Микола ШИНКАРИК, Степан ПОПІНА

ОПТИМІЗАЦІЯ ПРИБУТКУ З ВИКОРИСТАННЯМ СТЕПЕНЕВОЇ ВИРОБНИЧОЇ ФУНКЦІЇ

Із умови максимуму прибутку одержано формули для оптимальних величин ресурсів. Використана математична модель виробничої функції у виді степеневої залежності з довільним числом ресурсів. Розглянуто застосування одержаних результатів для поліграфічних підприємств.

Ключові слова: *прибуток, виробнича функція, ресурси, достатні умови максимуму.*

Прибуток – це важливий узагальнюючий показник оцінки ефективності роботи кожного суб'єкта господарювання, оскільки в прибутку акумулюються резерви всіх складових елементів діяльності підприємства:

– виробництво і реалізація;
– якість і асортимент;
– ефективність використання виробничих ресурсів;
– собівартість продукції.

Прибуток характеризує ефективність господарювання підприємства за основними напрямками діяльності: виробничим, збутовим, постачальницьким, інвестиційним, фінансовим. Прибуток є основою розвитку підприємства і зміцнює його фінансовий стан та фінансові відносини з партнерами.

Прибуток – це одне з основних джерел фінансування приросту оборотного капіталу, стимулювання працівників, формулювання доходної бази державного та місцевих бюджетів. Тому дослідження прибутку, зокрема його математичних аспектів, є *актуальним завданням.*

Теоретичні та методичні дослідження прибутку здійснені *в працях українських* та *зарубіжних економістів*: М. С. Абрютіної, А. У.Альбекова, М. Д. Білик, І. О. Бланка, Л. О. Лігоненко, А. А. Мазоракі, А. М., А. М. Поддєрьогіна, Л. М. Шаблистої та інших.

Метою статті є одержання формул для оптимальних значень ресурсів із умови максимуму прибутку.

Прибуток будемо розуміти як різницю між виручкою та витратами ресурсів [1, 457]. Узагальнюючи результати [2, 15] на випадок n ресурсів, одержимо для прибутку такий вираз:

$$Z = p_0 Y - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \qquad (1)$$

Тут Y – обсяг виробництва продукції, p_0 – її ціна, p_i, x_i – відповідно ціна та витрати і-того ресурсу.

Для виробничої функції y вибрана степенева залежність, яка найчастіше серед нелінійних моделей використовується в економічних дослідженнях

$$y = A x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} \qquad (2)$$

Досліджуємо функцію Z на екстремум. Прирівнявши до нуля часткові похідні першого порядку функції Z відносно усіх змінних $x_i (i = \overline{1;n})$, одержимо таку систему рівнянь

$$\left.\begin{array}{l} P_0 A\alpha_1 x_1^{\alpha_1 - 1} \cdot x_2^{\alpha_2} ... x_n^{\alpha_n} - p_1 = 0 \\ P_0 A\alpha_2 x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2 - 1} ... x_n^{\alpha_n} - p_2 = 0 \\ .... \\ P_0 A\alpha_n x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} ... x_n^{\alpha_n - 1} - p_n = 0 \end{array}\right\} \tag{3}$$

Ділимо перше рівняння на кожне наступне. В результаті матимемо

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 x_2 p_2 = \alpha_1 x_1 p_1 \\ \alpha_1 x_3 p_3 = \alpha_3 x_1 p_1 \\ .... \\ \alpha_1 x_n p_n = \alpha_n x_1 p_1 \end{array}\right\} \tag{4}$$

Звідси одержимо вирази для усіх невідомих через x_1.

$$x_2 = \frac{p_1\alpha_2}{p_2\alpha_1} x_1, \; x_3 = \frac{p_1\alpha_3}{p_3\alpha_1} x_1, \; ..., \; x_n = \frac{p_1\alpha_n}{p_n\alpha_1} x_1 \tag{5}$$

