М. Недашковський. Аналіз обчислювальної стійкості алгоритмів розв'язання систем лінійних алгебричних рівнянь з λ-матрицями / М. Недашковський, Л. Семчишин, В. Поселюжна // Вісник ТНТУ. — 2013. — Том 69. — № 1. — С.213-222. — (математичне моделювання. математика. фізика).

УДК 518.25

М. Недашковський[1], докт. фіз.-мат. наук;
Л. Семчишин[2], канд. фіз.-мат. наук;
В. Поселюжна[2], канд. фіз.-мат. наук

[1]Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя
[2]Чортківський інститут підприємництва і бізнесу
Тернопільський національний економічний університет

АНАЛІЗ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОЇ СТІЙКОСТІ АЛГОРИТМІВ РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРИЧНИХ РІВНЯНЬ З $\lambda-$МАТРИЦЯМИ

Резюме. *Запропоновано новий підхід до обчислювальної стійкості алгоритмів розв'язання систем лінійних алгебричних рівнянь з $\lambda-$матрицями. Розглянуто деякі результати з теорії похибок для розв'язання систем лінійних алгебричних рівнянь з $\lambda-$матрицями. Проведено аналіз обчислювальної стійкості засобами зворотного аналізу похибок. Показано реалізацію методу розрізання для систем лінійних алгебричних рівнянь з $\lambda-$матрицями. Проаналізовано похибки схеми розрізання для розв'язання систем з $\lambda-$матрицями.*

Ключові слова: *обчислювальна стійкість, $\lambda-$матриці, теорія похибок, метод розрізання, відсічені системи, системи лінійних алгебричних рівнянь з $\lambda-$матрицями.*

M. Nedashkovskyy, L. Semchyshyn, V. Poselugna

CALCULATIVE STABLENESS OF ALGORITHMS SOLUTION ANALYSIS OF THE LINEAR ALGEBRAIC EQUATIONS WITH $\lambda-$MATRIX

Summary. *The linear algebraic equations solution is one of the calculative mathematics actual tasks. Investigating certain processes with the mathematics methods and Electronic Calculative Machine usage firstly the mathematical model of the investigated object was built. Then the built mathematical model is transformed into such appearance that the solution is being found as a numerical result with the help of arithmetical and logical operations. Such transformation is carried out by the numerical methods usage. Naturally at the given stage a number of problems dealing with their calculative stableness arise. That is why the new approach to the calculative stableness system of linear algebraic equations with $\lambda-$matrix algorithm solution is proposed in the article.*

During the linear algebraic equations solution there arise the errors caused by the initial data unpreciseness or the error approximation. Besides, during calculation the errors almost always occur within the task itself (because of the arithmetical operations inaccurate completion). The mistakes of this type (so-called calculative) in many cases being aggregated equal the exact solution of the same task, but with the changed initial data. Even provided that the previous measurements and calculations were carried out with a high preciseness and a stable calculative method was chosen for the solution of the task, the initial data error, though very small would occur. These errors influence, to some extent, the solution of the system solution. Some results from the error theory for the linear algebraic equations with $\lambda-$matrix are analysed in the article. Some results from the theory of error for the linear algebraic equations with $\lambda-$matrix system solution are studied. The calculative stableness is analyzed by means of the error inverse analysis. Realization of the incision method for *the system of the linear algebraic equations with $\lambda -$matrix is revealed. The incision scheme errors for the system with $\lambda -$matrix solution are analyzed.*

Theoretical and methodological bases of the investigation are composed by the methods of optimization and mathematical modeling.

