ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ГІБРИДНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ В МАТЕМАТИЧНІЙ ФІЗИЦІ

О. М. Нікітіна[1], М. І. Шинкарик[2]

[1]Чернівецький факультет НТУ «ХПІ», Чернівці,

[2]Тернопільський національний економічний університет, Тернопіль, Україна

nik_ole4ka@mail.ru, shynkaryk_m@ukr.net

На сучасному етапі науково-технічного прогресу, особливо у зв'язку із широким застосуванням композитних матеріалів, виникає гостра потреба у вивченні фізико-технічних характеристик даних матеріалів, які знаходяться в різних умовах експлуатації, що математично приводить до задач інтегрування сепаратної системи диференціальних рівнянь другого порядку на кусково-однорідному інтервалі з відповідними початковими та крайовими умовами (Коляно, 1992; Ленюк, 1997; Конет, Ленюк, 2004). Величини, що характеризують напружений стан композита, виражаються у вигляді полі параметричного функціонального ряду, який може бути умовно збіжним навіть тоді, коли зображає аналітичну функцію.

Метод гібридних інтегральних перетворень (ГІП) використовується як ефективний математичний апарат для побудови точних аналітичних розв'язків алгоритмічного характеру відповідних задач математичної фізики (статики, квазістатики, динаміки).

У роботі Комаров та ін. (2001) закладено основні положення теорії скінченних гібридних інтегральних перетворень (СГІП).

Розглянемо задачу побудови СГІП типу Лежандра — Бесселя — Фур'є на сегменті з двома точками спряження.

Побудуємо методом задачі Штурма — Ліувілля СГІП, породжене на сегменті $(0, R_3]$ з двома точками спряження гібридним диференціальним оператором (ГДО) Лежандра — Бесселя — Фур'є.

На множині

$$I_2 = \{r : r \in (0, R_1) \cup (R_1, R_2) \cup (R_2, R_3); R_3 < \infty\}$$

побудуємо інтегральне перетворення (ІП), породжене ГДО

$$M_{\nu,\alpha}^{(\mu)} = \theta(r)\theta(R_1 - r)a_1^2\Lambda_{(\mu)} + \theta(r - R_1)\theta(R_2 - r)a_2^2 B_{\nu,\alpha} +$$
$$+\theta(r - R_2)\theta(R_3 - r)a_3^2\frac{d^2}{dr^2}.$$

Тут $\theta(x)$ — одинична функція Гевісайда [1], $\Lambda_{(\mu)}$ — узагальнений диференціальний оператор Лежандра [4]; $B_{\nu,\alpha}$ — диференціальний оператор Бесселя; d^2/dr^2 — диференціальний оператор Фур'є другого порядку (Ленюк, 1997).

Означення 1. *Областю задання ГДО* $M_{\nu,\alpha}^{(\mu)}$ *назвемо множину* G *вектор-функцій* $g(r) = \{g_1(r); g_2(r); g_3(r)\}$ *з такими властивостями:*

1) вектор-функція $f(r) = \{\Lambda_{(\mu)}[g_1]; B_{\nu,\alpha}[g_2]; g_3''\}$ *неперервна на множині* I_2*;*

2) функції $g_j(r)$ *задовольняють крайові умови:*

$$\lim_{r\to 0}[r^{\gamma} g_1(r)] = 0, \quad \left(\alpha_{22}^3 \frac{d}{dr} + \beta_{22}^3\right) g_3(r)\,|_{r=R_3} = 0;$$

3) функції $g_j(r)$ *задовольняють умови спряження:*

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k \frac{d}{dr} + \beta_{j1}^k\right) g_k(r) - \left(\alpha_{j2}^k \frac{d}{dr} + \beta_{j2}^k\right) g_{k+1}(r)\right]\Bigg|_{r=R_k} = 0;\ j,k = 1,2.$$

Згідно з роботою Нікітіна, Шинкарик (2015) сформулюємо такі твердження.