Підставляємо вирази (5) у перше рівняння системи (3). Одержимо:

$$p_0 A\alpha_1 x_1^{\alpha_1 - 1} \cdot \left(\frac{p_1\alpha_2}{p_2\alpha_1}\right)^{\alpha_2} \cdot x_1^{\alpha_2} \cdot ... \cdot \left(\frac{p_1\alpha_n}{p_n\alpha_1}\right)^{\alpha_n} \cdot x_1^{\alpha_n} = p_1.$$

Або

$$x_1^{\alpha_1 + \alpha_2 + .. + \alpha_n - 1} \cdot p_0 A\alpha_1 \cdot \left(\frac{p_1\alpha_2}{p_2\alpha_1}\right)^{\alpha_2} ... \left(\frac{p_1\alpha_n}{p_n\alpha_1}\right)^{\alpha_n} = p_1 \tag{6}$$

Використаємо позначення

$$B = p_0 A\alpha_1 \left(\frac{\alpha_2}{p_2\alpha_1}\right)^{\alpha_2} ... \left(\frac{\alpha_n}{p_n\alpha_1}\right)^{\alpha_n}, \quad \alpha_0 = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n - 1. \tag{7}$$

Вираз (6) матиме вигляд

$$B \cdot x_1^{\alpha_0} = p_1^{-\alpha_0}.$$

Звідси

$$x_1 = \frac{1}{p_1} \cdot B^{-\frac{1}{\alpha_0}}. \tag{8}$$

Формули (8), (5) визначають оптимальні значення ресурсів.

В результаті перевірки достатніх умов максимуму Z як функції декількох змінних одержимо:

$$\begin{cases} \alpha_1(1-\alpha_1) > 0 \\ \alpha_1\alpha_2(1-\alpha_1-\alpha_2) > 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n \cdot (1-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i) > 0 \end{cases} \quad (9)$$

Виконання цих умов забезпечує максимальне значення прибутку Z.

Приклад. В роботі [3,154] для поліграфічних підприємств одержана така виробнича функція

$$Y = 0{,}999 \cdot P^{0{,}753} \cdot L^{0{,}123},$$

де Y – обсяг випуску продукції в умовно-натуральних величинах, P – виробнича потужність підприємства в умовно-натуральних одиницях, L – чисельність працівників в еквіваленті повної занятості.

Тоді значення параметрів такі:

$$A = 0{,}999; \quad \alpha_1 = 0{,}753; \quad \alpha_2 = 0{,}123.$$

На основі формул (7) обчислюємо величини $B, \alpha_0, P, L, Z_{\max}$. При цьому вибираємо $p_0 = 1; \quad p_1 = 0{,}05; \quad p_2 = 0{,}01$. Одержимо:

$$B = 1{,}06, \quad \alpha_0 = -0{,}124, \quad x_1 = P = 32, \quad x_2 = L = 26{,}14, \quad Z_{\max} = 18{,}37.$$

У роботі одержані співвідношення для оптимальних значень ресурсів, які визначені із умови найбільшого прибутку. В *наступних дослідженнях* розглядатимуться математичні моделі виробничих функцій, які відмінні від степеневої.

Література

1. *Гетьман О. О., Шаповал В. М. Економіка підприємств: Навчальний посібник. – Київ: Центр видавничої літератури, 2006. – 488 с.*
2. *Шелобаев С. И. Математические методы и модели в экономике, финансах, бизнесе: Учебное пособие для вузов. – Москва: ЮНИТИ-ДАНА, 2001. – 367 с.*
3. *Кваско А. В. Оцінка і використання виробничих функцій на поліграфічних підприємствах // Актуальні проблеми економіки. – 2007. – № 7. – С. 150–157.*
4. *Білик М. Д. Економічна сутність прибутку в умовах трансформації економіки / / Формування ринкових відносин в Україні. – 2007. № 11. – С. 130–136.*
5. *Бланк И. А. Управление прибылью. – Киев: НИКА – Центр, 2007. – 768 с.*
6. *Зінченко О. А. Показники і критерії якості прибутку підприємства на етапі його використання // Актуальні проблеми економіки. – 2009. – № 7. – С. 106–111.*

Редакція отримала матеріал 26 січня 2010 р.