УДК 536.2

Б.Окрепкий, канд.фіз-мат.наук, І.Новосад, канд.техн.наук.
Тернопільський національний економічний університет

ОСЕСИМЕТРИЧНА ТЕМПЕРАТУРНА ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМИ ДВОХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ТІЛ ПРИ НЕІДЕАЛЬНОМУ ТЕПЛОВОМУ КОНТАКТІ З УРАХУВАННЯМ ТОНКОГО ПРОМІЖКОВОГО ШАРУ

Побудовано розв'язок осесиметричної температурної задачі для системи двох кругових циліндрів при неідеальному тепловому контакті, з урахуванням тонкого проміжкового шару у випадку ізотропних матеріалів. Одержано формули для визначення температури при різних варіантах температурних умов на бічних поверхнях і основах циліндрів. Досліджено вплив контактної провідності і коефіцієнтів теплопровідності проміжкового шару на розподіл температурних полів в зоні контакту двох тіл.

Ключові слова: *осесиметричні температурні задачі, проміжковий шар, ізотропні матеріали,коефіцієнт теплопровідності, контактна провідність.*

Постановка проблеми. Проблема визначення контактних деформацій і напружень, з урахуванням температурних полів є важливою задачею для дослідження міцності деталей машин і елементів конструкцій у місцях їхньої взаємодії, при розрахунку конструкцій на пружній основі з метою раціонального використання матеріалу конструкції і несучої здатності основи.

Аналіз остатніх досліджень і публікацій. В працях [1-4] досліджено вплив температурних факторів на характер контактної взаємодії тіл. Зокрема в роботі [4] розв'язана задача теплопровідності для системи двох контактуючих кругових циліндрів при неідеальному тепловому контакті у випадку ізотропних тіл. Проте недостатньо вивченим є задачі теплопровідності з урахуванням умов неідеального контакту двох тіл через тонкий проміжковий шар.

Мета роботи. Побудувати розв'язок осесиметричної температурної задачі для системи двох контактуючих ізотропних циліндричних тіл з урахуванням умов неідеального теплового контакту через тонкий проміжковий шар. Знайти формули для визначення температурних полів в тілах, а також дослідити вплив коефіцієнтів теплопровідності і контактної провідності тонкого проміжкового шару на розподіл температури в зоні контакту.

Постановка задачі. Нехай круговий циліндр з плоскою основою радіуса R і довжиною L знаходиться в тепловому контакті з круговим циліндром радіуса R і довжини L_1. Матеріали тіл допускаються ізотропними. На верхньому вільному торці циліндра задана постійна температура T_0.На нижньому торці відбувається теплообмін із зовнішнім середовищем по закону Ньютона. Бічні поверхні циліндра теплоізольовані. Тепловий контакт між тілами здійснюється через тонкий проміжковий шар[5,6]. При зроблених допущеннях необхідно визначити температурні поля в тілах.

Введемо циліндричну систему координат r,θ,z центр якої лежить на поверхні контактуючих тіл, а вісь OZ спрямована вздовж осі верхнього циліндра. Всі величини, які позначені індексом " 1 ", відносяться до нижнього циліндра, без індексів-до верхнього.

Граничні умови для температури мають вигляд:

$$T = T_0 \qquad \left(z = L;\ 0 \le r \le R\right) \tag{1}$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0 \qquad \left(0 < z < L;\ z = R\right) \tag{2}$$

$$\frac{\partial T^1}{\partial r} = 0 \qquad \left(-L_1 < z < 0;\ r = R\right) \tag{3}$$

$$\frac{\partial T^1}{\partial z} - H_1^1 T^1 = 0 \qquad \left(z = -L_1;\ 0 \le r \le R\right) \tag{4}$$

$$\lambda_0^*\Delta\left(T^1+T\right)+2\left(\lambda_z^1\frac{\partial T^1}{\partial z}-\lambda_z\frac{\partial T}{\partial z}\right)=0 \qquad \left(z=0;\ 0\le r< R\right) \tag{5}$$

$$\lambda_0^*\Delta\left(T^1-T\right)-6\left(\lambda_z^1\frac{\partial T^1}{\partial z}+\lambda_z\frac{\partial T}{\partial z}\right)-12h_0\left(T^1-T\right)=0 \qquad \left(z=0;\ 0\le r< R\right) \tag{6}$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\partial\left(T^1+T\right)}{\partial r}+\frac{\alpha_0^*}{\lambda_0^*}\frac{T^1+T}{2}=0\\ &\frac{1}{2}\frac{\partial\left(T^1-T\right)}{\partial r}+\frac{\alpha_0^*}{\lambda_0^*}\frac{T^1-T}{2}=0\end{aligned} \qquad \left(z=0;\ r=R\right) \tag{7}$$

.