***Key words**: calculative stableness, $\lambda -$ matrix, error theory, incision method, severance system, the linear algebraic equations with $\lambda -$ matrix systems.*

Постановка проблеми. Розв’язування систем лінійних алгебричних рівнянь (СЛАР) завжди є одним із актуальних задач обчислювальної математики. Обчислювальна математика вивчає чисельні методи розв’язування різних математичних задач, тобто методи, які ґрунтуються на побудові скінченної послідовності дій над скінченною множиною чисел. За умови використання таких методів розв’язок математичної задачі отримується у вигляді числового результату. Досліджуючи ті чи інші процеси або явища, проектуючи зразки нової техніки з використанням математичних методів і ЕОМ, спочатку складають математичну модель досліджуваного об’єкта. Тоді побудовану математичну модель перетворюють до такого вигляду, щоб розв’язок можна було знайти (звичайно з певною похибкою) у вигляді числового результату за допомогою арифметичних і логічних операцій. Таке перетворення виконують, застосовуючи числові методи. Закономірно, що на цьому етапі виникає низка проблем, пов’язаних із їхньою обчислювальною стійкістю, оцінкою похибки розв’язку і т.д.

Числові методи алгебри – одні з базових інструментів математичного моделювання і важлива частина програмного забезпечення для комп’ютерів усіх поколінь.

Числові методи алгебри на практиці присвячені проблемі розв’язання систем алгебричних рівнянь з елементами, що задані наближено. Існує багато задач, наприклад у цілочисловому програмуванні [1, 9], де початкові дані систем лінійних рівнянь задаються точно і розв’язки також потрібно визначити точно. Побудова ефективних методів визначення невідомих для таких систем – потрібна і досить непроста задача.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Багато відомих вітчизняних і закордонних учених займалися проблемами розв’язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Серед них: В. Воєводін [4, 6], Є. Тиртишніков [5, 11], Дж. Уілкінсон [12] та ін. Однак деякі проблеми не мають однозначного розв’язання і потребують уточнення. У роботі М. Недашковського і О. Ковальчук [10] розглянуто комп’ютерні алгоритми для систем лінійних алгебраїчних рівнянь з $\lambda -$матрицями. Особлива увага приділялась методам аналізу обчислювальної стійкості алгоритмів у працях таких вчених, як В.Е. Валях [3], В.В. Воеводін [7, 8] та ін.

Метою роботи є дослідження обчислювальної стійкості алгоритмів розв’язання систем лінійних алгебричних рівнянь з $\lambda -$матрицями, аналіз обчислювальної стійкості засобами зворотного аналізу похибок, також проаналізовано похибки схеми розрізання для розв’язання систем з $\lambda -$матрицями.

Теоретичну та методологічну основу дослідження складають методи оптимізації та математичне моделювання.

Дослідження задачі та обґрунтування отриманих наукових результатів. При розв’язуванні системи лінійних алгебраїчних рівнянь виникають похибки, пов’язані з неточністю початкових даних чи похибки заокруглення. Крім того, майже завжди виникають помилки при обчисленні вже у межах самої задачі (внаслідок неточного виконання арифметичних операцій). Помилки цього типу (так звані обчислювальні) в багатьох випадках у сукупності рівносильні точному розв’язку такої ж задачі, але зі зміненими вхідними даними.

Навіть за умови, що попередні вимірювання та обчислення проводили з високою точністю і для розв’язання задачі вибрано стійкий метод обчислень, помилки вхідних даних, хоча й малі, але все ж будуть. Ці похибки певною мірою впливають на розв’язок систем.

З огляду на це виникає запитання, як похибки вхідної інформації впливають на якість розв’язку системи. Точної відповіді на це запитання немає, тому спробуємо хоча б оцінити вплив похибок вхідної інформації на розв’язок.

Стійкість числового алгоритму. Погано обумовленою може бути не сама задача, а лише алгоритм, вибраний для її розв’язання. Якщо обчислений розв’язок сильно відрізняється від точного внаслідок виконання числового алгоритму, то такий алгоритм називають *нестійким*.

При реалізації алгоритму на ЕОМ виникають похибки заокруглення даних, сумарний ефект яких необхідно враховувати при розв’язуванні задачі [2]; [3] .

Нехай обчислювальна задача з початковими даними $A(\lambda)$ розв’язується з допомогою деякого точного алгоритму g . Результат K розв’язання задачі запишемо у вигляді $K = g(A(\lambda))$.

