



МОЖЛИВОСТІ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ПСИХОЛОГІЧНИХ ПРОЦЕСІВ

Людмила ПРИСНЯКОВА*

Copyright © 2003

*Я стверджую, що кожна з природничих наук
містить у собі рівно стільки науки
у власному розумінні слова,
скільки вона вміщує математики.
(Імануїл Кант)*

Суспільна проблема. Сучасний етап розвитку науки характеризується інтенсивним проникненням математики майже в усі її розділи та напрямки, не виключаючи психологію і педагогіку, хоча темпи *математизації процесів пізнання* людини значно відстають від використання математики, наприклад, у техніці.

Якщо виходити з положення, що рівень використання математичних методів у тій чи іншій галузі науки є одним з показників її зрілості, то з цього погляду психологія знаходиться на відносно низькому ступені свого розвитку. Нині математика використовується у сфері психології в основному як *метод статистичної обробки* результатів психологічного експерименту і як спосіб вираження споконвічно постульованого зв'язку між перемінними, зумовленими досвідом.

Авторська ідея. Умовно в сучасній психології можна виділити **три напрямки**. “Описова”, що заснована на одержанні і поясненні експериментального матеріалу; *математична* і “детерміністська”. Математична психологія – нині ближче до математики, тому що вирішує у найзагальнішому вигляді завдання із психології методами сучасної математики, причому здебільшого відсутнє кількісне порівняння розрахунків з експери-

ментальними даними. Ще один перспективний напрямок, названий нами “детерміністським”, ставить собі за мету побудову математичних моделей елементарних психологічних процесів і вимагає проведення експериментальних досліджень для перевірки їх діяльності.

Мета дослідження. Лавиноподібне зростання переважно емпіричного матеріалу, що узагальнюється в основному умоглядними теоріями, обмежує подальший ефективний розвиток наукових пошукувань у сфері сучасної психології. Тому *мета* пропонованої статті – проаналізувати останній (“детерміністський”) напрямок, що відкриває, на наш погляд, значно ширші можливості для успішного пізнання природи різних психологічних процесів.

Вступ. Людство вступило в ХХІ століття. За оцінками експертів ЮНЕСКО, це буде **століття психології**. Справді, нині людство знає Місяць краще, ніж мозок людини.

Більшість аспектів людської діяльності тією чи іншою мірою пов'язані з

* Авторка висловлює щирю вдячність професорові Володимиру Пріснякову за допомогу в підготовці цієї статті.

переробкою пам'яттю людини інформації: мозок людини запам'ятовує інформацію, що надходить до нього, аналізує її і видає те чи інше рішення. Незважаючи на складність проблеми, спроби математичного опису психологічних процесів, початі в минулому сторіччі Г. Фехнером і Г. Еббінгаузом, дають свої результати. Як показує аналіз, визначення пам'яті як системи процесів переробки інформації істотно спрощує формалізацію і моделювання психіки. Проте тут відразу треба зауважити, що психологічні процеси неподільно пов'язані із плином людського життя і тому за своєю природою є **нестационарними**, тобто підвладні часу. У зв'язку з цим усі відомі підходи до їх моделювання свідомо обмежені, оскільки не враховують зміни як зовнішніх, так і внутрішніх величин у часовому вимірі. З цього погляду заслуговують на увагу підходи А.Н. Лебедева (Інститут психології РАН) і Б.Й. Цуканова (Одеський національний університет імені Іллі Мечникова).

Інформаційна модель переробки інформації пам'яттю. У нашій моделі пам'ять людини подається у вигляді чорної шухляди, де в певний момент часу τ знаходиться J одиниць інформації. Ззовні у пам'ять надходить інформація з деяким темпом \dot{R} [од/сек]. Ця інформація не вся запам'ятовується тому, що завдяки процесам загасання частина її виходить із пам'яті з темпом \dot{R}_s [од/сек].