Тут λ_z,λ_z^1- коефіцієнти теплопровідності, H_1^1- коефіцієнт теплообміну, h_0- контактна провідність; $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}$ - оператор Лапласа; α_0^*,λ_0^* - коефіцієнт теплообміну і теплопровідності проміжкового шару.

Розв’язування крайової задачі для рівняння теплопровідності.

Відомо [7], що в осесиметричному випадку температурне поле T для ізотропного тіла визначається із рівняння:

$$\nabla^2 T=0 \tag{8}$$

За допомогою методу Фур’є загальний розв’язок рівняння (8) для циліндричної області матиме вигляд:

$$T(r,z)=A_0z+B_0+D_0\left(r^2-2z^2\right)+\sum_{k=1}^{\infty}J_0(\beta_k r)\left(A_k sh\beta_k z+B_k ch\beta_k z\right)+$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}I_0(\gamma_k r)\left(C_k\sin\gamma_k z+D_k\cos\gamma_k z\right) \tag{9}$$

де $A_k,B_k,C_k,D_k,\left(k=\overline{0,\infty}\right)$ - довільні постійні; $J_o(\beta_k r)$ функція Бесселя першого роду дійсного аргументу; $I_0(\gamma_k r)$ функція Бесселя першого роду уявного аргументу; β_k,γ_k - власні значення, які визначаються із граничних умов.

Для задоволення граничної умови (2) у формулі (9) необхідно покласти $D_0=0;\ D_k=0,\ C_k=0\left(k=\overline{1,\infty}\right)$; $\beta_k=\mu_k/R$, де μ_k - корені рівняння $J_1(\mu_k)=0.$

Гранична умова (1), з врахуванням ортогональності функції Бесселя, приводить до слідуючих співвідношень між постійними A_n і B_n $(n=0,\infty)$:

$$B_0=T_0-A_0l\ R,\qquad B_n=-A_n th\mu_n l,\qquad l=\frac{L}{R} \tag{10}$$

Тоді температура у верхньому циліндрі прийме вигляд:

$$T(\rho,\zeta)=T_0+A_0R(\zeta-l)+\sum_{k=1}^{\infty}J_0(\mu_k\rho)\frac{sh\mu_k(\zeta-l)}{ch\mu_k l}A_k \qquad \rho=\frac{r}{R},\zeta=\frac{z}{R} \tag{11}$$

Проробивши аналогічні викладки для нижнього циліндра формула для визначення температури матиме вигляд:

$$T^1(\rho,\zeta)=A_0^1R\left(\zeta+l_1+\frac{1}{k_1^1}\right)+\sum_{k=1}^{\infty}J_0(\mu_k\rho)G(\mu_k,\zeta)A_k^1 \qquad \rho=\frac{r}{R},\zeta=\frac{z}{R} \tag{12}$$

де $l_1=\frac{L_1}{R},k_1^1=H_1^1R$, $G(\mu_k,\varsigma)=\frac{\mu_k ch\mu_k(l_1+\zeta)+k_1^1 sh\mu_k(l_1+\zeta)}{\mu_k sh\mu_k l_1+k_1^1 ch\mu_k l_1}$.

Віднявши рівності (5) і (6), одержимо:

$$\lambda_0^* \Delta T + 4\lambda_z^1 \frac{\partial T^1}{\partial z} + 2\lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} - 6h_0 T + 6h_0 T^1 = 0 \qquad (13)$$

Застосувавши трансформанту Ганкеля до рівнянь (6) і (13), матимемо наступні співвідношення:

$$\overline{T}(\xi) - 4\frac{\lambda_z^1}{\lambda_0^*}\frac{1}{\xi^2 + 0.5a^2}\frac{\partial \overline{T^1}(\xi)}{\partial z} - \frac{2\lambda_z}{\lambda_0^*}\frac{1}{\xi^2 + 0.5a^2}\frac{\partial \overline{T}(\xi)}{\partial z} - \frac{6h_0}{\lambda_0^*}\frac{\overline{T^1(\xi)}}{\xi^2 + 0.5a^2} = 0 \qquad (14)$$

$$\overline{T^1(\xi)} - T(\xi) + \frac{6\lambda_z^1}{\lambda_0^*\left(\xi^2 + a^2\right)}\frac{\partial T^1(\xi)}{\partial z} + \frac{6\lambda_z}{\lambda_0^*\left(\xi^2 + a^2\right)}\frac{\partial \overline{T}(\xi)}{\partial z} = 0$$