При комп’ютерній реалізації алгоритму g усі його операції будуть замінені машинними псевдоопераціями, а сам алгоритм – деяким машинним алгоритмом $K = g_t(A(\lambda))$, результат виконання якого запишемо

$$X_t(\lambda) = g_t(A(\lambda)).$$

Різницю $\Delta = X(\lambda)_t - X(\lambda)$ називають *похибкою обчислення* на обчислювальній системі. Такий метод урахування сумарної похибки заокруглення називають *прямим аналізом* похибок. Для багатьох числових методів похибки проміжних обчислень у сукупності рівносильні випадку, коли ті ж методи (в нашому випадку алгоритм g) точно розв’язували б кожен свою задачу, попередньо змінивши вхідні дані (наприклад, на $A_t(\lambda)$):

$$X_t(\lambda) = g(A_t(\lambda)).$$

Різницю $K = X_t(\lambda) - X(\lambda)$ називають *еквівалентним збуренням*, яке також характеризує похибку розв'язання задачі. Останню рівність запишемо у вигляді $X_t(\lambda) = g(A(\lambda) + K)$. $X_t(\lambda)$ можна розглядати як розв’язок тієї ж задачі зі збуреними на K вхідними даними. Для отримання кількісної оцінки впливу похибок заокруглення використовують так званий зворотний аналіз похибок [12].

Для аналізу похибок заокруглення, що виникають на ЕОМ, використаємо методику Дж. Х. Уілкінсона [12].

Запис чисел в обчислювальних системах. Два режими обчислень використовують при реалізації алгоритмів на ЕОМ – з фіксованою та плаваючою комами. Останній є основним для комп'ютера. У цьому режимі кожне ненульове число x представляється парою чисел a та b: $x = h^b a$, де h – основа машинної арифметики, ціле b - порядок числа, a – мантиса, така, що

$$\frac{1}{h} \le |a| \le 1.$$

Для представлення мантиси виділяється t розрядів (кількість знаків після коми для запису a). Найчастіше в обчислювальних системах використовується двійкова система числення, тому ще кажуть, що число x має t-бітову довжину.

Запис $z = fl(z * y)$ означає, що стандартне число z з плаваючою комою отримане зі стандартних чисел x та y в результаті виконання на ЕОМ деякої арифметичної операції (додавання, віднімання, множення або ділення) в режимі з плаваючою комою. Для сучасних ЕОМ похибки окремих арифметичних операцій є невеликими: $z = fl(x * y) = (x * y)(1 + e)$, де $|e| \le h^{-t}$.

Така оцінка має місце при режимі блокування заокруглення, який найпоширеніший на сучасних комп'ютерах. На довільній ЕОМ для деякої множини чисел в околі машинного нуля справедлива рівність $\varepsilon = -1$ незалежно від кількості розрядів t.

Отже, для дійсних чисел справджуються оцінки

$$\left.\begin{aligned} &|e| \le h^{-t}, \quad \text{для } fl(x) \neq 0, \\ &e = -1\ , \quad \text{для } fl(x) = 0, \text{ при } x \neq 0 \end{aligned}\right\}$$

Для обчислень з фіксованою комою (крапкою) використовують позначення $z = fi(x * y)$. Вважається, що операції додавання і віднімання в цьому режимі не мають похибок [12] $z = fi(x \pm y) = (x \pm y)$, а ділення і множення породжують малі похибки заокруглення

$z = fi(x * y) = (x * y) + e,\ z = fi(x \div y) = (x \div y) + e$, де $|e| \le h^{-t+1}$.

Для аналізу похибок заокруглення методів, описаних у попередніх розділах, застосуємо метод зворотного аналізу, оскільки використання прямого методу для оцінки похибок обчислювальних методів досить трудомістке і часто призводить до огрублення загальних оцінок схеми обчислень. Запропонована ідея зворотного аналізу похибок дає змогу значно спростити сам процес аналізу й отримати більш достовірні верхні оцінки якості знайдених розв'язків.

