряд вигляду

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k z_1^{2k-1} + \sum_{r=1}^{\infty} c_r\left(z_2\sum_{l=0}^{\infty}\left(-z_2\sum_{k=1}^{\infty}c_k z_1^{2k-1}\right)^l\right)^{2r-1},$$

де

$$c_n = \frac{B_{2n}(-4)^n(1-4^n)}{(2n)!}, \qquad B_n = \frac{-1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\binom{k+1}{n+1}B_{n-k}, \quad n \ge 1, \quad B_0 = 1.$$

Таблиця 1

n	$\Delta_{f_n}(0{,}4, -0{,}4)$	$\Delta_{f_n}(-0{,}2, 0{,}8)$	$\Delta_{f_n}(0{,}8, 0{,}8)$	$\Delta_{f_n}(6, 8)$	$\Delta_{f_n}(15, 20)$
1	$1{,}1714 \cdot 10^{-1}$	$1{,}0763 \cdot 10^{-1}$	$1{,}2061 \cdot 10^{-1}$	$7{,}6010 \cdot 10^{-1}$	$5{,}0703 \cdot 10^{-1}$
2	$4{,}8753 \cdot 10^{-3}$	$4{,}3776 \cdot 10^{-3}$	$4{,}9540 \cdot 10^{-3}$	$8{,}3500 \cdot 10^{-3}$	$2{,}3040 \cdot 10^{-1}$
3	$1{,}4026 \cdot 10^{-4}$	$1{,}3688 \cdot 10^{-4}$	$1{,}3881 \cdot 10^{-4}$	$3{,}8222 \cdot 10^{-3}$	$1{,}0632 \cdot 10^{-1}$
4	$3{,}5854 \cdot 10^{-6}$	$4{,}0252 \cdot 10^{-6}$	$3{,}4175 \cdot 10^{-6}$	$9{,}0748 \cdot 10^{-4}$	$4{,}0929 \cdot 10^{-2}$
5	$8{,}7864 \cdot 10^{-8}$	$1{,}1625 \cdot 10^{-7}$	$7{,}9006 \cdot 10^{-8}$	$1{,}8643 \cdot 10^{-4}$	$1{,}5223 \cdot 10^{-2}$
6	$2{,}1174 \cdot 10^{-9}$	$3{,}3329 \cdot 10^{-9}$	$1{,}7660 \cdot 10^{-9}$	$3{,}7761 \cdot 10^{-5}$	$5{,}5847 \cdot 10^{-3}$
7	$5{,}0653 \cdot 10^{-11}$	$9{,}5217 \cdot 10^{-11}$	$3{,}8733 \cdot 10^{-11}$	$7{,}6573 \cdot 10^{-6}$	$2{,}0353 \cdot 10^{-3}$
8	$1{,}2074 \cdot 10^{-12}$	$2{,}7143 \cdot 10^{-12}$	$8{,}4022 \cdot 10^{-13}$	$1{,}5561 \cdot 10^{-6}$	$7{,}3915 \cdot 10^{-4}$
9	$2{,}8644 \cdot 10^{-14}$	$7{,}7049 \cdot 10^{-14}$	$1{,}8208 \cdot 10^{-14}$	$3{,}1670 \cdot 10^{-7}$	$2{,}6786 \cdot 10^{-4}$
10	$6{,}6613 \cdot 10^{-16}$	$1{,}9984 \cdot 10^{-15}$	$4{,}4409 \cdot 10^{-16}$	$6{,}4506 \cdot 10^{-8}$	$9{,}6937 \cdot 10^{-5}$

Таблиця 2

n	$\Delta_{g_n}(\pi/6, -\pi/6)$	$\Delta_{g_n}(\pi/3, \pi/3)$	$\Delta_{g_n}(2\pi/3, 2\pi/3)$	$\Delta_{g_n}(5\pi/6, 5\pi/6)$
1	$3{,}5511 \cdot 10^{-1}$	$2{,}8012 \cdot 10^{-2}$	$6{,}9445$	$1{,}3402$
2	$1{,}0611 \cdot 10^{-1}$	$1{,}3307 \cdot 10^{-1}$	$1{,}2423$	$2{,}9480 \cdot 10^{-1}$
3	$1{,}2434 \cdot 10^{-2}$	$1{,}7728 \cdot 10^{-2}$	$5{,}5323 \cdot 10^{-1}$	$1{,}2795 \cdot 10^{-3}$
4	$5{,}9337 \cdot 10^{-4}$	$1{,}0681 \cdot 10^{-3}$	$2{,}9342 \cdot 10^{-1}$	$1{,}7465 \cdot 10^{-3}$
5	$1{,}5187 \cdot 10^{-5}$	$3{,}4537 \cdot 10^{-5}$	$6{,}6839 \cdot 10^{-2}$	$8{,}8210 \cdot 10^{-5}$
6	$2{,}4335 \cdot 10^{-7}$	$6{,}9166 \cdot 10^{-7}$	$7{,}3559 \cdot 10^{-3}$	$2{,}2807 \cdot 10^{-6}$
7	$2{,}6767 \cdot 10^{-9}$	$9{,}4743 \cdot 10^{-9}$	$4{,}8018 \cdot 10^{-4}$	$3{,}8244 \cdot 10^{-8}$
8	$2{,}1507 \cdot 10^{-11}$	$9{,}4765 \cdot 10^{-11}$	$2{,}1565 \cdot 10^{-5}$	$4{,}5873 \cdot 10^{-10}$
9	$1{,}3201 \cdot 10^{-13}$	$7{,}2431 \cdot 10^{-13}$	$7{,}2038 \cdot 10^{-7}$	$4{,}1629 \cdot 10^{-12}$
10	$5{,}5511 \cdot 10^{-16}$	$4{,}4409 \cdot 10^{-15}$	$1{,}8746 \cdot 10^{-8}$	$2{,}9310 \cdot 10^{-14}$

