АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНСКОЙ ССР
ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ
Специализированный совет К 016.50.01

На правах рукописи

ЕРЕМЕНКО Валерий Александрович

ИССЛЕДОВАНИЕ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ С КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

01.01.02 - дифференциальные уравнения и математическая физика

А в т о р е ф е р а т

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Киев - 1981

Работа выполнена в ордена Трудового Красного Знамени Институте математики АН УССР.

Научный руководитель - член-корреспондент АН УССР, доктор физико-математических наук, профессор А.М. САМОЙЛЕНКО.

Официальные оппоненты - доктор физико-математических наук, профессор В.И. РОЖКОВ,

кандидат физико-математических наук А.Ф. ТУРБИН.

Ведущая организация - Воронежский государственный университет им.Ленинского комсомола.

Защита состоится "29" сентября 1981 г. в 15 часов на заседании специализированного совета К 016.50.01 Института математики АН УССР (252601, г. Киев-4, ГСП-4, ул. Репина, 3).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики АН УССР.

Автореферат разослан "...." .... 1981 г.

Ученый секретарь
специализированного совета А.Ю. ЛУЧКА

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В различных областях современной науки и техники встречаются процессы, описываемые системами обыкновенных дифференциальных уравнений, матричная функция при производных которых вырождена или вырождается при нулевом значении малого параметра. Такие системы появляются в теории автоматического регулирования, математической экономике, кинетике, теории нелинейных колебаний, теории гироскопических систем и т. д. Задача о периодических или квазипериодических решениях таких систем мало изучена.

Целью работы является исследование неразрывных периодических и квазипериодических решений систем вида

$$A(t)\frac{dx}{dt}=B(t)x+f(t),\ x\in E^{n},\ t\in R^{1}, \qquad (1)$$

$$\left[A(t)+\varepsilon P(t,\varepsilon)\right]\frac{dy}{dt}=F(y,t,\varepsilon),\ y\in E^{n},\ t\in R^{1},\ 0<\varepsilon\ll 1, \qquad (2)$$

с вырожденной матрицей A .

Научная новизна. Предыдущие исследования системы (1) Ф.Р. Гантмахера, Ю.Е. Бояринцева, Ю.Д. Шлапака, Б. Кведараса и др. предполагали выполнение некоторых из условий: постоянность матриц A и B , их периодичность, обладание матрицей $A(t)$ постоянной структурой относительно нулевого собственного значения (постоянность числа нулевых собственных чисел и количества элементарных делителей, соответствующих им) или так называемым свойством Ω , заключающимся в том, что $A(t)$ либо неособенная, либо приводится к жордановой форме посредством постоянной матрицы, либо все её элементарные делители, соответствующие нулевым собственным значениям, суть простые. Задачи о квазипериодических решениях системы (I), насколько нам известно, ещё не изучалась.

Что касается систем (2), то авторы, исследовавшие периодические или почти периодические решения (Л.Флэтто и Н.Левинсон, В.Базов, И.М.Волк, Д.В.Аносов, А.Б.Васильева, В.М.Волосов, А.М.Самойленко, К.В.Задирака, Я.С.Барис и В.И.Фодчук, В.И.Рожков, А.Халанай, Дж.Хейл, В.А.Треногин, Т.Сабиров, К.Алымкулов, В.В.Алешин, Л.Е.Ежова, К.С.Сейтказиева и др.) предполагали диагональность постоянных матриц при производных. Существенно более изученной является задача Коши для уравнений (I) и (2) в банаховом и конечномерном пространствах, которая исследовалась в работах В.С.Королюка и А.Ф.Турбина, В.П.Скрипника, С.Г. Крейна и К.И.Чернышова, В.П.Глушко и др.

В работе матрицы A и P являются периодическими или квазипериодическими функциями и имеют постоянный или переменный ранг, т.е. системы (I) и (2) принадлежат к намного более широкому классу в сравнении с ранее изучавшимися.

Практическая и теоретическая ценность. Установленные в работе условия существования гладких (неразрывных) периодических и квазипериодических решений систем вида (I) и (2) играют важную роль в теоретических исследованиях, так и в вычислительной практике, поскольку они гарантируют существование колебательных процессов систем, описываемых математические модели практически важных задач.

Общая методика выполнения работы. Теоретическую и методологическую основу диссертации составляют методы линейной алгебры, метод интегральных многообразий Н.Н.Боголюбова – Ю.А.Митропольского, а также принцип сжатых отображений и его модификации.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались и обсуждались на семинаре по математической физике и теории не-

линейных колебаний Института математики АН УССР, на Республиканских семинарах, проводимых на кафедре дифференциальных уравнений в Киевском госуниверситете, на Всесоюзной конференции по асимптотическим методам в теории сингулярно возмущенных уравнений (Алма-Ата, июнь 1979 г.), на семинаре кафедры нелинейных колебаний Воронежского госуниверситета.

Публикации. Основные результаты диссертации отражены в публикациях [I - 5].

Структура и объем работы. Диссертационная работа изложена на 146 страницах машинописи и состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы, включающего 103 работы.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении приведен обзор результатов ряда математиков при изучении систем (I) и (2), обосновывается актуальность работы, изложено краткое содержание диссертационной работы.

В первой главе изучаются условия существования периодических и квазипериодических решений линейных систем вида (I) и (2) с вырожденной матрицей при производных.

В § I исследуются некоторые свойства матриц из класса $C^r(R^m, 2\pi), r \geq 0$, (матрицы, элементы которых – функции m действительных переменных, периодические по каждой из них с периодом 2π , непрерывные вместе со всеми производными до порядка r включительно). Вырожденность матрицы равносильна тому, что хотя бы одно из её собственных значений – нулевое. Доказана

Т е о р е м а I. Необходимым и достаточным условием постоянности структуры $n \times n$ -матрицы $A(t) \in C^r(R^1, 2\pi), r \geq 0$, относительно нулевого собственного значения является выполнение равеннств $\operatorname{rank} A^{i}(t)\equiv const\ \ \forall t\in R^1,\ i=\overline{1,p}$, где p – индекс матрицы $A(t)$.

Следовательно, матрица постоянного ранга, нулевые собственные значения которой могут менять кратность, принадлежат более широкому классу матриц по сравнению с классом матриц, обладающих постоянной структурой относительно нулевого собственного значения или свойством Ω. Поэтому к ней не применима теорема Сибуи о периодической блочной диагонализации, если одну из двух групп собственных значений составляют нулевые.

В связи с этим доказаны следующие утверждения, гарантирующие возможность невырожденного преобразования $n\times p$ -матрицы из $C^r(R^m, 2\pi)$, $r\geq 1$, ранга k в периодическую матрицу той же гладкости с нулевым $(n-k)\times p$ -мерным блоком и являющиеся в данной работе аналогом упомянутой выше теоремы Сибуи.

Л е м м а 4. Пусть $n\times p$ -матрица $A(t)\in C^r(R^1, 2\pi)$, $r\geq 1$, и $\operatorname{rank} A(t)=k\equiv const$, $k<n$ при $n\leq p$ и $k\leq p$ при $n>p$.

Тогда существует невырожденная на R^1 $n\times n$ -матрица $W(t)\in C^r(R^1, 4\pi)$ такая, что

$$W(t)A(t)=\begin{pmatrix} A_1(t)\\ O_{n-k,p}\end{pmatrix},\ \operatorname{rank} A_1(t)\equiv k,\ t\in R^1,$$

где $O_{l,m}$ – нулевая $l\times m$ -матрица.

Л е м м а 8. Пусть $n\times p$ -матрица $A(\varphi)\in C^r(R^m, 2\pi)$, $r\geq 1$, $\operatorname{rank} A(\varphi)=k\equiv const$, $1\leq k\leq n-1$ при $n\geq p$ и $1\leq k\leq n-2$ при $n<p$, выполняется неравенство $n>\begin{cases} m+1, & k=1,\ k=n-1,\\ m+k, & 1<k<n,\end{cases}$

причем в случае $1<k<n-1$ матрица A имеет k линейно независимых столбцов или строк с фиксированными номерами.

Тогда существует невырожденная на R^m $n\times n$ -матрица $V(\varphi)$

такая, что

$$V(\varphi)A(\varphi)=\begin{pmatrix} A_1(\varphi)\\ O_{n-k,p}\end{pmatrix},\ \operatorname{rank} A_1(\varphi)\equiv k,\ \varphi\in R^m,\ V\in\begin{cases} C^r(R^m, 4\pi), & k=1,\ k=n-1,\\ C^r(R^m, 2\pi), & 1<k<n-1.\end{cases}$$

Отметим, что ограничительность условий леммы 8 обусловлена появлением при $m\geq 2$ качественно новых свойств квазипериодических векторов, например, существование единичного квазипериодического вектора, не дополняемого до квазипериодического базиса в E^n при любом нечетном $n\geq 3$.

Там же устанавливаются критерии постоянности рангов некоторых произведений матриц из $C^r(R^m, 2\pi)$, а также доказывается аналог леммы 4 в случае, когда $A(t,\varepsilon)\in C^r(R^1, 2\pi)$ и является непрерывной матричной функцией ε, $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]$.

В § 2 исследуются условия совместности и существования гладких периодических решений системы вида

$$P(t)\dot{x}=A(t)x+f(t), \qquad (3)$$

где $n\times p$ -матрицы P, A и n -вектор f принадлежат $C^r(R^1, 2\pi)$, $r\geq 1$, $\dot{x}=\frac{dx}{dt}$, на основании алгоритмической процедуры последовательного понижения порядка системы (3).

В случае постоянности ранга матрицы при производных приведены условия совместности системы (3) и существования гладких периодических решений, в которых фигурируют матрицы и числа, определяемые по рекуррентным формулам, исходными для которых являются коэффициенты системы (3). Установлена формула, выражающая любое решение системы (3) через решение конечной системы алгоритмической процедуры. Приведены примеры систем (3), для которых число шагов алгоритмической процедуры не менее двух и к которым не применима упомянутая выше теорема Сибуи.

В случае изменения ранга матрицы при производных с течением времени установлены условия, определенные рекуррентными формулами, при которых система (3) приводится к системе вида (3) меньшего порядка, ранг матрицы при производных которой меньше минимальной размерности строк или столбцов на множестве $\mathcal{D}\subset R^1, \mathcal{D}\neq R^1, \mathcal{D}\neq\emptyset$. Системы такого типа с квадратными матрицами более общего вида изучены в § 3.

Отметим, что гладкость периодического решения системы (3) ниже гладкости коэффициентов системы (3) на порядок количества проведенных шагов алгоритмической процедуры. Этот факт не является неожиданным, поскольку еще около пятнадцати лет назад Ю. Мозером приведен пример скалярного уравнения вида (3) с коэффициентами, непрерывно дифференцируемыми любое число раз, решения которого имеют только конечное число непрерывных производных.

В § 3 установлены условия существования единственного гладкого инвариантного тора системы уравнений

$$\dot{\varphi}=a(\varphi),\ B(\varphi)\dot{x}=A(\varphi)x+f(\varphi), \tag{4}$$

где $\varphi\in R^m$, $x\in E^n$, B и A - $n\times n$ -матрицы, a, B, A, $f\in C^r(R^m, 2\pi)$, $r\geq 1$, для произвольного вектора неоднородности f.

Если в частности, в (4) положить $a(\varphi)\equiv\omega=(\omega_1,\dots,\omega_m)$, где ω_i $(i=\overline{1,m})$ - система несоизмеримых чисел, то придем к задаче о квазипериодическом решении.

Последовательно рассматривая случаи, когда $B=\rho(\varphi)I_n$, $B=\begin{pmatrix}\rho(\varphi)\\ O_{n-1,n}\end{pmatrix}$, где ρ - скалярная функция, не равная тождественно нулю, I_n - единичная $n\times n$ -матрица, $\rho(\varphi)$ - вектор-строка, норма которой может принимать в некоторых точках нулевое значение, получено следующее утверждение.