Тут виникає важливе питання про *одиниці виміру* інформації у психологічних процесах. У нашому підході одиниця виміру – це деяке *суб'єктивно-цілісне утворення*, тобто склад, слово, помилка, запитання, відповідь, інформаційно-змістова одиниця тексту (ІЗОТ) тощо. Тоді подання кінцевих аналітичних взаємозв'язків у безрозмірному відносному вигляді дає змогу аналізувати будь-які психологічні процеси кількісно, не замикаючись на сутності самих одиниць

вимірювання. Балансове рівняння потоку інформації $J(\tau)$ записується з очевидної умови, що її зміна в часі $d/d\tau$ визначається різницею між “приходом” інформації у пам'ять \dot{R} та її “виходом” \dot{R}_s . В основу оригінального “рівняння збереження потоку інформації” покладена гіпотеза, що втрата інформації пам'яттю пропорційна різниці між інформацією, що надходить до пам'яті в даний момент τ $J(\tau)$, і деяким її кінцевим значенням у пам'яті після закінчення досить великого проміжку часу φ та зворотню пропорційна постійній часу T :

$$\dot{R}_s = (J - \varphi) / \dot{R}.$$

Висловимо окремі зауваження щодо величин T і φ . *Постійна часу T* визначає час, протягом якого процес досягає 2/3 свого кінцевого значення. Наприклад, якщо вивчається забування інформації, то T – це час, коли забувається 2/3 первісної кількості інформації; якщо ж вивчається запам'ятовування інформації, то T – це час, упродовж якого заучується 2/3 від загальної кількості інформації. Порівняння нашої інформаційної моделі з моделлю нейрофізіологічних перцептивних процесів А.Н. Лебедева дало змогу відшукати зв'язок між T і частотою альфа-ритму мозку, що визначається експериментально для кожної людини:

$$T = T_0 - \theta a \quad (T_0 = 0.464 \text{ с}; \theta = 0.03 \text{ с}^2)$$

Величина деякого *граничного значення інформації в пам'яті φ* , що зберігається досить довго, відіграє важливу роль, тому що визначає той поріг або стандарт інформації, що за кожним її видом зберігає пам'ять і є еталоном порівняння з інформацією, що надходить до людини ззовні.

Введення цих двох параметрів, що змінюються досить слабо, виявилось винятково вдалим кроком, оскільки дало змогу обґрунтувати їх експериментально для певних загальних груп умов чи параметрів і в кінцевому підсумку апріорно їх використовувати для прогнозування аналогічних психологічних процесів.

Отже, з урахуванням усього сказаного вихідне балансове рівняння, що описує психологічні процеси у пам'яті людини, буде мати вигляд:

$$d/dt = A - (J-j)/T \quad (1)$$

Розв'язання рівняння щодо переробки інформації пам'яттю. Як побачимо далі, це досить просте і зрозуміле диференціальне рівняння має розв'язок, що вдало описує різні психологічні процеси, які загалом зводяться до процесу переробки інформації пам'яттю. Для випадку початкових умов: при $t=0$ пам'ять містить J_0 одиниць інформації, що надходить у пам'ять; тоді розв'язок рівняння (1) матиме вигляд:

$$J = \varphi + \dot{R} T + (J_0 - \varphi - \dot{R} T) e^{-\tau/T} \quad (2)$$

Якщо вивчається процес забування збереженої у пам'яті інформації в кількості J_0 одиниць, то крива забування впливає з (2) як окремий випадок відсутності надходження інформації $A=0$:

$$\bar{J} = J/J_0 = \bar{\varphi} + (1 - \bar{\varphi}) e^{-\tau/T} \quad (3)$$

Тут введені відносні величини \bar{J} і $\bar{\varphi}$, що становлять частку від початкової інформації, отриманої пам'яттю J_0 .

Як видно з розв'язку рівнянь (2) і (3), кількість інформації у пам'яті J (або за умов нормованого вигляду \bar{J} в момент часу τ) є функцією незалежної змінної часу (або її відносного значення $\bar{\tau} = \tau/T$) і параметрів φ і T . Розрахунки, здійснені за допомогою цих формул, підтверджуються практично всіма відомими з літератури експериментальними даними, зокрема перше у випадку, коли вони містять необхідні для розрахунків вихідні величини. Відзначимо, що формулам (2) і (3) властива певна "математична краса".

Якщо порівняти формулу для забування (3) з відомою емпіричною формулою Г. Еббінгауза, то можна побачити, що остання має три емпіричних величини і логарифмічну функцію, тоді як (3) містить два універсальних безрозмірних критерії.

