УДК 621.391:519.22

ВЗАЄМНИЙ СТАТИСТИЧНИЙ АНАЛІЗ ПЕРІОДИЧНО НЕСТАЦІОНАРНИХ ВІБРАЦІЙНИХ СИГНАЛІВ ДЛЯ ОПИСУ ЇХ СТОХАСТИЧНИХ ЗВ'ЯЗКІВ

Юзефович Р.М.[1], Дзерин О.Ю.[2], Яворський І.М.[3]
Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України
[1] к.т.н., доцент; [2] аспірант
[3] Технологічний-природничий університет, Бидгощ, Польща, д.ф.-м.н., професор

При розв'язуванні задач вібродіагностики часто виникає потреба аналізу взаємозв'язків між сигналами, які відібрані в різних точках механічної системи. Вібраційний сигнал, що є носієм інформації про певні дефекти системи, має властивості як повторюваності, так і стохастичності. Ці його властивості, з єдиної, а не з альтернативних позицій, дають можливість описати і дослідити математичну модель у вигляді періодично корельованого випадкового процесу (ПКВП) [1]. Імовірнісні характеристики ПКВП відображають модуляційну взаємодію стохастичної і детермінованої складових вібрацій, яка виникає в разі появи дефектів. І, власне, останні, з використанням цих характеристик, вдається виявляти вже на ранніх стадіях їх розвитку [2].

Розглянемо взаємний аналіз двох ПКВП-сигналів $\xi(t)$ і $\eta(t)$. Їх математичні сподівання і кореляційні функції є періодичними функціями часу

$$m_\xi(t) = E\xi(t) = m_\xi(t+T),\ b_\xi(t,u) = E\overset{\circ}{\xi}(t)\overset{\circ}{\xi}(t+T) = b_\xi(t+T,u),\ \overset{\circ}{\xi}(t) = \xi(t) - m_\xi(t),$$

$$m_\eta(t) = E\eta(t) = m_\eta(t+T),\ b_\eta(t,u) = E\overset{\circ}{\eta}(t)\overset{\circ}{\eta}(t+T) = b_\eta(t+T,u),\ \overset{\circ}{\eta}(t) = \eta(t) - m_\eta(t),$$

і можуть бути подані рядами Фур'є:

$$m_\xi(t) = \sum_{k\in Z} m_k^{(\xi)} e^{ik\omega_0 t},\ m_\eta(t) = \sum_{k\in Z} m_k^{(\eta)} e^{ik\omega_0 t},\ b_\xi(t,u) = \sum_{k\in Z} B_k^{(\xi)}(u) e^{ik\omega_0 t},\ b_\eta(t,u) = \sum_{k\in Z} B_k^{(\eta)}(u) e^{ik\omega_0 t}.$$

Припустимо, що взаємокореляційна функція $b_{\xi\eta}(t,u) = E\overset{\circ}{\xi}(t)\overset{\circ}{\eta}(t+u)$ також змінюється за часом періодично. Тоді

$$b_{\xi\eta}(t,u) = \sum_{k\in Z} B_k^{(\xi\eta)}(u) e^{ik\omega_0 t}, \tag{1}$$

де

$$B_k^{(\xi\eta)}(u) = \frac{1}{T}\int_0^T b_{\xi\eta}(t,u) e^{-ik\omega_0 t} dt.$$

Величини $B_k^{(\xi\eta)}(u)$ будемо називати взаємокореляційними компонентами. Припустимо, що для всіх $t \in R$ взаємокореляційна функція (1) є абсолютно інтегрованою

$$\int_{-\infty}^{\infty} |b(t,u)| du \langle \infty.$$

Тоді для кожного $t \in R$ існує перетворення Фур'є

$$f_{\xi\eta}(\omega,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} b_{\xi\eta}(t,u) e^{-i\omega u} du, \tag{2}$$

яке будемо називати змінною взаємоспектральною густиною випадкових процесів $\xi(t)$ і $\eta(t)$. Також, здійснивши певні перетворення [3], ми можемо (2) записати наступним чином

$$f_{\xi\eta}(\omega,t) = \sum_{k\in Z} f_k^{(\xi\eta)}(\omega) e^{ik\omega_0 t},$$

де

$$f_k^{(\xi\eta)}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} B_k^{(\xi\eta)}(u) e^{-i\omega u} du. \tag{3}$$

Величини $f_k^{(\xi\eta)}(\omega)$, які є коефіцієнтами Фур'є змінної спектральної густини

$$f_k^{(\xi\eta)}(\omega)=\frac{1}{T}\int_0^T f_{\xi\eta}(\omega,t)e^{-ik\omega_0 t}dt\,,$$

