

Міністерство освіти і науки України
Тернопільський національний економічний університет
Факультет комп'ютерних інформаційних технологій
Кафедра спеціалізованих комп'ютерних систем

ОПОРНИЙ КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

з дисципліни

“ТЕОРІЯ АВТОМАТИЧНОГО УПРАВЛІННЯ”

для студентів освітньо-кваліфікаційного рівня «бакалавр»
напряму підготовки 6050201 – «Системна інженерія»

ТЕРНОПІЛЬ

Опорний конспект лекцій з дисципліни **“Теорія автоматичного управління”** для студентів ОКР «бакалавр», 6050201 – «Системна інженерія» / Укл.: Николайчук Я.М., Возна Н.Я.– Тернопіль: **Гал-друк**, 2015. – 59 с.

Методичні рекомендації до виконання лабораторних робіт складаються з частин, що рекомендовані програмою на основі галузевого стандарту вищої освіти України з напрямку підготовки 6050201 – «Системна інженерія»

Укладачі: Николайчук Ярослав Миколайович д.т.н., професор
Возна Наталія Ярославівна к.т.н., доцент

Рецензенти: Сабадаш І.О. к.т.н., директор інституту мікропроцесорних систем керування об’єктами електроенергетики

Франко Ю. П. к.т.н., доцент кафедри комп’ютерних технологій Тернопільського національного педагогічного університету

Затверджено на засіданні кафедри спеціалізованих комп’ютерних систем протокол №2 від 17.09.2015.

Розглянуто та схвалено науково-методичною комісією з системної інженерії протокол №2 від 17.09.2015.

Розглянуто та схвалено науково-методичною радою факультету комп’ютерних інформаційних технологій, протокол №1 від 29.09.2015 р.

ЗМІСТ

Вступ.....	4
Лекцій 1. Види збурень та класифікація автоматичних систем керування	5
Лекція 2. Класифікація принципів автоматичного управління та функціональних схем САУ	9
Лекція 3. Представлення функціональної структури сау операторами на основі перетворення Лапласа	14
Лекція 4. Передавальні функції типових ланок САУ	22
Лекція 5. Логарифмічні частотні характеристики типових ланок САУ	27
Лекція 6. Перехідні характеристики реальних ОУ	30
Лекція 7. Передавальні функції оу та типи регуляторів САУ	34
Лекція 8. Критерії стійкості САУ	38
Лекція 9. Покращення якості регулювання. Коректуючі ланки	44
Лекція 10. Лінійні САУ з запізненням	48
Лекція 11. Нелінійні САУ	50
Лекція 12 Критерії оптимальності та якості САУ.....	55
Список використаних джерел.....	58

ВСТУП

На сучасному етапі інвестиційного й інноваційного розвитку економіки України автоматичні системи керування (АСК) є важливою та невід'ємною частиною всіх галузей матеріального виробництва. Вони широко застосовуються у промисловості, електроенергетиці, транспорті, зв'язку, сільському господарстві, побуті тощо.

Основна мета опорного конспекту лекцій - надання допомоги студентам усіх форм навчання під час вивчення дисципліни "Теорія автоматичного керування". Даний конспект орієнтований на студентів, що навчаються за базовим напрямом 6.050201 "Системна інженерія".

Метою дисципліни "Теорія автоматичного керування" є вивчення загальних принципів будови автоматичних систем керування промисловими й електроенергетичними об'єктами та інженерними методами аналізу й синтезу таких систем. Принципи будови та дослідження АСК у цій дисципліні вивчаються на підставі розгляду принципів керування розмаїттям технічних об'єктів. Ці принципи керування мають істотно ширший загальний зміст, і можуть застосовуватися під час вивчення процесів керування в інших кібернетичних системах, наприклад, біологічних, економічних, соціальних тощо. Кібернетика — наука про загальні закономірності процесів керування — ґрунтується на вивченні керованих об'єктів під час зовнішніх впливів, отриманні інформації про перебіг процесів у цих об'єктах і формуванні керівних діянь, що забезпечують оптимальний, у визначеному сенсі, стан керованих об'єктів.

Керованими об'єктами можуть бути: живі організми (тварини, рослини), колективи людей, виробничі підприємства, цехи, окремі агрегати, машини їхні комплекси чи системи. Залежно від виконуваних функцій керованим об'єктом завдання АСК можуть бути різними - від найпростіших автоматичних регуляторів, які підтримують сталість довільної фізичної величини (наприклад, напруги, температури, тиску, швидкості тощо) до складних кібернетичних систем із десятків комп'ютерів, які розв'язують завдання оптимального керування множиною об'єктів.

Останнім часом ставляться високі вимоги щодо точності та стійкості АСК. У конспекті цим питанням надається достатньої уваги. Стисло викладаються питання коригування й синтезу лінійних ланок АСК.

Реальні АСК є нелінійними. Розглядаються інженерні методи аналізу АСК із урахуванням нелінійності характеристик їхніх ланок. Викладені теоретичні засади аналізу стійкості автоколивань методом гармонійної лінеаризації та критерій абсолютної стійкості.

Даний конспект допоможе студентам із системної інженерії відповісти на питання стосовно основних питань й означень класичної теорії автоматичного керування, принципів побудови автоматичних систем керування технічними об'єктами.

Лекція 1

ВИДИ ЗБУРЕНЬ ТА КЛАСИФІКАЦІЯ АВТОМАТИЧНИХ СИСТЕМ КЕРУВАННЯ

Управління САУ на основі контролю відхилень станів ОУ від норми ґрунтується на основі розрахунку характеристик ЛСІМ. При цьому можуть реєструватись відхилення по амплітуді (ЛСІМ-1), динаміці (ЛСІМ-2), фазі (ЛСІМ-3), спектру (ЛСІМ-4) або їх модифікації.

Функція ЛСІМ-1 полягає в тому, що коли стан ОУ знаходиться в межах апертури ε_x , то об'єкт є в стані норми. При цьому контролер ЛСІМ-1 формує символи "0" і інформація не передається в центральний процесор. Якщо стан об'єкта виходить за межі апертури, то об'єкт в стані "не норма" і контролер ЛСІМ-1 генерує символи "1", які передаються в центральний процесор і ініціюють переривання його програм, що діагностують стан об'єкта.

ЛСІМ-2. При зміні динаміки "норми" та "не норми" станів ОУ на основі обчислення структурної автокореляційної функції (АКФ)

$$C_{xx}(j) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i+j})^2; \quad j \in 0, m, \text{ де } n - \text{об'єм вибірки масиву даних, } m -$$

число точок структурної АКФ. У випадку, коли динаміка станів ОУ відповідає нормі, контролер ЛСІМ-2 формує сигнали "0", а у стані "не норма" формує сигнал "1".

Контроль відхилення станів ОУ по фазі (на основі ЛСІМ-3) відбувається на основі розрахунку нормованого коефіцієнта взаємкореляції між двома процесами: $x(t)$ - стани ОУ, $y(t)$ - зразковий процес. При цьому, якщо стани ОУ змінюються пропорційно взірцевому процесу, то $\rho_{xy}(0) > 0$, а якщо стани об'єкта по фазі відхиляються від норми, то цей коефіцієнт $\rho_{xy}(0) < 0$.

Аналогічно відбувається контроль відхилень станів ОУ від норми по спектру (на основі розрахунку зміни спектральної густини $S_w = \hat{W}^{-1} \hat{W}^{-1}$), де W - ортогональні функції різних ТЧБ: Радемахера, Хаара, Крестенсона, Уолша та Галуа.

ЛСІМ-5. Якщо ОУ є багато параметричним об'єктом, то контроль відхилень його станів від норми виконується на основі розрахунку глобальної дисперсії, яка обчислюється на основі інформаційної частини матриці нормованих коефіцієнтів взаємкореляції між різними параметрами ОУ.

Таким чином в сучасних САУ регулювання відхилень станів ОУ від норми на основі мікропроцесорних засобів та контролерів, які реалізують різні закони регулювання виконуються не тільки на основі відхилень по амплітуді, але й по динаміці, фазі, спектру, глобальної дисперсії та інш.

Класифікація систем автоматизованого управління (САУ):

1) Класифікація САУ за принципом управління (рис. 6)

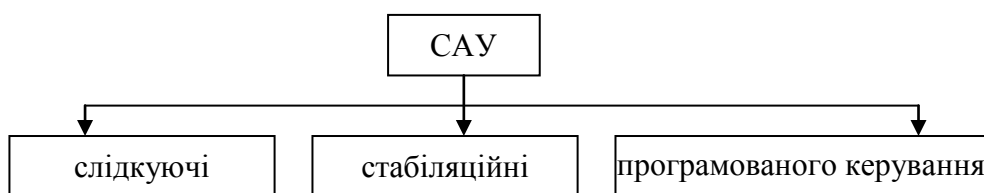


Рис. 6 Класи САУ за принципом управління.

2) Класифікація за структурою

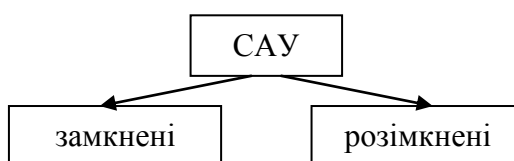


Рис. 7 Класи САУ за структурою.

3) Класифікація за кількістю контурів управління

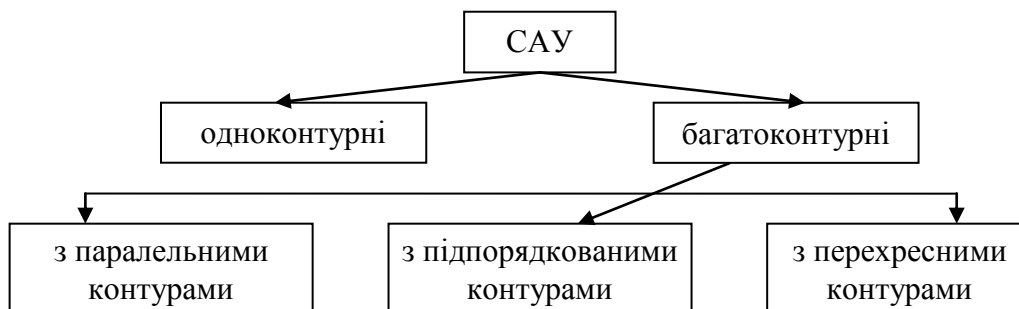


Рис. 8 Класи САУ за кількістю контурів керування.

4) Класифікація за властивістю керування в усталеному режимі

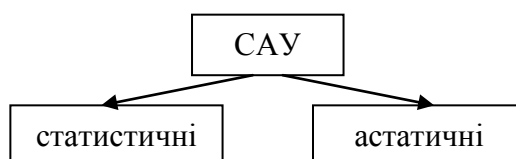


Рис. 9 класи САУ за властивістю керування в усталеному режимі.

5) САУ за принципом керування



Рис. 10 Класи САУ.

6) САУ за характером сигналів у часі

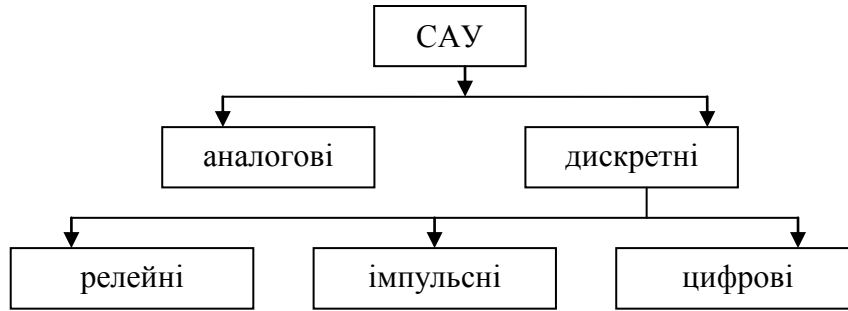


Рис. 11 Класи САУ за характером сигналів у часі.

7) Класифікація САУ за властивістю параметрів регулювання

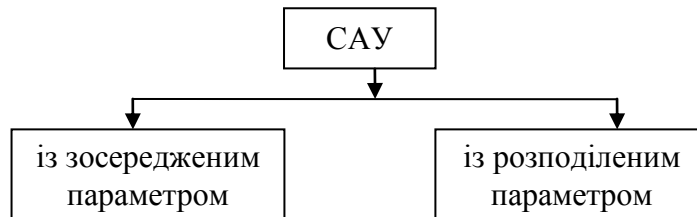


Рис. 12 Класи САУ за властивістю параметрів регулювання

8) САУ кібернетичні (інтелектуальні)



Рис.13 САУ кібернетичні з само налаштуванням

9) САУ за фізичною реалізацією компонентів та сигналів

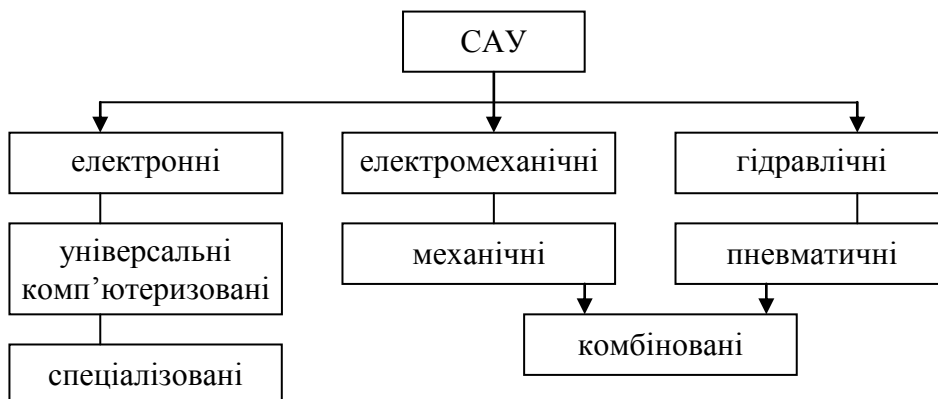


Рис. 14 САУ за фізичною реалізацією компонентів та сигналів

Лекція 2.

КЛАСИФІКАЦІЯ ПРИНЦИПІВ АВТОМАТИЧНОГО УПРАВЛІННЯ ТА ФУНКЦІОНАЛЬНИХ СХЕМ САУ

Різні будови САУ ґрунтуються на наступних принципах автоматичного управління за:

- 1) відхиленням від установки або апертури;
- 2) збурення (компенсуванням збурень);
- 3) комбінованим регулюванням;
- 4) адаптивним (самонастроювальним регулюванням).

1. Принцип управління та регулювання за відхиленням.

Цей принцип виконується згідно двох критеріїв:

а) мінімального середньоквадратичного відхилення (рис.1):

$$x(t) = const; \delta_y = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \mu_y)^2} = \min, \text{ де}$$

$\mu_y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$ - математичне сподівання керованої функції, тобто

$$x(t) = \mu_y + \delta_y.$$

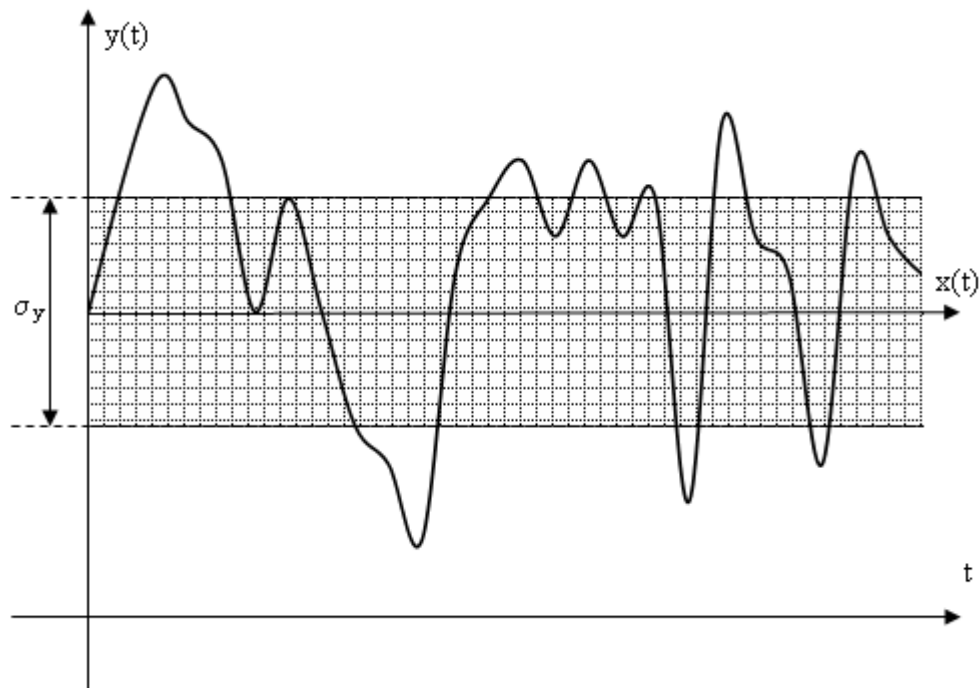


Рис.1. Функція регулювання за принципом $\delta_y = \min$.

Згідно рис.1 умова норми технологічних сигналів ОУ відповідає виразу:

$$y(t) = \begin{cases} \text{"норма"} \delta_y < \lambda_0 \\ \text{"ненорма"} \delta_y \geq \lambda_0 \end{cases}, \text{ де } \lambda_0 - \text{обмежуюча уставка } \delta_y.$$

б) інтервальний критерій принципу керування за відхиленням базується на теорії інтервалів, що передбачає будь – яке значення вихідної функції ОУ з будь – яким законом розподілу у строгих межах апертури ε_0 . Тобто $\int y(t)$ ніколи не повинна виходити за межі цього обмеження (рис.2) згідно виразу:

$$y(t) = \begin{cases} \text{"норма"} \in \varepsilon_0 \\ \text{"ненорма"} y(t) \notin \varepsilon_0 \end{cases}$$

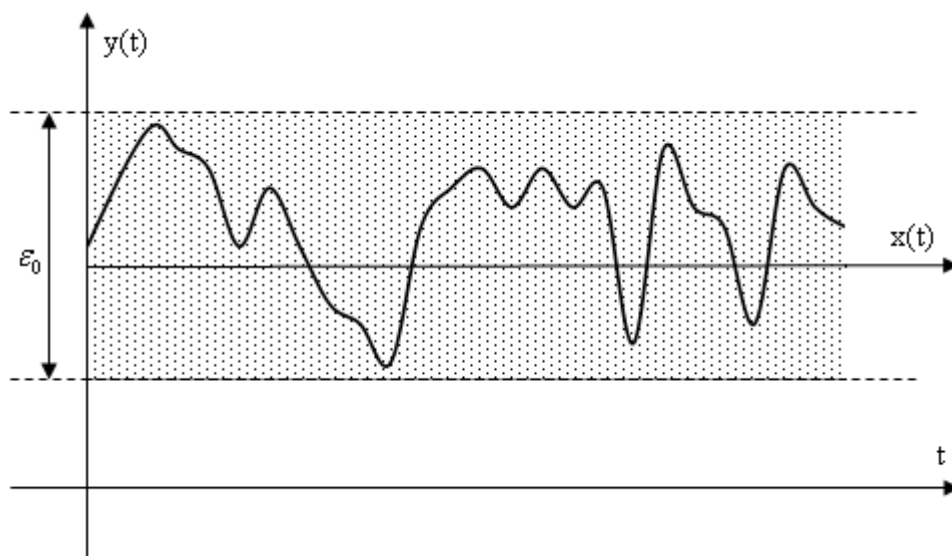


Рис.2 Функція регулювання за відхиленням згідно інтервального принципу.