Деякі результати з теорії похибок. Нехай $B(\lambda)$ – прямокутна матриця, яка перетворюється в процесі реалізації деякого числового методу. Припустимо, що за математичним алгоритмом будується послідовність

$$B(\lambda) = B_0(\lambda),\ B_1(\lambda),\ B_2(\lambda)\ ,...,\ B_n(\lambda),$$

де $B_i(\lambda) = P_i(\lambda) B_{i-1}(\lambda)\ (i = 1, 2, ..., n)$ і матриці $P_i(\lambda)$ – невироджені.

Тоді

$$B_n(\lambda)=P(\lambda)B(\lambda). \qquad (1)$$

Отже, матриця $B_n(\lambda)$ – результат точного множення матриці $P(\lambda)$ на матрицю $B(\lambda)$. Тобто побудуємо послідовність

$$B_i(\lambda)=W_i(\lambda)B_{i-1}(\lambda)+\mu_{i-1}\ \ (i=1,2,...,n), \qquad (2)$$

$W_i(\lambda)$ – матриці, реально отримані в процесі обчислень, μ_i – матриця похибок від множення $P_i(\lambda)$ на $B_{i-1}(\lambda)$. Далі отримаємо

$$B_i(\lambda)=W_n(\lambda)B_{n-1}(\lambda)+\mu_{n-1}=W_n(\lambda)W_{n-1}(\lambda)...W_1(\lambda)\times$$
$$\times\left(B(\lambda)+W_1(\lambda)\mu_0+W_1(\lambda)W_2(\lambda)\mu_1+W_1(\lambda)W_2(\lambda)...W_m(\lambda)\mu_{n-1}\right).$$

Позначивши

$$\left.\begin{aligned}&P(\lambda)=W_n(\lambda)W_{n-1}(\lambda)...W_1(\lambda)\\&Q_n=W_1(\lambda)\mu_0+W_1(\lambda)W_2(\lambda)\mu_1+W_1(\lambda)W_2(\lambda)...W_m(\lambda)\mu_{n-1}\end{aligned}\right\}, \qquad (3)$$

отримаємо

$$B_n(\lambda)=P(\lambda)[B(\lambda)+Q_n]. \qquad (4)$$

Аналізуючи (1) та (4), доходимо висновку, що знайдену в процесі обчислень матрицю $B_n(\lambda)$ отримаємо як результат точного множення збуреної матриці $B(\lambda)+Q_n$ на матрицю $P(\lambda)$.

ТВЕРДЖЕННЯ. *Припустимо, що деякий масив вхідних даних* $B\{P_1(\lambda),P_2(\lambda),...,P_n(\lambda)\}$ *опрацьовується за алгоритмом* ρ*, який складається з етапів* $\rho_1,\rho_2,...,\rho_k$ *так, що*

$$B_t(\lambda)=\rho_t\left(B(\lambda)\right). \qquad (5)$$

Тоді процесу ρ_t *реалізації алгоритму* ρ *на ЕОМ відповідають еквівалентні збурення* ψ *масиву вхідних даних* $B(\lambda)$*, такі, що*

$$\psi=\prod_{i=1}^{k}\left(1+\psi^{(i)}\right)-1. \qquad (6)$$

ДОВЕДЕННЯ. Опираючись на метод зворотного аналізу заокруглення похибок, машинній реалізації відношення (5) поставимо у відповідність точну реалізацію (6), але зі збуреними вхідними даними

$$B^{(i)}(\lambda)=\rho_i\left(B^{(i-1)}(\lambda)\left[1+\psi^{(i)}\right]\right) \qquad (7)$$

З урахуванням (7) для комп’ютерної реалізації першого етапу запишемо

$$B^{(1)}(\lambda)=\rho_1\left(B^{(0)}(\lambda)\left[1+\psi^{(1)}\right]\right).$$

Для другого етапу $B^{(2)}(\lambda)=\rho_2\left(B^{(1)}(\lambda)\left[1+\psi^{(2)}\right]\right)$. Продовжуючи цей процес, на k -ому етапі отримаємо

$$B^{(k)}(\lambda)=\rho_k\left(B^{(k-1)}(\lambda)\left[1+\psi^{(k)}\right]\right)=\rho_k\left(\left[1+\psi^{(k)}\right]\right)\psi_{k-1}\left(B^{(k-2)}(\lambda)\left[1+\psi^{(k-1)}\right]\right)\Big).$$

Якщо реалізація довільного обчислювального алгоритму ρ_t означає виконання хоча б однієї арифметичної операції, то для відповідного збурення ε мають місце співвідношення

$$(1+\gamma)\rho\left(X(\lambda)\right)=\rho_t\left(X(\lambda)[1+\varepsilon]\right),$$

де $|\gamma|>0$ – відносна похибка алгоритму.

