УДК 536.2

Б. Окрепкий, А. Алілуйко
(Тернопільський національний економічний університет)

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ОСЕСИМЕТРИЧНОЇ ТЕМПЕРАТУРНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ СИСТЕМИ ДВОХ КОНТАКТУЮЧИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ТІЛ МЕТОДОМ СКІНЧЕНИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Нехай круговий циліндр радіуса R_1 і довжиною L_1 знаходяться в ідеальному тепловому контакті із круговим циліндром радіуса R_2 і довжиною L_2 ($R_1 < R_2$). На вільних поверхнях циліндрів задані постійна температура або теплоізоляція. Матеріали тіл припускаються ізотропними. Введемо циліндричну систему координат r, θ, z, центр якої лежить на поверхні дотику двох тіл, а вісь $0z$ спрямована вздовж осі одного із циліндрів. Всі величини, які позначені індексом «1» відносяться до одного із циліндрів, що знаходяться вище площини $z = 0$, а індексом «2» - нижче.

Граничні умови матимуть вигляд:

$$T^{(1)} = T_0 \qquad (z = L_1,\ \ 0 \le r < R_1) \tag{1}$$

$$\frac{\partial T^{(1)}}{\partial r} = 0 \qquad (0 \le z \le L_1, \quad r = R_1) \tag{2}$$

$$\lambda_Z^{(1)} \frac{\partial T^{(1)}}{\partial z} = \lambda_Z^{(2)} \frac{\partial T^{(2)}}{\partial z}, \quad T^{(1)} = T^{(2)}, \quad (z = 0; \quad 0 \le r < R_1) \tag{3}$$

$$T^{(2)} = 0 \qquad (z = 0; \ \ R_1 \le r \le R_2) \tag{4}$$

$$\frac{\partial T^{(2)}}{\partial r} = 0 \qquad (-L_2 \le z \le 0, \quad r = R_2) \tag{5}$$

$$T^{(2)} = 0 \qquad (z = -L_2; \ \ 0 \le r < R_2) \tag{6}$$

Тут $\lambda_Z^{(1)}$, $\lambda_Z^{(2)}$ - коефіцієнти теплопровідності.

Мінімізація функціоналу $F(T^{(1)}, T^{(2)}) = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{j=1}^{2} \int\limits_{V^{(j)}} \lambda_z^{(j)} \left[\left(\dfrac{\partial T^{(j)}}{\partial r} \right)^2 + \left(\dfrac{\partial T^{(j)}}{\partial z} \right)^2 \right] r dr dz$

в області $V = V^{(1)} \cup V^{(2)}$ з умовами (1,4,6), приводить до розв'язування рівнянь

$$\frac{\partial^2 T^{(j)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T^{(j)}}{\partial r} + \frac{\partial^2 T^{(j)}}{\partial z^2} = 0 \quad (j = 1{,}2)$$

з граничними умовами (1-6). Поділивши області $V^{(j)}$ на скінчені елементи у вигляді трикутників, у вершинах яких задані значення температури

$$x_i^{(j)} = T_i^{(j)}(r_i^{(j)}, z_i^{(j)}) \quad \{(j = 1; \quad i = \overline{1, N}); (j = 2; i = \overline{N+1, 2N})\}$$

прийдемо до системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих $x_i^{(j)}$, через які знаходиться температура в любій точці системи тіл. Розв'язувались системи лінійних алгебраїчних рівнянь із 20-ма невідомими, що забезпечувало достатню високу точність. Зроблено порівняння розв'язків задач методом скінчених елементів і методом Фур'є для циліндрів рівних радіусів. Слід відмітити, що для двадцяти елементів, похибка числових значень температури не перевищує 2%. Враховуючи це, можна впевнено використовувати метод скінчених елементів для розв'язування температурних задач такого типу при інших граничних температурних умовах. Аналіз розв'язку показує, що температурні задачі для циліндрів різних радіусів доцільніше розв'язувати методом скінчених елементів.