Принцип управління де відхиленням реалізують замкнуті структури САУ із зворотнім зв'язком (рис.3)

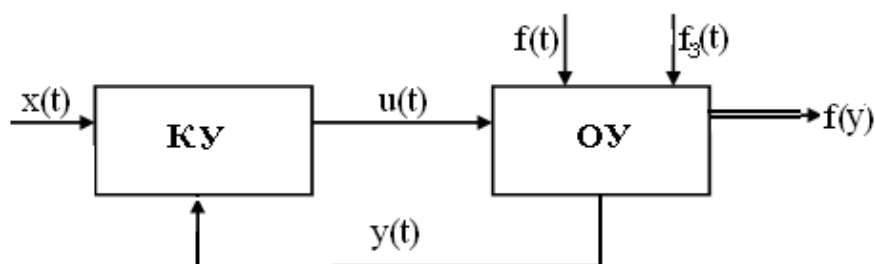


Рис.3. Функціональна система САУ.

Така структура САУ складається з двох функціонально пов'язаних компонентів:

- а. керованого об'єкта управління (ОУ);
- б. контролера управління (КУ), який виконує функції регулятора.

t -функція часу; $x(t)$ – функція управління (уставка або апертура); $u(t)$ -керуюча функція; $f(t)$ та $f(y)$ – вхідна та вихідна функції ОУ; $f_3(t)$ – функція вхідного випадкового збурення; $y(t)$ – інформаційна функція контролю відхилення стану ОУ, за якою виконується регулювання.

Математичне описання «норми» стану ОУ полягає в отриманні рівнянь станів КУ, які функціонально зв'язують функцію керування $u(t)$ з усіма іншими функціями впливу та реакції ОУ; $x(t)$, $f(t)$, $f(y)$, $y(t)$.

Контролер автоматичного управління складається з АЦП (виконує перетворення аналогових сигналів у цифрові), спецпроцесора SP (виконує функції порівняння заданого стану "норми" ОУ ($x(t)$) з реальним $y(t)$ та реалізує закон регулювання), ЦАП (перетворює цифрові дані в аналогові), підсилювача ПС, інтерфейсного виконавчого механізму ІВМ (виконує управління об'єктом), сенсора S (перетворює регульований параметр ОУ в електричний сигнал) (рис.4).

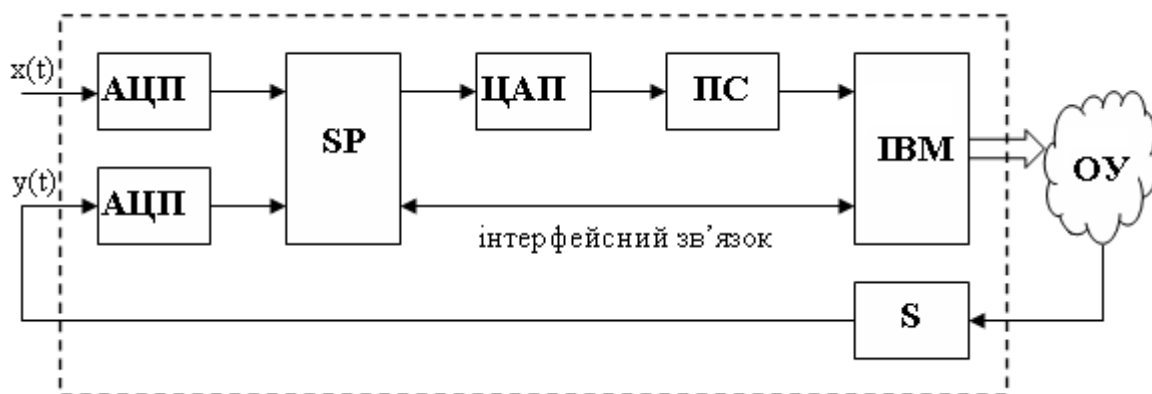


Рис. 4. Структура контролера управління (автоматичного регулятора).

На рис.5 показана функціональна схема САУ згідно принципу керування за відхиленням.

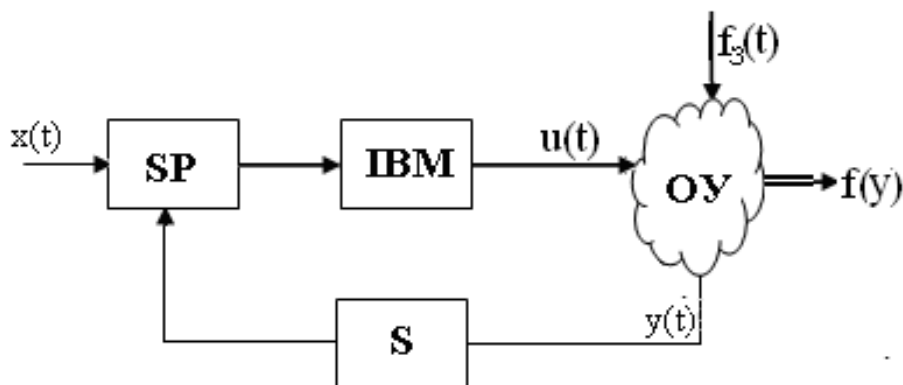


Рис.5. Функціональна схема САУ згідно принципу керування за відхиленням.

Особливістю такої САУ є наявність сенсора у зворотньому зв'язку функції станів ОУ $y(t)$ та спец процесора, який виконує управління об'єктом згідно заданої уставки $x(t)$.

Основною особливістю і перевагою САУ, які працюють згідно принципу керування за відхиленням є реагування на відхилення дійсного значення регульованої величини незалежно від причин, що привели до такого

відхилення. Тому точність керування є високою, особливо у динамічному режимі.

В той же час такі САУ потребують складніших методів розрахунку, дослідження та настроювання.

2. Принцип керування за збуренням

Принцип керування за збуренням полягає у тому, що керуюча функція $u(t)$ формується залежно від вимірювання збурення $f_3(t)$.

САУ з компенсуванням збурення не мають зворотного зв'язку і поділяються на два класи:

- автоматичні системи компенсування збурення (рис.6);
- автоматичні системи з програмним керуванням (рис.7).

На рис.6 показана функціональна схема САУ, яка реалізує принцип керування за збуренням шляхом шляхом компенсування збурення.

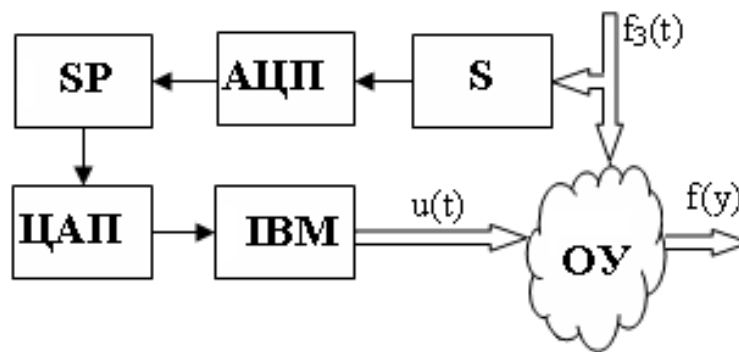


Рис.6 Функціональна схема САУ за збуренням.

Суть принципу керування за збуренням полягає у тому, що залежно від зміни збурення $f_3(t)$, контрольованого сенсором S на керований вхід ОУ подається керуюча дія $u(t)$, що компенсує дію збурення. У цих САУ відсутній автоматичний контроль вихідної функції ОУ $f(y)$.

Перевагою таких САУ є відносна простота та підвищена надійність. Основними недоліками є складність динамічного контролю збурень і менша точність регулювання.

Функціональна схема САУ з програмним керуванням показана на рис.6 (g_i - інтерфейс ний зв'язок).

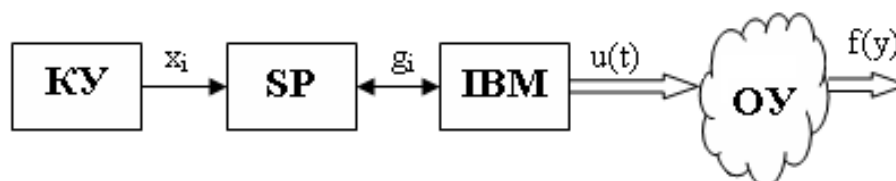


Рис.7. Функціональна схема САУ з програмним керуванням.

САУ з програмним керуванням мають розімкнену структуру і передбачають жорстке виконання ОУ певної послідовності команд та змін режимів роботи. Такими об'єктами є об'єкти з квазістаціонарними станами.

3. Принцип з комбінованим регулюванням.

Комбіновані САУ мають структуру показану на рис.8.

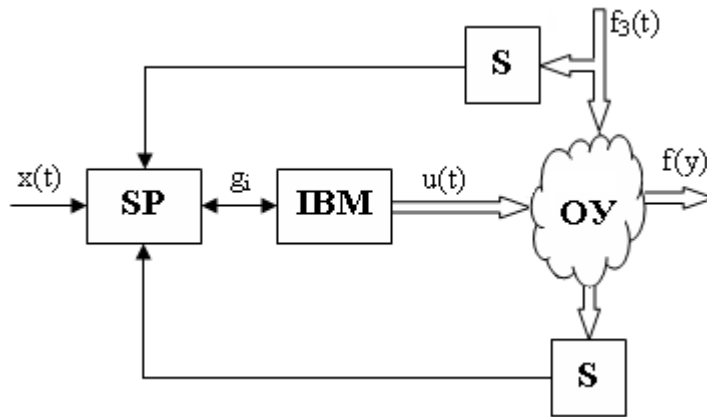


Рис.8 Структура САУ з комбінованими управлінням ОУ.

Особливістю такої структури є наявність двох сенсорів, які контролюють характер збурень та зміну станів ОУ. Сигнали сенсорів опрацьовуються спецпроцесором, згідно заданої уставки $x(t)$.

Перевагою таких систем є підвищення стійкості процесів регулювання. Недоліком є ускладнення алгоритмів роботи спецпроцесора.

4. Принцип з адаптивним самонастроюваним регулюванням.

До САУ з адаптивними принципами керування належать:

- екстремальні системи;
- системи з настроюванням керуючих ланок;
- самооптимізуючі.

Функціональна схема СНС показана на рис.9.

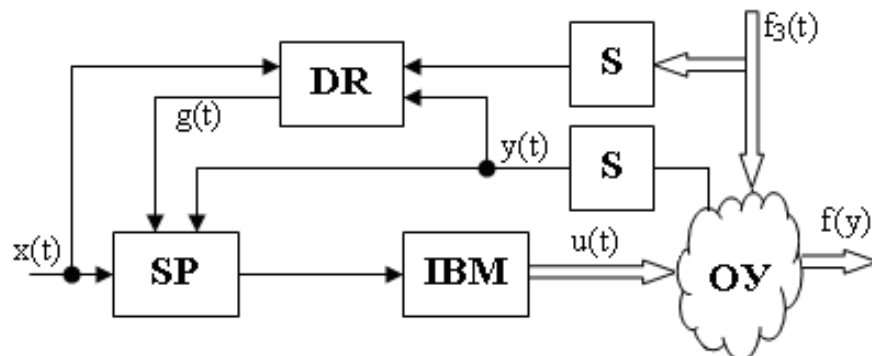


Рис 9. Функціональна схема САУ з самонастроюванням керуючих ланок.

Особливістю такої САУ є наявність додаткового регулятора (DR), який, у результаті опрацювання даних $x(t)$, $f_3(t)$ та $y(t)$ виконує оперативну корекцію (самонастроювання) та адаптацію характеристик системи регулювання, $g(t)$ – програмована функція установок. Прикладом є автопілот літака.

Недоліком таких систем є висока складність, а також менша динамічність внаслідок затримок при обчисленнях складних алгоритмів.

Лекція 3

ПРЕДСТАВЛЕННЯ ФУНКЦІОНАЛЬНОЇ СТРУКТУРИ САУ ОПЕРАТОРАМИ НА ОСНОВІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАПЛАСА

У загальному випадку реалізація розглянутих принципів керування може здійснюватися на основі функціональної схеми САУ з корегуючими пристроями, які покращують динамічні властивості систем регулювання, тобто реакцію на зміну динаміки зовнішніх впливів (згідно ЛСІМ-2). На рис.1 показана функціональна структура такої САУ.

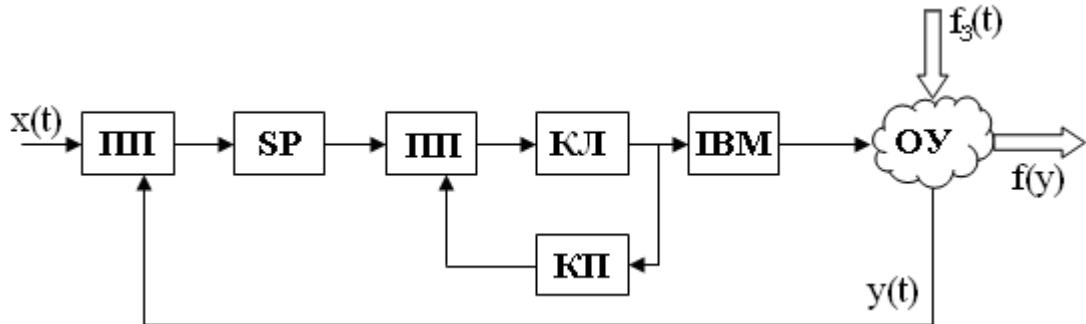


Рис.1. Структури САУ з послідовно та паралельно включеними корегуючими пристроями.

СП – спецпроцесор;

ПП – пристрій порівняння;

КЛ – коректуюча ланка;

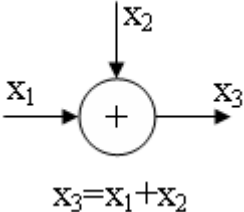
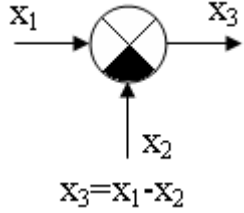
ІВМ – інтрфейсний виконавчий механізм.

Структурні схеми та графи САР

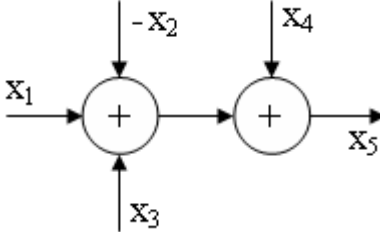
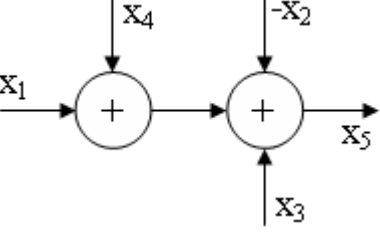


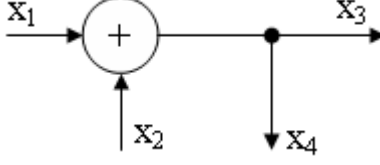
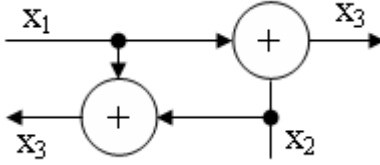
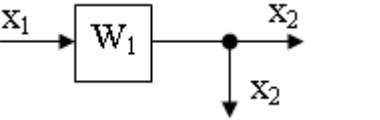

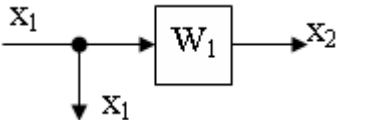
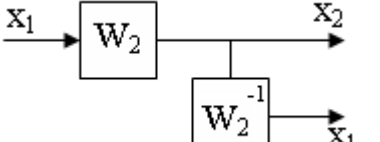
Структурна схема може бути побудована на основі відомих рівнянь ПДФ і наоборот.

Елементи (атрибути) структурних схем САР подані у таблиці 1.

Назва	Позначення
Ланка з одним входом	
Ланка з двома входами	
Розгалуження	

Суматор	 $x_3 = x_1 + x_2$
Порівняння	 $x_3 = x_1 - x_2$

Таблиця правил перетворення компонентів структурних і лінійних САР.

Операція	Початкова схема	Еквівалентна схема
Перестановка суматорів		
Перестановка ланок		
		
		
		

Для того, щоб представити компоненти САУ на основі математичних перетворень Лапласа необхідно представити кожен компонент функціональної схеми у вигляді передавальної функції окремої ланки.

Отже, відношення вихідного зображення по Лапласу ($Q(p)$) до вхідного зображення ($P(p)$) оригіналу функції $x(t)$ називається **передавальною функцією** (ПФ) окремої ланки САУ.

$$W(p) = \frac{Q(p)}{P(p)};$$

$Q(p)$ – вихідне зображення по Лапласу;

$P(p)$ - вхідне зображення оригіналу функції $x(t)$;

p – комплексна величина $p = c + j\omega$ (c - const, ω - частота, $j = \sqrt{-1}$)

Таким чином ПФ окремої ланки згідно перетворення Лапласа характеризує частотні властивості окремого компонента **АКС**

Оскільки ПФ $W(p)$ – комплексна величина, то вона має наступні атрибути (характеристики):

- 1) корені зображення $Q(p)$ – є нулями ПФ, а корені зображення $P(p)$ – є полюсами ПФ у комплексній площині;
- 2) $W(p) = W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega)$, тобто ПФ розкладається на суму двох частотних характеристик: дійсну $U(\omega)$ та уявну $V(\omega)$.

На рис.2. приведена функціональна структура САУ на основі операторів Лапласа $W(p)$, яка дозволяє формально (аналітично) розрахувати частотні характеристики САУ.

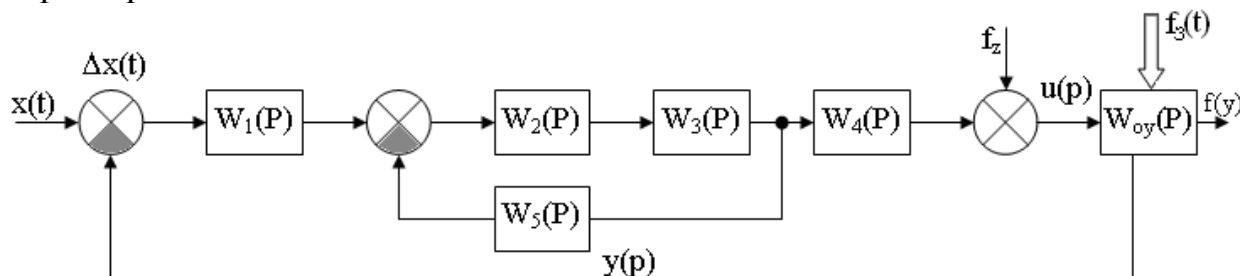


Рис.2. Формалізована по Лапласу функціональна структура САУ за відхиленням.



- порівняння та визначення різниці між двома функціями;



- додавання двох функцій;



- розгалуження.

У математиці та інформаційних технологіях спектрального аналізу, цифрового опрацювання сигналів, діагностуванні станів ОУ та розпізнаванні образів широко застосовується інтегральне та дискретне перетворення Фур'є.

В основу цих перетворень покладений інтеграл Фур'є:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt,$$

де $x(t)$ – часова функція – оригінал,

j – комплексна величина $j = \sqrt{-1}$;

ω – кругова частота у комплексній області;

T – період основної гармоніки $\omega = \frac{2\pi}{T}$;

$e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j \sin \omega t$ – ортогональна гармонічна функція;

$S(\omega)$ – зображення – гармонічний спектр функції $x(t)$ у діапазоні частот $\omega \in (-\infty, \infty)$.