де $a^2 = \frac{12h_0}{\lambda_0^*}$, $\quad \overline{T}(\xi) = \overline{T}(\xi\ ,\ 0)$, $\quad \overline{T^1}(\xi) = \overline{T^1}(\xi\ ,\ 0)$,

$$\overline{T}(\xi) = \int_0^\infty r\ J_0(\xi\ r)T(r)\ dr, \qquad T^1(r) = \int_0^\infty \xi\ T^1(\xi) J_0(\xi\ r)\ dr$$

$$\frac{\overline{\partial T^1}(\xi)}{\partial z} = \int_0^\infty r J_0(\xi\ r)\frac{\partial T^1(r)}{\partial r}dr, \qquad \frac{\partial T^1}{\partial z} = \int_0^\infty \xi J_0(\xi\ r)\frac{\overline{\partial T^1}(\xi)}{\partial z}d\xi,$$

$$\frac{\overline{\partial T}(\xi)}{\partial z} = \int_0^\infty r\frac{\partial T}{\partial r}J_0(\xi\ r)dr, \qquad \frac{\partial T}{\partial z} = \int_0^\infty \xi\ J_0(\xi\ r)\frac{\overline{\partial T}(\xi)}{\partial z}d\xi$$

$$\int_0^\infty r\ J_0(\xi\ r)\Delta T^1(r)dr = -\xi^2\overline{T^1}(\xi), \qquad .$$

$$(15)$$

$$\int_0^\infty r J_0(\xi\ r)\Delta T(r)dr = -\xi^2\overline{T}(\xi). \qquad .$$

Використовуючи формулу для дельта-функції Дірака $\delta(\alpha - \beta) = \alpha\int_0^\infty \xi\ J_m(\alpha\xi)\ J_m(\beta\xi)d\xi$,

одержимо:

$$\frac{\partial T}{\partial z} = A_0 + \frac{1}{R}\sum_{k=1}^\infty A_k\mu_k J_0\left(\mu_k\frac{r}{R}\right)$$

$$(16)$$

$$\frac{\partial \overline{T}(\xi)}{\partial z} = A_0\frac{1}{\xi}\lim_{\Delta\to 0}\delta(\xi - \Delta) + \sum_{k=1}^\infty A_k\delta\left(\xi - \frac{\mu_k}{R}\right) \qquad .$$

Застосувавши формули обернення інтегрального перетворення Ганкеля до рівнянь (14), з врахуванням (11), (12), (15), (16), матимемо співвідношення, які зв'язують коефіцієнти a_0, a_1, A_k, і $A_k^{(1)}\left(k = \overline{0,\infty}\right)$:

$$A_0 R\left(l + \frac{1}{3h_0^1}\right) + A_0^1 R\left(l_1 + \frac{1}{k_1^1} + \frac{1}{3}\frac{e_z^1}{e_z h_0^1}\right) + \sum_{k=1}^\infty J_0(\mu_k\rho)\left[th\mu_k l + 2e_z\frac{\mu_k}{\mu_k^2 + 0.5a^2R^2}\right]A_k +$$

$$+\sum_{k=1}^\infty J_0(\mu_k\rho)\left[4e_z^1\mu_k + 6h_0^1 e_z\right]\frac{A_k^1}{\mu_k^2 + 0.5a^2R^2} + a_0 I_0\left(\frac{aR}{\sqrt{2}}\rho\right) = T_0 \quad (\rho\ <\ 1) \qquad (17)$$

$$A_0 R\left(l + \frac{1}{2h_0^1}\right) + A_0^1 R\left(l_1 + \frac{1}{k_1^1} + \frac{1}{2}\frac{e_z^1}{e_z h_0^1}\right) + \sum_{k=1}^\infty J_0(\mu_k\rho)\left[th\mu_k l + \frac{6e_z\mu_k}{\mu_k^2 + a^2R^2}\right]A_k +$$

$$+\sum_{k=1}^\infty J_0(\mu_k\rho)\left[G(\mu_k, 0) + \frac{6e_z^1\mu_k}{\mu_k^2 + a^2R^2}\right]A_k^1 - a_1 I_0(a\ R\ \rho) = T_0 \qquad (\rho\ <\ 1) \qquad (18)$$