Теорема 1 (про дискретний спектр). *Корені* β_n *трансцендентного рівняння* $\delta_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(\beta) = 0$ *складають дискретний спектр ГДО* $M_{\nu,\alpha}^{(\mu)}$*: дійсні, різні, симетричні відносно нуля й на півосі* $\beta > 0$ *утворюють монотонно зростаючу числову послідовність з єдиною граничною точкою* $\beta = \infty$*.*

Теорема 2 (про дискретну функцію). *Система власних функцій* $\{V_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(r,\beta_n)\}_{n=1}^{\infty}$ *ортогональна на множині* I_2 *з ваговою функцією* $\sigma(r)$*, повна й замкнена.*

Теорема 3 (про зображення рядом Фур'є). *Будь-яка вектор-функція* $g(r) \in G$ *зображається за системою* $\{v_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(r,\beta_n)\}_{n=1}^{\infty}$ *абсолютно й рівномірно збіжним на множині* I_2 *рядом Фур'є:*

$$g(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{R_3} g(\rho) v_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(\rho,\beta_n)\sigma(\rho) d\rho\, v_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(r,\beta_n).$$

Даний ряд Фур'є визначає пряме $H_{\nu,\alpha}^{(\mu)}$ й обернене $H_{\nu,\alpha}^{-(\mu)}$ СГІП, породжене на множині I_2 ГДО $M_{\nu,\alpha}^{(\mu)}$:

$$H_{\nu,\alpha}^{(\mu)}[g(r)] = \int_0^{R_3} g(r) v_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(r,\beta_n)\sigma(r) dr \equiv \tilde{g}_n, \tag{1}$$

$$H_{\nu,\alpha}^{-(\mu)}[\tilde{g}_n] = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{g}_n v_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(r,\beta_n) \equiv g(r). \tag{2}$$

Теорема 4 (про основну тотожність). *Якщо вектор-функція*

$$f(r) = \{\Lambda_{(\mu)}[g_1(r)]; B_{\nu,\alpha}[g_2(r)]; g_3''(r)\}$$

неперервна на множині I_2*, а функції* $g_j(r)$ *задовольняють крайові умови:*

$$\lim_{r\to 0}\left[\operatorname{sh} r\left(\frac{dg_1}{dr}v^{(\mu)}_{\nu,\alpha;1}-g_1\frac{dv^{(\mu)}_{\nu,\alpha;1}}{dr}\right)\right]=0,$$

$$\left[\left(\alpha^3_{22}\frac{d}{dr}+\beta^3_{22}\right)g_3(r)\right]\Big|_{r=R_3}=g_R$$

та умови спряження:

$$\left[\left(\alpha^k_{j1}\frac{d}{dr}+\beta^k_{j1}\right)g_k(r)-\left(\alpha^k_{j2}\frac{d}{dr}+\beta^k_{j2}\right)g_{k+1}(r)\right]\Big|_{r=R_k}=\omega_{jk};\qquad j,k=1,2,$$

то має місце основна тотожність СГІП ГДО $M^{(\mu)}_{\nu,\alpha}$*:*

$$H^{(\mu)}_{\nu,\alpha}[M^{(\mu)}_{\nu,\alpha}[g(r)]]=-\beta^2_n\tilde{g}_n-\sum_{i=1}^{3}k_i^2\tilde{g}_{in}+(\alpha^3_{22})^{-1}v^{(\mu)}_{\nu,\alpha;3}(R_3,\beta_n)g_R+$$
$$+\sum_{k=1}^{2}d_k[Z^{(\mu);k}_{\nu,\alpha;12}(\beta_n)\omega_{2k}-Z^{(\mu);k}_{\nu,\alpha;22}(\beta_n)\omega_{1k}]. \qquad (3)$$

Висновки. Одержані формули (1), (2) та (3) складають математичний апарат для побудови інтегрального зображення точного аналітичного розв'язку відповідних крайових задач математичної фізики кусково-однорідних середовищ. Інтегральні зображення носять алгоритмічний характер, що дозволяє їх успішно використовувати як в теоретичних дослідженнях, так і в числових розрахунках. Вони можуть бути використані при вивченні стаціонарного стану композитів у випадку теплового або механічного миттєвого удару, при доведенні існування розв'язку мішаних задач математичної фізики неоднорідних середовищ тощо.

Список літератури

Коляно, Ю.М. (1992). *Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела.* Киев: Наукова думка.

Комаров, Г. М., Ленюк, М. П., Мороз, В. В. (2001). *Скінченні гібридні інтегральні перетворення, породжені диференціальними рівняннями другого порядку*. Чернівці: Прут.

Конет, І. М., Ленюк, М. П. (2004). *Температурні поля в кусково-однорідних циліндричних областях*. Чернівці: Прут.

Ленюк, М. П. (1997). *Температурні поля в плоских кусково-однорідних ортотропних областях*. Київ: Ін-т математики НАН України.

Нікітіна, О. М., Шинкарик, М. І. (2015). Скінченне гібридне інтегральне перетворення типу Лежандра — Бесселя — Фур'є на сегменті з двома точками спряження. *Вестник Херсонского национального технического университета, 2015* (3 (54)), 47—51.