Виходячи з теорії інтегралу Фур'є спектральні характеристики будь-якої періодичної функції можуть бути з необхідною точністю подані тригонометричним рядом Фур'є:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)],$$

Коефіцієнти:

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^{\infty} x(t) \cos(k\omega t) dt; \quad b_k = \frac{2}{T} \int_0^{\infty} x(t) \sin(k\omega t) dt \quad k \in \overline{1, \infty}.$$

Наприклад, сигнал має спектр у базисі ортогональних гармонічних функцій ряду Фур'є (рис.3).

$$x(t) = \begin{cases} 1, 0 \leq t \leq a \\ 0, t > a \end{cases} \quad (1)$$

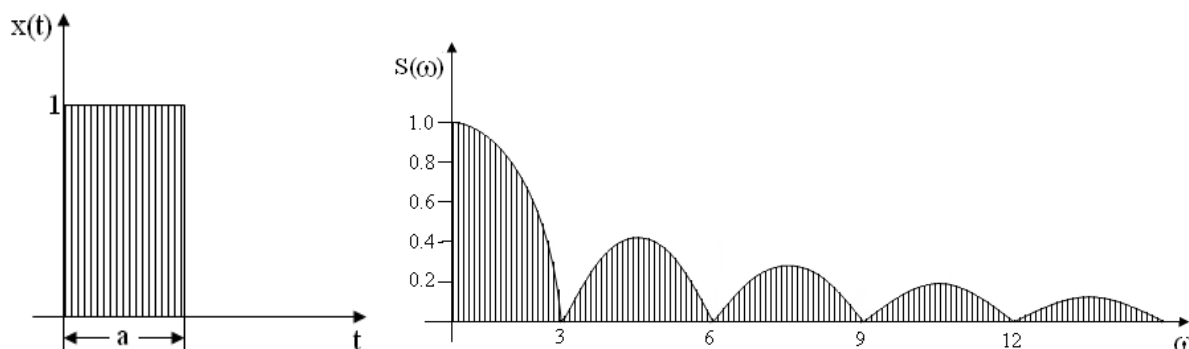


Рис.3. Зображення сигналу $x(t)$ у вигляді спектру базису Фур'є.

Зображення функції (1) згідно перетворення Фур'є описується аналітично.

$$S(\omega) = \begin{cases} \sin(x), x \neq 0 \\ 1, x = 0 \end{cases}$$

Оскільки сигнали, що фізично реалізуються, відповідають умові $x(t)=0$, $t < 0$, а це відповідає фізичним впливам збурень на ОУ, то для дослідження реакції ОУ на зовнішні збурення використовується математичний апарат

інтегрального перетворення французького математика Лапласа П'єр Симоне (1749-1827).

$$L(p) = W\{x(t)\} = \int_0^{\infty} x(t)e^{-pt} dt, \text{ де } p = c + j\omega; W\{x(t)\} - \text{ передавальна}$$

функція – зображення по Лапласу $W(p)$.

Різниця між інтегральними перетвореннями Фур'є та Лапласа полягає в тому, що у перетворенні Фур'є спектральні характеристики функції $x(t)$ аналізуються у реальному часі у діапазоні $-\infty; +\infty$, а у перетворенні Лапласа – у діапазоні $0; +\infty$.

Це дозволяє шляхом подачі на вхід окремої ланки функціональної схеми САУ взірцевого тестового сигналу у діапазоні $0; \tau$ дослідити частотні характеристики окремої ланки чи ОУ.

Таким чином, на основі інтегралу Лапласа розроблені математичні апарати:

1) дискретного перетворення Лапласа:

$$D(p) = \sum_{n=i}^{\infty} x_i e^{-pi}, \text{ де } x_i - \text{ цифрові відліки функції } x(t); i - \text{ дискретні значення часу } t.$$

2) Z-перетворення:

$$Z(p) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i z^{-i}; z = e^{-pi}, \text{ де } i - \text{ дискретна затримка у часі.}$$

Ці перетворення Лапласа широко використовуються у ТАУ та цифровій фільтрації сигналів.

Для математичного опису характеристик САУ на основі передавальних функцій Лапласа розраховані (згідно інтегралу Лапласа

$$L(p) = W\{x(t)\} = \int_0^{\infty} x(t)e^{-pt} dt) \text{ зображення по Лапласу для найбільш вживаних функцій.}$$

Модель структурного компонента САУ, яка має тільки один вхід і один вихід.

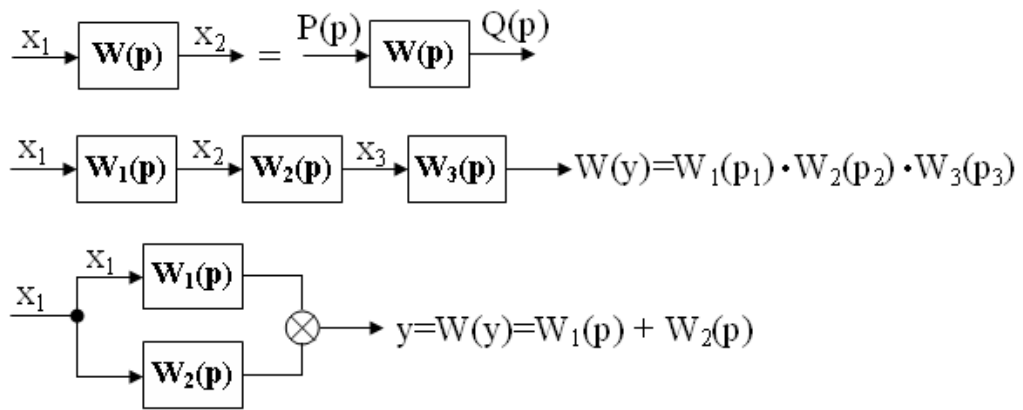
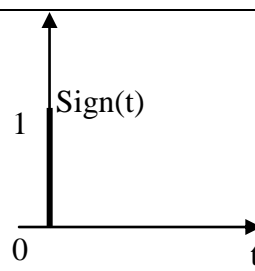
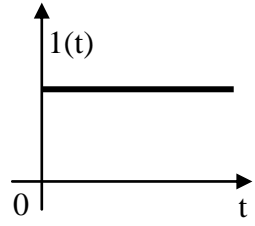
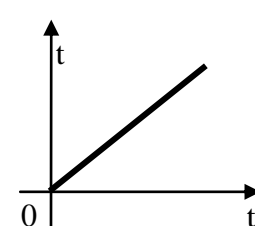
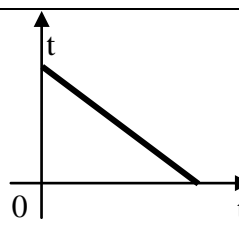


Рис.4. Елементи структур САУ на основі зображень по Лапласу окремих з'єднань ланки

Таблиця аналітично заданих функцій та їх зображень по Лапласу

Аналітична функція $x(t)$	Зображення	
	у часі	по Лапласу
$sign(t) = \begin{cases} 1, t = 0 \\ 0, t \neq 0 \end{cases}$		1
$1(t)$		$\frac{1}{p}$
t		$\frac{1}{p^2}$
$1(t) - 1(t - T)$		$\frac{1 - e^{-pT}}{p}$

$e^{-\lambda t}$, λ - коефіцієнт затухання		$\frac{1}{p + e^{-\lambda T}}$
$\sin \beta t$,		$\frac{\beta}{p^2 + \beta^2}$
$\cos \beta t$		$\frac{p}{p^2 + \beta^2}$

Зображення решітчатих функцій згідно Z – перетворень та Лапласа.
Таблиця 2.

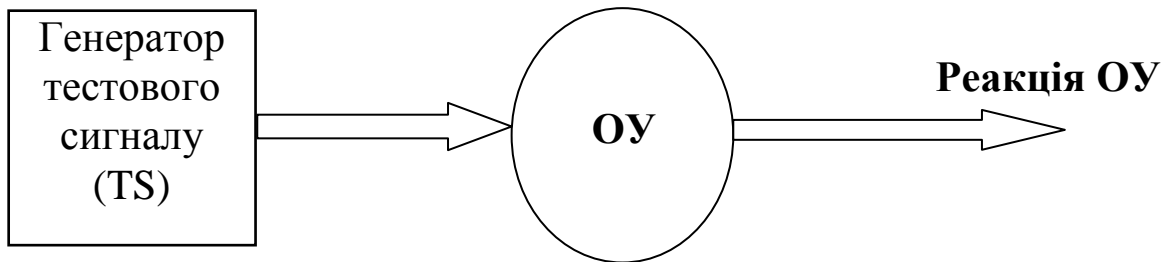
Аналітична Функція $f(t)=x_i$	Перетворення		
	Лапласа	Решітчатая функція	Z - перетворення
$sign t = \begin{cases} 1, t = 0 \\ 0, t \neq 0 \end{cases}$		$\delta_c(n)$	1
$1(t) - 1(t - T)$	$\frac{1 - e^{-pT}}{p}$	$-\Delta 1[n]$ $-\nabla 1[n - 1]$	1
$1(t)$	$\frac{1}{p}$	$1[n]$	$Z/(Z - 1)$
t	$\frac{1}{p^2}$	nT	$Tz/(z - 1)^2$
$t^2/z!$	$1/p^3$	$\frac{(nT)^2}{z!}$	$\frac{T^2 Z(Z + 1)}{z!(z - 1)^2}$
$e^{-\lambda t}$	$\frac{1}{p + d}$	$e^{-\lambda nT} = d^n$	$\frac{Z}{Z - d}, d = e^{-\lambda T}$
$1 - e^{-\lambda t}$	$\frac{a}{p(p + a)}$	$1 - e^{-\lambda nT}$	$\frac{(1 - d)z}{(z - 1)(z - d)}$

$\sin \pi \frac{1}{T}$	$\frac{\pi T^{-1}}{p^2 + \pi^2 T^{-2}}$	$\sin \pi n = 0$	0
$\cos \pi \frac{1}{T}$	$\frac{p}{p^2 + \pi^2 T^{-2}}$	$\cos \pi n = (-1)^n$	$\frac{Z}{Z + 1}$
$\sin \beta t$	$\frac{\beta}{p^2 + \beta^2}$	$\sin \beta n T$	$\frac{Z \sin \beta T}{Z^2 - 2Z \cos \beta T + 1}$
$\cos \beta t$	$\frac{p}{p^2 + \beta^2}$	$\cos \beta n T$	$\frac{Z^2 - Z \cos \beta T}{Z^2 - 2Z \cos \beta T + 1}$

Лекція 4

ПЕРЕДАВАЛЬНІ ФУНКЦІЇ ТИПОВИХ ЛАНОК САУ

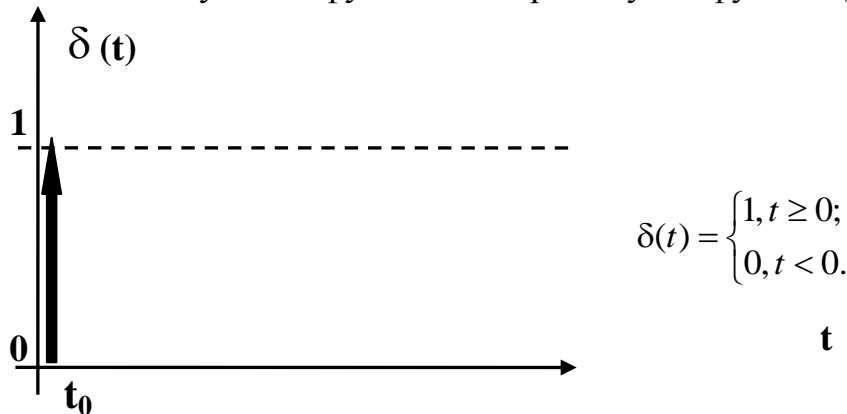
ОУ характеризуються різними динамічними властивостями. Для виявлення динамічних та частотних характеристик об'єктів та розрахунку параметрів регуляторів, які виконують управління об'єктом, використовуються тестуючі функції згідно схеми



Нехай на вхід лінійної ланки САУ у момент часу $t = 0$ подано гармонійний сигнал зі сталою коловою частотою ω . Через деякий час, після завершення перехідного процесу, у ланці встановиться режим вимушених коливань. Вихідний сигнал ланки $y(t)$ в такому режимі змінюється також за гармонійною функцією з тою самою коловою частотою ω , але з іншою амплітудою Y_m та фазою ψ_y .

$$y(t) = Y_m \sin(\omega t + \psi_y)$$

Найчастіше тестуючою функцією є прямокутна функція Дірака.



$\delta(t)$ - тестуючий сигнал; t_0 - момент подачі тестуючого сигналу,

Тестуючим сигналом може бути один з технологічних параметрів ОУ: тиск, температура, ... $\delta(t) \in \overline{0,1}$

Кожен об'єкт по-різному реагує на тестуючий сигнал (TS), оскільки реальні промислові об'єкти мають різні амплітудно-частотну (АЧХ), фазо-частотну (ФЧХ) та амплітудно-фазочастотну (АФЧХ) характеристики.

Характеристики ОУ можуть представлятися моделями різних типових ланок:

- Пропорційна (П-ланка);
- Диференційна (Д-ланка);
- Інтегруюча (І-ланка);
- Аперіодична (А-ланка).

Кожна ланка характеризується своєю передавальною функцією $W(p)$.

Відношення вихідного зображення по Лапласу до вхідного зображення $P(p)$ оригіналу функції $x(t)$ називається передавальною функцією (ПФ) окремої ланки САУ.

$$W(p) = \frac{Q(p)}{P(p)}; \quad p = c + j\omega; \quad j = \sqrt{-1}.$$

Оскільки ПФ $W(p)$ – комплексна величина, то вона має наступні атрибути (характеристики):

1) корені зображення $Q(p)$ – є нулями ПФ, а корені зображення $P(p)$ – є полюсами ПФ у комплексній площині;

2) $W(p) = W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega)$, тобто ПФ розкладається на суму двох частотних характеристик: дійсну $U(\omega)$ та уявну $V(\omega)$, на основі яких розраховуються:

- амплітудно-частотна характеристика (АЧХ)

$$A(\omega) = \sqrt{[U(\omega)]^2 + [V(\omega)]^2};$$

- фазочастотна характеристика (ФЧХ)

$$\varphi(\omega) = \text{artg} \frac{V(\omega)}{U(\omega)};$$

- амплітудно-фазова частотна характеристика (АФЧХ)

$$W(j\omega) = \frac{Q(j\omega)}{P(j\omega)}.$$

У практиці проектування САУ застосовують наступні типові ланки з відповідними перехідними характеристиками та передавальними функціями:

1. Пропорційна, безінерційна (П-ланка), яка аналітично описується виразами

$$W(p) = k, \quad h(t) = kx(t);$$

де k – коефіцієнт підсилення.

Графіки вагової $W(t)$ та перехідної $h(t)$ функцій показані на рис.1.

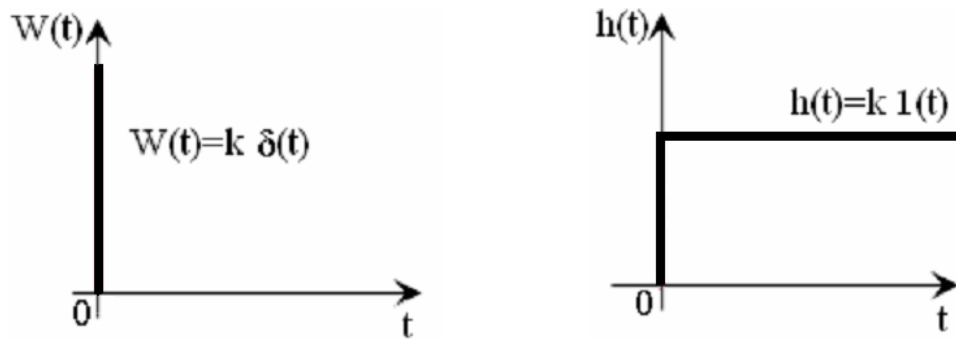


Рис.1. Графіки вагової та перехідної функцій П-ланки САУ.

На рис.2 показані графіки АЧХ, ФЧХ та АФЧХ (годограф) П-ланки САУ.

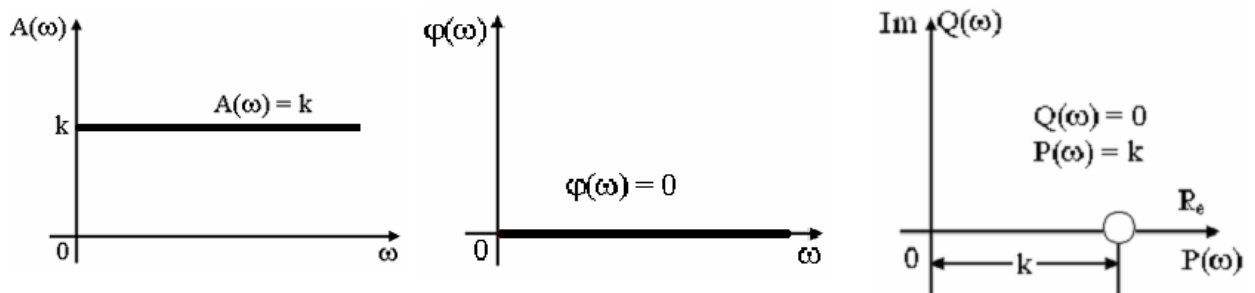


Рис.2 Амплітудно-фазові частотні характеристики П-ланки

2. Диференціальна Д-ланка САУ

Диференціальна Д-ланка описується наступними виразами вагової та перехідної функції:

$$W(p) = kp; \quad h(t) = k \frac{dx(t)}{dt},$$

графіки яких показані на рис.3.

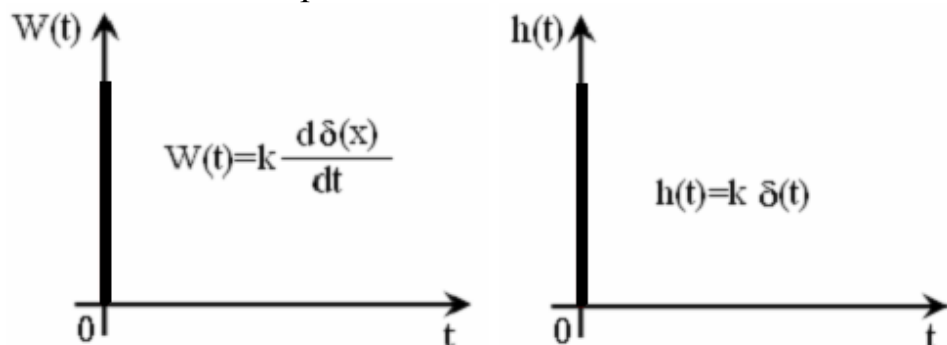


Рис.3. Графіки вагової $W(t)$ та перехідної $h(t)$ функцій диференціальної Д-ланки САУ.

АЧХ, ФЧХ та АФЧХ - годограф Д-ланки САУ показані на рис.4.

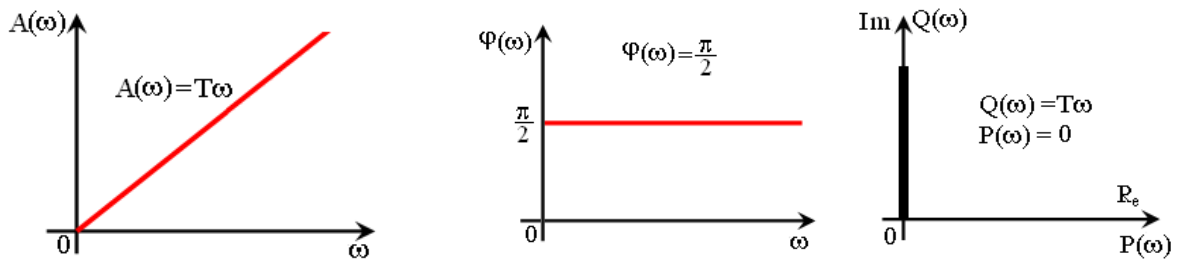


Рис.4. Графіки характеристик диференціальної Д-ланки САУ.