Процес навчання. Поширення рівняння (1) на перебіг заучування інформації шляхом безперервного багаторазового її повторення n дав змогу одержати формулу для кривої навчання, що зв'язує рівень досягнутого засвоєння інформації до моменту n -го повторення $\bar{J} = J_n/J\tau$ (стосовно всього матеріалу, що вивчається, **обсягом** J_Σ одиниць) і час одного **повторення** $\tau_i = J_\Sigma/R$ (або його відносного значення $\bar{\tau} = (\tau/T)$):

$$\bar{J}_n \cong 1 - \exp(-n/\bar{\tau}) \quad (4)$$

Задіяння експонентних функцій в описі психологічних процесів є широко розповсюдженим прийомом, що служить непрямым підтвердженням об'єктивності запропонованих результатів розв'язку (цей факт добре відомий математикам). Більше того, розрахунки за цією формулою співпадають з відповідними числовими експериментальними даними. Так, теоретичний аналіз формули (4) дозволяє одержати з неї, як окремий випадок, відомі формули Халла для процесу навчання; Фуко – для загального часу заучування τ_Σ ; залежності К'єрстеда-Робінсона – про вплив відносного обсягу вивченого матеріалу; Терстона – про питомий час заучування.

Зазначені підходи, безсумнівно, істотно розширюють конструктивні межі математичного моделювання педагогічних процесів, пов'язаних з навчанням учнів. Так, формули (3) і (4) дають підстави розглядати, наприклад, задачу оптимального навчання з перервами, коли отримана інформація частково забувається. Якщо використовувати поняття про **інформаційно-змістові одиниці** тексту (ІЗОТ), то в загальному потоці інформації неважко виділити її змістову (якісну) сторону, причому з урахуванням інформації, **нової** для того, хто навчається, уже **відомої** йому і **нейтральної** ("граматичної"). Це відкриває зовсім невідомі раніше можливості, оскільки дозволяє з допомогою математичних методів оптимізувати програми навчальних

курсів, більш рівномірно за обсягом нової інформації розподіляти матеріал у підручниках і на заняттях.

Вірогідність обстоюваної нами математичної інтерпретації підтверджується її узгодженням з експериментальними даними щодо *відтворення тимчасової тривалості*, вивчення якого систематично проводиться упродовж останніх 70 років.

Трохи несподіваним виявився результат успішного використання формули (4) для опису процесу *навчання тварин*. Були отримані численні значення параметра $\bar{\tau}_1$, що описують криву нау́чіння мурах, кішки, пацюка, собаки, піщанки, кролика, мавпи за різних типів стороннього підкріплення. Був виявлений також цікавий *феномен адаптації* деяких тварин до процесу нау́чіння, протягом якого вони не реагують на пропонований матеріал (явище запізнювання на початку нау́чіння).

Формула нау́чіння (4) добре описує процес *утворення сенсомоторної навички* у випадку різного *емоційного впливу* на обстежуваного. З'ясувалося, що постійна часу процесу нау́чіння може водночас бути і кількісною *мірою* емоційних стресів.

Подібність психологічних процесів. У техніці широко використовується теорія подібності для опису одних явищ за допомогою інших, їм подібних. Отримані результати математичного моделювання психологічних процесів дають змогу закласти *основи* елементарної *теорії подібності* цих процесів. Обробка великого обсягу експериментального матеріалу з проблеми заучування-забування та використання запропонованої моделі дозволили одержати і проаналізувати вплив різних критеріїв на перебіг досліджуваних процесів. Зокрема, для *процесу нау́чіння* таким критерієм є відносний час одного повторення матеріалу, що вивчається, $\bar{\tau}_1 = t_1 / T_\Sigma = J / RT$. Саме цей критерій, поряд з постійною часу T

і числом повторень n , однозначно визначає траєкторію кривої нау́чіння. Для *процесу забування* аналізований критерій становить відносний час процесу; $\bar{\tau} = \tau / T$. Надзвичайно важливий граничний критерій – $p = \varphi / AT$, названий *критерієм подібності стосовно чутливості пам'яті*.