Виходячи з (8), запишемо

$$B^{(2)}(\lambda)=\rho_2(B^{(1)}(\lambda)[1+\psi^{(2)}])=\rho_2([1+\psi^{(2)}])\rho_1(B(\lambda)[1+\psi^{(1)}]))=$$
$$=\rho_2(\rho_1(B(\lambda)[1+\eta^{(2)}][1+\psi^{(1)}])),$$

$$B^{(3)}(\lambda)=\rho_3(B^{(1)}(\lambda)[1+\psi^{(3)}])=\rho_3([1+\psi^{(3)}])\rho_2\left(\rho_1\left(B(\lambda)[1+\eta^{(2)}][1+\psi^{(1)}]\right)\right)=$$

$$=\rho_3\rho_2\left([1+\psi^{(3)}]\right)(\rho_1(B(\lambda)[1+\eta^{(2)}][1+\psi^{(1)}]))=\rho_3\left(\rho_2\left(\rho_1\left(B(\lambda)[1+\eta^{(3)}][1+\eta^{(2)}][1+\psi^{(1)}]\right)\right)\right)$$

L L L L L L L L L L L L L L L L L L L L L L L L L L L L L L

$$B^{(k)}(\lambda)=\rho_k\left(\rho_{k-1}\left(...\rho_1\left(B(\lambda)[1+\eta^{(k)}][1+\eta^{(k-1)}]...[1+\eta^{(2)}][1+\psi^{(1)}]\right)\right)...\right),$$

де $\left|\eta^{(i)}\right|>0$ – відносні похибки окремих етапів алгоритмів і $\left\|\eta^{(i)}\right\|\le\left\|\psi^{(i)}\right\|$, оскільки відносна похибка алгоритму не може бути менша від похибок вхідних даних. Тому, якщо

$$\rho\left(B(\lambda)\right)=\rho_k\left[\ \rho_{k-1}\left[...\rho_1\left[B(\lambda)\left(1+\eta^{(k)}\right)\left(1+\eta^{(k-1)}\right)...\left(1+\eta^{(2)}\right)\left(1+\psi^{(1)}\right)\right]\ \right]\ \right],$$

то $\rho_t(B(\lambda)(1+\psi))=\rho_k(\rho_{k-1}(...\rho_1(\prod_{i=2}^{k}[1+\eta^{(i)}][1+\psi^{(1)}]))$.

Звідси матимемо $\psi=\prod_{i=2}^{k}[1+\eta^{(i)}][1+\psi^{(1)}]-1.$ З урахуванням того, що $\left\|\eta^{(i)}\right\|\le\left\|\psi^{(i)}\right\|$, з останньої рівності отримаємо

$$\|\psi\|_j\le\prod_{i=2}^{k}\left(1+\left\|\eta^{(i)}\right\|_j\right)\ \left(1+\left\|\psi^{(1)}\right\|_j\right)-1\le\prod_{i=2}^{k}\left(1+\left\|\psi^{(i)}\right\|_j\right)\ \left(1+\left\|\psi^{(1)}\right\|_j\right)-1=\prod_{i=1}^{k}\left(1+\left\|\psi^{(i)}\right\|_j\right)-1\ .$$

Що й треба було довести.

Наслідок. Якщо реалізація деякого обчислювального алгоритму ρ_t на ЕОМ означає виконання хоча б однієї арифметичної операції на кожному з k етапів так, що

$$\left.\begin{array}{c}(1+\gamma)\rho(x)=\rho_t\left(x[1+\varepsilon]\right)\\ \|\varepsilon\|\leq\|\gamma\|\end{array}\right\},\tag{9}$$

то для сумарної похибки заокруглення на ЕОМ γ і відповідного еквівалентного збурення ε справджуються нерівності $\|\beta\|\leq\prod_{i=1}^{k}(1+\|\psi^{(i)}\|)-1$.