3. Інтегруюча І-ланка описується виразами:

$$W(p) = \frac{k}{p} \qquad h(t) = kx(t) = \frac{dy(t)}{dt},$$

де k – коефіцієнт підсилення, $y(t) = \frac{K}{T} \int_0^t x(t)dt + h(0)$.

Графіки вагової $W(t)$ та перехідної $h(t)$ функцій інтегруючої І-ланки САУ показані на рис.5.

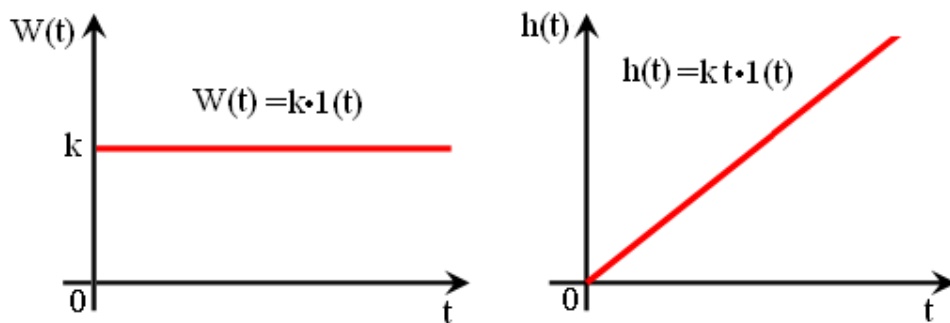


Рис.5. Вагова та перехідна характеристики І-ланки САУ.

На рис. 6. показані графіки АЧХ, ФЧХ та АФЧХ - годограф І-ланки.

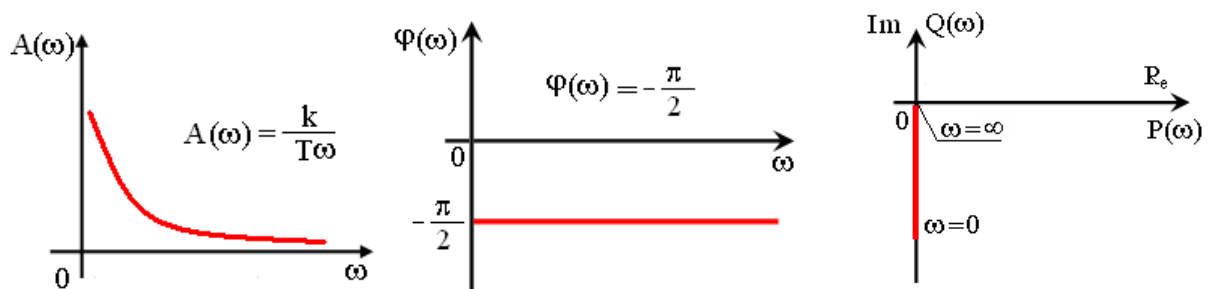


Рис.6. АЧХ, ФЧХ та АФЧХ – годограф інтегруючої І-ланки

4. Аперіодична А-ланка описується виразами:

$$W(p) = \frac{k}{TP+1} \qquad h(t) = kx(t) - T \frac{dy(t)}{dt},$$

де $T = \frac{t_p}{3}$, t_p – тривалість перехідного процесу.

Графіки вагової $W(t)$ та перехідної $h(t)$ характеристики А-ланки САУ показані на рис.7.

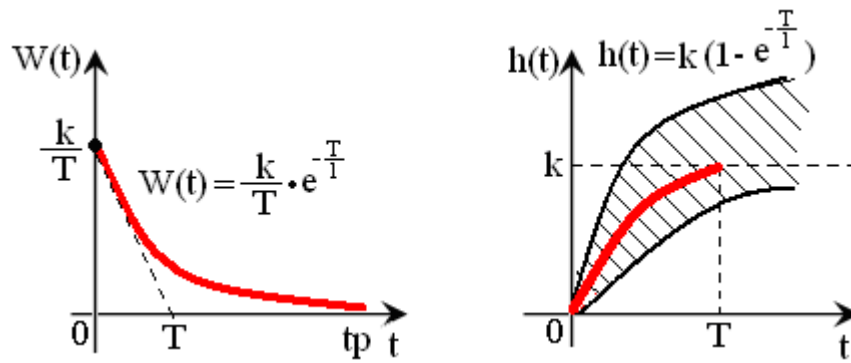


Рис.7. Вагова та перехідна характеристики інерційної аперіодичної А-ланки САУ

На рис. 8. показані графіки АЧХ, ФЧХ та АФЧХ – годограф інерційної А-ланки САУ.

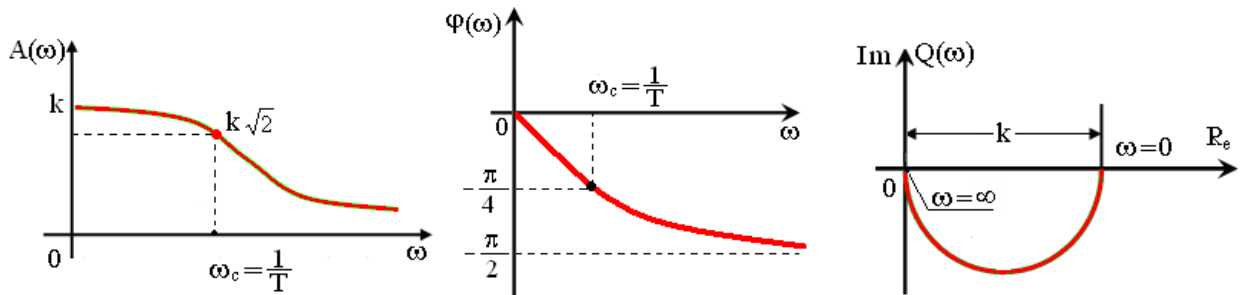


Рис.8. Графіки АЧХ, ФЧХ та АФЧХ – годограф інерційної А-ланки САУ.

$$A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}}; \quad \varphi(\omega) = -\text{artg}(\omega T);$$

А-ланка має мінімальний фазовий зсув, при чому при змінні частоти ω від 0 до ∞ фазовий зсув між вхідним і вихідним сигналом змінюється від $(-\pi)$ до $(-\frac{\pi}{2})$.

Частотні характеристики ОУ описують передавальні властивості САУ та їхніх ланок в усталеному режимі гармонійних коливань, що зумовлені впливом зовнішніх гармонійних сигналів. Знаючи частотну характеристику САУ та її ланок, визначають реакцію ОУ на гармонійний сигнал будь-якої частоти або на суму гармонік різних частот. Частотні характеристики ОУ широко застосовують у теорії та практиці автоматичного керування, тому що реальні збурення, які діють на САУ можуть бути досліджені як сума гармонійних сигналів.

Лекція 5

ЛОГАРИФМІЧНІ ЧАСТОТНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ТИПОВИХ ЛАНОК САУ

Оскільки дослідження частотних властивостей та передавальних функцій типових ланок САУ виконується у великих діапазонах $0 \leq \omega \leq \infty$ то їх подають у вигляді логарифмічних амплітудно-частотних характеристик (ЛАЧХ) згідно виразу:

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega), \quad (1)$$

де частоту ω по осі абсцис відкладають у логарифмічному масштабі октавами або декадами. Одна октава частоти ω дорівнює різниці логарифмів частоти ω_i та її подвоєння ω_j , тобто $\omega_j = 2 \omega_i$

$$\text{або} \quad 1 \text{ октава} = \lg 2 \omega_j - \lg \omega_i = \lg 2 + \lg \omega_j - \lg \omega_i = \lg 2.$$

Одна декада дорівнює різниці логарифмів

$$1 \text{ декада} = \lg 10 \omega_j - \lg \omega_i = 1.$$

При цьому за рахунок використання десяткового логарифму (\lg) та коефіцієнта 20 у виразі (1) величина $L(\omega)$ розраховується у децибелах.

Перевага побудови ЛАЧХ та АФЧХ полягає у наступному:

1. Стислий масштаб подання частот ω у широкому діапазоні;
2. Лінеаризація характеристик АЧХ та ФЧХ на графіках передавальних функцій, що спрощує їх графічну побудову;
3. Заміна операцій множення та ділення при послідовному виключенні ланок САУ на операції додавання та віднімання.

Логарифмічна АЧХ П-ланки не залежить від частоти (Рис.1) і рівня $L(\omega) = 20 \lg(k)$ і оцінюється у децибелах

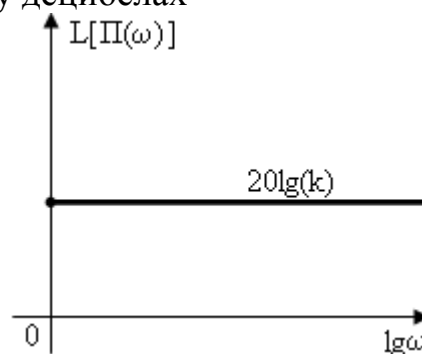


Рис.1. Логарифмічна АЧХ П-ланки (пропорційна)

Логарифмічна АЧХ Д-ланки (Рис.2)

$$L(\omega) = 20 \lg k \omega = 20 \lg k + 20 \lg \omega$$

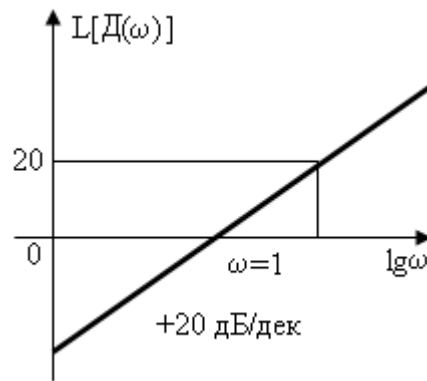


Рис.2. Логарифмічна АЧХ Д-ланки (диференційної)

Логарифмічна АЧХ І-ланки (Рис.3)

$$L(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \omega$$

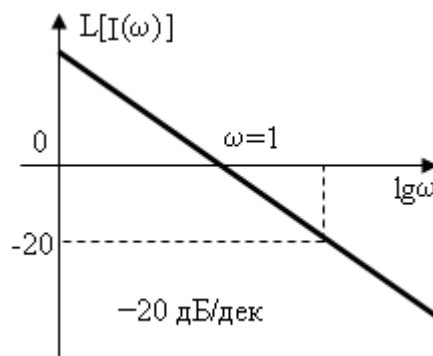


Рис.3. Логарифмічна АЧХ І-ланки (інтегруюча)

Логарифмічна АЧХ А-ланки (Рис.4)

$$L(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg[1 + j\omega T]$$

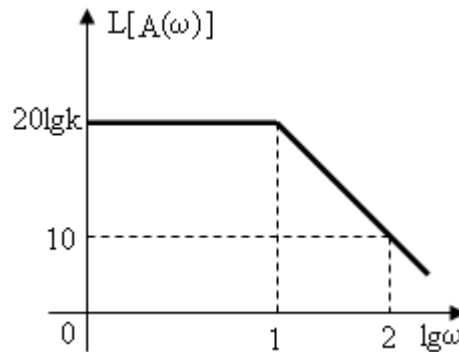


Рис.4. Логарифмічна АЧХ А-ланки (апериодична)

Ламана ЛАЧХ І-ланки утворюється тому, що при малих значеннях ω до 1-ї октави коефіцієнтом $j\omega T$ нехтують а $\lg 1 = 0$.

При побудові логарифмічних ФЧХ різних ланок САУ виконується обчислення:

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{V(\omega)}{U(\omega)},$$

причому по вертикальній осі відкладають фазу у градусах чи радіанах, а по горизонтальній осі частоту відкладають у логарифмічному масштабі.

Позитивною властивістю ЛАЧХ типових ланок САУ є заміна операцій множення і ділення ПДФ при послідовному їх з'єднанні, тобто



де без операцій логарифмування

$$W_0(P) = \frac{\prod_{i=1}^k Q_i(P)}{\prod_{i=1}^k P_i(P)},$$

або

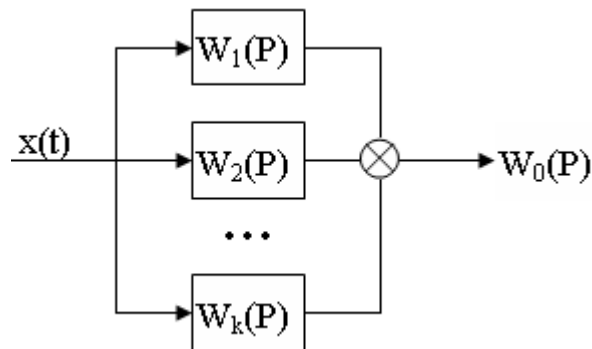
$$W_0(P) = \frac{Q_1(P) \times Q_2(P) \times \dots \times Q_k(P)}{P_1(P) \times P_2(P) \times \dots \times P_k(P)}$$

а при логарифмуванні

$$20 \lg [W_0(j\omega)] = 20 \lg [Q_1(j\omega)] + 20 \lg [Q_2(j\omega)] + \dots + 20 \lg [Q_k(j\omega)] - 20 \lg [P_1(j\omega)] - 20 \lg [P_2(j\omega)] - \dots - 20 \lg [P_k(j\omega)]$$

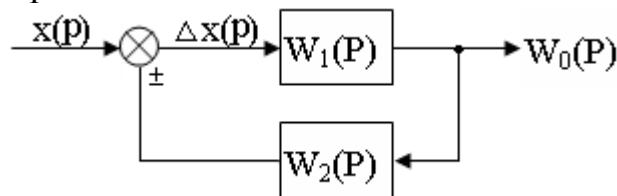
$$\varphi_0(j\omega) = \sum_{i=1}^k \varphi_i(j\omega)$$

При паралельному з'єднанні ланок САУ



$$W_0(P) = W_1(P) + W_2(P) + \dots + W_k(P)$$

При з'єднанні зі зворотнім зв'язком

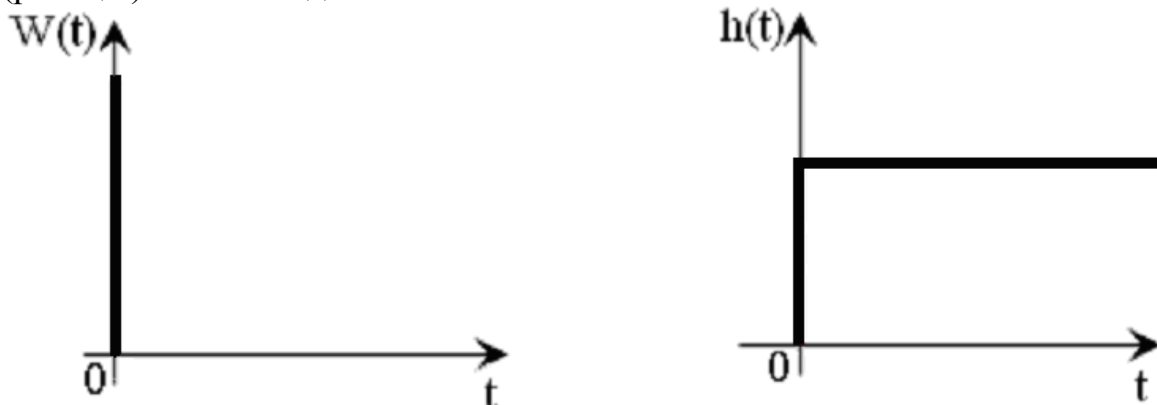


$$W_0(P) = \frac{W_1(P)}{1 \pm W_1(P) \cdot W_2(P)}$$

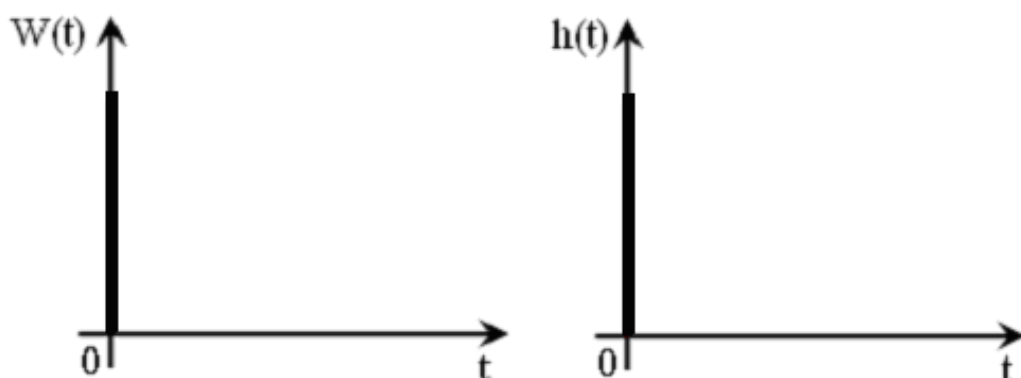
Лекція 6

ПЕРЕХІДНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ РЕАЛЬНИХ ОУ

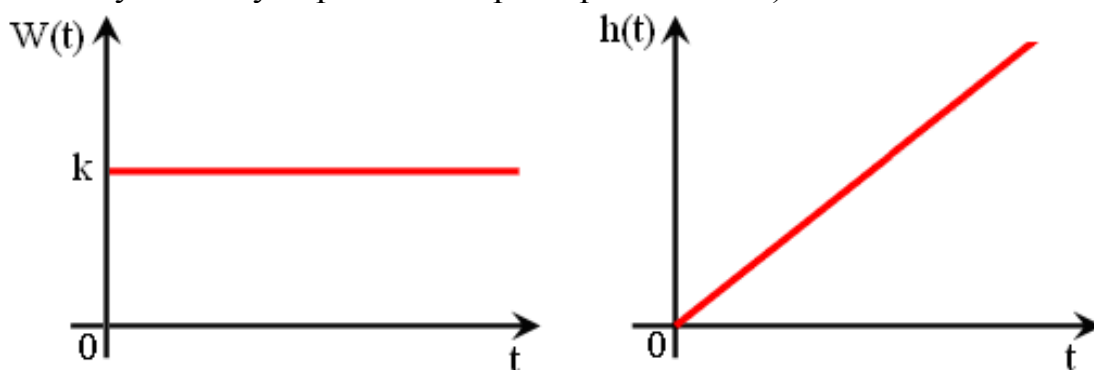
На практиці реальні промислові ОУ характеризуються різними складними перехідними функціями $h(t)$. Наприклад, якщо ОУ характеризується пропорційною П-ланкою, то при подачі на його вхід тестуючого збурення у вигляді функції Дірака $\delta(t)$ його перехідна функція $h(t)$ (реакція) має вигляд:



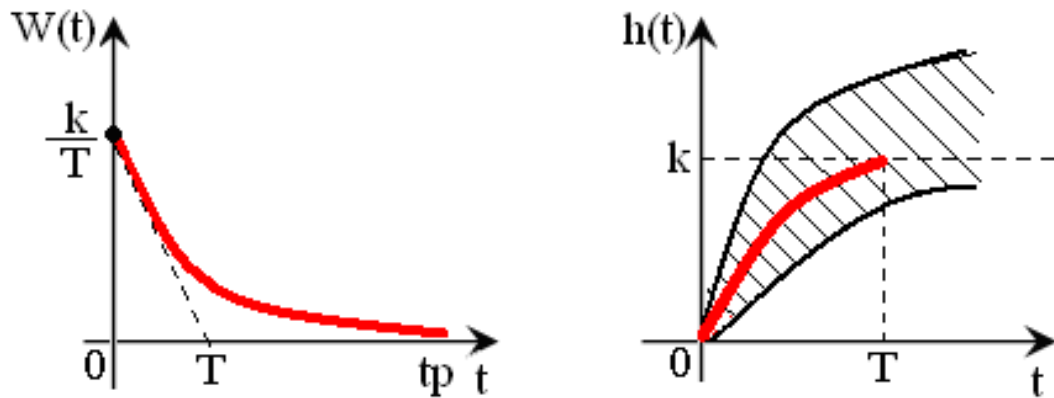
Якщо ОУ характеризується властивостями диференційної Д-ланки:



У випадку, коли характеристики ОУ відповідають властивостям інтегруючої І-ланки (при зміні величини зовнішнього впливу k пропорційно змінюється кут нахилу перехідної характеристики ОУ):



Якщо ОУ характеризується властивостями апериодичної А-ланки:



Характеристика динамічності визначається реакцією об'єкта управління на зовнішнє збурення, яке представляється функцією Дірака. Класифікують об'єкти управління за двома ознаками динамічності:

- нединамічні;
- динамічні.