будемо називати взаємоспектральними компонентами, які визначають одночасно ступінь корельованості між гармонічними складовими, які формують кожен із сигналів $\xi(t)$ і $\eta(t)$. Нульовий взаємоспектральний компонент визначає усереднене за часом значення взаємоспектральної густини. Він є перетворенням Фур'є нульового взаємоспектрального компонента – середнього за часом значення взаємокореляційної функції:

$$f_0^{(\xi\eta)}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} B_0^{(\xi\eta)}(\omega,t)e^{-i\omega u}du\,.$$

Підставивши до виразу (3) співвідношення $B_k^{(\xi\eta)}(u)=\sum_{q\in Z}R_{q-k,q}^{(\xi\eta)}(u)e^{iq\omega_0 u}$ [3], отримуємо формулу

$$f_k^{(\xi\eta)}(\omega)=\sum_{q\in Z}f_{q-k,q}^{(\xi\eta)}(\omega-q\omega_0)\,,$$

де $f_{pq}^{(\xi\eta)}(\omega)$ – взаємоспектральні густини стаціонарних компонентів процесів $\xi(t)$ і $\eta(t)$:

$$f_{pq}^{(\xi\eta)}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R_{pq}^{(\xi\eta)}(u)e^{-i\omega u}du\,.$$

Нульовий взаємоспектральний компонент визначається взаємоспектральними густинами стаціонарних компонентів $\xi_p(t)$ і $\eta_p(t)$ з однаковими номерами, а взаємоспектральний компонент номера k – взаємоспектральними густинами тих компонентів, номери яких відрізняються на число k.

Для опису стохастичних зв'язків стаціонарних випадкових сигналів у частотній області широко використовується інтегральна функція когерентності, яка визначається виразом [4]:

$$\gamma_{\xi\eta}(\omega)=\frac{\left|f_{\xi\eta}(\omega)\right|^2}{f_\xi(\omega)f_\eta(\omega)}, \tag{4}$$

де $f_{\xi\eta}(\omega)$ – взаємна спектральна густина двох стаціонарних стаціонарно зв'язаних сигналів, а $f_\xi(\omega)$ і $f_\eta(\omega)$ – їх спектральні густини потужності. Оскільки [4]

$$\left|f_{\xi\eta}(\omega)\right|^2\le f_\xi(\omega)f_\eta(\omega),$$

то для функції (4) завжди виконується умова: $0\le\gamma_{\xi\eta}(\omega)\le 1$. Для незалежних сигналів $\gamma_{\xi\eta}(\omega)=0$ для всіх $\omega\in R$. Якщо сигнали $\xi(t)$ і $\eta(t)$ є результатом лінійних перетворень одного й того ж процесу, то $\gamma_{\xi\eta}(\omega)=1$. Якщо функція когерентності менша від одиниці, то це є показником того, що має місце одна з трьох ситуацій: на один з сигналів впливає зовнішній шум, один з сигналів зазнав нелінійних перетворень, один з досліджуваних сигналів зазнав впливу інших. При аналізі лінійних систем функція когерентності дає можливість виділити ту частину випадкового сигналу $\eta(t)$, яка на частоті ω визначається процесом $\xi(t)$. З другого боку, різниця $1-\gamma_{\xi\eta}(\omega)$ характеризує ту частину, яка не корелює з $\xi(t)$.

Таким чином, взаємний аналіз періодично корельованих випадкових вібросигналів, відібраних у різних точках, може суттєво полегшити визначення типу дефектів, а також є необхідним для їх розрізнення та локалізації.

Список використаних джерел

1. Яворський І.М. Математичні моделі та аналіз стохастичних коливань. – Львів : ФМІ ім. Г. В. Карпенка НАН України, 2013. – 802 с.
2. Javorskyj I., Kravets I., Matsko I., Yuzefovych R. Periodically correlated random processes: Application in early diagnostics of mechanical systems // Mechanical Systems and Signal Processing. – 2017. – 83. – P. 406–438. (dx.doi.org/10.1016/j.ymssp.2016.06.022).
3. Jaworskyj I., Yuzefovych R., Matsko I., Zakrzewski Z. Coherence function of interrelated Periodically Nonstatio-nary Random Processes // Radioelectronics and Communication Systems. – 2016. – Vol. 59, № 3. – P. 128–140.
4. Бендат Дж. Применения корреляционного и спектрального анализа / Дж. Бендат, А. Пирсол – М. : Мир, 1983. – 312 с.