Т е о р е м а 6. Пусть система уравнений (4), все коэффициенты которой принадлежат $C^r(R^m, 2\pi)$, $r\geq 2$, удовлетворяет следующим условиям.

1. Матрица $A(\varphi)$ невырождена при всех $\varphi\in R^m$.
2. Существует $n\times k$ -матрица $\hat{B}(\varphi)\in C^r(R^m, 2\pi)$ такая, что $\operatorname{rank}[B(\varphi), \hat{B}(\varphi)]\equiv 1$.

Тогда можно указать такое фиксированное число $\delta>0$, что неравенство

$$\|A^{-1}\|\left[\|B\|\left(\|a\|+\left\|\frac{\partial a}{\partial\varphi}\right\|\right)+\|a\|\left\|\frac{\partial B}{\partial\varphi_i}\right\|\right]+\|a\|\|B\|\left\|\frac{\partial A^{-1}}{\partial\varphi_i}\right\|\leq\delta,\ i=\overline{1,m},$$

где нормы матриц операторные, обеспечивает существование единственного инвариантного тора $x=U(\varphi)$, $U(\varphi)\in C^{r-1}(R^m, 2\pi)$, $r\geq 2$, системы уравнений (4) для любой неоднородности $f(\varphi)\in C^r(R^m, 2\pi)$.

Приведен пример, иллюстрирующий теорему 6.

Условие 2 теоремы 6 выполняется не для любой матричной функции $B(\varphi)$. Оказывается, что система уравнений (4), для которой это условие не выполнено, может иметь гладкий инвариантный тор, а именно: имеет место

Т е о р е м а 7. Пусть относительно системы уравнений

$$\dot{\varphi}=a(\varphi),\ \rho B(\varphi)\dot{x}=A(\varphi)x+f(\varphi), \tag{5}$$

где a, $B=\{b_{ij}\}_{i,j=1,2}$, $A=\{a_{ij}\}_{i,j=1,2}$, $f\in C^r(R^m, 2\pi)$, $r\geq 2$, ρ - параметр, $0\leq\rho\leq\rho_0$, известно, что

1) $\det A(\varphi)\neq 0$ $\forall\varphi\in R^m$;

2) $\operatorname{rank}\begin{pmatrix}b_{11} & a_{11}\\ b_{21} & a_{21}\end{pmatrix}\equiv 1$ или $\operatorname{rank}\begin{pmatrix}b_{12} & a_{12}\\ b_{22} & a_{22}\end{pmatrix}\equiv 1$.

Тогда можно указать такое значение $\rho_1 \in (0, \rho_0]$, что при всех $\rho \in [0, \rho_1]$ система уравнений (5) имеет единственный гладкий инвариантный тор $x = u(\varphi)$, $u(\varphi) \in C^{r-1}(R^m, 2\pi)$, $r \geq 2$, для каждой неоднородности $f(\varphi) \in C^r(R^m, 2\pi)$.

Приведен пример, иллюстрирующий теорему 7.

В случае $1 \leq \operatorname{rank} B(\varphi) \neq const$ установлены достаточные условия существования единственного гладкого инвариантного тора $x = u(\varphi)$, $u(\varphi) \in C^{r-q}(R^m, 2\pi)$, системы (5) для произвольной неоднородности $f(\varphi) \in C^r(R^m, 2\pi)$, где q – число шагов алгоритмической процедуры, примененной к системе (5). При этом требуется дополняемость матрицы при производных на каждом шаге до матрицы постоянного ранга.

В § 4 для матрично-сингулярно возмущенной системы вида

$$P(t,\varepsilon)\dot{x} = A(t,\varepsilon)x + f(t,\varepsilon), \tag{6}$$

где $n \times n$ -матрицы P, A и n -вектор f принадлежат при каждом значении малого положительного параметра ε $C^r(R^1, 2\pi)$,

$$P(t,\varepsilon) = \begin{pmatrix} P_1(t,\varepsilon) \\ \varepsilon P_2(t,\varepsilon) \end{pmatrix}, \tag{7}$$

P_1 и P_2 – матрицы размерности $k \times n$ и $(n-k) \times n$ соответственно,

$$\begin{gathered} \operatorname{rank} P_1(t,0) \equiv k,\ \operatorname{rank} P_2(t,0) \equiv n-k,\ 1 \leq k \equiv const \leq n-1, \\ \operatorname{rank} P(t,\varepsilon) \equiv p = const,\ \min(k, n-k) \leq p \leq n-1,\ \varepsilon \in [0, \varepsilon_0], \end{gathered} \tag{8}$$

с помощью алгоритмической процедуры последовательного понижения порядка системы выведены достаточные условия существования для произвольного вектора $f(t,\varepsilon) \in C^r(R^1, 2\pi)$ единственного гладкого периодического решения $x_0(t,\varepsilon)$, удовлетворяющего на $R^1 \times [0, \varepsilon^0]$, $\varepsilon^0 > 0$, оценке $\|x_0(t,\varepsilon)\| \leq K \max\limits_t \|f(t,\varepsilon)\|$ с положительной постоянной K, не зависящей от ε.

Вторая глава посвящена изучению условий существования инвариантных торов систем уравнений вида

$$\dot{\varphi} = a(\varphi,\varepsilon),\quad [A(\varphi) + \varepsilon P(\varphi,\varepsilon)]\dot{x} = B(\varphi,\varepsilon)x + f(\varphi,\varepsilon), \tag{9}$$

где $n \times n$ -матрицы A, P, B, m -вектор a и n -вектор f принадлежат $C^r(R^m, 2\pi)$, матрица $A(\varphi)$ вырождается во всех или в некоторых точках R^m, $\det[A(\varphi) + \varepsilon P(\varphi,\varepsilon)] \neq 0$ $\forall \varphi \in R^m$, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$.

Если матрицы A и P постоянны, а $m = 1$, то, как известно, система (9) при определенных условиях обладает периодическим решением, непрерывным по ε в точке $\varepsilon = 0$. Более того, изменение ранга матриц при производных в случае их симметричности, знакоопределенности матрицы $B(\varphi,0)$ и $r \geq \frac{m}{2} + 1$ также не нарушает непрерывности тора в точке $\varepsilon = 0$.

В связи с этим для случая несимметричности матрицы $A + \varepsilon P$ возникают рассматриваемые в § 5 вопросы: при каких условиях система (9) обладает инвариантным тором $x = u(\varphi,\varepsilon)$, $u(\varphi,\varepsilon) \in C^r(R^m, 2\pi)$, и сохраняется ли непрерывность $u(\varphi,\varepsilon)$ в точке $\varepsilon = 0$.

Обозначим: $Q(\varphi,\varepsilon)$ $n \times n$-матрицу, (i, j) -элемент которой является алгебраическим дополнением (j, i) -элемента матрицы $A(\varphi) + \varepsilon P(\varphi,\varepsilon)$; $\Delta(\varphi,\varepsilon) \equiv \det[A(\varphi) + \varepsilon P(\varphi,\varepsilon)]$, $H(\varphi,\varepsilon) \equiv [\operatorname{sign} \Delta(\varphi,\varepsilon)]\, Q(\varphi,\varepsilon) B(\varphi,\varepsilon)$,

$$\beta(\varphi,\varepsilon) \equiv \min_{\|\eta\|=1} |\langle H(\varphi,\varepsilon)\eta, \eta \rangle|,\quad \alpha(\varphi,\varepsilon) \equiv \max_{\|\xi\|=1} \left|\left\langle \frac{\partial a(\varphi,\varepsilon)}{\partial \varphi}\xi, \xi \right\rangle\right|,$$

$$|v(\varphi,\varepsilon)|_0 = \max_{\varphi \in R^m,\ \varepsilon \in [0,\varepsilon_0]} \|v(\varphi,\varepsilon)\|,\quad |v(\varphi,\varepsilon)|_r = \max_{0 \leq \rho \leq r} |D^\rho v(\varphi,\varepsilon)|_0,$$

где $\eta \in E^n$, $\xi \in E^m$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – обычное скалярное произведение в E^n, $\|\eta\|^2 = \langle \eta, \eta \rangle$, $D^\rho v(\varphi,\varepsilon)$ – любая производная по φ_i $(i = \overline{1,m})$ функции $v(\varphi,\varepsilon)$ порядка ρ.

Ответ на первый вопрос дает следующая

Т е о р е м а IО. Пусть

I. Матричные функции $a, A, P, B, f \in C^r(R^m, 2\pi), r \geq 0, a \in C^{0,5}(R^m, 2\pi)$ и непрерывны по ε на $[0, \varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 > 0$.

2. Для всех $\varphi \in R^m$ и $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ $\Delta(\varphi, \varepsilon) \neq 0$, причем

$$[A(\varphi) + \varepsilon P(\varphi,\varepsilon)]^* \neq A(\varphi) + \varepsilon P(\varphi,\varepsilon), \ 0 \leq \operatorname{rank} A(\varphi) \neq const.$$

3. В зависимости от значения r для всех $\varphi \in R^m$ и $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ справедливо одно из неравенств

$$\beta(\varphi,\varepsilon) > 0 \quad (r=0), \quad \beta(\varphi,\varepsilon) - r\alpha(\varphi,\varepsilon)|\Delta(\varphi,\varepsilon)| > 0 \quad (r \geq 1).$$

Тогда можно указать такое $\varepsilon^0 \in (0, \varepsilon_0]$, что для каждого $\varepsilon \in (0, \varepsilon^0]$ система уравнений (9) имеет единственный инвариантный тор: $x = u(\varphi,\varepsilon), u(\varphi,\varepsilon) \in C^r(R^m, 2\pi)$, удовлетворяющий неравенству

$$|u(\varphi,\varepsilon)|_r \leq K \left| \frac{Q(\varphi,\varepsilon) f(\varphi,\varepsilon)}{\beta(\varphi,\varepsilon) - r\alpha(\varphi,\varepsilon)|\Delta(\varphi,\varepsilon)|} \right|_r$$

с положительной постоянной K, не зависящей от ε, и являющийся экспоненциально устойчивым, если матрица $H(\varphi,\varepsilon)$ на $R^m \times (0, \varepsilon_0]$ отрицательно определена и неустойчивым, если $H(\varphi,\varepsilon)$ на $R^m \times (0,\varepsilon_0]$ положительно определена.

Оказывается, что ответ на второй вопрос в общем случае отрицательный. Например, система уравнений

$$\begin{cases} (1+\varepsilon+\sin t)\dot{x}_1 + \dot{x}_2 = -5x_1, \\ -(1+\sin t)(1+\varepsilon+\sin t)\dot{x}_1 + \varepsilon\dot{x}_2 = 5(1+\sin t)x_1 - x_2 + \left(1+\frac{\cos t}{3}\right)(1+\varepsilon+\sin t)^{1/3} \end{cases}$$

обладает периодическим решением $x^0(t,\varepsilon)$ таким, что в точке $t = \frac{3}{2}\pi$ $\|x^0(t,\varepsilon)\| \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$. Вместе с тем существуют системы, удовлетворяющие условиям теоремы IО и обладающие, например, периодическими решениями, непрерывными в точке $\varepsilon = 0$. А

именно, имеет место

Т е о р е м а II. Пусть относительно системы уравнений (9), где $a \equiv 1, A = \{a_{ij}\}_{i,j=1,2}, P = \{p_{ij}\}_{i,j=1,2}, B = \{b_{ij}\}_{i,j=1,2}, f = \{f_i\}_{i=1,2}$, справедливы условия теоремы IО с $m = r = 1$ и следующие соотношения

$$b_0 - \max_{\varphi \in R^1} |\dot{\Delta}_1(\varphi, 0)| > 0,$$

$$a_{ij}(\varphi) + \varepsilon p_{ij}(\varphi,\varepsilon) \equiv k(\varphi,\varepsilon) b_{ij}(\varphi,\varepsilon) \quad (i = 1,2; \ j = 1 \ \text{или} \ j = 2),$$

где $\min_{\varphi \in R^1, 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0} |\det B(\varphi,\varepsilon)| \geq b_0 = const > 0, \ \Delta_1(\varphi,\varepsilon) = \dot{\Delta}(\varphi,\varepsilon) k^{-1}(\varphi,\varepsilon)$.