Характеристика реакції нединамічного об'єкта на зовнішнє стрибкоподібне збурення описується трьома перехідними функціями: 1, 2, 3 (рис.1):

- першого порядку;
- другого порядку;
- другого порядку з транспортним запізненням.

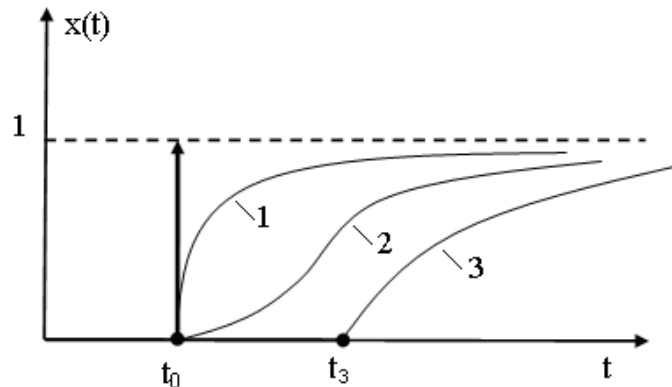


Рис.1. Реакція нединамічного ОУ на зовнішнє збурення (t_0 – момент дії зовнішнього впливу, $t_3 - t_0$ – транспортне запізнення)

Як видно з рис.1, характеристика реакції нединамічного ОУ, ніколи не досягає рівня зовнішнього збурення.

Динамічні об'єкти характеризуються перехідними процесами, які описуються рівняннями Бесселя і можуть перевищувати рівень зовнішнього збурення (рис.2).

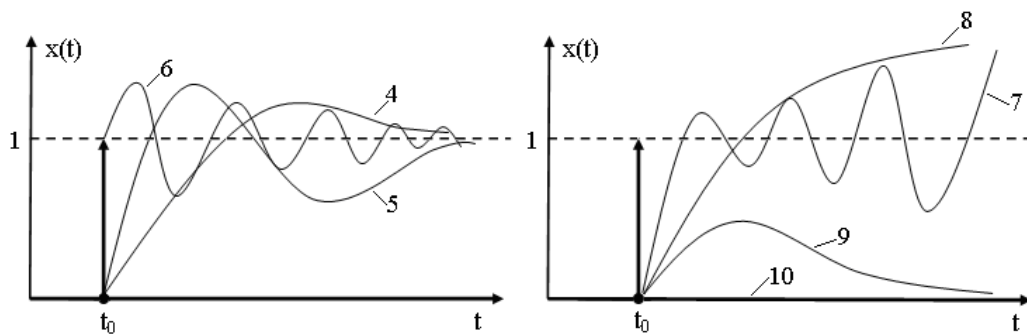


Рис.2. Реакція динамічних ОУ на зовнішнє збурення.

Стійкість ОУ СКС.

Стійкість об'єктів управління визначається на основі теорії управління і охоплює наступні класи об'єктів: абсолютно стійкі; стійкі; нестійкі; пасивні.

Абсолютно стійкі ОУ відповідають характеристикам нединамічних об'єктів (рис.1)

Об'єкти, перехідні характеристики яких при зростанні часу асимптотично наближаються до рівня зовнішнього збурення, належать до класу стійких (рис.2).

Об'єкти, характеристики яких описуються функціями Бесселя з додатніми коефіцієнтами або розподілом Релея, належать до класу нестійких.

Пасивні об'єкти характеризуються відсутністю реакції на зовнішній вплив. Такі об'єкти можуть знаходитись в станах відключення, несправності, перед аварійних чи аварійних станах. Окремим випадком об'єктів з такими характеристиками є адаптивні ОУ.

Адаптивність ОУ СКС.

Об'єкти, які характеризуються властивостями адаптивності мають внутрішню пам'ять для реєстрації передісторії, а також наявність штучного чи природного інтелекту.

На рис.3 показані часові перехідні характеристики адаптивних об'єктів.

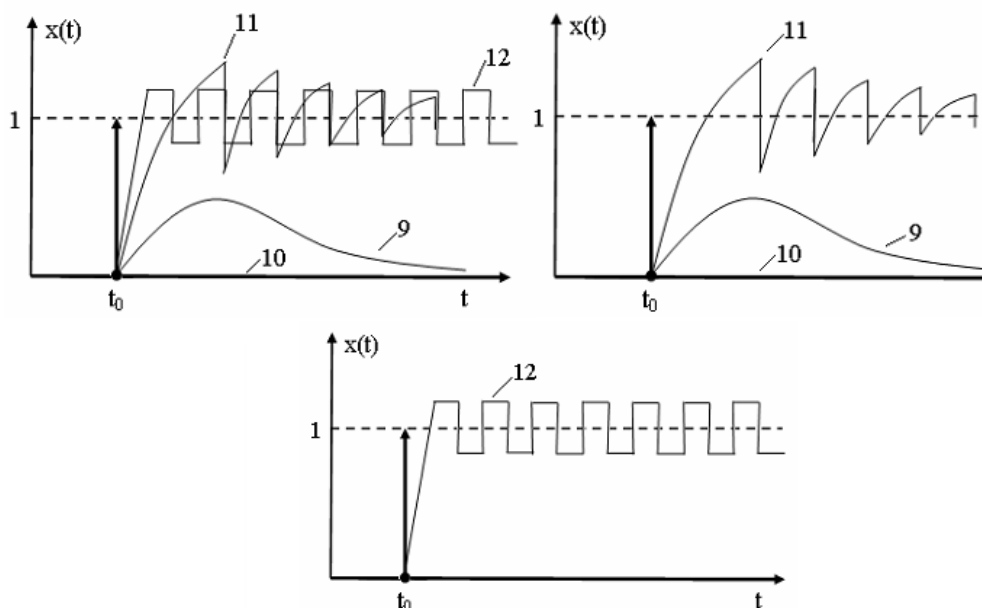


Рис.3. Перехідні характеристики адаптивних об'єктів.

Адаптивні об'єкти характеризуються особливими перехідними характеристиками при багаторазовому повторенні знакозмінних зовнішніх впливів (рис.4).

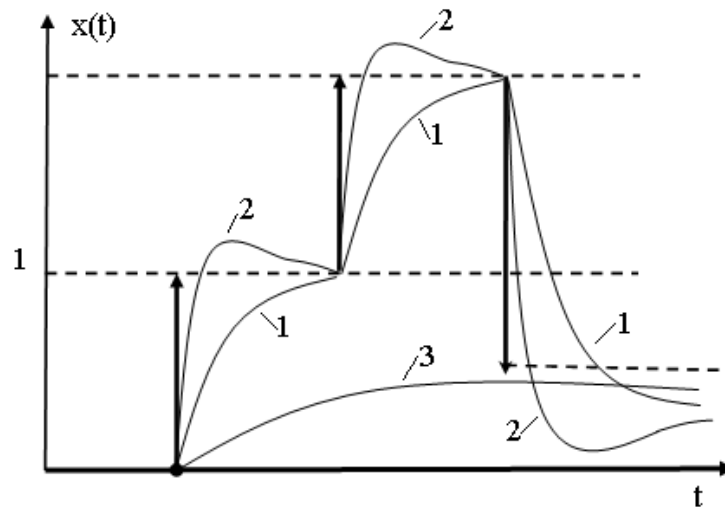


Рис.4. Перехідні характеристики адаптивних ОУ при багаторазових зовнішніх збуреннях.

З рис.4 видно, що характеристика 1 відповідає нединамічному абсолютно стійкому класу об'єктів, характеристика 2 відповідає динамічному стійкому об'єкту, характеристика 3 може бути однією з реалізацій реакції адаптивного ОУ.

Очевидно, що з часом характеристики ОУ можуть змінюватися, тобто переходити з одного класу в інший і за часовими показниками, і за амплітудою зовнішнього впливу.

АЧХ та АФЧХ об'єктів управління ОУ (регульованих параметрів технологічних процесів) є монотонними функціями із запізненням, які мають ПДФ, що апроксимуються виразом:

$$W_{OY}(P) = \frac{k_{OY} \cdot e^{-T_p P}}{(T_1 P + 1)(T_2 P + 1)^m}, m = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

ПДФ ОУ визначають експериментально і апроксимують виразом (1).

У випадку, якщо на об'єкт подається збурення у вигляді довільної функції $x(t)$, то виконується апроксимація цієї функції імпульсами функції Дірака через інтервал Δt .

Лекція 7

ПЕРЕДАВАЛЬНІ ФУНКЦІЇ ОУ ТА ТИПИ РЕГУЛЯТОРІВ САУ

Закони регулювання

Завданням САУ є підтримання заданого значення регульованої величини.

Під законом регулювання розуміють алгоритм або функціональну залежність у відповідності з яким керуючий пристрій формує

$$U(t) = k_1 x + k_2 \int x dt + k_3 \iint x dt^2 + \dots k_4 \dot{x} + k_5 \ddot{x} + \dots$$

Або в операторній формі

$$U(t) = k_1 x + \frac{k_2}{p} x + \frac{k_3}{p^2} x + \dots k_4 p x + k_5 p^2 x + \dots$$

1. Пропорційне регулювання

$$U(t) = W(p) \cdot x(t) = k_1 x(t)$$

При пропорційному регулюванні

$$W(p) \rightarrow k_1 W_0(p)$$

Де k_1 - коефіцієнт передачі підсилення ланцюга регулювання.

2. Інтегральне регулювання

$$\frac{du}{dt} = k_2 x, \quad U = k_2 \int x dt$$

Або в операторній формі

$$U = W(p)x = \frac{k_2}{p} x$$

$$W(p) = \frac{k_2}{p} W_0(p)$$

Регулювання може відбуватися і по двох інтегралах

$$U = k_3 \iint x dt dt \text{ тобто } U = W(p)x = \frac{k_2}{p^2} x.$$

3. Іздромне регулювання

Регулювання виконується одночасно по пропорційному і інтегральному закону «ПІ» - регулятор

$$U = k_1 x + \frac{k_2}{p} x = \frac{k_1 p + k_2}{p} x,$$

де U - вихідна функція.

Даний закон використовує високу швидкодію пропорційного регулювання та високу точність інтегрального регулювання (рис.1)

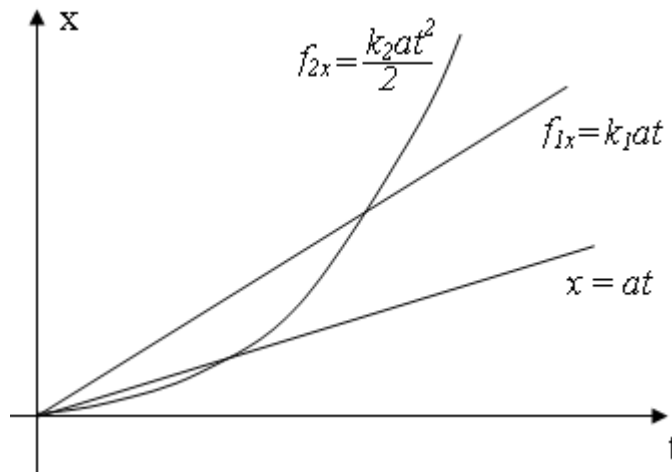


Рис.1. Функції пропорційного $f_1(x)$ та інтегрального $f_2(x)$ регулювання

4. Диференціальне регулювання (по похідних)

$$U = k_4 \frac{dx}{dt} = k_4 p x$$

Самостійно таке регулювання не здійснюється, а сумісно з пропорційним регулюванням

$$U = k_1 x + k_4 p x$$

При такому регулюванні зростає швидкодія реакції САР, зростає її швидкодія і зменшуються динамічні помилки і запізнення.

5. Пропорційно – інтегрально – диференціальне регулювання (ПІД – регулятори)

$$U = \left(k_1 + \frac{k_2}{p} + k_4 p \right) x$$

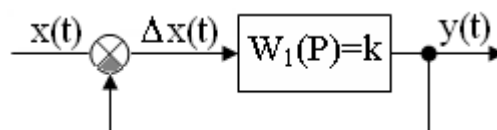
Найбільше поширення на практиці отримали наступні типи регуляторів:

1. Пропорційний П-регулятор.

П-регулятор змінює значення керованого процесу $x(t)$ пропорційно його відхиленню по амплітуді $\Delta x(t)$

$$U(t) = K \cdot \Delta x(t)$$

$$W(P) = K$$



Перевагою П-регуляторів є їх проста реалізація та висока стійкість регулювання промисловими об'єктами – недолік – недостатня точність при регулюванні інерційними об'єктами.

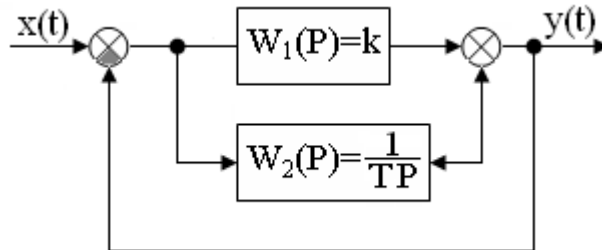
2. Пропорційно-інтегральний ІІ-регулятор.

ІІ-регулятор змінює керований параметр $x(t)$ пропорційно суми відхилення $x(t)$ та інтегралу цього відхилення згідно функції:

$$U(t) = k[\Delta(t) + \frac{1}{T} \int_0^t \Delta(t) \cdot dt],$$

де k – коефіцієнт підсилення;

T – стала часу інтегрування (ізодрому).



Пропорційна складова ІІ-регулятора визначає швидкодію, а інтегральна складова рівень астатизму.

ПДф ІІ-регулятора описується рівнянням:

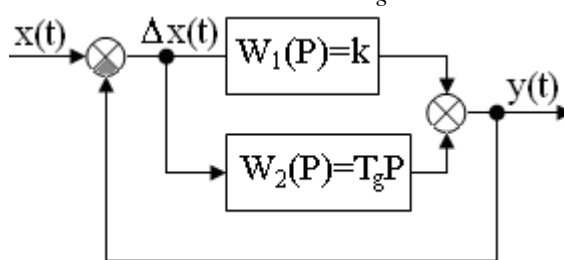
$$W(P) = k(1 + \frac{1}{T_i P})$$

ІІ-регулятори найпоширеніші на практиці, мають високу точність і забезпечують максимальну стійкість регулювання.

Недоліком ІІ-регулятора є неможливість ефективного усунення швидкісної похибки САУ.

3. Пропорційно-диференціальний ІД-регулятор компенсує відхилення по амплітуді та по прискоренню (вони мають кращі динамічні характеристики) з ПДф згідно виразу:

$$W(P) = k(1 + T_g P)$$

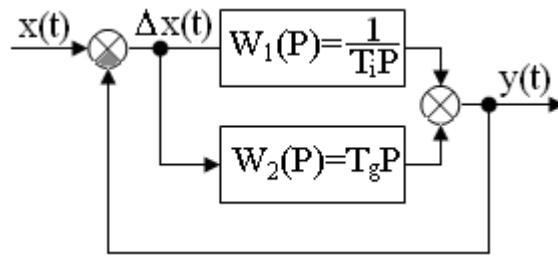


На практиці застосовують ІД-регулятор, тому що він має найбільшу швидкодію регулювання за рахунок реагування не тільки на величину похибки відхилення, а й на швидкість її зміни. Завдяки цьому під час керування досягається ефект випередження.

Недоліком ІД-регулятора є його недостатня точність і неможливість усунення статичної похибки.

4. Інтегрально-диференціальний ІІД-регулятор має ПДф виду:

$$W(P) = k(\frac{1}{T_i P} + T_d P)$$

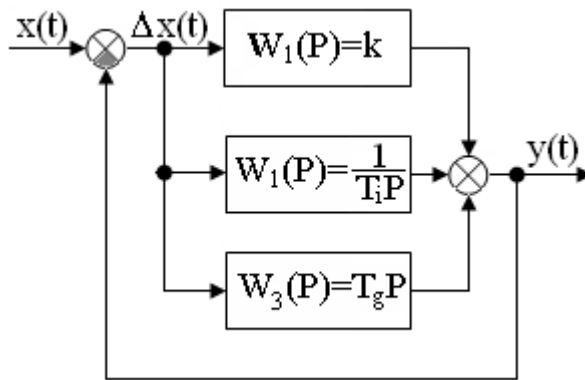


ПД-регулятори характеризуються найбільшою швидкодією, оскільки реагують на зміну $\Delta x(t)$ плюс швидкість зміни $\Delta x(t)/dt$, що забезпечує ефект випередження. Недолік ПД-регуляторів є статистична похибка.

5. Пропорційно-інтегральний-диференціальний ПД-регулятор змінює керований параметр $x(t)$ пропорційно суми:

$$W(P) = k[\Delta x(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t \Delta x(t) dt + T_g \frac{d\Delta x(t)}{dt}],$$

де T_i, T_g - відповідно сталі інтегрування та диференціювання ланок регулятора.



Такі регулятори є найскладнішими, проте вони забезпечують найбільшу точність керування за рахунок сумісного використання переваг усіх, раніше розглянутих, регуляторів. Такі регулятори забезпечують астатизм (запізнення реакції) САУ, оперативно реагують на динаміку зовнішнього збурення та швидкість її зміни в часі..

При цьому розраховуваними параметрами регуляторів є:

- коефіцієнт підсилення – k ;
- стала інтегрування – T_i ;
- стала диференціювання - T_g .

Лекція 8

КРИТЕРІЙ СТІЙКОСТІ САУ.

Стійкість – це здатність САУ повертатися до вихідного стану після її короткотривалого збурення.

Стійкість є найважливішою характеристикою якості САУ. Дослідження стійкості САУ виконують в умовах вільного незбуреного стану системи. Математично стійкість вільного руху оцінюють здатністю САУ прямувати до власних характеристик після припинення збурення.

Якщо власна характеристика САУ описується функцією $y_0(t)$, то збурений рух $y(t)$ можна описати як відхилення від вільного руху (власних амплітудно-частотних характеристик):

$$\Delta y(t) = y_0(t) - y(t)$$

Таким чином функція $\Delta y(t)$ описує вільний рух САУ після припинення збурення.