Проведемо тепер детальний аналіз обчислювальної стійкості раніше запропонованих алгоритмів засобами зворотного аналізу похибок. Для цього використаємо деякі результати, отримані Дж. Х. Уілкінсоном [12], В.В. Воєводіним [7] та іншими дослідниками стійкості обчислювальних методів. Сформулюємо їх без доведення.

Аналізуючи похибки заокруглення, часто доводиться використовувати оцінки вигляду

$$\left(1-\alpha^{-t}\right)^k\leq 1+\varepsilon\leq\left(1+\alpha^{-t}\right)^k.\tag{10}$$

Для спрощення в усіх практичних застосуваннях припускається, що величина k обмежена зверху, а саме $k\varepsilon^{-t}<0.1$.

Це обмеження для кожного прийнятного значення t спричинено, в першу чергу, обмеженістю оперативної пам'яті ЕОМ [3]. Враховуючи (10), можна записати

$$\left.\begin{array}{l}(1+\alpha^{-t})^k<1+1.05\cdot\alpha^{-t}\\ (1-\alpha^{-t})^k>1-1.05\cdot\alpha^{-t}\end{array}\right\}.$$

Аналіз похибок схеми розрізання для розв'язання систем з $\lambda-$матрицями. Як і в попередніх випадках, реалізація методу має кілька етапів. Тому спочатку проведемо аналіз похибок для кожного етапу окремо, а потім виведемо остаточну оцінку.

ТЕОРЕМА 1. *Якщо при реалізації алгоритму схеми розрізання для СЛАР на ЕОМ у режимі плаваючої коми скалярні добутки обчислюються з одинарною точністю, то еквівалентні збурення задовольняють нерівності*

$$\left\|\alpha_{i,j}^{(0)}\right\|\leq C_0\cdot nl\cdot\max\left\{\|A\|,\left\|Y_2-C_{21}C_{11}^{-1}C_{12}\right\|,\left\|C_{22}-C_{21}C_{11}^{-1}Y_1\right\|,\left\|Y_1-C_{12}Z\right\|\right\}h^{-t+1}.$$

ДОВЕДЕННЯ. За алгоритмом розрізання на першому етапі обчислюється $C_{11}^{-1}C_{12}$ та $C_{11}^{-1}Y_1$. Матриця C_{11} – клітково-теплицева, причому з блочно-трикутним заповненням. Обчислення $C_{11}^{-1}C_{12}$ та $C_{11}^{-1}Y_1$ можна виконати, розв'язуючи блочно-трикутну систему з $nl+l$ правими частинами. Отже, еквівалентні збурення a_{ij} елементів a_{ij} для обчислень з одинарною точністю задовольнятимуть нерівності $\left\|a_{i,j}^{(1)}\right\|\leq 3.015\cdot nl\cdot\|A\|h^{-t+1}$.

На другому етапі обчислюються $C_{22} - C_{21}C_{11}^{-1}Y_1$ та $Y_2 - C_{21}C_{11}^{-1}Y_1$. Якщо матриці множаться за класичним способом, то для обчислень з одинарною точністю отримаємо такі еквівалентні збурення $a_{i,j}^{(*)}$, що

$$\left\|a_{i,j}^{(*)}\right\| \le 2.01nl\max\left\{\left\|D_{22}^{*}\right\|,\left\|B_{2}^{*}\right\|\right\}h^{-t+1}.$$

Третій крок – розв'язання системи лінійних алгебричних рівнянь порядку nl зі щільним заповненням, а тому для обчислень з одинарною точністю $\left\|a_{i,j}^{(3)}\right\| \le 3.015\cdot nl\cdot\left\|A^{(3)}\right\|h^{-t+1}$.