Використання таких найпростіших критеріїв дало змогу *класифікувати* всі відомі, експериментально підтверджені, криві нау́чіння і забування на 4 групи, кожна з яких описує переробку інформації пам'яттю з урахуванням індивідуальних властивостей людини, типу матеріалу, темпу подачі інформації і т. ін. Для кривих нау́чіння окремі криві характеризуються своїм значенням параметра $\bar{\tau}_1$ у формулі (4): 0,6; 2,1; 4,5; 10, а кожна з кривих забування визначається відмінним значенням параметра $\bar{\varphi}_1$ у формулі (3): 0,7; 0,53; 0,3; 0,075. Знаючи тип матеріалу, індивідуальні якості людини та інші параметри, можна апріорі вибрати формулу для розрахунку прогнозу особливостей перебігу психологічного процесу. Вкажемо ще на одну перевагу створеної математичної моделі, що, крім можливості прогнозу поведінки людини, створює *теоретичну основу* проведення й обробки даних *експериментальних досліджень*.

Латентний період реакції. Рівняння (1) дозволяє теоретично розв'язати низку задач, що мають адресне значення для психології. Якщо припустити, що реакція людини на найпростіший стимул визначається моментом досягнення певного рівня поінформованості, рівного φ (тобто умовному еталону, що зберігається досить довго в пам'яті), то отримуємо таку формулу для розрахунку часу латентного періоду реакції τ_* :

$$\tau_* = T \ln(1+p) \quad (5)$$

До структури цієї формули, крім постійної процесу T , входить також критерій чутливості пам'яті p . У результаті

вона абсолютно точно співпадає з відомими експериментальними даними, зокрема є окремим випадком відомої формули Хіка для t_* . Якщо врахувати, що *критична частота мигтінь* (за якої переривчастий стимул стає невіддільним від безперервного) $f^* = 1/\tau_*$, то з урахуванням залежності T і φ від яскравості мигаючого світла з (5) виходить формула, що значно краще узгоджується з наявним експериментальним матеріалом, аніж очевидними емпіричними залежностями.

Адаптаційні процеси. Якщо зміну чутливості будь-якого аналізатора під час його адаптації інтерпретувати як згасання попередньо відбитого у пам'яті інформаційного сліду, то для опису процесу адаптації можна скористатися відомою формулою утримання інформації (3). Остання істотно розширює межі формалізації і прогнозування плинності процесів у всіх аналізаторах людини – зоровому, слуховому, тактильному, смаковому, нюховому. Її використання для всіх цих умов-випадків дало змогу відшукати численні значення T і φ , що дозволяють без проведення експериментів обчислювати траєкторії адаптаційних кривих. Слід зазначити ще один важливий результат досліджень: параметр $\bar{\varphi}$ у випадку темної адаптації кольороаномалів виявився залежним від *довжини хвилі світла*.

Формула обсягу пам'яті. Розв'язання рівняння (1) для випадку запам'ятовування інформації при одному її пред'явленні з негайним відтворенням дало змогу одержати формулу для обсягу короткочасної пам'яті (*закон Дж.А. Міллера*):

$$\varphi^* \cong \alpha / (1 - \bar{\varphi}), \quad \text{де } \alpha = 1.5 \div 3,$$

яка аналітично показала, що діапазон цього обсягу трохи більший: не $5 \div 9$, а $5 \div 10$.

Зв'язок між подразненням і відчуттям. Якщо відчуття визначати як інформацію, засвоєну пам'яттю людини J , а подразнення як інформацію, що надходить R , то модифіковане рівняння (1) становитиме в диференціальному вигляді *загальний психофізичний закон*, з якого окремими випадками є відомі залежності Г. Фехнера, С. Стівенса. Його головна особливість – наявність динамічного члена dJ/dt і члена, що враховує одночасне згасання інформації в період її надходження. Зв'язок між відносним відчуттям $\bar{J} = J/\varphi$ і подразненням $R = R/j$ можна отримати із розв'язку (1) у такому вигляді:

$$\bar{J} = (1+p)[1 - \exp(-pR)]/p \quad (6)$$

Розрахунки за цією формулою співпадають з відомими експериментальними даними щодо різних подразників – тиску, тепла, вібрації, холоду, ваги, яскравості, звуку, шуму, довжини, шорсткості, твердості та ін.