Для стійкої САУ повинна виконуватися нерівність

$$|\Delta y(t)| < \varepsilon,$$

де ε - деяка мала величини.

При цьому, якщо виконується умова:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta y(t) = 0,$$

то САУ є асимптотично стійкою.

Розв'язок даної умови у вигляді диференціального рівняння має вид:

$$\Delta y(t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{S_i t},$$

де C_i - сталі інтегрування, які залежать від початкових умов, S_i - корені характеристичного рівняння: $A(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$. Умова вільного руху САУ, коли $A(s) = 0$

Дана умова (з lim ...) виконується лише тоді, коли всі прості корені та дійсні частини комплексних коренів характеристичного рівняння, яке описує вільний рух САУ, є від'ємними. Отже, необхідною та достатньою умовою стійкості САУ є від'ємність усіх дійсних коренів і дійсних частин комплексних коренів її характеристичного рівняння. Якщо хоча б один дійсний корінь чи дійсна частина одного з комплексних коренів $=0$, а дійсні частини решти коренів – від'ємні, то САУ перебуває на межі стійкості. За наявності кратних коренів характеристичного рівняння з нульовими дійсними частинами САУ є нестійкою.

У зв'язку з тим, що згасання вільного руху САУ визначається тільки коренями характеристичного рівняння і не залежить від збурень, стійкість є внутрішньою властивістю лінійних систем

Однак САУ реальних промислових об'єктів є нелінійними. Тому дослідження стійкості руху таких САУ здійснюють лінеаризацією нелінійних диференціальних рівнянь їх руху на підставі теорем Ляпунова.

Таким чином згідно Теорем для Ляпунова:

1. Якщо характеристичне рівняння САУ має всі корені з (-) дійсними частинами, то система стійка.
2. Якщо хоч один корінь (+) – система нестійка;
3. При наявності «0» коренів і чисто уявних стійкість САУ залежить від нелінійних елементів.

Для лінійної САУ всі корені повинні бути розміщені зліва від уявної осі площини коренів.

САУ буде знаходитись на границі стійкості при наявності:

1. Нульового кореня;
2. Пари чисто уявних коренів;
3. Безконечного кореня.

При цьому всі інші корені мають від'ємні дійсні частини.

Критерії стійкості Гурвіца.

Система вважається стійкою коли перехідна складова при $t \rightarrow \infty$ $U(t) \rightarrow 0$.

Характеристичне рівняння стійкості записується у вигляді полінома

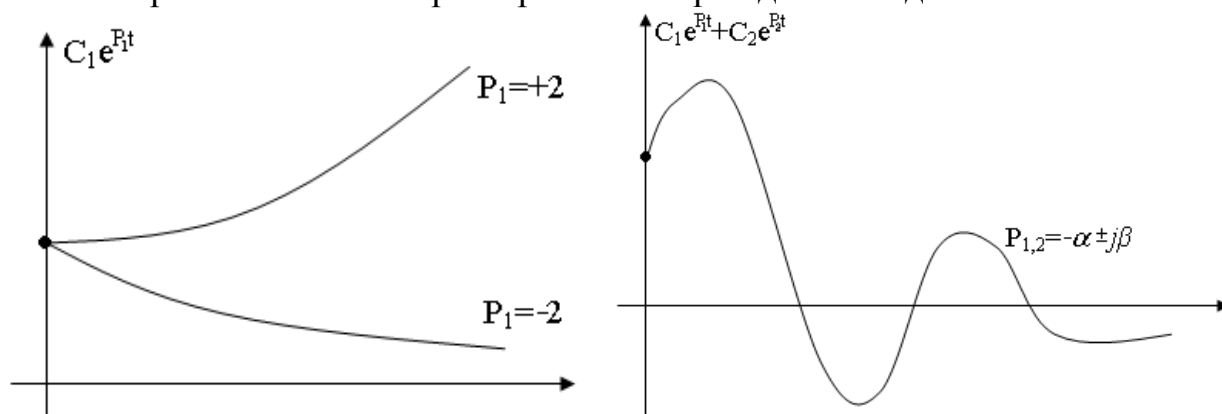
$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p^1 + a_n = 0$$

де p – комплексне число.

Перехідна складова описується рівнянням

$$U_p(t) = c_1 e^{p_1 t} + c_2 e^{p_2 t} + \dots + c_n e^{p_n t}$$

На рис.1. показані характеристики перехідної складової



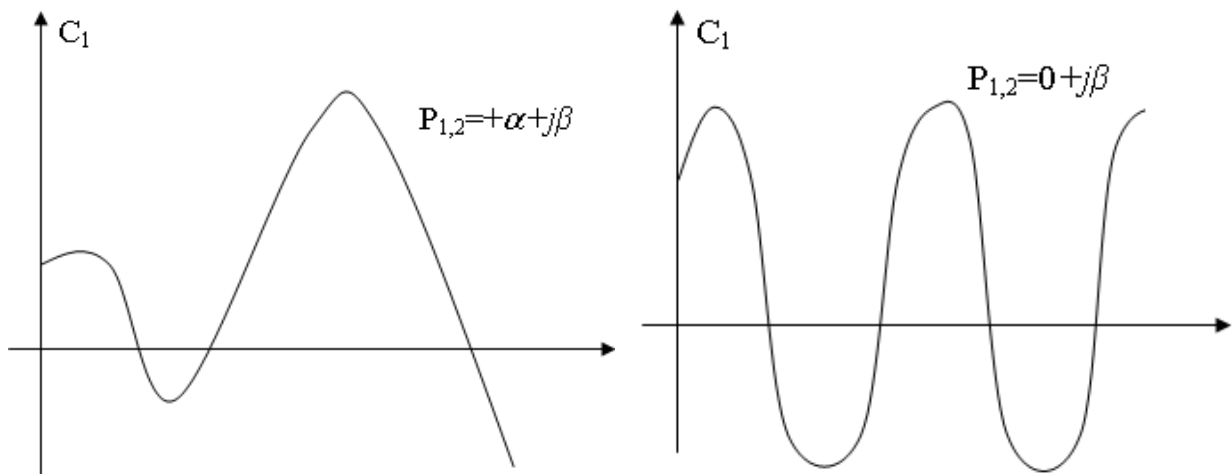


Рис. 1. Характеристики перехідної функції стійкості при різних p_1 і p_2 .

Стійка САР має корені (-) дійсна частина (рис.2).

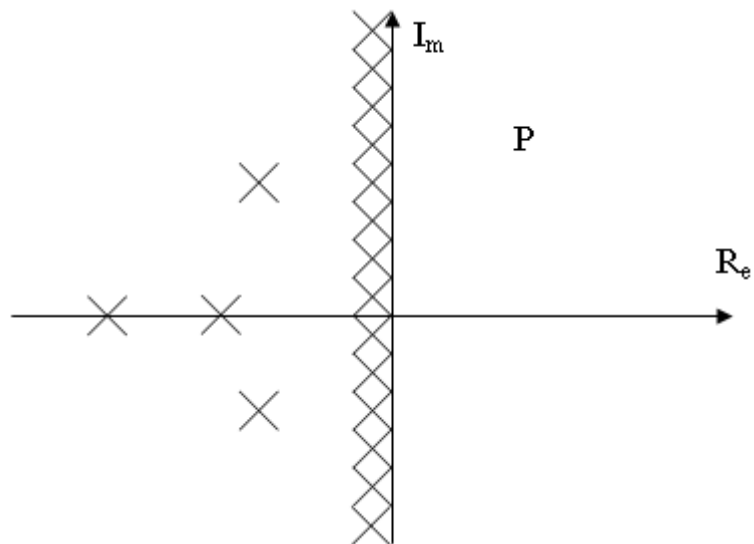


Рис.2. Умови стійкості САР.

Згідно критерія Гурвіца всі коефіцієнти характеристичного рівняння повинні бути (+) >0 .

$$a_0 p + a_1 = 0$$

$$a_0 p^2 + a_1 p + a_2 = 0$$

$$a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3 = 0$$

Критерій стійкості Михайлова

Частота ω змінюється від 0^0 до ∞ . При цьому (гадограф Михайлова).

Якщо приріст аргумента $\Psi(\omega) < n \frac{\pi}{2}$ САР нестійка. Якщо $\Psi(\omega) = n \frac{\pi}{2}$ система стійка.

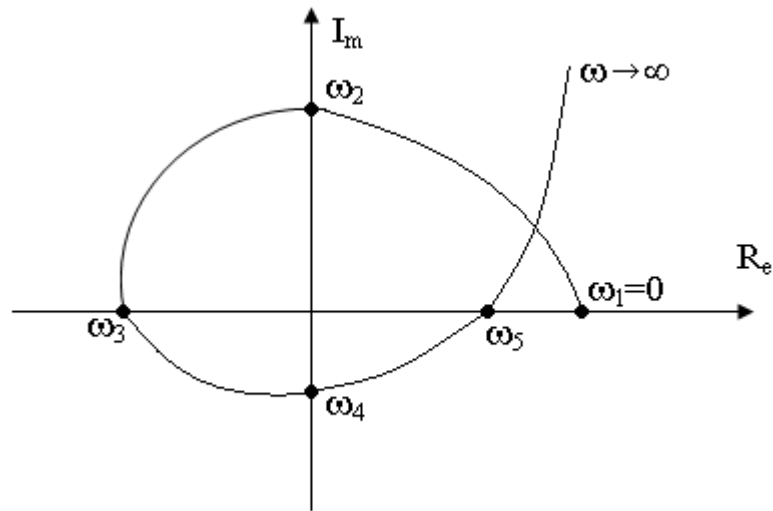


Рис. 3. Годограф стійкої САР.

Для стійких систем годограф Михайлова завжди плавно проходить спірально послідовно всі квадранти і йде у ∞ .

Для нестійких систем порушується порядок проходження квадрантів в наслідок того, що кут повороту вектора $D(j\omega)$ буде $< n \frac{\pi}{2}$.

При границі стійкості умова потрапляє в «0» координат (рис.4.), де ω_0 незатухаюча частота коливань.

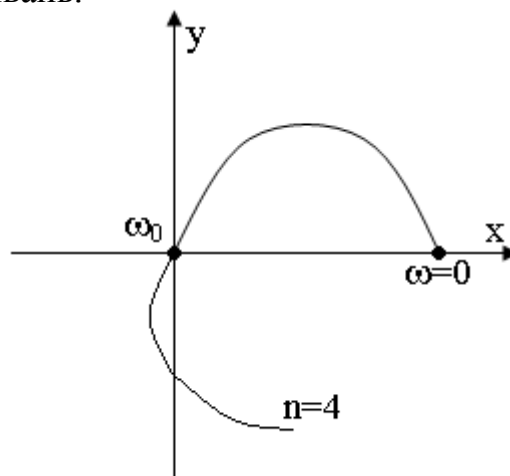


Рис. 4.

Критерій стійкості Найквіста.

Згідно критерію Найквіста, для дослідження стійкості замкнутої САУ необхідно визначити АФЧХ розімкненої САУ.

Позитивною якістю критерія Найквіста є можливість оцінки стійкості по експериментально знятих частотних характеристиках.

Згідно критерію Найквіста будують логарифмічну амплітудно-фазову частотну характеристику (л.а.х.) логарифмічну фазо-частотну характеристику

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg |W(j\omega)|,$$

де

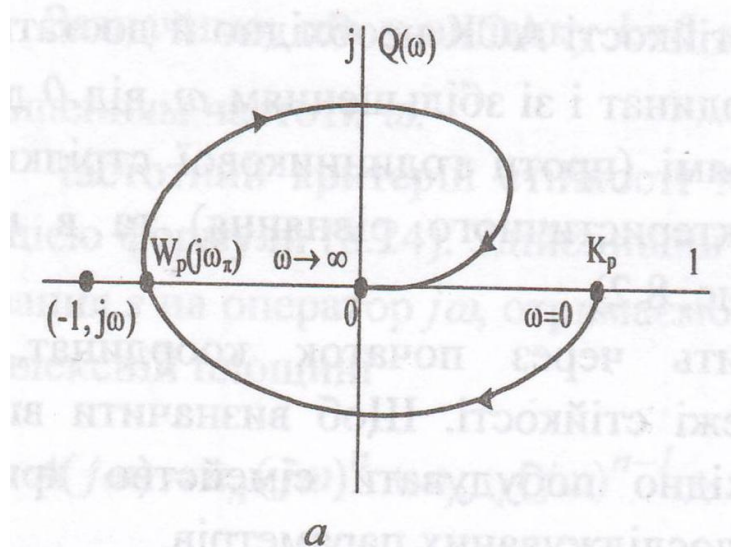
$$W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega) = W(p)$$

$W(j\omega)$ - це ПДФ

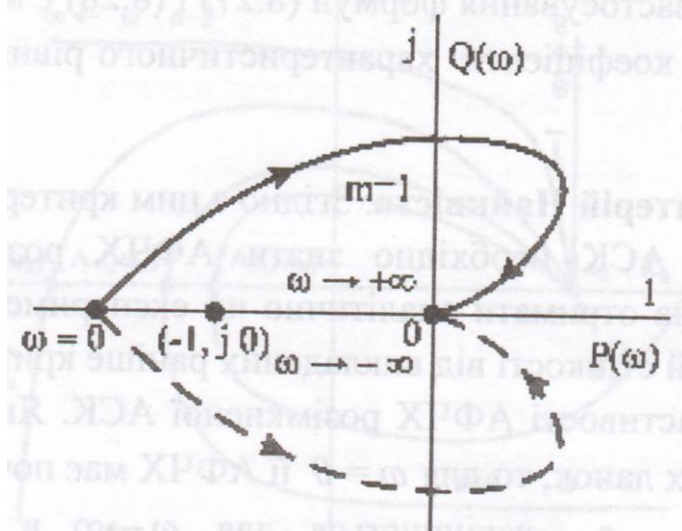
$$p = j\omega$$

Частотний критерій Найквіста формулюється:

1. Якщо розімкнена САУ стійка, чи перебуває на межі стійкості, то для того, щоб замкнена система була стійкою, необхідно і достатньо, щоб АФЧХ розімкненої САУ під час зміни частоти ω від 0 до ∞ не охоплювала точку з координатами $(-1; j0)$. *див.рис.*



2. Якщо розімкнена САУ нестійка, а її передатна функція має m полюсів справа від уявної осі, то для стійкості замкненої системи необхідно і достатньо, щоб АФЧХ розімкненої САУ під час зміни частоти ω від $-\infty$ до $+\infty$ охоплювала точку $(-1; j0)$ m разів. *див.рис.*



На підставі критерію Найквіста визначають запас стійкості САУ за підсиленням і фазою. Запаси стійкості характеризують віддалення АФЧХ САУ від критичної точки з координатами $(-1; j0)$.

У САУ на границях стійкості виникають вимушені коливання.

Вимушені коливання НСАУ.

Нехай на ОУ діє гармонічне коливання

$$f(t) = B \sin_{\omega_b t} \quad (1)$$

де B – амплітуда; ω_b – задана кругова частота; t – час зовнішнього впливу.

Шукана функція вимушених коливань має вигляд:

$$X = a_b \sin(\omega_b t + \varphi) \quad (2)$$

де a_b – амплітуда вимушених коливань.

Запишемо похідну рівняння 2

$$Px = a_b \omega_b \cdot \cos(\omega_b t + \varphi)$$

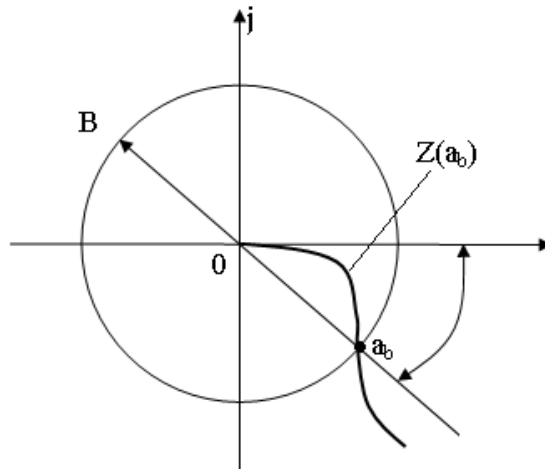
Звідки отримуємо $f(t)$ як функцію від x .

$$f(t) = \frac{B}{a_b} \left(\cos \varphi - \frac{\sin \varphi}{\omega_b} P \right) x \quad (3)$$

Вирішення задачі має вигляд

$$a_b \left[\frac{Q(j\omega_b) + k(j\omega_b)(q + jq')}{S(j\omega_b)} \right] = B e^{-j\varphi} \quad (4)$$

Графічне рішення задачі має вигляд



де $[.]$ функція рівняння (4) у квадратних дужках

$Z(a_b)$ – величина амплітуди a_b вимушених коливань НСАУ при зворотньому впливі у вигляді гармонічної функції (1).

Лекція 9

ПОКРАЩЕННЯ ЯКОСТІ РЕГУЛЮВАННЯ. КОРЕКТУЮЧІ ЛАНКИ

Покращення якості регулювання САУ виконується з метою підвищення запасу стійкості та швидкості. Це виконується застосуванням коректуючих ланок, які мають певні передавальні функції (ПДФ). Ці ланки деколи називають стабілізуючими.

Коректуючі ланки (КЛ) можуть вклинюватись в САУ різними способами:

- 1) послідовним включенням згідно рис.1. та виразу 1

$$W_k(p) = \frac{x_3}{x_1} = \frac{x_2}{x_1} \cdot \frac{x_3}{x_2} = W_c(p) \cdot W_p(p) \quad (1)$$

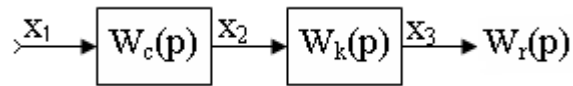


Рис.1. Послідовне включення коректуючої ланки.

- 2) паралельним включенням КЛ (рис.2) та вираз (2)

$$W_k = \frac{x_4}{x_1} = \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_3}{x_1} = W_c(p) + W_k(p) \quad (2)$$

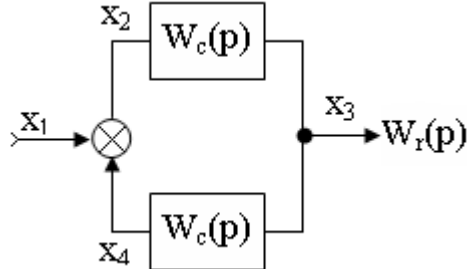


Рис.2. Паралельне включення КЛ коректуючої ланки.

- 3) послідовне зі суматором на виходах (рис.3) та вираз (3)

$$W_k(p) = W_c(p) + W_k(p) \quad (3)$$

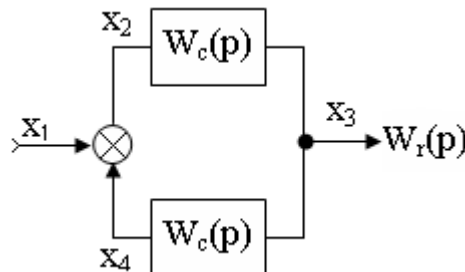


Рис.3. Паралельне включення КЛ з вихідним суматором.

W_k - вихідна ПДФ.

В якості КЛ найчастіше застосовують від'ємні зворотні зв'язки, дуже рідко – додатні зворотні зв'язки згідно виразу (4)

$$W_k(p) = -\frac{W_c(p)}{1 + W_c(p) \cdot W_{oc}(p)}, \quad (4)$$

Результат застосування різних включень КЛ може бути еквівалентним внаслідок аналітичних зв'язків між виразами (1), (2) і (3).

$$W_c(p) \cdot W_k(p) = W_c(p) + W_k(p) = \frac{W_c(p)}{1 + W_c(p) \cdot W_{oc}(p)}$$

наприклад

$$W_{\underline{k}}(p) = \frac{1}{1 + W_c(p) \cdot W_{oc}(p)}; \quad W_{oc}(p) = -\frac{W_k(p)}{W_c^2 + W_c(p) \cdot W_k(p)}$$

Характеристики ПДФ КЛ показані у таблиці 1.