Застосовуючи побудований вище алгоритм, отримуємо відповідний двовимірний приєднаний дріб з нерівнозначними змінними вигляду (3), де $N = 2$, $p_{e_2} = p_{e_1+le_2} = 1$, $q_{ke_1+le_2} = 0$, $k \geq 0$, $l \geq 0$, $k + l \geq 1$; $p_{(l+2)e_2} = ((2l + 1)(2l + 3))^{-1}$, $p_{(k+2)e_1+le_2} = ((2k + 1)(2k + 3))^{-1}$, $k \geq 0$, $l \geq 0$, $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^2$. Результати обчислення абсолютних похибок $\Delta_{g_n}(\mathbf{z}) = \left|g_n(\mathbf{z}) - g(\mathbf{z})\right|$ для різних значень z_1, z_2 наведено у табл. 2. Як і в попередньому прикладі, абсолютна похибка $\Delta_n(\mathbf{z})$ наближення функції $g(\mathbf{z})$ із ростом індексу n зменшується, і в точках, близьких до нуля, якість наближення є найкращою.

Література

1. *Jones W. B., Thron W. J.* Continued fractions: analytic theory and applications. Encycl. of Math. and its Appl. Vol. 11. – London, Amsterdam, Don Mills, Ontario, Sydney, Tokyo: Addison-Wesley, 1980. – xxviii + 428 p.
2. *Frobenius G.* Über Relationen zwischen den Näherungsbrüchen von Potenzreihen // J. reine und angew. Math. – 1881. – **90**. – S. 1 – 17.
3. *Дзядык В. К.* Об обобщении проблемы моментов // Докл. АН УССР. – 1981. – № 6. – С. 8 – 12.
4. *Голуб А. П.* Метод узагальнених моментних зображень в теорії раціональної апроксимації. Огляд // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 3. – С. 307 – 359.
5. *Боднар Д. И.* Исследование сходимости одного класса ветвящихся цепных дробей // Цепные дроби и их применения. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1976. – С. 41 – 44.
6. *Кучмінська Х. Й.* Відповідний і приєднаний гіллясті ланцюгові дроби для подвійного степеневого ряду // Доп. АН УРСР. – 1978. – № 7. – С. 614 – 617.
7. *Siemaszko W.* Branched continued fractions for double power series // J. Comput. and Appl. Math. – 1980. – **6**, № 2. – P. 121 – 125.
8. *Боднар Д. І.* Багатовимірні C-дроби // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1996. – **39**, № 3. – С. 39 – 46.
9. *Баран О. Є.* Наближення функцій багатьох змінних гіллястими ланцюговими дробами з нерівнозначними змінними: Дис. . . . канд. фіз.-мат. наук. – Львів, 2014. – 166 с.
10. *Дмитришин Р. І.* Приєднані гіллясті ланцюгові дроби з двома нерівнозначними змінними // Укр. мат. журн. – 2014. – **66**, № 9. – С. 1175 – 1184.
11. *Dmytryshyn R. I.* The multidimensional g-fraction with nonequivalent variables corresponding to the formal multiple power series // Карпат. мат. публ. – 2009. – **1**, № 2. – С. 145 – 151.
12. *Дмитришин Р. І.* Багатовимірне узагальнення g-алгоритму Бауера // Карпат. мат. публ. – 2012. – **4**, № 2. – С. 247 – 260.
13. *Боднар Д. И.* Ветвящиеся цепные дроби. – Киев: Наук. думка, 1986. – 176 с.
14. *Дмитришин Р. І.* Про деякі області збіжності багатовимірного J-дробу з нерівнозначними змінними // Мат. вісн. НТШ. – 2011. – **8**. – С. 69 – 77.
15. *Dmytryshyn R. I.* Convergence of some branched continued fractions with independent variables // Mat. Stud. – 2017. – **47**, № 2. – P. 150 – 159.
16. *Антонова Т. М.* Багатовимірне узагальнення теореми про параболічні області збіжності неперервних дробів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1999. – **42**, № 4. – С. 7 – 12.

Одержано 13.02.17