Теорія болю. Больові відчуття принципово відрізняються від інших відомих відчуттів, за яких надходження інформації відбувається паралельно із процесом забування деякої її певної частини. Якщо виходити з припущення, що відчуття у період болісного подразнення складається з темпу його подачі \dot{R} і члена J/T , що згодом посилює біль, то вихідне рівняння буде аналогічне рівнянню (1), у якому прийнято $\varphi=0$ й останній член має знак (+). У цьому разі розв'язок даного рівняння пов'язуватиме відчуття болю $J = J/\varphi$ і подразнення від болю $R = R/\varphi$:

$$J = (\exp(-pR) - 1)/p \quad (7)$$

Розрахунки за (7) співпадають із відомими експериментальними даними. Аналіз залежностей (6) і (7) дає змогу пояснити відомий з літератури феномен “*подовження*” та “*ущільнення*” часу як стимулу: з (6) випливає, що при визначених значеннях критерію p зростання подразнення не приводить до відповідного

збільшення відчуття, а з (7) одержуємо зворотний висновок: із незначним збільшенням болісних подразників відчуття болю різко зростає за експонентою.

Чутливість оператора. Очевидно, що коли маємо темп надходження інформації \dot{R} , то за прихований час прийому і переробки інформації τ , у пам'ять людини потрапляє її кількість $\dot{R}\tau$, що й встановлює диференціальний поріг відчуття:

$$\Delta R_0 = \dot{R}T \ln(1+p) \quad (8)$$

Тут основними параметрами, що визначають ΔR_0 , є: темп надходження подразника \dot{R} , нижній поріг засвоєної інформації j і постійна часу T . З огляду на те, що широко відома з практики константа Вебера $k = \Delta R/R$, то за допомогою (8) неважко знайти її аналітичний вираз як для верхнього k_L , так і нижнього порога k чутливості:

$$k_L = [1+(1+p)/\ln(1+p)]^{-1}$$

$$k = [1+p/\ln(1+p)]^{-1} \quad (9)$$

Розрахунки за цими залежностями підтверджуються численними експериментами. Для відомих сенсорних систем людини були встановлені значення параметрів p , T і \dot{R} , що дозволяє використовувати аналітичні методи для прогнозування динаміки розвитку відповідних характеристик людини.

Моделювання процесу ймовірного прогнозування як основа вибору "одиниці відчуття". Якщо людина приймає рішення за умов появи декількох сигналів, то формули (2) і (5) визначають зв'язок між часом реакції вибору

$$\tau_\delta = \tau_\delta / \tau_* \quad \text{й імовірністю їхньої появи } W: \\ \tau_\delta = 1 + \ln[1+p(1/W-1)]/\ln(1+p) \quad (10)$$

Порівняння розрахунків за цією формулою з дослідними даними А.Н. Лебедева-Б.Г. Бовіна дозволили поєднати граничну величину φ з частотою а-ритму мозку f , що може бути визначена для

кожної людини за допомогою електроенцефалограми потиличної частини голови людини:

$$\varphi = 5\dot{R}(Te - \alpha\theta), \quad (Te = 0,32 \text{ сек}; \\ \theta = 0,0175 \text{ сек}^2) \quad (11)$$

Формули (6) і (7) показують, що φ є нормативним параметром для відчуттів і подразнень, тобто ця величина *ідентична елементарній одиниці їхнього виміру*. Обґрунтування можливості її визначення за (11) певною мірою розв'язує питання шкалювання відчуттів, подразнення. Цікава особливість полягає тут у тім, що такий підхід пов'язаний з вибором *індивідуальної одиниці виміру*, хоча відносно всі отримані нами залежності придатні для усіх випадків.

Моделювання почуттів людини. Розвиток почуттів людини можна формалізувати й описати за допомогою деяких вище наведених співвідношень. Так, процес розвитку *почуття любові* можна подати як утворення різниці між інформацією про ідеал людини протилежної статі Q' , сформованої у пам'яті людини вихованням, літературою, на решті генетично, і позитивної U та негативної E інформації, що надходить до пам'яті, про конкретну людину (з урахуванням домислів і суб'єктивних вражень Z). Якщо ввести до розгляду *коефіцієнт любові* L як зворотну величину зазначеної інформаційної різниці

$$L = 1 / (Q' - U - Z + E),$$

а потім скористатися формулами (2) і (3) для вимірювання накопиченої у пам'яті інформації та її втрачання, то можна одержати формулу для розрахунку L . Після нормування введених параметрів ця формула залежатиме від безрозмірних величин, що вказують на ступінь як позитивного потенціалу людини (її близькість до ідеалу), так і негативного, що можна визначити методом тестування, а також від поточного моменту-часу. Досить громіздкі формули вод-