Таблиця 1.

Тип КЛ	ПДФ	Частотна характеристика	Л.а.х. і л.ф.х.
Диференціююча $p = c + j\omega$	$G_0 \frac{1 + T_1 P}{1 + T_2 P}$	$A = \frac{G_0 \sqrt{1 + \omega^2 T_1^2}}{\sqrt{1 + \omega^2 T_2^2}}$ $\Psi = \arctg \omega T_1 - \arctg \omega T_2$	
Інтегруюча	$\frac{1 + T_1 P}{1 + T_2 P}$	$A = \frac{\sqrt{1 + \omega^2 T_2^2}}{\sqrt{1 + \omega^2 T_1^2}}$ $\Psi = \arctg \omega T_2 - \arctg \omega T_1$	
Фазозсуваюча	$\frac{1 - TP}{1 + TP}$	$A(\omega) = 1$ $\Psi = -2\arctg \omega T$	

Введення диференціюючих ланок у від'ємному зворотньому зв'язку підвищує стійкість САУ.

Схеми включення диференціюючих ланок (**Д-ланки**) різних порядків показано на рис.4.

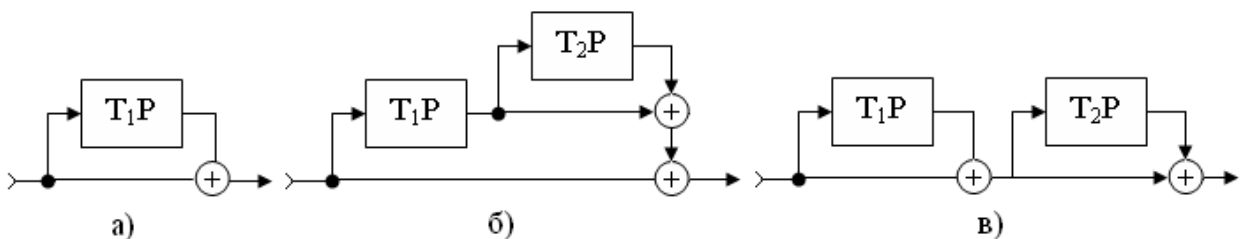


Рис.4. Схеми включення коректуючих Д-ланок.

ПДФ для рис.4. а) $W(p) = 1 + T_1 P$

Рис. 4. б) $W(p) = 1 + T_1 P + T_1 T_2 \cdot P^2$

Рис.4. в) $W(p) = 1 + (T_1 + T_2)P + T_1 T_2 \cdot P^2$

T_1, T_2 - постійні часу Д-ланок.

Включення І-ізодронних ланок (**інтегруючих**), може виконуватись згідно схем (рис.5.)

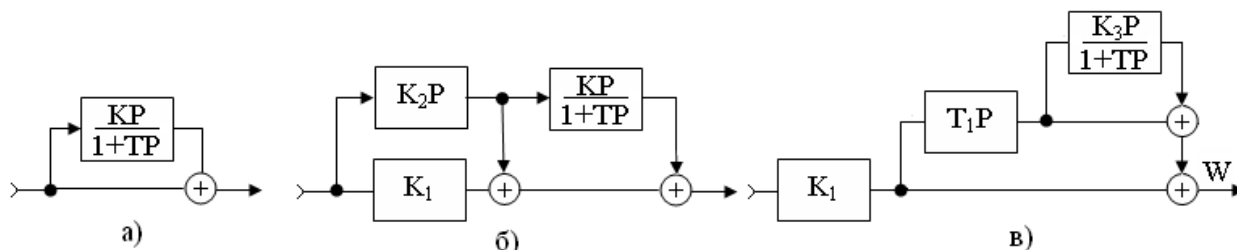


Рис.5. Схеми включення інтегруючих (І-ланок) ПДФ для схем включення І-ланок

Рис.5 а)
$$W(p) = \frac{KP}{1+TP};$$

Рис.5 б)
$$W(p) = K_1 + K_2P + \frac{K_2 \cdot K_3P}{1+TP};$$

Рис.5 в).
$$W(p) = K_1(1 + T_1P + \frac{K_3 \cdot T_1P^2}{1+TP}).$$

У випадку роботи САУ на власній гармоніці ω_0 використовується схема коректування показана на рис.6.

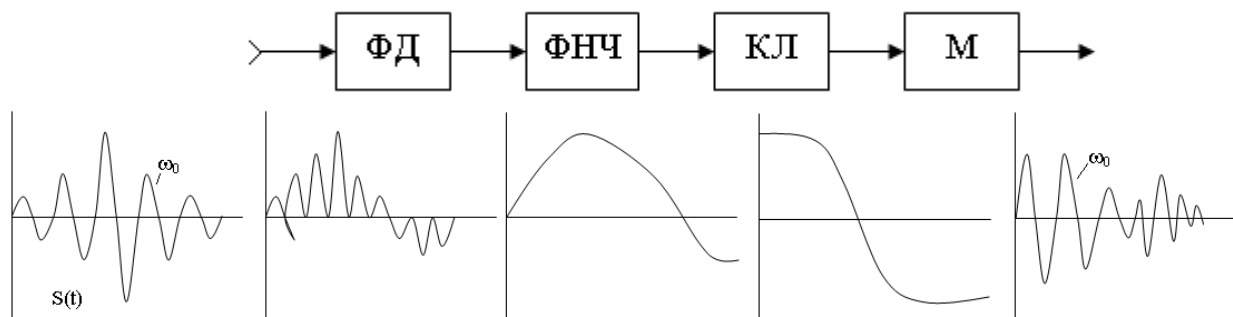


Рис.6. Схема коректування САУ на гармоніці ω_0 .

ФД – фазовий детектор; ФНЧ – фільтр низьких частот; КЛ–коректуюча ланка; М – модулятор; S_x – вхідний сигнал збурення.

Підвищення точності автоматичного регулювання досягається методами:

- підвищення коефіцієнта підсилення розімкненого ланцюга;
- підвищення рівня астатизму;
- регулювання по похідних від помилки регулювання.

Перший спосіб найбільш універсальний і ефективний, але він впливає на стійкість САУ і вона наближається до коливної границі стійкості.

Підвищення порядку астатизму САУ досягається за рахунок введення І-ланок, які описуються диференціальним рівнянням

$$kx_1 = \frac{dx_2}{dt};$$

$$W(p) = \frac{k}{p},$$

і ПДФ або І-ланка з затримкою

$$kx_1 = \frac{d^2 x_2}{dt^2} + \frac{dx_2}{dt};$$

$$W(p) = \frac{k}{p(1+TP)}.$$

Л.а.ф. – логарифмічна амплітудно-частотна характеристика.

Наприклад,

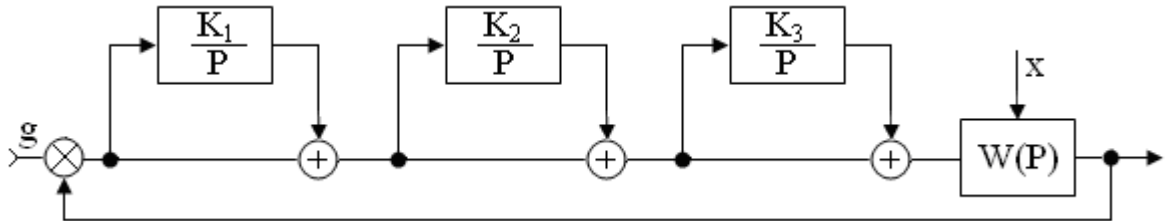
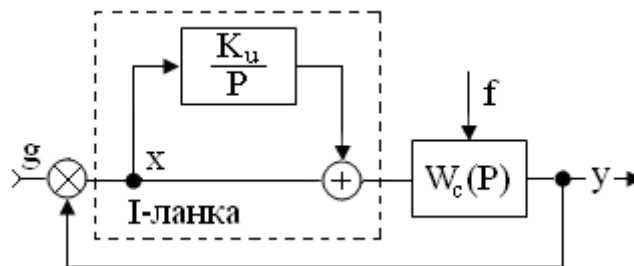


Рис.7. САУ з трьома І-ланками з високою стійкістю



$$W_y(p) = 1 + \frac{k_u}{p} = \frac{k_n(1 + t_u P)}{P},$$

де $T_u = \frac{1}{k_u}$ - постійне часу І-ланки

Чутливість САУ визначається ступенем неідеальності (зміни) окремих параметрів на різні характеристики САУ.

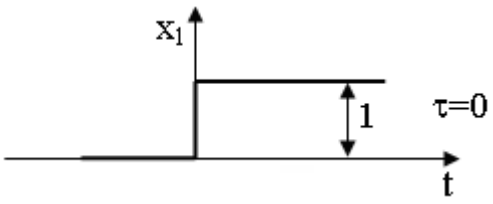
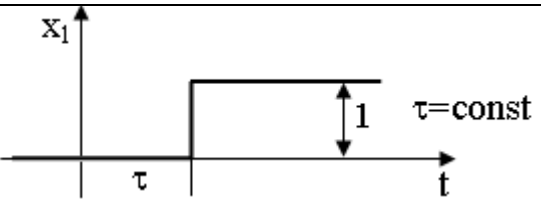
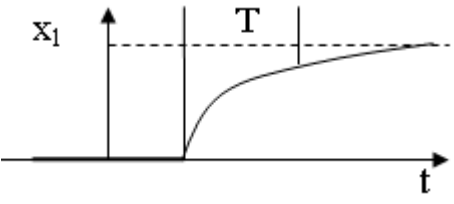
Чутливістю називається деякий показник, що характеризує властивість САУ змінювати режим роботи при відхиленні деякого їх показника від номінального. Теорія оцінки математично складна.

Лекція 10

ЛІНІЙНІ САУ З ЗАПІЗНЕННЯМ

Відрізняються від ЛСАУ, що в одному чи кількох своїх ланок мають запізнення часові.

Розглянемо типові x – стислі часового запізнення в елементах САУ (таблиця 1)

$x^* = x_1(t - \tau)$	
$x^* = x_1(t - 0)$	
$x^* = x_1(t - \tau)$	
$x^* = x_2(t - \tau)$	

Для лінійної ланки з рівнянням

$$T \frac{dx_2}{dt} + x_2 = kx_1$$

(аперіодична ланка першого порядку)

Рівняння такої ланки з запізненням отримує вигляд

$$T \frac{dx_2(t)}{dt} + x_2(t) = kx_1(t - \tau) \quad (1)$$

А після позначення $x_1^*(t) = x_1(t - \tau)$ отримаємо

$$T \frac{dx_2}{dt} + x_2 = kx_1^* \quad (2)$$

Звідки рівняння лінійної ланки із запізненням записуємо у вигляді

$$Q(p)x_2 = R(p)e^{-\lambda px_1},$$

а передавальна функція описується рівнянням

$$W(p) = \frac{R(p)}{Q(p)} e^{-\lambda p} = W_0(p) e^{-\lambda p} \quad (3)$$

$W_0(p)$ - передавальна функція ланки без запізнення.

Частотна передавальна функція отримується із підстановкою $p = j\omega$ тобто

$$W(j\omega) = W_0(j\omega)e^{-j\omega\tau} = A_0(\omega)e^{j[\psi_0(\omega) - \tau\omega]}$$

де $A_0(\omega)$ і $\psi_0(\omega)$ - відповідно модуль і фаза частотної ПФ (передавальної функції).

Отже . для того , щоб отримати Аф – х – стан будь – якої лінійної ланки необхідно кожен її точку зсувати вздовж поля по годинниковій стрілці на кут $\tau\omega$, де ω - значення частоти коливань у даній точці х – сітки (рис.1).

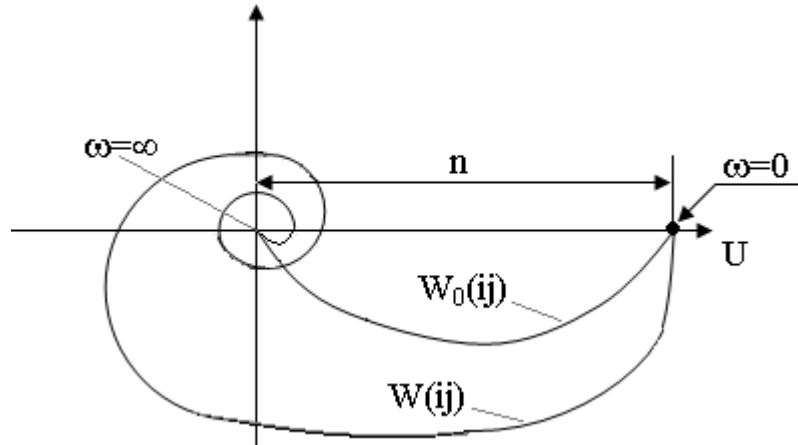


Рис.1. Відмінність АФХ лінійних систем із запізненням $W(j\omega)$ та без нього $W_0(j\omega)$.

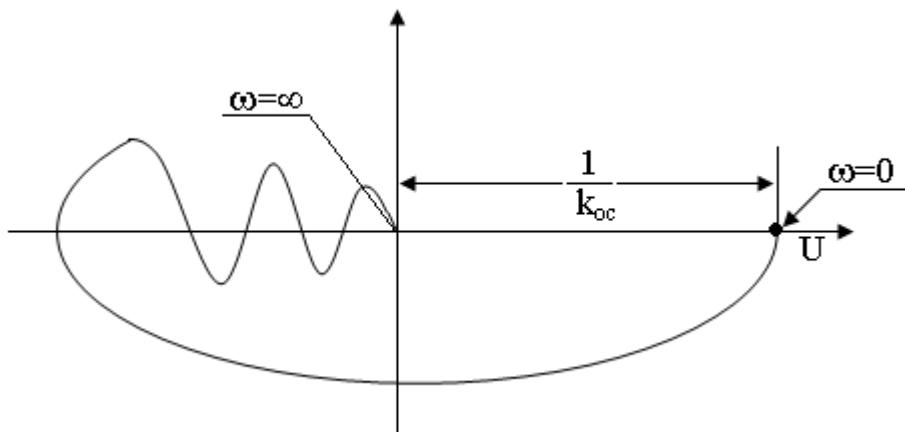


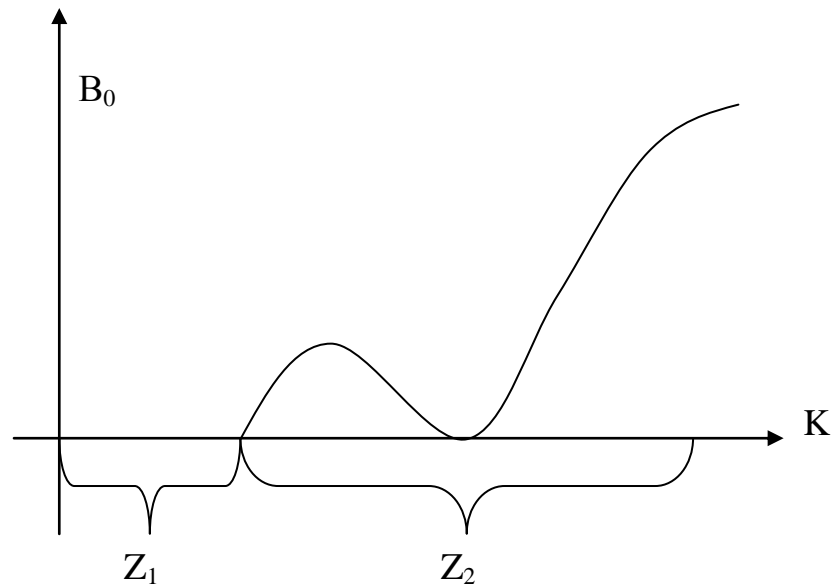
Рис.2. АФХ ланки з від'ємним зворотнім зв'язком і запізненням.

Лекція 11

НЕЛІНІЙНІ САУ

Визначення характеристик вимушених коливань нелінійних САУ (НСАУ) є складною аналітичною задачею, вирішення якої, у першу чергу, залежить від функцій нелінійних коефіцієнтів підсилення САУ (табл.1).

Крім того, форма вимушених коливань НСАУ залежить від порогової величини амплітуди зовнішнього впливу B_0 . Тобто, його мінімальному значенні після якого НСАУ починає зі стійкого стану реагувати на зовнішній вплив.



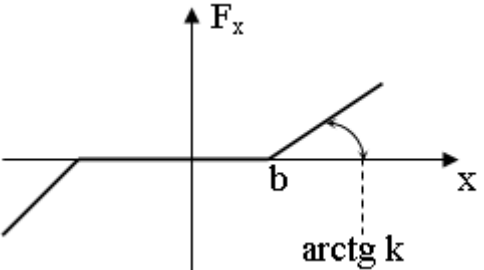
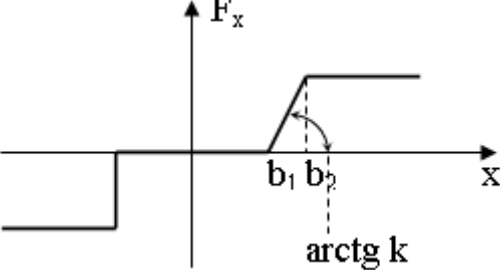
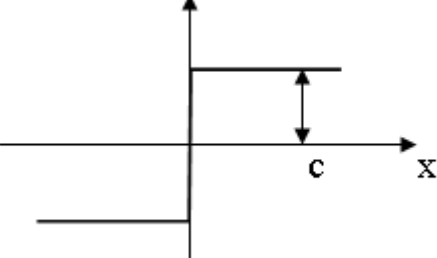
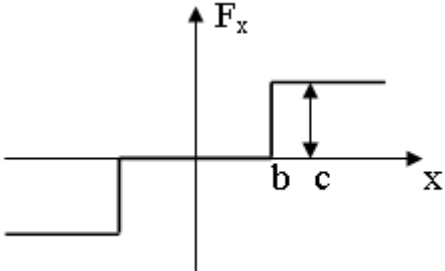
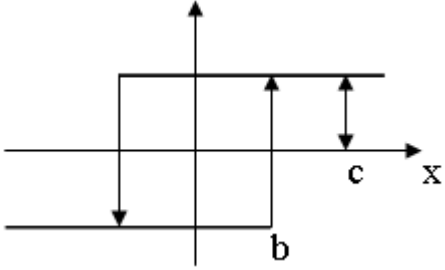
Z_1 – зона стійкої рівноваги та нечутливості

Z_2 – зона вимушених автоколивань

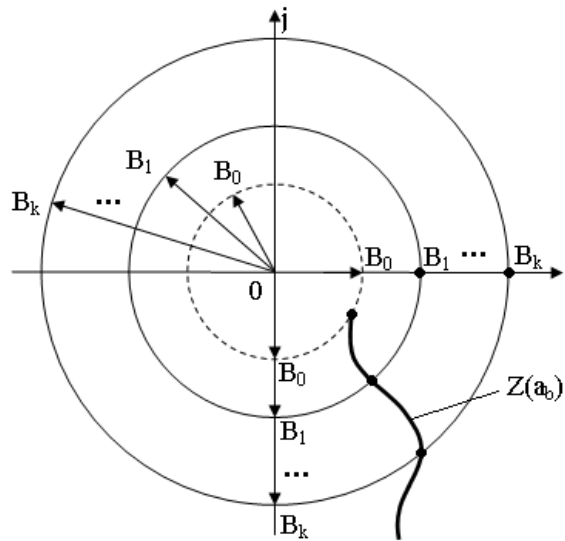
Рис. 1. Реакція НСАУ на зовнішній гармонічний вплив.

