УДК 621.39

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ ІДЕМПОТЕНТНОЇ АЛГЕБРИ В ОПТИМІЗАЦІЙНИХ ЗАДАЧАХ

Манжула В.І.[1], Гродецький П.Б.[2], Іващук А.Б.[3],
Тернопільський національний економічний університет
[1] к.т.н., доцент; [2,3] магістрант,

І. Актуальність проблеми

В даний час існує величезна кількість програмного забезпечення (ПЗ) для організації управління проектами. Дане ПЗ можна розділити за різними критеріями – за способом реалізації від desktop- до web-версій,за типом розглянутих проектів від стохастичних до детермінованих. ПЗ управління проектами не завжди реалізує великий набір методів, часто будучи вузькоспеціалізованим лише на одному з них. В основі більшості продуктів лежать алгоритми, створені ще в 50-60-х роках минулого століття. До таких алгоритмів відносяться «метод критичного шляху» (CPM), «метод графічної оцінки й аналізу» (GERT), «техніка оцінки та аналізу проектів» (PERT) та інші.

Більшість задач управління проектами є задачами оптимізації. Багато класичних задач оптимізації (задачі оптимізації на графах, про призначення, динамічного програмування) представляються в ідемпотентній алгебрі у вигляді розв’язку лінійних рівнянь, знаходження власних чисел і векторів лінійного оператора та інших обчислень даного характеру. За останні десятиліття ідемпотентна алгебра перетворилася в один з найбільш інтенсивно використовуваних розділів математики, роль якого як теоретичної дисципліни та ефективного інструменту вирішення практичних завдань в економіці, техніці, управлінні та інших областях стає дедалі більшою [1].

ІІ. Мета дослідження

Основною метою даного дослідження є вивчення існуючих методів вирішення задач оптимізації в різних теоретичних галузях, наприклад моделювання систем [2], та практичних, зокрема задачі оптимізації планування проектів, і способи їх програмної реалізації із застосуванням ідемпотентної алгебри.

ІІІ. Математична постановка задачі планування проекту

Задачі оптимізації виникають , наприклад, на виробництві при спробах створити план проекту, який мінімізує максимальне відхилення між часом завершення всіх завдань в проекті, при різних обмеженнях, які накладаються на порядок виконання завдань. Розглянемо проект, що складається з n завдань, які виконуються при обмеженнях типу старт-фініш і старт-старт. Обмеження старт-фініш встановлює межу для мінімального часу затримки між початком одного завдання і закінченням іншого. Припустимо, що кожна задача негайно закінчується, як тільки зазначені обмеження виявляються виконаними. Обмеження старт-старт визначає мінімальну затримку між початком двох завдань. Однією із задач є знаходження такого плану проекту, який забезпечує один загальний час завершення для всіх завдань, не порушуючи умов на порядок їх виконання.

Для кожного i-го, $i = 1,\ldots,n$, завдання в проекті, позначимо через x_i – час початку, y_i – час завершення. Нехай, a_{ij} – мінімально можлива затримка між початком j-го, $i = 1,\ldots,n$, завдання і завершенням i-го. Обмеження типу "старт-фініш" запишемо у вигляді нерівностей:

$$x_j + a_{ij} \le y_i,\ j = 1,\ldots,n, \qquad (1)$$

при цьому хоча б одна нерівність, для будь-якого $a_{ij} \ge 0$, має виконуватися як рівність. Якщо для деякого j значення a_{ij} не задано, то вважаємо $a_{ij} = -\infty$. Тепер запишемо це в одну рівність вигляду:

$$\max_{j=1,n}(x_j + a_{ij}) = y_i, i = 1,\ldots,n \qquad (2)$$

Крім того, нехай c_{ij} буде мінімально можливою затримкою між початком j-го та i-го завдань. Будемо знову вважати, що $c_{ij} = -\infty$, якщо не визначена затримка між j-им і i-им завданнями. Запис обмеження старт-старт має такий вигляд:

$$x_j + c_{ij} \le x_i,\ j = 1,\ldots,n \qquad (3)$$

Далі можна записати як одну нерівність:

$$\max_{j=1,n}(x_j + c_{ij}) \le x_i, i = 1,\dots,n \quad (4)$$

Визначимо цільову функцію, щоб сформулювати задачу оптимального планування, як задачу оптимізації. Критерій оптимальності, який показує на скільки план забезпечує загальний час завершення для всіх завдань, визначається як максимальна різниця між часом завершення всіх завдань (інтервальна напівнорма):

$$\max_{i=1,n} y_i - \min_{i=1,n} y_i = \max_{i=1,n} y_i - \max_{i=1,n}(-y_i) \quad (5)$$

Тепер ми можемо сформулювати задачу оптимізації, в такому вигляді

$$\max_{i=1,n} y_i - \max_{i=1,n}(-y_i) \to \min \quad (6)$$

при обмеженнях (2) і (4).

Задача (6) може бути представлена в термінах ідемпотентної математики і повністю вирішена в компактній векторній формі

IV. Задача планування проектів на основі операцій ідемпотентної алгебри

Розглянемо задачу записану в формі (6) і зауважимо, що подання цієї задачі в звичайних термінах включає в себе тільки операції додавання і обчислення максимуму. Знаходження мінімуму цільової функції є just-in-time оптимізацією проекту в термінах управління проектами.

Представимо обмеження як скалярні рівності та нерівності:

$$\bigoplus_{j=1}^{m} a_{ij} x_j = y_i,$$
$$\bigoplus_{j=1}^{m} c_{ij} x_j \le x_i,\ j = 1,\dots,n. \quad (7)$$

Якщо використовувати матрично-векторні позначення, то скалярні обмеження наберуть форми

$$\begin{aligned} Ax &= y, \\ Cx &\le x. \end{aligned} \quad (8)$$

Крім того, запишемо цільову функцію, за умови, що Z = (0, …, 0)^T. Цільова функція буде мати вигляд:

$$\bigoplus_{j=1}^{n} y_i \bigoplus_{j=1}^{n} y_j^{-1} = Z^T y y^{-1}. \quad (9)$$

Об'єднавши цільову функцію (9) з обмеженнями (8), отримаємо задачу:

$$Z^T y y^{-1} \to \min$$
$$Ax = y,$$
$$Cx \le x,$$

рішення, якої наведено в праці [2].

Висновки

Отже, в роботі було досліджено дисципліну управління проектами, зокрема, клас задач мережевого планування. Досліджено існуючі методи вирішення цих задач і способи їх програмної реалізації.

Також, було запропоновано застосування ідемпотентної алгебри для вирішення задач мережевого планування. Вивчено моделі та задачі оптимізації планування проектів на основі операцій ідемпотентної алгебри.

Список використаних джерел

1. Литвинов Г.Л. Идемпотентная математика и интервальный анализ / Г.Л. Литвинов, В.П. Маслов, А.Н. Соболевский // Международный центр “СофусЛи”, Москва, – Том 6, № 6, 2001 – 24 с.
2. Дивак М.П. Багатокритеріальний підхід структурної ідентифікації інтервальних моделей статичних систем / М.П. Дивак, В.І. Манжула // Інформаційні технології та комп’ютерна інженерія. – 2005. – №2. – С.37-44.
3. Krivulin N. Explic it solution of a tropical optimization problem with application to projects cheduling in Mathematical Methods and OptimizationTechniques in Engineering. — arXiv: 1303.5457 [math.OC], 2013.