Перш за все на четвертому етапі визначаються матриці $Y_1 - C_{12}Z$. Комп'ютерне обчислення зумовлює такі ж похибки, як і на другому кроці. Потім необхідно ще розв'язати на комп'ютері систему з матрицею C_{11} порядку n^2l із клітково-трикутним заповненням. Отже, виникнуть такі ж еквіваленті збурення, як і на першому кроці для обчислень з одинарною точністю

$$\left\|a_{i,j}^{(4)}\right\| \le 3.015\cdot nl\cdot\max\left\{\left\|A\right\|,\left\|Y_1 - C_{12}Z\right\|\right\}h^{-t+1}.$$

Визначимо тепер еквівалентні збурення, які відповідають реалізації на комп'ютері всього алгоритму. Якщо всі обчислення проводяться з одинарною точністю, то

$$\left\|a_{i,j}^{(0)}\right\| \le C_0\cdot nl\cdot\max\left\{\left\|A\right\|,\left\|Y_2 - C_{21}C_{11}^{-1}C_{12}\right\|,\left\|C_{22} - C_{21}C_{11}^{-1}Y_1\right\|,\left\|Y_1 - C_{12}Z\right\|\right\}h^{-t+1},$$

що й треба було довести.

ТЕОРЕМА 2. *Якщо комп'ютерна реалізація алгоритму схеми розрізання для системи рівнянь у режимі плаваючої коми скалярні добутки обчислюються з подвійною точністю, то еквівалентні збурення задовольняють нерівності*

$$\left\|a_{i,j}^{(0)}\right\| \le C_0\cdot\max\left\{\left\|A\right\|,\left\|Y_2 - C_{21}C_{11}^{-1}C_{12}\right\|,\left\|C_{22} - C_{21}C_{11}^{-1}Y_1\right\|,\left\|Y_1 - C_{12}Z\right\|\right\}h^{-t+1}.$$

ДОВЕДЕННЯ. Матриця C_{11} – блочно-трикутна квадратна матриця клітково-тепліцевого характеру. Добутки $C_{11}^{-1}C_{12}$ та $C_{11}^{-1}Y_1$ можна обчислити, розв'язавши блочно-трикутну систему з $2ln+1$ правими частинами. Для обчислень з подвійною точністю еквівалентні збурення $a_{i,j}^{(1)}$ елементів $a_{i,j}$, що відповідають першому етапу алгоритму, задовольняють нерівність

$$\left\|a_{i,j}^{(1)}\right\| \le 3.015\left\|A\right\|h^{-t+1}.$$

Множення матриць на другому етапі зумовлює еквівалентні збурення $a_{i,j}^{(2)}$

$$\left\|a_{i,j}^{(2)}\right\| \le 2.01\max\left\{\left\|C_{22} - C_{21}C_{11}^{-1}C_{12}\right\|,\left\|Y_2 - C_{21}C_{11}^{-1}Y_1\right\|\right\}h^{-t+1}.$$

На третьому етапі, коли шукають розв’язок системи лінійних алгебричних рівнянь порядку $2ln$ зі щільним заповненням, виникають еквівалентні збурення

$$\left\|a_{i,j}^{(3)}\right\| \le 3.015\left\|A^{*}\right\| h^{-t+1}.$$

Визначаючи матрицю $Y_1 - C_{12}Z$, отримаємо похибки такі самі, як і на другому етапі $\left\|a_{i,j}^{(4)}\right\| \le 2.01\max\left\{\left\|C_{22} - C_{21}C_{11}^{-1}C_{12}\right\|, \left\|Y_2 - C_{21}C_{11}^{-1}Y_1\right\|\right\}h^{-t+1}$.

Обчислення розв’язку системи з матрицею C_{11} порядку $(2nl+1)n$ із клітково-трикутним заповненням зумовлює такі ж еквівалентні збурення, як і на першому кроці $\left\|a_{i,j}^{(5)}\right\| \le 3.015\left\{\left\|A\right\|, \left\|Y_1 - C_{12}Z\right\|\right\}h^{-t+1}$.