Тогда система (9) обладает для всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ периодическим решением $x = x^0(\varphi,\varepsilon) \in C^1(R^1, 2\pi)$, удовлетворяющим оценке $\|x^0(\varphi,\varepsilon)\| \leq K \|f(\varphi,\varepsilon)\|$ с постоянной $K > 0$, не зависящей от ε.

Приведен пример, иллюстрирующий теорему II.

В § 6 продолжено изучение системы уравнений (9) но в случае постоянности ранга матрицы $A(\varphi)$. Система (9) невырожденным для всех $\varphi \in R^m, \varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ преобразованием приводится к виду

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = a(\varphi,\varepsilon), \quad \dot{y} = b(\varphi,\varepsilon)y + c(\varphi,\varepsilon)z + g_1(\varphi,\varepsilon), \\ \qquad \varepsilon\dot{z} = \varepsilon d(\varphi,\varepsilon)y + p(\varphi,\varepsilon)z + \varepsilon g_2(\varphi,\varepsilon). \end{cases} \qquad (IO)$$

Доказано, что система (IО) имеет $(m+k)$-параметрическое интегральное многообразие $z = L(\varphi,\varepsilon)y + q(\varphi,\varepsilon)$, являющееся экспоненциально устойчивым или экспоненциально дихотомичным, где $(n-k) \times k$-матрица $L(\varphi,\varepsilon)$ и $(n-k)$-вектор $q(\varphi,\varepsilon)$ принадлежат $C^r(R^m, 2\pi)$ и $|L(\varphi,\varepsilon)|_r \leq \Delta(\varepsilon), |q(\varphi,\varepsilon)|_r \leq \rho(\varepsilon), \max(\Delta, \rho) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Используя упрощение системы (IО) на этом многообразии а также его единственность для каждого $\varepsilon \in (0, \varepsilon^0], 0 < \varepsilon^0 \leq \varepsilon_0$, показано, что при определенных условиях исходная система (9) имеет непрерывные инвариантные торы, непрерывные в точке $\varepsilon = 0$ и обладающие условной устойчивостью.

Третья глава посвящена изучению колебаний нелинейных сингулярно возмущенных систем.

В § 7 для системы

$$P(t,\varepsilon)\dot z = F(z,t,\varepsilon), \qquad (11)$$

где $P(t,\varepsilon)$ определена формулами (7), (8), P и F – периодические по t с периодом 2π и аналитические по своим переменным при $\|z\|\le a,\ 0<\varepsilon\le\varepsilon_0,\ t\in R^1$ матричные функции, установлены достаточные условия существования гладкого периодического решения и построено асимптотическое разложение этого решения в предположении, что известно гладкое периодическое решение вырожденной системы, соответствующей (11) при $\varepsilon=0$. При этом существенно использовались установленные выше условия существования периодических решений систем (3) и (6).

В § 8 доказано, что имеет место сохранение инвариантного тора при матричном сингулярном возмущении нелинейной системы дифференциальных уравнений. А именно, справедлива

Теорема 14. Предположим, что относительно системы уравнений

$$\dot\varphi = a(\varphi,\varepsilon),\ [A(\varphi)+\varepsilon P(\varphi,\varepsilon)]\dot x = X(\varphi,x)+\varepsilon F(\varphi,x,\varepsilon) \qquad (12)$$

выполнятся следующие условия.

1. Вырожденная система $\dot\varphi = a(\varphi,0),\ A(\varphi)\dot x^{(0)} = X(\varphi,x^{(0)})$ имеет гладкий инвариантный тор $x^{(0)}=u^{(0)}(\varphi),\ u^{(0)}(\varphi)\in C^r(R^m,2\pi),\ r\ge2$.

2. Матричные функции $a,\ A,\ P,\ X,\ F$ определены и непрерывны для всех $\varphi\in R^m,\ \varepsilon\in[0,\varepsilon_0],\ \|x-u^{(0)}(\varphi)\|\le d$, периодические по $\varphi_i\ (i=\overline{1,m})$ с периодом 2π, непрерывно дифференцируемы по φ и x до порядка $r\ge2$ включительно и имеют не-

прерывную производную по ε.

3. $0<\operatorname{rank}A(\varphi)\equiv k<n,\ \det[A(\varphi)+\varepsilon P(\varphi,\varepsilon)]\ne0\ \ \forall(\varphi,\varepsilon)\in R^m\times(0,\varepsilon_0]$, функции $a(\varphi,\varepsilon), A(\varphi), P(\varphi,\varepsilon)$ и $B(\varphi,0)\equiv b(\varphi,0,0)$, где

$$b(\varphi,y,\varepsilon)=\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\left[X(\varphi,u^{(0)}(\varphi)+\theta y)+\varepsilon F(\varphi,u^{(0)}(\varphi)+\theta y,\varepsilon)\right]d\theta,$$

такие, что система (9) обладает гладким инвариантным тором из $C^{r-1}(R^m,2\pi)$, непрерывным в точке $\varepsilon=0$.

Тогда можно указать число $0<\varepsilon^0\le\varepsilon_0$ такое, что система (12) для всех $\varepsilon\in[0,\varepsilon^0]$ имеет инвариантный тор $x=u^{(0)}(\varphi)+u(\varphi,\varepsilon)$, обладающий условной устойчивостью, где функция $u(\varphi,\varepsilon)$ непрерывна на $R^m\times[0,\varepsilon^0]$ и такая, что $\lim |u(\varphi,\varepsilon)|_{r-2}=0,\ \varepsilon\to0$.

В § 9 для системы вида

$$\varepsilon\dot x = X(x)+\varepsilon^{1+\alpha}Q(x,t), \qquad (13)$$

где $x, X, Q\in R^{n+m}$, X и Q определены для всех $t\in R^1$, x из области $\mathcal{D}\subset R^{n+m}$, $Q(x,t+T)\equiv Q(x,t),\ 0<\varepsilon\ll1,\ \alpha=const>0$, изучены условия существования периодических решений в окрестности тороидального многообразия решений вырожденной системы. При этом система (13) приведена к системе специального вида, для которой при определенных условиях доказано существование инвариантного тороидального многообразия, а затем обоснована возможность делать вывод о существовании замкнутых траекторий на этом многообразии, исходя из первого приближения к этому многообразию.

Краткие выводы по выполненной диссертационной работе содержит заключение.

В заключение автор выражает глубокую признательность научному руководителю А.М. Самойленко за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

I. Еременко В.А. Асимптотические разложения неразрывных периодических решений сингулярно возмущенной системы нелинейных дифференциальных уравнений с вырожденной матрицей при производных. - В кн.: Всесоюзная конференция по асимптотическим методам в теории сингулярно возмущенных уравнений, июнь 1979 г. Часть I. Алма-Ата: Наука, 1979, с. 184 - 185.

2. Еременко В.А. О некоторых свойствах периодических матриц. - Укр. мат. журн., 1980, т. 32, № I, с. I9 - 26.

3. Еременко В.А. О редукции линейной системы дифференциальных уравнений с вырожденной матрицей при производных. - Укр. мат. журн., 1980, т. 32, № 2, с. I68 - I74.

4. Еременко В.А. О периодических решениях нелинейных дифференциальных уравнений с малым параметром при производных. - В кн.: Аналитические методы исследования нелинейных колебаний. Киев: Ин-т матем. АН УССР, 1980, с. 40 - 52.

5. Кулик В.Л., Еременко В.А. О квазипериодических решениях линейной системы дифференциальных уравнений с вырожденной матрицей при производных. - Укр. мат. журн., 1980, т. 32, № 6, с. 746 - 753.

Подп. в печ. 20.05.81 БФ 26194 Формат 60x84/16 Бумага тип.
Офс. печать. Усл.печ.л. 0,93. Уч.-изд. л. 0,63 Тираж 100 экз.
Зак. 445 . Бесплатно

Отпечатано в Институте математики АН УССР
252601, Киев, ГСП, ул. Репина, 3

УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 32, № 6

ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК

КИЕВ — 1980

Примечание. В «нерезонансном» случае система (3) обладает решением (74), где $U_j(\mu_j)$ имеет вид (75), $h_j(\mu_j)$ — (76), $\Lambda_j(\mu_j)$ — (47), а n-мерный вектор $V(\mu_j^{-s_j})$ имеет формальное разложение

$$V(\mu_j^{-s_j}) = \sum_{s=0}^{\infty} \mu_j^s V_s. \qquad (78)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Коддингтон Э., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений.— М.: Изд-во иностр. лит., 1958.— 474 с.
2. Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений.— М.: Мир, 1968.— 464 с.
3. Turritin H. L. Convergent solutions of ordinary linear homogeneous differential equations in the neigborhood of an irregular singular point.— Acta Math., 1955, 93, N 1/2, с. 27—66.
4. Терещенко Н. И. О решениях некоторых систем линейных дифференциальных уравнений с особыми точками.— Укр. мат. журн., 1958, 10, № 2, с. 220—223.
5. Шкіль М. І., Григоренко В. К. Про формальні розв'язки системи лінійних диференціальних рівнянь з іррегулярною особливою точкою.— Допов. АН УРСР. Сер. А, 1972, № 1, с. 29—34.
6. Шкіль М. І., Григоренко В. К. Про загальний формальний розв'язок системи лінійних диференціальних рівнянь з іррегулярною особливою точкою.— Допов. АН УРСР. Сер. А, 1972, № 5, с. 441—446.
7. Шкіль М. І., Григоренко В. К. Про формальні розв'язки системи лінійних диференціальних рівнянь з іррегулярною особливою точкою.— Вісн. Київ. ун-ту. Сер. мат. та мех., 1973, № 15, с. 26—39.
8. Фещенко С. Ф., Шкиль М. И., Николенко Л. Д. Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений.— Киев: Наук. думка, 1966.— 251 с.
9. Шкіль М. І. Асимптотичні методи в диференціальних рівняннях.— Київ: Вища школа, 1971.— 226 с.

Уманский
педагогический институт

Поступила в редакцию
17.IV 1978 г.

УДК 517.919

В. Л. Кулик, В. А. Еременко

О квазипериодических решениях линейной системы дифференциальных уравнений с вырожденной матрицей при производных

1. В различных областях современной науки и техники (теория электрических цепей [1], математическая экономика [2], теория марковских цепей [3] и т. д.) встречаются процессы, которые описываются системами обыкновенных дифференциальных уравнений с вырожденной матрицей при производных. Вопрос существования гладких периодических решений таких систем мало изучен. Отметим только работу [4], где для системы уравнений

$$B(t)\dot{x} = A(t)x + f(t), \quad \det B(t) \equiv 0 \tag{1}$$

с периодическими коэффициентами в случае постоянности ранга матрицы $B(t)$ указан метод построения невырожденной периодической замены переменных, приводящей при определенных условиях к нормальной системе меньшего порядка.

Принципиальные трудности, обусловленные, например, недополняемостью квазипериодического репера до квазипериодического базиса в E^n при любом нечетном $n \geqslant 3$ [5], возникают при исследовании общих условий существования квазипериодических решений системы вида (1) с квазипериодическими коэффициентами. Эта задача усложняется, если предположить, что ранг матрицы $B(t)$ является функцией времени.