Таблиця 1 нелінійні коефіцієнти підсилення САУ.

№	Функція підсилення $F(x)$	Аналітичний вираз
1		$k_n = \frac{2k}{\pi} \arcsin \frac{b}{a_b}$

2		$k_n = k - \frac{2k}{\pi} \arcsin \frac{b}{a_b}$
3		$k_n = \frac{2k}{\pi} \left(\arcsin \frac{b_2}{a_b} - \arcsin \frac{b_1}{a_b} \right)$
4		$k_n = \frac{2c}{\pi a_b}$
5		$k_n = \frac{2c}{\pi a_b} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{b^2}{a_b^2}}}$
6		$k_n = \frac{2c}{\pi a_b} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{b^2}{a_b^2}}}$

При різних амплітудах впливу на НСАУ графічним вирішення має вигляд показаний на рис.2.



B_0 – порогове значення амплітуди зовнішнього впливу на яке починає реагувати нелінійне САУ.

Рис.2.

При різних частотах впливу ω_b отримують залежності амплітуди вимушених коливань $a_b(\omega_b)$ при різних амплітудах B . (рис.3.)

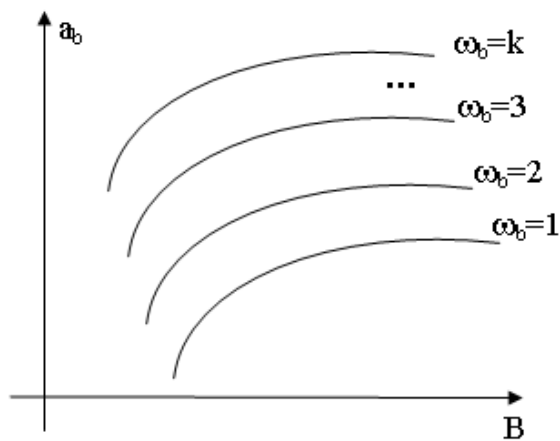


Рис. 3.

При цьому існує деяка частота $\omega_{авт}$ - яке називається частотою захоплення (власне частота коливань) (рис. 4)

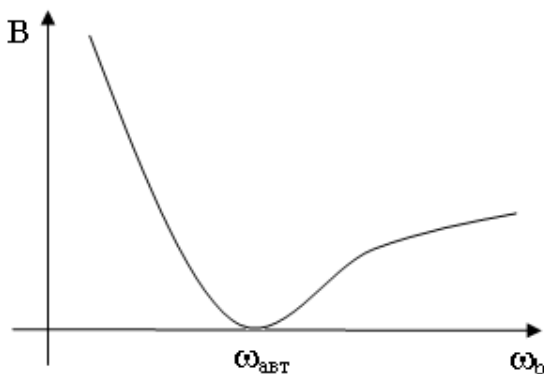


Рис. 4.

Проведений аналіз свідчить, що неланійні САУ можуть вести себе недетімовано і статистично невизначене у залежності від B та ω_B .

В авіації застосовують нелінійне регулювання, щоб зменшити число та період вимушених коливань на основі наступної нелінійності.

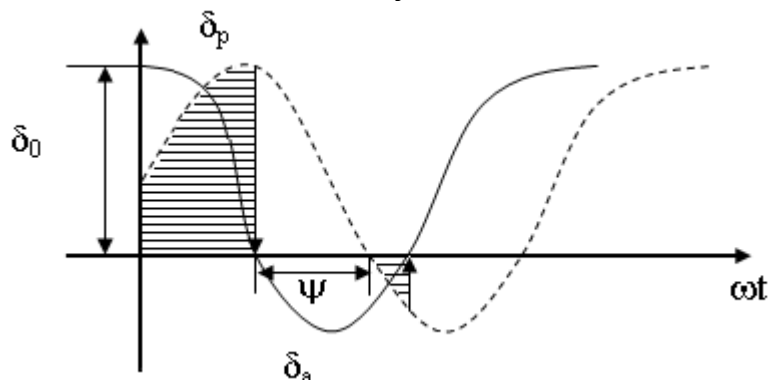


Рис.5. Графік нелінійного регулювання САУ.

З рис.5. видно, що при гармонічних впливах на літальний апарат, наприклад за рахунок турбулентності атмосфери виникає інерційність в легких коливань ОУ і відставання вимушених коливань на кут $\psi = \arctg \omega T$, де T – постійна ОУ.

При цьому крива помилки δ_p відстає від кривої безінерційного ОУ δ_u на кут ψ .

Структура такої НСАУ показана на рис.6.

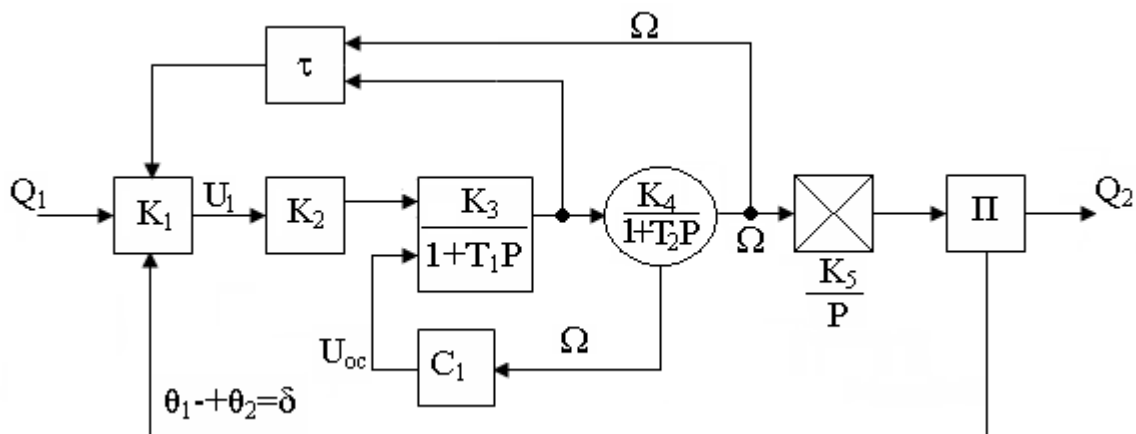


Рис.6. Структура НСАУ стабілізації ОУ з інерцією.

Графік перехідного процесу на виході такої НСАУ показаний на рис.7.

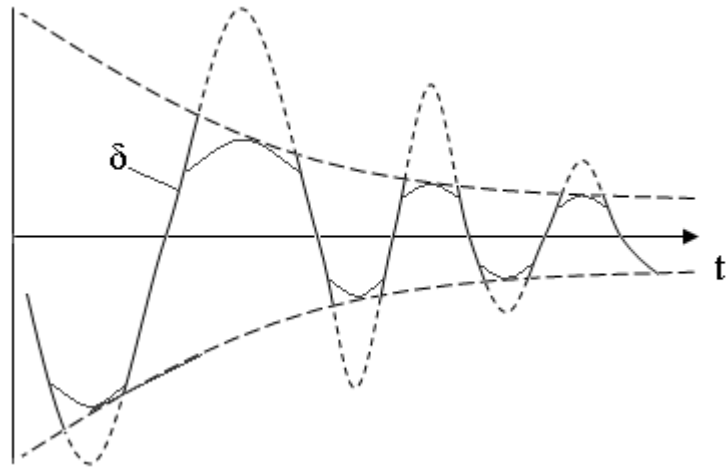


Рис.7. Графік прискорення затухання вимушених коливань НСАУ.

Лекція 12

КРИТЕРІЇ ОПТИМАЛЬНОСТІ ТА ЯКОСТІ САУ.

Під оптимальною САУ розуміється система, яка має деякі найкращі якості. Наприклад:

- 1 - *тах* точність регулювання;
- 2 – *тах* швидкість переходу з одного стану в інший заданий;
- 3 – *тах* ступінь затухання коливань;
- 4 – *тах* стійкість.

1. *тах* точність регулювання забезпечується *мін* помилки регулювання.

$I = \int_0^{\infty} x^2(t)dt = \min$, де величина I називається функціоналом, оскільки вона

залежить від невідомої вибраної функції $x(t)$.

При цьому, рекомендується саме *мін* функція. Можуть бути компромісні суми функціоналів з різними вагами і т.ін.

Методи синтезу САУ.

- кореневий метод (с.341-344);
- кореневих водографів (344-348);
- стандартних перехідних характеристик (348-352);
- логарфмічних амплітудних характеристик (353-376).

Випадкові процеси в САУ.

- закони розподілу;
- $M_x, D_x, \delta_x, R_{xx}, S(\omega)$;
- випадкові процеси.

Оцінка якості СА регулювання.

1) інтегральна оцінка

$I_1 = \int_0^{\omega} x(t)dt$; $I_2 = \int_0^{\omega} |x|dt$, де $x(t)$ – відхилення регульованої величини до

завершення перехідного процесу.

На рис.1. показані приклади таких інтегральних характеристик у вигляді заштрихованих площ.

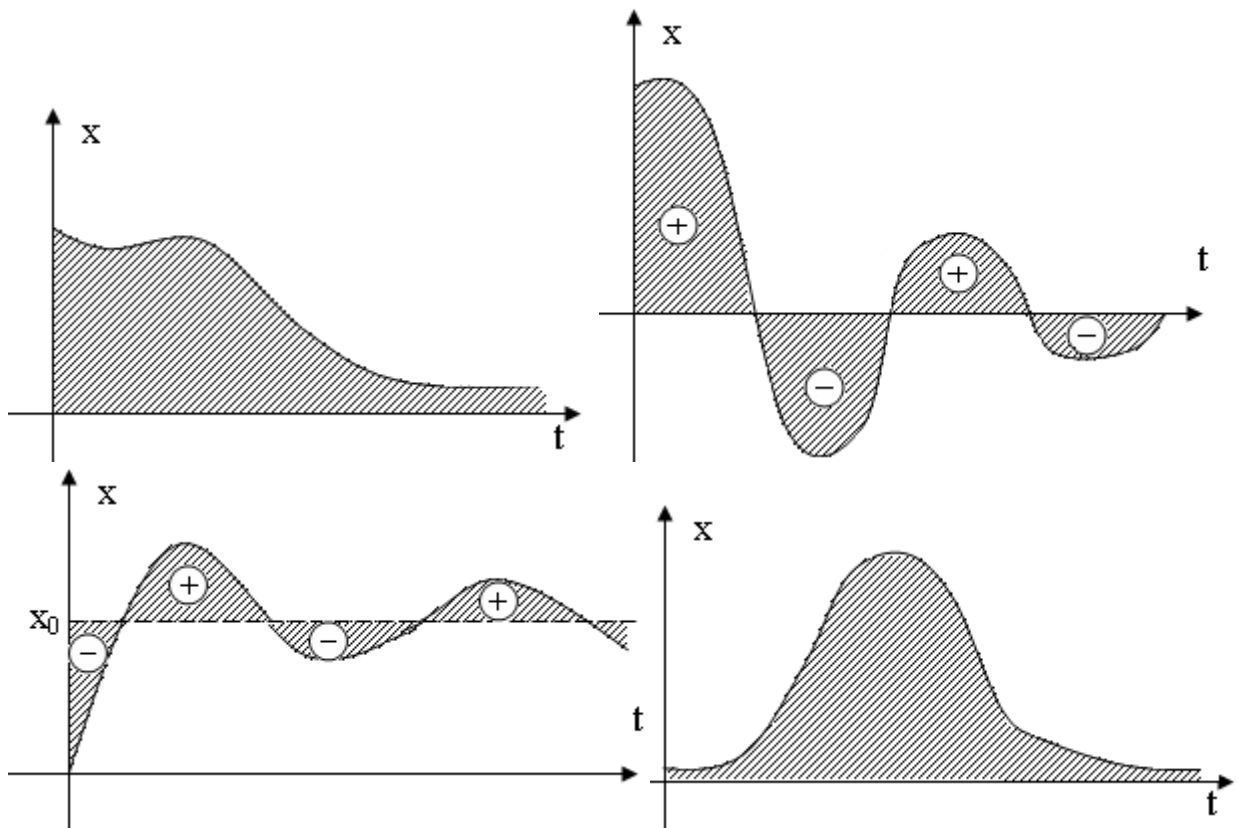


Рис.1. Інтегральні характеристики оцінки якості САУ.

2) квадратично-інтегральна оцінка якості САУ $I_3 = \int_0^{\omega} x^2 dt$ ($x \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$) не залежить від знаків відхилень і форми (монотонної чи коливної) перехідних процесів (рис.2.)

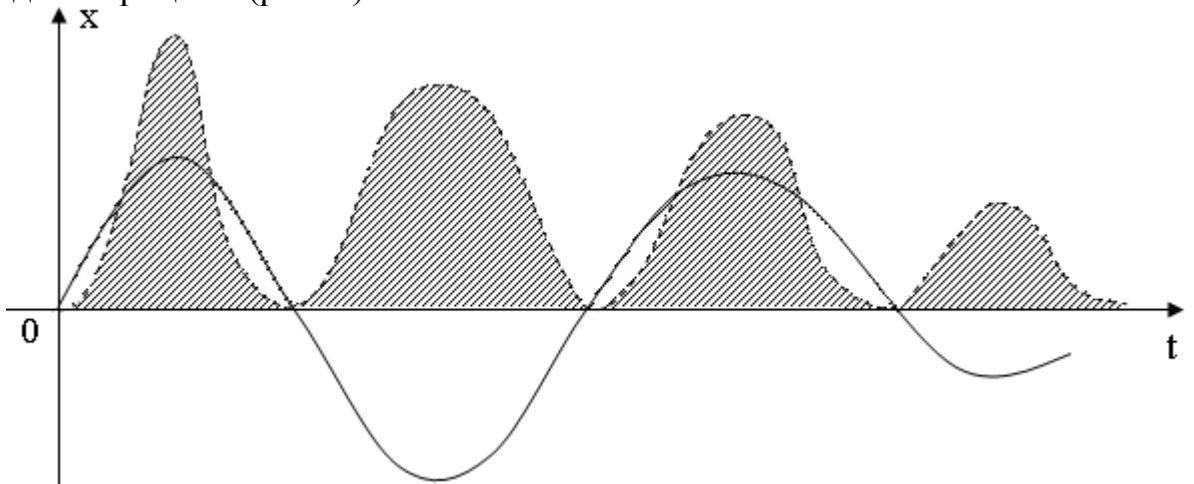


Рис.2 Інтегральна квадратична характеристика оцінки якості.

Більш покращеною оцінкою якості САУ є крім оцінки швидкості згасання перехідного процесу і відповідного меншого значення інтегралів І є врахування швидкості відхилення \dot{x} згідно виразу

$$I_k = \int_0^{\omega} (x^2 + T^2 \dot{x}^2) dt, \text{ де } T - \text{деяка постійна величина.}$$

При цьому досягається зменшення коливних характеристик САУ (рис.2.) показано пунктиром.

$$I_k = \int_0^{\omega} x^2 dt + T^2 \int_0^{\infty} \dot{x}^2 dt$$

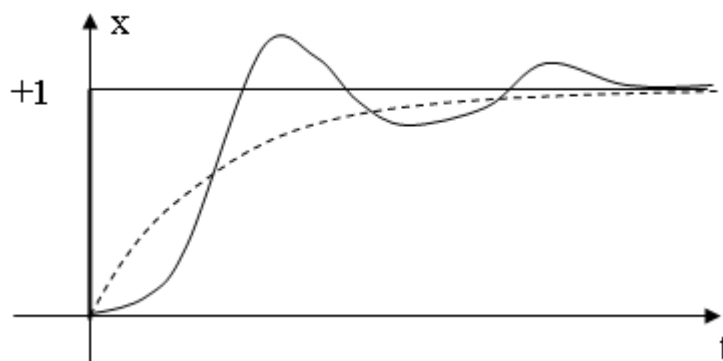


Рис.2. Перехідна характеристика САУ при використанні інтегральної оцінки швидкості відхилення \dot{x}^2 .

3) частотні критерії якості САУ.

Використовуються при оцінці запасу стійкості і відповідають віддаленню амплітудно-фазової характеристики розімкненості САУ (а.ф.х.).

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Згуровский М.З. Интегрированные системы оптимального управления и проектирования. - К.: Вища шк., 1990. - 351с.
2. Бобух А.О. Автоматизация инженерных систем: Навч. посібник. - Харків: ХНАМГ, 2005. - 212с.
3. Автоматизированные системы управления городским хозяйством / Под ред. академика В.М. Глушкова. - К.: Будівельник, 1978. - 144с.
4. Стефани С.П. Основы построения АСУ ТП: Уч. пособие для ВУЗов. - М.: Энергоиздат, 1982. - 352с.
5. Дружинин Г.В. Автоматизированные системы управления технологическими процессами. - М.: Энергия; 1988. - 216с.
6. АСУ ТП. Предпроектная разработка алгоритмов управления / Скурихин В.И., Дубровский В.В., Шифрин В.Б. - К.: Наук. думка, 1980. - 226с.
7. Основы построения и проектирования автоматизированных систем управления в строительстве / Михайлов В.С., Билецкий О.Б. - К.: Вища шк., 1984. - 392с.
8. Романенко В.Д. Методи автоматизації прогресивних технологій: Підручник. - К.: Вища шк., 1995. - 519с.
9. Солодовников В.В., Плотников В.М., Яковлев А.В. Основы теории и элементы систем автоматического регулирования. - М.: Машиностроение, 1985. - 536с.
10. Теорія автоматичного керування. Навчальний посібник Авт. Сорока К.О. – Харків, ХНАМГ, 2006 – 187 с.
11. Попович М.Г., Ковальчук. О.В. Теорія автоматичного керування. – К.: Либідь, 1997. – 544 с.
12. Фельдбаум А.И. Методы теории автоматического управления. – М.: Наука, 1971- 744с
13. Куропаткин П.В. Теория автоматического управления . – М.: Высш. шк., 1973 – 528 с.
14. Айзерман М.А. Теория автоматического управления. М.: Наука, 1966.
15. Нетушил А.В. Теория автоматического управления. Ч.1. Линейные системы
16. Воронов А.А. (под ред.). Теория автоматического управления. Ч.1 – М.: Выс. шк. 1986. – 367 с.
17. Юревич Е.И. Теория автоматического управления. – Л.: Энергия, 1975. – 416 с.
18. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического регулирования. – М.: Физматгиз, 1975. – 768 с.
19. Власов К. П. Специальный курс по теории автоматического управления. — Х.: Харьк. политехн. ин-т, 1974. — 198 с.
20. Теорія автоматичного керування. Навчальний посібник Авт. Сорока К.О. – Харків, ХНАМГ, 2006 – 187 с.
21. Макаров И. М., Менский Б. М. Линейные автоматические системы. — М.: Машиностроение, 1977. - 464 с.

22. Попович М.Г., Ковальчук О.В. П58 Теорія автоматичного керування: Підручник. - К.: Либідь, 1997. - 544 с.
23. Попович М.Г., Борисюк М.Г., Гаврилюк В.А та ін. Теорія електропривода. – К.: Вища шк., 1993, – 494 с.
24. Попов Е. П. Теория нелинейных систем автоматического регулирования и управления. — М.: Наука, 1988. - 256 с.