ночас дозволяють отримати цікаві цифри для L та порівняти їх з експериментальними (статистичними) даними. Якщо припустити, що мінімум коефіцієнта любові відповідає максимуму розлучень, то можна кількісно визначити найбільш небезпечні з погляду стійкості родини часові точки. Відповідні розрахунки й аналіз статданих щодо розлучень показали їхні близькі значення: перша, небезпечна точка для розірвання шлюбу відповідає 1 року після весілля, друга – через 3,5 роки. Максимальна кількість розлучень і за розрахунками, і за статистикою припадає на 8,7 років. Надалі “небезпечні” точки з’являються з тим же періодом – у 3,5 роки (нещодавно професор Елен Фішер з американського університету Rutgers знайшла явище зміни хімічного складу крові, що впливає на сексуальність у жінок з періодом 3 роки, а чоловіків – 4, що підтверджує і пояснює отриману нами цифру). У такий спосіб досить абстрактна й формальна модель такого складного почуття як любов дає змогу одержувати цікаві прикладні результати.

Аналогічний підхід можна використувати для отримання *формули страху*. Якщо коефіцієнт страху F інтерпретувати як величину зворотну різниці інформації між деяким “стандартом” закладеної у пам’ять безпеки Q та інформації, що реально надійшла U й уявляється Z , то можна методами математики проаналізувати поведінку будь-якої людини в ситуації загрози її існуванню.

В авіації широко використовуються криві навчіння пілотів щодо точності виконання вправ в обставинах різних емоційних впливів, зумовлених наявністю небезпечних ситуацій у повітряній стихії. У цьому випадку критерій $\bar{\tau}_1$ (або постійна часу T) є кількісною *мірою страху*.

Моделювання діяльності людини-оператора. Узагальнення окреслених підходів на умови діяльності людини як оператора сучасних систем дає змогу

скласти відповідну математичну модель, й одержати передавальну функцію та досліджувати його поведінку в системі “людина – машина” добре відомими з техніки методами теорії автоматичного регулювання. Наші розрахунки, наприклад, частотних характеристик одного з космонавтів (як оператора космічного корабля) добре узгоджуються з експериментальними даними. У цьому зв’язку несподівані можливості відкрилися у моделюванні та прогнозуванні поведінки пілотів і космонавтів в обставинах дії гравітаційних полів, відмінних від земного. Обробка експериментального матеріалу виявила істотний вплив переважань і невагомості на ключові параметри презентованої нами теорії – φ, T і τ_* .

Висновок. Подані результати наочно демонструють широкі перспективи математичного моделювання різних психологічних процесів – від процесу навчання до емоційних станів людини. Вони також можуть бути основою моделювання інших цікавих явищ, зокрема прогнозування поведінки особи в різних ситуаціях, особливо тоді, коли не має змоги використовувати інші методи дослідження (наприклад, тестування).

1. *Прісняков В.Ф., Пріснякова Л.М.* Математичне моделювання передачі інформації оператором людино-машинних систем. – М.: Машинобудування, 1990. – 250 с.

2. *Прісняков В.Ф., Пріснякова Л.М.* Нестационарні психологічні процеси. – Дніпропетровськ: Вид-во ДДУ, 1994. – 192 с.

3. *Прісняков В.Ф., Пріснякова Л.М.* Час, інформація, ентропія у фізиці, психології, економіці. – Дніпропетровськ, 1998. – 206 с.

4. *Prisniakova L.*, Modeling of the Perception of Time under Specificity Emotional Circumstances.- Proceeding of 50th Intern. Astron. Congress, the Netherlands, 1999. Rap. IAF/IAA-99-G.3.10.

5. *Prisniakov V., F., Prisniakova L., M.*, Mathematical Modeling of Fear Experience by Airspace Ship Pilots. – Proceeding. of 45th Intern. Astron. Congress, Jerusalem, 1994. Rap. 94-G.3.150.

Надійшла до редакції 14.09.2002.