В данной заметке для системы дифференциальных уравнений на торе, которые в частном случае приводят к уравнениям вида (1) с квазипериодическими коэффициентами, изучаются условия существования для произвольной неоднородности единственного гладкого инвариантного тороидального многообразия. Исследование ведется от простых задач, имеющих также и самостоятельный характер, к более сложным. Основной результат сформулирован в теореме 2.

2. Обозначим $C^r(R^m, T)$ — пространство r раз непрерывно дифференцируемых векторных или матричных функций $\Phi(\varphi)$, зависящих от m переменных $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ и периодических по каждой переменной с периодом T, с обычной нормой, введенной, например, в работе [6].

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{\varphi} = a(\varphi), \quad B(\varphi)\dot{x} = A(\varphi)x + f(\varphi), \tag{2}$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)$; $a(\varphi), B(\varphi), A(\varphi), f(\varphi) \in C^r(R^m, 2\pi)$, $r \geqslant 1$, точкой обозначена производная по независимой переменной t.

Определение. Равенством $x = u(\varphi)$ определяется гладкий инвариантный тор системы уравнений (2), если $u(\varphi) \in C^l(R^m, 2\pi)$, $1 \leqslant l \leqslant r$, и имеет место тождество $B(\varphi)\frac{\partial u(\varphi)}{\partial \varphi}a(\varphi) \equiv A(\varphi)u(\varphi) + f(\varphi)$.

Лемма 1. *Пусть скалярная функция* $\rho(\varphi) \in C^r(R^m, 2\pi)$. *Тогда векторная функция* $x = u(\varphi)$, *определяющая гладкий инвариантный тор*

одной из двух систем уравнений

$$\dot{\varphi} = \rho(\varphi)a(\varphi), \quad B(\varphi)\dot{x} = A(\varphi)x + f(\varphi), \tag{3}$$

$$\dot{\varphi} = a(\varphi), \quad \rho(\varphi)B(\varphi)\dot{x} = A(\varphi)x + f(\varphi), \tag{4}$$

определяет также гладкий инвариантный тор и другой.

Действительно, с учетом коммутативности $\rho(\varphi)$ с любой матричной функцией получаем одно и то же уравнение в частных производных для функций, которые определяют гладкий инвариантный тор систем (3), (4): $\rho(\varphi)B(\varphi)\frac{\partial u}{\partial \varphi}a(\varphi) = A(\varphi)u + f(\varphi)$. Отсюда следует справедливость утверждения леммы 1.

Лемма 2. *Пусть относительно системы уравнений*

$$\dot{\varphi} = a(\varphi), \quad \rho(\varphi)\dot{x} = b(\varphi)x + c(\varphi), \tag{5}$$

где векторная функция $a(\varphi)$ *и скалярные функции* $\rho(\varphi)$, $b(\varphi)$, $c(\varphi)$ *принадлежат* $C^r(R^m, 2\pi)$, *выполняются следующие условия.*

1. *Существует скалярная функция* $S(\varphi) \in C^1(R^m, 2\pi)$ *такая, что для всех* $\varphi \in R^m$ $S(\varphi) \neq 0$ *и*

$$\frac{\partial S(\varphi)}{\partial \varphi}a(\varphi)\rho(\varphi) + 2b(\varphi)S(\varphi) \leqslant -2\gamma < 0. \tag{6}$$

2. *Справедливо неравенство*

$$\gamma_1 - l\alpha > 0, \tag{7}$$

где $\gamma_1 = \dfrac{\gamma}{\max\limits_{\varphi \in R^m}|S(\varphi)|}$, $\alpha \geqslant \max\limits_{\substack{\varphi \in R^m \\ \|\eta\|=1}}\left|\left\langle \dfrac{\partial[a(\varphi)\rho(\varphi)]}{\partial \varphi}\eta, \eta, \right\rangle\right|$, l — *некоторое натуральное число*, $1 \leqslant l \leqslant r$.

Тогда система уравнений (5) *имеет единственный гладкий инвариантный тор* $x = u(\varphi) \in C^l(R^m, 2\pi)$, *представимый равенством*

$$u(\varphi) = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{0} c(\varphi_\tau(\varphi))\exp\left\{\int_\tau^0 b(\varphi_\xi(\varphi))\,d\xi\right\}d\tau, & S(\varphi) > 0, \\ \displaystyle -\int_0^{\infty} c(\varphi_\tau(\varphi))\exp\left\{\int_\tau^0 b(\varphi_\xi(\varphi))\,d\xi\right\}d\tau, & S(\varphi) < 0, \end{cases} \tag{8}$$

где $\varphi_t(\varphi)$ — *решение системы* $\dot{\varphi} = \rho(\varphi)a(\varphi)$, $\varphi_0(\varphi) = \varphi$.

Доказательство. Пусть $S(\varphi) > 0$. Обозначим $m_1 = \min\limits_{\varphi \in R^m} S(\varphi)$, $M = \max\limits_{\varphi \in R^m} S(\varphi)$. Для решения уравнения $\dot{x} = b(\varphi_t(\varphi))x$, где $\varphi_t(\varphi)$ — решение системы $\dot{\varphi} = \rho(\varphi)a(\varphi)$, $\varphi_0(\varphi) = \varphi$, с учетом оценки (6) получаем неравенства

$$\frac{d}{dt}(S(\varphi_t(\varphi))x^2) \leqslant 2\gamma x^2 \leqslant -\frac{2\gamma}{M}(S(\varphi_t(\varphi))x^2), \quad S(\varphi_t(\varphi))x^2(t;\varphi) \leqslant$$

$$\leqslant S(\varphi_\tau(\varphi))x^2(\tau;\varphi)\exp\left\{-\frac{2\gamma}{M}(t-\tau)\right\}, \quad t \geqslant \tau.$$

Отсюда

$$|x(t;\varphi)| \leqslant \left(\frac{M}{m_1}\right)^{1/2}|x(\tau;\varphi)|\exp\left\{-\frac{\gamma}{M}(t-\tau)\right\}, \quad t \geqslant \tau. \tag{9}$$

Единственным ограниченным на всей оси R^1 решением уравнения $\dot{x} = b(\varphi_t(\varphi))x + c(\varphi_t(\varphi))$ является функция

$$x(t; \varphi) = \int_{-\infty}^{t} c(\varphi_\tau(\varphi)) \exp\left\{\int_{\tau}^{t} b(\varphi_\xi(\varphi))\, d\xi\right\} d\tau,$$

обладающая свойством $x(0; \varphi_t(\varphi)) \equiv x(t; \varphi)$.

Аналогичными рассуждениями можно получить в случае $S(\varphi) < 0$ второе равенство (8). Непосредственным дифференцированием под знаком интеграла в представлении (8) убеждаемся в том, что неравенство (7) гарантирует включение $u(\varphi) \in C^l(R^m, 2\pi)$.

Докажем единственность инвариантного тора. Предположим, что система (5) имеет еще одно гладкое инвариантное тороидальное многообразие $x = v(\varphi) \not\equiv u(\varphi)$. Тогда функция $z(\varphi) = u(\varphi) - v(\varphi)$, ограниченная для всех $\varphi \in R^m$, должна удовлетворять на траекториях решений $\varphi_t(\varphi)$ системы $\dot{\varphi} = \rho(\varphi) a(\varphi)$ уравнению $\dot{z} = b(\varphi_t(\varphi)) z$. В силу же неравенства (9) при $S(\varphi) > 0$ единственным ограниченным на всей оси R^1 решением этого уравнения является тривиальное решение. Поэтому $v(\varphi) \equiv u(\varphi)$ $\forall \varphi \in R^m$. Лемма 2 доказана.

3. Рассмотрим следующую систему уравнений

$$\dot{\varphi} = a(\varphi),\ \langle g(\varphi), \dot{x}\rangle = \langle p_1(\varphi), x\rangle + f_1(\varphi),\ 0 = \langle p_i(\varphi), x\rangle + f_i(\varphi),$$
$$i = \overline{2, n}, \tag{10}$$

где $\langle p_i(\varphi), x\rangle = p_{i1}(\varphi) x_1 + p_{i2}(\varphi) x_2 + \ldots + p_{in}(\varphi) x_n$ — обычное скалярное произведение, $a, g, p_i, f_i \in C^{r+1}(R^m, 2\pi)$, $i = \overline{1, n}$, $r \geqslant 1$, $g = (g_1, \ldots, g_n)$. Нас интересуют условия, при которых система уравнений (10) при каждой неоднородности $f(\varphi) \in C^{r+1}(R^m, 2\pi)$ имеет единственный гладкий инвариантный тор.

Введем обозначения

$$P_2 = \begin{pmatrix} p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix},\quad F_2 = \begin{pmatrix} f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix},\quad \Delta = \begin{vmatrix} p_1 \\ P_2 \end{vmatrix},\quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} g \\ P_2 \end{vmatrix},\quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \dot{g} \\ P_2 \end{vmatrix},$$

где $|D| = \det D$.

Теорема 1. *Пусть* $\operatorname{rang} P_2(\varphi) \equiv n - 1$ *и выполняются все условия леммы 2, где* $\rho(\varphi) \equiv \Delta_1(\varphi)$, $b(\varphi) \equiv \Delta(\varphi) + \Delta_2(\varphi) - \dot{\Delta}_1(\varphi)$.

Тогда система уравнений (10) при каждой неоднородности $f(\varphi) \in C^{r+1}(R^m, 2\pi)$ *имеет единственный гладкий инвариантный тор* $x = u(\varphi)$, $u \in C^l(R^m, 2\pi)$, $1 \leqslant l \leqslant r$.

Доказательство. Запишем общее решение алгебраической системы в виде

$$x = v(\varphi) y + q(\varphi), \tag{11}$$

где

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix},\quad v_l = (-1)^{l+1} \begin{vmatrix} p_{21} \cdots p_{2,l-1} & p_{2,l+1} \cdots p_{2n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ p_{n1} \cdots p_{n,l-1} & p_{n,l+1} \cdots p_{nn} \end{vmatrix},$$
$$l = \overline{1, n},\quad q = -P_2^*(P_2 P_2^*)^{-1} F_2,$$

y — произвольная скалярная функция; звездочкой обозначена операция транспонирования матрицы. Подставляя (11) в первое уравнение (10), получаем

$$\langle g(\varphi), v(\varphi)\rangle \dot{y} = (\langle p_1(\varphi), v(\varphi)\rangle - \langle g(\varphi), \dot{v}(\varphi)\rangle) y +$$
$$+ \langle p_1(\varphi), q(\varphi)\rangle - \langle g(\varphi), \dot{q}(\varphi)\rangle + f_1(\varphi).$$

Приняв во внимание, что $\langle p_1(\varphi), v(\varphi)\rangle = \Delta(\varphi)$, $\langle g(\varphi), v(\varphi)\rangle = \Delta_1(\varphi)$, $\langle g(\varphi), \dot{v}(\varphi)\rangle = \dot{\Delta}_1(\varphi) - \Delta_2(\varphi)$, с учетом утверждения леммы 2 убеждаемся в справедливости теоремы 1.

4. Сформулируем основной результат относительно системы уравнений (2).

Теорема 2. *Пусть система уравнений (2), все коэффициенты которой принадлежат пространству* $C^r(R^m, 2\pi)$, $r \geqslant 2$, *удовлетворяет следующим условиям.*

1. *Матрица* $A(\varphi)$ *невырожденна при всех* $\varphi \in R^m$.

2. *Существует* $n \times k$-*матрица* $\hat{B}(\varphi) \in C^r(R^m, 2\pi)$, $r \geqslant 2$, *такая, что* $\operatorname{rang}[B(\varphi), \hat{B}(\varphi)] \equiv 1$.