Повній комп’ютерній реалізації алгоритму для обчислень з подвійною точністю відповідають збурення

$$\left\|a_{i,j}^{(0)}\right\| \le C_0 \times \max\left\{\left\|A\right\|, \left\|Y_2 - C_{21}C_{11}^{-1}C_{12}\right\|, \left\|C_{22} - C_{21}C_{11}^{-1}Y_1\right\|, \left\|Y_1 - C_{12}Z\right\|\right\}h^{-t+1},$$

що й треба було довести.

Отже, за кількістю арифметичних операцій і за малістю еквівалентних збурень алгоритм схеми розрізання придатний для використання на ЕОМ. При співрозмірних еквівалентних збуреннях він має вищу швидкість, ніж запропоновані прямі алгоритми.

Висновки. Розглянуто новий підхід до обчислювальної стійкості алгоритмів розв’язання систем лінійних алгебричних рівнянь з $\lambda-$матрицями. Наведено деякі результати з теорії похибок для розв’язання систем лінійних алгебричних рівнянь з $\lambda-$матрицями. Проведено аналіз обчислювальної стійкості засобами зворотного аналізу похибок. Показано реалізацію методу розрізання для систем лінійних алгебричних рівнянь з $\lambda-$матрицями. Проаналізовано похибки схеми розрізання для розв’язання систем з $\lambda-$матрицями.

Запропонований алгоритм може ефективно використовуватися в системах комп’ютерної алгебри та для аналітично-числового розв’язування інженерних та прикладних задач.

Conclusions. New approach to the calculative stableness of the algorithms solution analysis of the linear algebraic equations with matrix is considered in the article. Some results from the theory of error for the linear algebraic equations with matrix system solution are presented. The calculative stableness is analyzed by means of the error inverse analysis. Realization of the incision method for the system of the linear algebraic equations with matrix are revealed. The incision scheme errors for the system with matrix solution are analyzed.

The suggested algorithm can be used effectively in the computer algebra systems and for the analytic numerical solution of the engineering and applied problems.

Список використаної літератури

1. Ашманов, С.А. Линейное программирование [Текст] / С.А. Ашманов. – М.: Наука, 1981. – 340 с.
2. Боюн, В.П. Скінченно-різницеві підходи до оптимізації обчислень матриць із складними елементами і множення їх на довільній вектор [Текст] / В.П. Боюн // Зб. наук. праць. – К.: Ін-т кібернетики ім. В.М. Глушкова, 1999. – С. 61 – 64.
3. Валях, В.Е. Последовательно-параллельные вычисления [Текст] / В.Е. Валях. – М.: Мир, 1985. – 456 с.

4. Воеводин, В.В. Вычислительные основы линейной алгебры [Текст] / В.В. Воеводин. – М.: Наука, 1977. – 303 с.
5. Воеводин, В.В. Вычислительные процесы с теплицевыми матрицами [Текст] / В.В. Воеводин, Е.Е. Тыртышников. – М.: Наука, 1987. – 319 с.
6. Воеводин, В.В. Линейная алгебра [Текст] / В.В. Воеводин. – С.-П.: Лань, 2008. – 416 с.
7. Воеводин, В.В. Математические модели и методы в параллельных процессах [Текст] / В.В. Воеводин. – М.: Наука, 1986. – 296 с.
8. Воеводин, В.В. Параллельные вычисления [Текст] / В.В. Воеводин, Вл.В. Воеводин. – С.-П.: БХВ – Петербург, 2002. – 608 с.
9. Дэвэнпорт, Д. Компьютерная алгебра [Текст] / Д. Дэвэнпорт, И. Сирэ, Э. Турнье. – М.: Мир, 1991. – 352 с.
10. Недашковський, М.О. Обчислення з $\lambda -$ матрицями [Текст] / М.О. Недашковський, О.Я. Ковальчук. – К.: Наук. думка, 2007. – 294 с.
11. Тыртышников, Е.Е. Матричный анализ и линейная алгебра [Текст] / Е.Е. Тыртышников. – М.: Физматлит, 2007. – 480 с.
12. Уилкинсон, Дж. Х. Алгебраическая проблема собственных значений [Текст] / Дж. Х. Уилкинсон. – М.: Наука, 1970. – 564 с.

Отримано 27.12.2012