Тогда можно указать такое фиксированное $\delta > 0$, *что неравенство*

$$\|a\|\,\|B\|\,\|A^{-1}\| + \left\|\frac{\partial a}{\partial \varphi_i}\right\| \|B\|\,\|A^{-1}\| + \|a\|\,\|B\| \left\|\frac{\partial A^{-1}}{\partial \varphi_i}\right\| +$$
$$+ \|a\| \left\|\frac{\partial B}{\partial \varphi_i}\right\| \|A^{-1}\| \leqslant \delta,\qquad i = \overline{1, m}, \tag{12}$$

где нормы матриц операторные, обеспечивает существование единственного гладкого инвариантного тора $x = u(\varphi)$, $u(\varphi) \in C^{r-1}(R^m, 2\pi)$, $r \geqslant 2$, *для системы уравнений (2) при любой неоднородности* $f(\varphi) \in C^r(R^m, 2\pi)$.

Доказательство. Приведем сначала систему уравнений (2) к системе вида (10). Исходя из свойств матрицы $[B(\varphi), \hat{B}(\varphi)]$, можно показать существование n-мерного вектора $\mu(\varphi)$ такого, что $\mu \in C^r(R^m, 4\pi)$, $\|\mu(\varphi)\| \equiv 1$ и $\mu(\varphi)[B(\varphi), \hat{B}(\varphi)] = \lambda(\varphi)$, где $\|\lambda(\varphi)\| \neq 0$ $\forall \varphi \in R^m$. Тогда для каждого вектора $\nu(\varphi)$, ортогонального $\mu(\varphi)$, выполняется равенство $\nu(\varphi)[B(\varphi), \hat{B}(\varphi)] = 0$ для всех $\varphi \in R^m$.

Как отмечалось выше, не всегда возможно дополнение векторами из $C^r(R^m, 4\pi)$ вектора $\mu(\varphi)$ до полного базиса в R^n. Поэтому построим матрицу размерности $(n+1) \times n$:

$$\begin{pmatrix} \mu(\varphi) \\ E - \mu^*(\varphi)\mu(\varphi) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \mu(\varphi) \\ Q_1(\varphi) \end{pmatrix} \equiv Q(\varphi),$$

где E — единичная n-мерная матрица; которая обладает такими свойствами:

$$Q(\varphi) \in C^r(R^m, 4\pi),\ \operatorname{rang} Q(\varphi) \equiv n,\ Q_1(\varphi)\mu^*(\varphi) \equiv 0. \tag{13}$$

Так как строки матрицы $Q_1(\varphi)$ в силу (13) ортогональны вектору $\mu^*(\varphi)$, то $Q_1(\varphi)[B(\varphi), \hat{B}(\varphi)] \equiv 0$. Умножив вторую систему уравнений (2) слева на $Q(\varphi)$, придем к равносильной, с учетом второго равенства (13), системе

$$\dot{\varphi} = a(\varphi),\ \mu(\varphi) B(\varphi)\dot{x} = \mu(\varphi) A(\varphi) x + \mu(\varphi) f(\varphi), \tag{14}$$
$$0 = Q_1(\varphi)[A(\varphi) x + f(\varphi)]. \tag{15}$$

Используя невырожденность матрицы $A(\varphi)$, общее решение алгебраической системы (15) можно представить в виде

$$x = A^{-1}(\varphi)\mu^*(\varphi) y - A^{-1}(\varphi) f(\varphi). \tag{16}$$

где y — произвольная скалярная функция. Подставив (16) во второе дифференциальное уравнение (14), придем к системе вида (5), где

$$\rho = \mu B A^{-1}\mu^*,\ b = 1 - D \equiv 1 - \mu B\,\frac{d\,(A^{-1}\mu^*)}{dt},\ c = \mu B\,\frac{d}{dt}\,(A^{-1}f). \qquad (17)$$

Для полученной системы уравнений используем результаты леммы 2. С этой целью потребуем близость функции $b(\varphi)$ к 1, что дает возможность в качестве $S(\varphi)$ выбрать -1, и малость функции $\rho(\varphi)$, что позволяет добиться требуемой гладкости тора. В нашем случае неравенство (7) имеет вид

$$1 - |D(\varphi)| - (r-1)\left\|\frac{\partial\,[a(\varphi)\,\rho(\varphi)]}{\partial\varphi}\right\| > 0. \qquad (18)$$

Оценивая $|D(\varphi)|$ и $\left\|\dfrac{\partial\,(a(\varphi)\,\rho(\varphi))}{\partial\varphi}\right\|$, получаем

$$|D(\varphi)| \leqslant \|B(\varphi)\|\,\|a(\varphi)\|\left[\left(\sum_{i=1}^{m}\left\|\frac{\partial A^{-1}(\varphi)}{\partial\varphi_i}\right\|^2\right)^{1/2} + \right.$$

$$\left. + \|A^{-1}(\varphi)\|\left(\sum_{i=1}^{m}\left\|\frac{\partial\mu(\varphi)}{\partial\varphi_i}\right\|^2\right)^{1/2}\right],$$

$$\left\|\frac{\partial\,[a(\varphi)\,\rho(\varphi)]}{\partial\varphi}\right\| \leqslant \|B(\varphi)\,A^{-1}(\varphi)\|\left\|\frac{\partial a}{\partial\varphi}\right\| + \sqrt{m}\,\|a(\varphi)\|\times$$

$$\times \max_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ \varphi\in R^m}}\left(2\,\|B(\varphi)\,A^{-1}(\varphi)\|\left\|\frac{\partial\mu(\varphi)}{\partial\varphi_i}\right\| + \left\|\frac{\partial B(\varphi)}{\partial\varphi_i}\,A^{-1}(\varphi)\right\| + \right.$$

$$\left. + \left\|B(\varphi)\,\frac{\partial}{\partial\varphi_i}\,A^{-1}(\varphi)\right\|\right).$$

Отсюда видно, что выбор достаточно малого $\delta > 0$ в неравенстве (12) обеспечивает выполнение оценки (18), а это значит, что система уравнений (2) имеет единственный $r-1$ раз непрерывно дифференцируемый инвариантный тор $x = u(\varphi)$. Причем в силу единственности получаем, что $u(\varphi)$ — 2π-периодическая функция по φ_i, $i = \overline{1, m}$. Теорема 2 доказана.

З а м е ч а н и е. Используя оценку

$$\left\|\frac{\partial\mu^*(\varphi)}{\partial\varphi}\right\| \leqslant 2\sqrt{n+k}\left\|\frac{\partial}{\partial\varphi}\,[B(\varphi), \hat{B}(\varphi)]\right\|\,\|[B(\varphi), \hat{B}(\varphi)]\|^{-1},$$

где нормы матриц евклидовы, можно указать точное значение постоянной δ в неравенстве (12).

5. Приведем пример, иллюстрирующий теорему 2. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами и вырожденной матрицей при производных

$$p\begin{pmatrix}\sin t\sin\sqrt{2}t & 1+\cos t\\ (1-\cos t)\sin\sqrt{2}t & \sin t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}f_1(t, \sqrt{2}t)\\ f_2(t, \sqrt{2}t)\end{pmatrix}, \qquad (19)$$

где p — некоторый фиксированный параметр из промежутка $]0, 1]$, $f_i(t, \sqrt{2}t)$, $i = 1, 2$, — некоторые фиксированные квазипериодические функции, $f_i(\varphi_1, \varphi_2) \in C^r(R^2, 2\pi)$, $i = 1, 2$.

Задача состоит в том, чтобы найти такие значения параметра $p \in]0, 1]$, что система уравнений (19) при каждой неоднородности $f_i(t, \sqrt{2}t)$, $i=1, 2$, имела единственное квазипериодическое решение.

Рассмотрим расширенную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{\varphi} = 1,\ \dot{\varphi}_2 = \sqrt{2},$$

$$p\begin{pmatrix}\sin\varphi_1\sin\varphi_2 & 1+\cos\varphi_1\\ (1-\cos\varphi_1)\sin\varphi_2 & \sin\varphi_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}f_1(\varphi_1, \varphi_2)\\ f_2(\varphi_1, \varphi_2)\end{pmatrix}. \qquad (20)$$

В данном случае $\operatorname{rang} B(\varphi) \in [0, 1]$, но $B(\varphi)$ дополняема до матрицы $[B(\varphi), \hat{B}(\varphi)]$ единичного ранга, достаточно в качестве $\hat{B}(\varphi)$ взять вектор-столбец $\begin{pmatrix}\sin\varphi_1\\ 1-\cos\varphi_1\end{pmatrix}$. Замечаем, что единичная векторная функция $\mu(\varphi_1) = \left(\cos\dfrac{\varphi_1}{2}, \sin\dfrac{\varphi_1}{2}\right)$ пропорциональна каждому столбцу матрицы $[B(\varphi_1, \varphi_2), \hat{B}(\varphi_1)]$. После умножения второй системы уравнений (20) на матрицу

$$\begin{pmatrix}\mu\\ E-\mu^*\mu\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\cos\dfrac{\varphi_1}{2} & 2\sin\dfrac{\varphi_1}{2}\\ 1-\cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1\\ -\sin\varphi_1 & 1+\cos\varphi_1\end{pmatrix}$$

получим

$$\dot{\varphi}_1 = 1,\ \dot{\varphi}_2 = \sqrt{2},\ 2p\left(\sin\varphi_2\cdot\sin\frac{\varphi_1}{2},\ \cos\frac{\varphi_1}{2}\right)\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix} =$$

$$= \left(\cos\frac{\varphi_1}{2},\ \sin\frac{\varphi_1}{2}\right)\left[\begin{pmatrix}x_2\\ x_1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}f_1(\varphi_1, \varphi_2)\\ f_2(\varphi_1, \varphi_2)\end{pmatrix}\right],$$

$$0 = \begin{pmatrix}1-\cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1\\ -\sin\varphi_1 & 1+\cos\varphi_1\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}x_2\\ x_1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}f_1(\varphi_1, \varphi_2)\\ f_2(\varphi_1, \varphi_2)\end{pmatrix}\right].$$

Общее решение алгебраической системы уравнений имеет вид $x_1 = \left(\sin\dfrac{\varphi_1}{2}\right)y -$ $- f_2(\varphi_1, \varphi_2)$, $x_2 = \left(\cos\dfrac{\varphi_1}{2}\right)y - f_1(\varphi_1, \varphi_2)$. Подставляя его в дифференциальное уравнение, получаем $\rho(\varphi)\,\dot{y} = b(\varphi)\,y + c(\varphi)$, где $\rho(\varphi) = p\,(1 + \sin\varphi_2 +$ $+ \cos\varphi_1 - \cos\varphi_1\sin\varphi_2)$, $b(\varphi) = 1 - \dfrac{p}{2}(\sin\varphi_2\sin\varphi_1 - \sin\varphi_1)$, $c(\varphi) = 2p\times$ $\times\left[\sin\varphi_2\sin\dfrac{\varphi_1}{2}\left(\dfrac{\partial f_2}{\partial\varphi_1} + \dfrac{\partial f_2}{\partial\varphi_2}\sqrt{2}\right) + \cos\dfrac{\varphi_1}{2}\left(\dfrac{\partial f_1}{\partial\varphi_1} + \dfrac{\partial f_1}{\partial\varphi_2}\sqrt{2}\right)\right]$.

Оценим $|D(\varphi)|$ и $\left\|\dfrac{\partial\,[a(\varphi)\,\rho(\varphi)]}{\partial\varphi}\right\|$ с тем, чтобы найти p, при которых выполняется неравенство (18): $|D(\varphi)| \leqslant p$, $\left\|\dfrac{\partial\,[a(\varphi)\,\rho(\varphi)]}{\partial\varphi}\right\| \leqslant p\sqrt{24}$.

Ясно, что неравенство (18) выполняется всякий раз, когда $p \in]0, (5r-4)^{-1}[$. Следовательно, система уравнений (19) при каждой неоднородности $f_i(t, \sqrt{2}t)$, $f_i \in C^r(R^2, 2\pi)$, $i = 1, 2$, имеет единственное квазипериодическое решение $x_i(t, \sqrt{2}t)$, $x_i(\varphi_1, \varphi_2) \in C^{r-1}(R^2, 2\pi)$, $i = 1, 2$, как только $p \in]0, (5r-$

$-4)^{-1}[$ и это решение представимо в виде

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} f_2(t, \sqrt{2}t) \\ f_2(t, \sqrt{2}t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sin\frac{t}{2} \\ \cos\frac{t}{2} \end{pmatrix} \int_0^\infty c(\varphi_\tau(t, \sqrt{2}t)) \times$$

$$\times \exp\left\{\int_\tau^0 b(\varphi_\xi(t, \sqrt{2}t))\, d\xi\right\} d\tau,$$

где $\varphi_\tau = \begin{pmatrix} \varphi_{1,\tau} \\ \varphi_{2,\tau} \end{pmatrix}$, $\varphi_0 = 0$, — решение системы уравнений

$$\dot{\varphi}_1 = p(1 + \sin\varphi_2 + \cos\varphi_1 - \cos\varphi_1 \sin\varphi_2),$$

$$\dot{\varphi}_2 = p\sqrt{2}(1 + \sin\varphi_2 + \cos\varphi_1 - \cos\varphi_1 \sin\varphi_2).$$

Отметим, что в полученном квазипериодическом решении частотный базис такой же, как и коэффициентов исходной системы.

6. При доказательстве теоремы 2 существенно использовалось условие 2. В связи с этим отметим, что существуют матричные функции $\hat{B}(\varphi) \in C^r(R^m, 2\pi)$, которые нельзя дополнить матричной функцией $\hat{B}(\varphi) \in C^r(R^m, 2\pi)$ так, чтобы $\operatorname{rang}[B(\varphi), \hat{B}(\varphi)] \equiv 1$, например $B(\varphi) = \begin{pmatrix} \sin\varphi_1 & 0 \\ \sin\varphi_2 & 0 \end{pmatrix}$.

Для системы уравнений

$$\dot{\varphi} = a(\varphi),\quad p\begin{pmatrix} b_{11}(\varphi) & b_{12}(\varphi) \\ b_{21}(\varphi) & b_{22}(\varphi) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(\varphi) & a_{12}(\varphi) \\ a_{21}(\varphi) & a_{22}(\varphi) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(\varphi) \\ f_2(\varphi) \end{pmatrix}, \tag{21}$$

где a, b_{ij}, a_{ij}, $f_i \in C^r(R^m, 2\pi)$, $i, j = 1, 2$; p — параметр, $p \in [0, p_0]$, имеет место следующее утверждение.

Т е о р е м а 3. *Пусть относительно системы уравнений* (21) *известно, что*

$$1)\ \det(a_{ij}(\varphi))_{i,j=1,2} \neq 0 \quad \forall\varphi \in R^m;$$

$$2)\ \operatorname{rang}\begin{pmatrix} b_{11}(\varphi) & a_{11}(\varphi) \\ b_{21}(\varphi) & a_{21}(\varphi) \end{pmatrix} \equiv 1 \ \textit{или}\ \operatorname{rang}\begin{pmatrix} b_{12}(\varphi) & a_{12}(\varphi) \\ b_{22}(\varphi) & a_{22}(\varphi) \end{pmatrix} \equiv 1. \tag{22}$$

Тогда можно указать такое значение $p_1 \in [0, p_0]$, *что при всех* $p \in [0, p_1]$ *система уравнений* (21) *имеет единственный гладкий инвариантный тор* $x_i = u_i(\varphi)$, $u_i(\varphi) \in C^{r-1}(R^m, 2\pi)$, $i = 1, 2$, *для каждой неоднородности* $f_i(\varphi) \in C^r(R^m, 2\pi)$, $i = 1, 2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть имеет место, например, второе равенство (22). Обозначим $(\mu_1(\varphi), \mu_2(\varphi))$ — единичный вектор-решение алгебраической системы уравнений $b_{12}\mu_1 + b_{22}\mu_2 = 0$, $a_{12}\mu_1 + a_{22}\mu_2 = 0$, $\mu_i(\varphi) \in C^r(R^m, 4\pi)$, $i = 1, 2$. Домножив вторую систему уравнений (21) слева на невырожденную матрицу $\begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 \\ -\mu_2 & \mu_1 \end{pmatrix}$, получим

$$\dot{\varphi} = a(\varphi),\quad p\begin{pmatrix} b'_{11}(\varphi) & 0 \\ b'_{21}(\varphi) & b'_{22}(\varphi) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'_{11}(\varphi) & 0 \\ a'_{21}(\varphi) & a'_{22}(\varphi) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f'_1(\varphi) \\ f'_2(\varphi) \end{pmatrix}. \tag{24}$$

Первое условие теоремы 3 и лемма 2 дают возможность утверждать существование единственного гладкого тора $x_1 = u_1(\varphi)$, $u_1(\varphi) \in C^r(R^m, 4\pi)$ системы уравнений $\dot{\varphi} = a(\varphi)$, $pb'_{11}(\varphi)\dot{x}_1 = a'_{11}(\varphi)x_1 + f_1(\varphi)$ при достаточно малых $p > 0$. Подставляя $x_1 = u_1(\varphi)$ во второе уравнение системы (23), приходим к системе

$$\dot{\varphi} = a(\varphi),\quad pb'_{22}(\varphi)\dot{x}_2 = a'_{22}(\varphi)x_2 + (f'_2(\varphi) - pb'_{21}(\varphi)\dot{u}_1(\varphi) + a'_{21}(\varphi)u_1(\varphi)),$$

для которой также с учетом леммы 2 имеем $x_2 = u_2(\varphi)$, $u_2(\varphi) \in C^{r-1}(R^m, 4\pi)$. Поскольку тор $x_i = u_i(\varphi)$, $i = 1, 2$, для системы уравнений (21) единственный, а коэффициенты 2π-периодические, то $u_i(\varphi) \in C^{r-1}(R^m, 2\pi)$, $i = 1, 2$. Теорема 3 доказана.

Отметим, что теорема 3 позволяет, например, утверждать существование единственного гладкого квазипериодического решения системы уравнений

$$p\begin{pmatrix} \sin\omega_1 t & 0 \\ \sin\omega_2 t & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\omega_2 t & \sin\omega_2 t \\ -\sin\omega_2 t & \cos\omega_2 t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(\omega_1 t, \omega_2 t) \\ f_2(\omega_1 t, \omega_2 t) \end{pmatrix}$$

при каждой неоднородности $f_i(\omega_1 t, \omega_2 t)$, $f_i(\varphi_1, \varphi_2) \in C^r(R^2, 2\pi)$, $i = 1, 2$, $r \geqslant 2$. При этом параметр p нужно выбрать из отрезка $[0, (8r(\omega_1^2 + \omega_2^2))^{-1}]$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р у т к а с А. Г. Задача Коши для уравнения $Ax'(t) + Bx(t) = f(t)$.— Дифференц. уравнения, 1975, **11**, № 11, с. 1996—2010.
2. Б а г р и н о в с к и й К. А. О гладких решениях некоторых задач планирования.— В кн.: Проблемы народнохозяйственного оптимума. М.: Экономика, 1969, с. 300—325.
3. К о р о л ю к В. С., Т у р б и н А. Ф. Полумарковские процессы и их приложения.— Киев: Наук. думка, 1976.— 182 с.
4. Е р е м е н к о В. А. О редукции линейной системы дифференциальных уравнений с вырожденной матрицей при производных.— Укр. мат. журн., 1980, **32**, № 2, с. 168—174.
5. М и т р о п о л ь с к и й Ю. А., С а м о й л е н к о А. М. Некоторые вопросы теории многочастотных колебаний.— Препринт 77. 14. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1977.— 47 с.
6. С а м о й л е н к о А. М. О сохранении инвариантного тора при возмущении.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1970, **34**, № 6, с. 1219—1240.

Институт математики АН УССР
Тернопольский
финансово-экономический институт

Поступила в редакцию 28.IX 1978 г.;
после переработки — 24.III 1980 г.

УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 32, № 1

ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК

КИЕВ — 1980

УДК 517.5

В. А. Еременко

О некоторых свойствах периодических матриц

При исследовании линейных дифференциальных уравнений с вырожденной матрицей при производных возникает необходимость изучения ряда глобальных свойств функциональных матриц.

Предполагается, что элементы всех матриц, которые рассматриваются ниже,— действительные функции действительного переменного $t \in R = (-\infty, \infty)$.

Будем говорить, что n-мерная матрица имеет на R постоянную структуру относительно собственного значения $\lambda_i(t)$ кратности s $(s \leqslant n)$ с элементарными делителями

$$[\lambda - \lambda_i(t)]^{m_1}, \quad [\lambda - \lambda_i(t)]^{m_2}, \ldots, [\lambda - \lambda_i(t)]^{m_k} \quad \left(\sum_{i=1}^{k} m_i = s\right),$$

если целочисленные функции времени $s, k, m_1, m_2, \ldots, m_k$ сохраняют постоянные значения для всех $t \in R$.

Обозначим $B(t) \in C_\tau^r$, если все элементы матрицы $B(t)$ (квадратной или прямоугольной) — периодические с периодом τ функции, непрерывно дифференцируемые на R до порядка r включительно.

1. Критерий постоянности структуры матрицы относительно одного из собственных значений.

Лемма 1. *Если $l \times l$-матрица $B(t) \in C_\tau^r$ $(r \geqslant 0)$ имеет постоянную структуру относительно нулевого собственного значения кратности l, то* $\operatorname{rang} B^i(t) = \beta_i \quad \forall t \in R \quad (i = \overline{1, l-k+1})$, *где* β_i $(i = \overline{1, l-k+1})$ *не зависят от изменения t на R, k — количество элементарных делителей, соответствующих нулевому собственному значению.*

Доказательство. Матрица $B(t)$ по условию сохраняет в каждой точке R нормальную форму Жордана. В силу теоремы 1 из [1] существует матрица $S(t) \in C_{2\tau}^r$ такая, что

$$\det S(t) \neq 0 \quad \forall t \in R, \tag{1}$$

$$S^{-1}(t)\, B(t)\, S(t) = \operatorname{diag}\{J_1, J_2, \ldots, J_k\}, \tag{2}$$

где J_i — жорданова клетка, соответствующая элементарному делителю

$$\lambda^{\rho_i} \quad \left(i = \overline{1, k};\ \sum_{i=1}^{k} \rho_i = l\right).$$

Используя (1), (2), получаем требуемые равенства:

$$\operatorname{rang} B^i(t) = \operatorname{rang} S^{-1}(t)\, B^i(t)\, S(t) = \sum_{j=1}^{k} \operatorname{rang} J_j^i = \beta_i = \text{const}$$

$$(t \in R,\ i = \overline{1, l-k+1}).$$

Теорема 1. *Необходимым и достаточным условием постоянности структуры n-мерной матрицы $A(t) \in C^r_\tau$ $(r \geqslant 0)$ относительно нулевого собственного значения является выполнение равенств*

$$\operatorname{rang} A^i(t) = \alpha_i \quad \forall t \in R \quad (i = \overline{1, m}), \tag{3}$$

где α_i — постоянные на R числа, m определяется соотношениями

$$\operatorname{rang} A^{m-1}(t) > \operatorname{rang} A^m(t) = \operatorname{rang} A^{m+1}(t). \tag{4}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть матрица $A(t) \in C^r_\tau$ имеет постоянную структуру относительно нулевого собственного значения. Если кратность нулевого собственного значения матрицы $A(t)$ $s = n$, то из леммы 1 следуют требуемые равенства. Предположим, что $s < n$.

В соответствии с теоремой 2 [1] произведем блочную диагонализацию матрицы $A(t)$:

$$T^{-1}(t)\, A(t)\, T(t) = \operatorname{diag}\{E_1(t), E_2\}, \tag{5}$$

где матрицы $T(t)$ и $E_1(t) \in C^r_{2\tau}$ — невырождены на R, E_2 — $k \times k$-матрица вида

$$E_2 = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \varepsilon_{k-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{6}$$

ε_i $(i = \overline{1, k-1})$ сохраняют значение 0 или 1 в каждой точке R.

Из равенства (5) следует, что

$$T^{-1}(t)\, A^i(t)\, T(t) = \operatorname{diag}\{E_1^i(t), E_2^i\} \quad \forall t \in R.$$

Используя невырожденность матрицы $T(t)$, соотношения (5), (6) и утверждение леммы 1, получаем

$$\operatorname{rang} A^i(t) = \operatorname{rang} E_1^i(t) + \operatorname{rang} E_2^i = n - s + \beta_i = \alpha_i \ (i = \overline{1, m};\ t \in R),$$

где m — наибольший из показателей степеней элементарных делителей вида λ^i. Очевидно, что m удовлетворяет соотношению (4).

Достаточность. Исходя из соотношений (3), (4), определим все элементарные делители матрицы $A(t)$, отвечающие нулевому собственному значению:

$$\underbrace{\lambda, \dots, \lambda}_{g_1(t)};\quad \underbrace{\lambda^2, \dots, \lambda^2}_{g_2(t)};\ \dots;\ \underbrace{\lambda^m, \dots, \lambda^m}_{g_m(t)},$$

где целочисленные функции $g_i(t) \geqslant 0$, $g_m(t) > 0$ $(i = \overline{1, m-1},\ t \in R)$. В каждой точке $t \in R$ имеют место [2, с. 156] соотношения

$$\begin{aligned} &g_1(t) + g_2(t) + g_3(t) + \dots + g_m(t) = d_1(t), \\ &g_1(t) + 2g_2(t) + 2g_3(t) + \dots + 2g_m(t) = d_2(t), \\ &g_1(t) + 2g_2(t) + 3g_3(t) + \dots + 3g_m(t) = d_3(t), \\ &\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ &g_1(t) + 2g_2(t) + 3g_3(t) + \dots + mg_m(t) = d_m(t), \end{aligned} \tag{7}$$

где $d_i(t)$ — дефект матрицы $A^i(t)$, т. е.

$$d_i(t) = n - \operatorname{rang} A^i(t) = n - \alpha_i(t) \quad (i = \overline{1, m}), \tag{8}$$

m определяется соотношениями (4).

Решая систему алгебраических уравнений (7) с учетом (8), получаем

$$g_i(t) = \alpha_{i-1} + \alpha_{i+1} - 2\alpha_i \quad (i = \overline{1, m};\ \alpha_0 = n;\ \alpha_{m+1} = \alpha_m;\ t \in R).$$

Следовательно, в силу условий (3), (4) кратность нулевого собственного значения $(s = n - \alpha_m)$ и структура элементарных делителей постоянна в каждой точке R.

Следствие. *Для того чтобы матрица $A(t)$ имела постоянную на R структуру относительно собственного значения $\lambda_j(t)$, необходимо и достаточно выполнения равенств*

$$\operatorname{rang}[A(t) - \lambda_j(t) I_n]^i = \alpha_i \equiv \text{const} \quad \forall t \in R \quad (i = \overline{1, m}),$$

где m определяется соотношениями

$$\operatorname{rang}[A(t) - \lambda_j(t) I_n]^{m-1} > \operatorname{rang}[A(t) - \lambda_j(t) I_n]^m = \operatorname{rang}[A(t) - \lambda_j(t) I_n]^{m+1}.$$

2. О подобии n-мерной матрицы постоянного ранга r блочной матрице с нулевым $(n-r) \times n$-мерным блоком. При исследовании обыкновенных дифференциальных уравнений полезными являются результаты [3] о периодической блочной диагонализации матрицы, основанные на наличии двух групп собственных значений

$$\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_i(t); \qquad \lambda_{i+1}(t), \lambda_{i+2}(t), \dots, \lambda_n(t)$$

таких, что $\lambda_j(t) \neq \lambda_l(t)$ $\forall t \in R$, $j = \overline{1, i}$; $l = \overline{i+1, n}$. Для матриц с постоянной структурой относительно нулевого собственного значения блочная диагонализация с диагональным блоком, имеющим только нулевые собственные значения, возможна и существенно использовалась в ряде работ (например, [1]). Однако для матриц постоянного ранга, составляющих в силу теоремы 1 более широкий класс по сравнению с классом матриц постоянной структуры относительно нулевого собственного значения, это требование, вообще говоря, не выполняется, если одну из групп составляют нулевые собственные значения. Поэтому представляет интерес утверждение, при доказательстве которого используется идея работы [4] о дополняемости прямоугольной периодической матрицы до невырожденной на R квадратной матрицы.

Теорема 2. *Пусть матрица $A(t) \in C^r_\tau$ удовлетворяет равенству*

$$\operatorname{rang} A(t) = n - k \equiv \text{const} \quad \forall t \in R \quad (k \in [1, n-1]). \tag{9}$$

Тогда существует ортогональная матрица $V(t) \in C^r_{2\tau}$ такая, что для всех $t \in R$

$$V'(t)\, A(t)\, V(t) = \begin{pmatrix} Q(t) \\ 0_{k,n} \end{pmatrix}, \tag{10}$$

$$|\det V(t)| = 1, \tag{11}$$

где $(n-k) \times n$ — матрица $Q(t) \in C^r_{2\tau}$,

$$\operatorname{rang} Q(t) = n - k \quad \forall t \in R, \tag{12}$$

$V'(t)$ — транспонированная к $V(t)$ матрица, $0_{k,n}$ — нулевая $k \times n$-мерная матрица.

Доказательство. Теорема 6 [3] гарантирует существование $n \times k$-матрицы $W_2(t) \in C^r_{2\tau}$, такой, что

$$A'(t)\, W_2(t) = 0, \quad \operatorname{rang} W_2(t) = k \quad \forall t \in R. \tag{13}$$

Применяя к системе векторов, состоящей из столбцов матрицы $W_2(t)$, известный процесс ортогонализации Шмидта [2, с. 238], получаем

$$W_2(t) = V_2(t)\,U_2(t), \tag{14}$$

где $V_2(t) \in C'_{2\tau}$ — $n \times k$-матрица, столбцы которой попарно ортогональны; $U_2(t)$ — $k \times k$-мерная верхнетреугольная матрица, невырожденная на R. В соответствии с (13) и (14) $V_2(t)$ удовлетворяет для всех $t \in R$ условиям

$$V_2'(t)\,A(t) = 0, \quad \operatorname{rang} V_2'(t) = k, \quad V_2'(t)\,V_2(t) = I_k, \tag{15}$$

где I_m — $m \times m$-мерная единичная матрица. Дополним матрицу $V_2(t)$ до невырожденной на R матрицы $V(t) = [V_1(t),\ V_2(t)]$ следующим образом. Построим $n \times (n-k)$-матрицу $W_1(t)$ как решение уравнения $V_2'(t)x = 0$, что можно сделать в силу теоремы 3 [4]. Таким образом, матрица $W_1(t) \in C'_{2\tau}$ удовлетворяет соотношениям

$$V_2'(t)\,W_1(t) = 0, \quad \operatorname{rang} W_1(t) = n-k \quad \forall t \in R. \tag{16}$$

Ортонормируя систему векторов, составленную из столбцов $W_1(t)$, получим $W_1(t) = V_1(t)U_1(t)$, где $n \times (n-k)$-матрица $V_1(t) \in C'_{2\tau}$ имеет попарно ортогональные столбцы, $U_1(t)$ — $(n-k) \times (n-k)$-мерная верхнетреугольная матрица, не вырожденная на R. Следовательно, матрица $V_1(t)$ удовлетворяет на R равенствам

$$V_2'(t)\,V_1(t) = 0, \quad \operatorname{rang} V_1(t) = n-k, \quad V_1'(t)\,V_1(t) = I_{n-k} \quad (t \in R).$$

Из процесса построения матрицы $V(t)$ очевидным образом следует ортогональность $V(t)$ и равенство (11). Учитывая первое из равенств (15), приходим к требуемому представлению (10), где $Q(t) = V_1'(t)\,A(t)\,V(t)$. Соотношение (12) вытекает из условия (9) и невырожденности на R матрицы $V(t)$.

3. О постоянности ранга некоторых произведений матриц.

1°. Установим, при каких условиях

$$|\det V_2'(t)\,B(t)\,V_2(t)| \geqslant \alpha > 0 \quad \forall t \in R, \tag{17}$$

где $B(t) \in C'_\tau$ — $n \times n$-матрица; $n \times k$-мерная матрица $V_2(t) = [v_{n-k+1}(t), \ldots, v_n(t)] \in C'_{2\tau}$ $(k \in [1, n-1])$ удовлетворяет на R соотношениям

$$A'(t)\,V_2(t) = 0, \quad V_2'(t)\,V_2(t) = I_k \quad (t \in R), \tag{18}$$

свойства матрицы $A(t)$ определены теоремой 2. Очевидно, что эти условия будут различны при $k = 1$, $k > 1$.

Пусть $k = 1$. Обозначим n вектор-столбец $v_n(t) = x(t)$. Задача сводится к изучению вопроса о знакоопределенности квадратичной формы $\langle x,\ B(t)\,x\rangle$ для всех x, удовлетворяющих условию

$$A'(t)\,x = 0 \quad \forall t \in R. \tag{19}$$

При этом, например, под положительной определенностью на R квадратичной формы понимается выполнение $\langle x,\ B(t)\,x\rangle \geqslant \beta > 0$ $\forall x \neq 0_{n,1}$, $\forall t \in R$.

Следующее утверждение является обобщением результата Финслера [5, с. 98].

Теорема 3. *Для того чтобы квадратичная форма $\langle x,\ B(t)\,x\rangle$ была знакоопределенной для всех $t \in R$ и всех x, удовлетворяющих уравнению (19), необходимо и достаточно, чтобы квадратичная форма $\langle x,\ [B(t) + \lambda A(t)\,A'(t)]\,x\rangle$ была знакоопределенной на R для всех достаточно больших значений постоянной $|\lambda|$.*

Доказательство. Необходимость. Из теорем 1, 2 очевидным образом следует, что симметрическая, неотрицательно определенная на R матрица $E(t) = A(t)A'(t)$ имеет постоянную структуру на R относительно нулевого собственного значения. Используя теоремы 3 из [4] и 6 из [3], а также схему доказательства теоремы 2 [5, с. 75], можно показать существование ортогональной матрицы $T(t) \in C'_{2\tau}$ такой, что преобразование переменных $x = T(t)y$ приводит квадратичную форму $\langle x,\ E(t)\,x\rangle$ к виду

$$\langle x, E(t)\,x\rangle = \sum_{i=1}^{n-k} \nu_i(t)\,y_i^2(t), \tag{20}$$

где $n - k = \operatorname{rang} E(t)$; функции $\nu_i(t)$ $(i = \overline{1,\ n-k})$ — равномерно ограничены снизу на R некоторой положительной постоянной, в силу периодичности и непрерывности матрицы $E(t)$. В результате этой же замены $\langle x,\ B(t)\,x\rangle = \sum\limits_{i,j=1}^{n} d_{ij}(t)\,y_iy_j$. Так как $\langle x,\ B(t)\,x\rangle \geqslant \alpha > 0$ $\forall t \in R$ и всех x таких, что $\langle x,\ E(t)\,x\rangle = 0$, то учитывая (20), делаем вывод, что неравенство

$$\sum_{i,j=n-k+1}^{n} d_{ij}(t)\,y_iy_j \geqslant \alpha > 0 \quad \forall t \in R \tag{21}$$

должно выполняться для всех ненулевых векторов $(y_{n-k+1}, \ldots, y_n)$. Как отмечалось выше для случая n, в h-мерном пространстве векторов $(y_{n-k+1}, \ldots, y_n)$ существует ортогональное 2τ-периодическое преобразование переменных, приводящее форму (21) к сумме квадратов. В результате этой замены, имеющей в n-мерном пространстве вид $y = \operatorname{diag}\{I_{n-k},\ Q(t)\}\,t$, получим

$$\langle x, B(t)\,x\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} d_{ij}y_iy_j = \sum_{i=n-k+1}^{n} \nu_i(t)\,z_i^2 + \sum_{i=1}^{n-k}\sum_{j=n-k+1}^{n} f_{ij}(t)\,z_iz_j +$$
$$+ \sum_{i=n-k+1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f_{ij}(t)\,z_iz_j + \sum_{i,j=1}^{n-k} f_{ij}(t)\,z_iz_j,$$

где $\nu_i(t) \geqslant \alpha > 0$ $(i = \overline{n-k+1,\ n})$ $\forall t \in R$. С учетом соотношений (20) и (21) приходим к неравенству

$$\langle x, B(t)\,x\rangle + \lambda\langle x, E(t)\,x\rangle = \sum_{i=n-k+1}^{n} \nu_i(t)\,z_i^2 + \sum_{i=1}^{n-k}\sum_{j=n-k+1}^{n} f_{ij}(t)\,z_iz_j +$$
$$+ \sum_{i=n-k+1}^{n}\sum_{j=1}^{n-k} f_{ij}(t)\,z_iz_j + \sum_{i,j=1}^{n-k} f_{ij}(t)\,z_iz_j + \lambda\sum_{i=1}^{n-k} \nu_i(t)\,z_i^2 =$$
$$= \sum_{i=n-k+1}^{n}\sum_{j=1}^{n-k}\left[\left(z_i\sqrt{\frac{\nu_i(t)}{2(n-k)}} + f_{ij}(t)\,z_j\sqrt{\frac{n-k}{2\nu_i(t)}}\right)^2 + \left(z_i\sqrt{\frac{\nu_i(t)}{2(n-k)}} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + f_{ji}(t)\,z_j\sqrt{\frac{n-k}{2\nu_i(t)}}\right)^2\right] + \sum_{i,j=1}^{n-k}\left(z_i\sqrt{\frac{\nu_i(t)}{n-k}} + f_{ij}(t)\,z_j\sqrt{\frac{n-k}{4\nu_i(t)}}\right)^2 +$$
$$+ \sum_{j=1}^{n-k}\left[\lambda\cdot\nu_j(t) - \frac{n-k}{2}\sum_{i=n-k+1}^{n}\frac{f_{ij}^2(t) + f_{ji}^2(t)}{\nu_i(t)} - \right.$$
$$\left. - \frac{n-k}{4}\sum_{i=1}^{n-k}\frac{f_{ij}^2(t)}{\nu_i(t)}\right] z_i^2 > \alpha\sum_{j=1}^{n-k} z_i^2.$$

если положим

$$\lambda \geqslant \max_{1 \leqslant j \leqslant n-k} \sup_{t \in R} \left\{ \alpha + \frac{n-k}{4\nu_j(t)} \left[2 \sum_{i=n-k+1}^{n} \frac{f_{ij}^2(t) + f_{ji}^2(t)}{\nu_i(t)} + \sum_{i=1}^{n-k} \frac{f_{ij}^2(t)}{\nu_i(t)} \right] \right\}.$$

Достаточность очевидна.

Отметим, что если матрица $B(t)$ знакоопределенная, то $\lambda = 0$. Рассмотрим случай $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Если $B(t)$ — симметрическая матрица, то из теоремы отделения Пуанкаре [5, с. 141] с учетом (18) следует, что условие знакоопределенности матрицы $B(t) + \lambda A(t) A'(t)$ при всех достаточно больших значениях постоянной $|\lambda|$ достаточно для выполнения неравенства (17). В общем же случае, используя неравенство, установленное Островским и Тауски [6, с. 28], имеем

$$|\det V_2'(t)[B(t) + \lambda A(t) A'(t)] V_2(t)| \geqslant$$
$$\geqslant \left| \det V_2'(t) \left[\frac{B(t) + B'(t)}{2} + \lambda A(t) A'(t) \right] V_2(t) \right| \geqslant \alpha > 0,$$

если матрица $0{,}5\,[B(t) + B'(t)] + \lambda A(t) A'(t)$ знакоопределенная при всех достаточно больших значениях постоянной $|\lambda|$.

Покажем, что это достаточное условие не является необходимым. Рассмотрим класс матриц $B(t)$, удовлетворяющих неравенству (17), как решение матричного уравнения $V_2'(t) B(t) V_2(t) = H(t)$, где $k \times k$-матрица $H(t)$ удовлетворяет условию

$$|\det H(t)| \geqslant \alpha > 0 \quad \forall t \in R. \tag{22}$$

Общее решение этого уравнения имеет [2, с. 23] вид

$$B(t) = V_2(t) H(t) V_2'(t) + A(t) L_1(t) + L_2(t) A'(t), \tag{23}$$

где $L_1(t)$, $L_2(t)$ — произвольные $n \times n$-матрицы.

Соотношения (22), (23) — необходимые и достаточные условия для выполнения неравенства (17). Исходя из этих соотношений, можно вывести ряд легко проверяемых достаточных условий. Например, положив $L_1(t) = L_2(t) \equiv 0$, приходим к такому условию. Если матрица $B(t)$ удовлетворяет условиям

$$A(t) B(t) = 0, \quad B(t) A'(t) = 0, \quad \operatorname{rang} B(t) = k \quad (t \in R), \tag{24}$$

то имеет место неравенство (17).

Отметим также необходимое условие выполнения (17). Если выполняется неравенство (17), то существует постоянная λ такая, что $|\det[B(t) + \lambda A(t) A'(t)]| \geqslant \alpha > 0$ $\forall t \in R$.

2°. Рассмотрим обобщение изученной выше задачи: установим, при каких условиях имеет место равенство

$$\operatorname{rang} V_2'(t) B(t) = l \equiv \text{const} \quad \forall t \in R \quad (l \in [0, k]), \tag{25}$$

где матрицы $V_2(t)$ и $B(t)$ те же, что и в соотношении (17).

Теорема 4. *Равенство* (25) *имеет место тогда и только тогда, когда*

$$\operatorname{rang}[A(t), B(t)] = n + l - k \quad \forall t \in R \quad (l \in [0, k]). \tag{26}$$

Доказательство. Установим соотношение, связывающее ранги матриц $V_2'(t) B(t)$ и $[A(t), B(t)]$, из которого будут следовать требуемые

утверждения. Используя равенство (3.14) работы [7] для произведения матриц $V_2'(t)[A(t), B(t)]$, получаем

$$\operatorname{rang} V_2'(t)[A(t), B(t)] = \operatorname{rang}[A(t), B(t)] -$$
$$- \dim\{\Phi(V_2'(t)) \cap \Psi[A(t), B(t)]\} \quad \forall t \in R, \tag{27}$$

где $\Psi(E)$ — пространство вектор-столбцов матрицы E, $\Phi(D)$ — пространство вектор-столбцов x, удовлетворяющих уравнению $Dx = 0$. Так как в каждой точке R

$$V_2'(t) A(t) = 0, \quad \operatorname{rang} V_2'(t) = k, \quad \operatorname{rang} A(t) = n - k \quad (t \in R), \tag{28}$$

то

$$\Phi(V_2'(t)) \equiv \Psi(A(t)) \quad (t \in R). \tag{29}$$

В соответствии с равенствами (2.15) работы [7]

$$\Psi[A(t), B(t)] = \Psi(A(t)) \cup \Psi(B(t)) \quad (t \in R). \tag{30}$$

Учитывая соотношения (28)—(30), равенство (27) запишем в виде

$$\operatorname{rang} V_2'(t) B(t) = \operatorname{rang}[A(t), B(t)] - (n-k) \quad (t \in R),$$

откуда очевидным образом получаем требуемые утверждения.

3°. При исследовании линейных дифференциальных уравнений с вырожденной матрицей при производных представляет интерес выделение класса матриц $A(t)$, $B(t)$ таких, что

$$\operatorname{rang} Q(t) Y(t) = i \equiv \text{const} \quad \forall t \in R \quad (i \in [0, n-k]), \tag{31}$$

где $Q(t) = V_1'(t) A(t) V(t)$, $V(t) = [V_1(t), V_2(t)]$ — ортогональная матрица, построенная при доказательстве теоремы 2; $n \times (n-l)$-матрица $Y(t)$ удовлетворяет равенствам

$$B_2(t) Y(t) = 0, \quad \operatorname{rang} Y(t) = n - l \quad (t \in R), \tag{32}$$

$$l = \operatorname{rang} B_2(t) \equiv \text{const} \quad \forall t \in R \quad (l \in [1, k]), \quad B_2(t) = V_2'(t) B(t) V(t).$$

Предполагается, что матрицы $A(t)$, $B(t)$ обладают свойствами определенными в п. 1°.

Теорема 5. *Для выполнения равенства* (31) *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\operatorname{rang} \begin{pmatrix} A(t) \\ V_2'(t) B(t) \end{pmatrix} = i + l \quad \forall t \in R. \tag{33}$$

Доказательство. В силу первого из соотношений (32) $\operatorname{rang} Q(t) Y(t) = \operatorname{rang} \begin{pmatrix} Q(t) \\ B_2(t) \end{pmatrix} Y(t)$, и по аналогии с доказательством теоремы 4 можно показать, что

$$\operatorname{rang} Q(t) Y(t) = \operatorname{rang} \begin{pmatrix} Q(t) \\ B_2(t) \end{pmatrix} - l \quad \forall t \in R. \tag{34}$$

С учетом постоянности на R ранга матрицы $A(t)$ а также свойств матрицы $V(t)$ возможно скелетное разложение [2, с. 32] $A(t)$:

$$A(t) = V_1(t) U_1(t) \quad (t \in R), \tag{35}$$

где $U_1(t)$ — $(n-k)\times n$-матрица, строки которой в каждой точке R — базис пространства вектор-строк матрицы $A(t)$. Используя определение $Q(t)$, $B_2(t)$ и соотношение (35), приходим к равенству

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} Q(t) \\ B_2(t) \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A(t) \\ V_2'(t)\,B(t) \end{pmatrix} \quad (t \in R),$$

которое совместно с (34) влечет выполнение утверждений теоремы 5.

Отметим, что из (34) очевидным образом следует легко проверяемое необходимое условие выполнения (31). Если имеет место равенство (31), то

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A(t) \\ B(t) \end{pmatrix} = i + l \quad \forall t \in R. \tag{36}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Шлапак Ю. Д. Периодические решения линейной системы дифференциальных уравнений с вырожденной матрицей при производных.— Укр. мат. журн., 1975, 27, № 1, с. 137—140.
2. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц.— М.: Наука, 1967.— 575 с.
3. Sibuya jr. Y. Some global properties of matrices of functions of one variable.— Math. Ann., 1965, 161, Hf. 1, p. 67—77.
4. Самойленко А. М. Квазипериодические решения системы линейных алгебраических уравнений с квазипериодическими коэффициентами.— В кн.: Аналитические методы исследования решений нелинейных дифференциальных уравнений. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1975, с. 5—26.
5. Беллман Р. Введение в теорию матриц.— М.: Наука, 1976.— 351 с.
6. Беккенбах Е. Ф., Беллман Р. Неравенства.— М.: Мир, 1965.— 276 с.
7. Marsaglia George, Styan George P. H. Equalities and Inequalities for Ranks of Matrices.— Linear and Multilinear Algebra, 1974, 2, № 3, p. 269—292.

Тернопольский
финансово-экономический институт

Поступила в редакцию 2.VI 1978 г.,
после переработки — 24.XI 1978 г.