де, a_0, a_1, - невідомі постійні; $I_0\left(\frac{aR}{\sqrt{2}}\rho\right)$, $I_0(a\ R\ \rho)$– частинні розв’язки рівнянь (6), (13);

$$h_0^1=\frac{\lambda_z R}{\lambda_0^*},\qquad e_z=\frac{\lambda_z R}{\lambda_0^*},\qquad e_z^1=\frac{\lambda_z^1 R}{\lambda_0^*},\qquad G(\mu_k,0)=\frac{\mu_k+k_1^1 th\mu_k l_1}{\mu_k th\mu_k l_1+k_1^1}.$$

У випадку, коли коефіцієнт теплообміну проміжкового шару $\alpha_0^*=\infty$, а бічна поверхня шару підтримується нульовою температурою то граничні умови (7), з врахуванням (11) і (12), матимуть вигляд:

$$A_0Rl+\sum_{k=1}^{\infty}J_0(\mu_k)th\mu_k lA_k=T_0,$$

$$A_0^1R\left(l_1+\frac{1}{k_1^1}\right)+\sum_{k=1}^{\infty}J_0(\mu_k)G(\mu_k,0)A_k^1=0\,. \tag{19}$$

Помноживши обидві частини рівностей (17), (18) на ρ, $\rho\ J_0(\mu_n\rho)$, і про інтегрувавши їх по ρ в межах від 0 до 1, з врахуванням умов ортогональності функції Бесселя і рівностей (19) і позначень: $A_0R=C_0T_0$, $A_n=C_nT_0$, $A_0^1R=C_0^1$, $A_n^1=C_n^1T_0$, одержимо дві взаємозв’язані системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих C_k, $C_k^1\left(k=\overline{0,\infty}\right)$:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_{n,k}C_k+\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_{n,k}^{(1)}C_k^{(1)}=\gamma_n \tag{20}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\beta_{n,k}C_k+\sum_{k=1}^{\infty}\beta_{n,k}^{(1)}C_k^{(1)}=\gamma_n^{(1)}\qquad\left(n=\overline{1,\infty}\right).$$

де
$$\alpha_{n,k}=\begin{cases}r_{n,k}, & k\neq n\\ r_{n,k}+g_n, & k=n\end{cases},\qquad \alpha_{n,k}^{(1)}=\begin{cases}r_{n,k}^{(1)}, & n\neq k\\ r_{n,k}^{(1)}+g_n^1, & n=k\end{cases}$$

$$r_{n,k}=\frac{J_0(\mu_k)th\mu_k l}{\mu_n J_0(\mu_n)},\quad g_n=\frac{l}{2e_z}(2e_z-\mu_n th\mu_n l),\quad r_{n,k}^{(1)}=-\frac{e_z^1 l}{e_z}\frac{k_1^1}{1+k_1^1l_1}G(\mu_k,0)\frac{J_0(\mu_k)}{\mu_n J_0(\mu_n)},$$

$$g_n^{(1)}=\frac{l}{e_z}\left[G(\mu_n,0)\mu_n-e_z^1\right],\qquad \gamma_n=\frac{1}{\mu_n J_0(\mu_n)}, \tag{21}$$

$$\beta_{n,k}=\begin{cases}a_{n,k}, & k\neq n\\ a_{n,k}+b_n, & k=n\end{cases}\qquad \beta_{n,k}^{(1)}=\begin{cases}a_{n,k}^{(1)}, & k\neq n\\ a_{n,k}^{(1)}+b_n^1, & k=n\end{cases}$$

$$a_{n,k}=\left(1+\frac{1}{2h_0^1l}\right)\frac{J_0(\mu_k)th\mu_k l}{\mu_n^2J_0(\mu_n)},\qquad b_n=\left(\frac{1}{12h_0^1e_z}+\frac{1}{\mu_n^2}\right)th\mu_n l+\frac{1}{2h_0^1\mu_n},$$

$$\alpha_{n,k}^{(1)}=\left(1+\frac{1}{2}\frac{e_z^1}{e_zh_0^1}\frac{k_1^1}{1+k_1^1l_1}\right)\frac{J_0(\mu_k)G(\mu_k,0)}{\mu_n^2J_0(\mu_n)},\qquad b_n^{(1)}=\frac{6e_z^1}{\mu_n}+G(\mu_n,0)\left(\frac{1}{\mu_n^2}+\frac{1}{12h_0^1e_z}\right),$$

$$\gamma_n^{(1)}=\frac{1}{2h_0^1l\mu_n^2J_0(\mu_n)}.$$

Температурне поле в циліндрах знаходиться по формулах:

$$T(\rho,\varsigma)=T_0\left\{\frac{\varsigma}{l}+\sum_{k=1}^{\infty}C_k\left[\left(1-\frac{\varsigma}{l}\right)J_0(\mu_k\rho)th\mu_k l+\frac{J_0(\mu_k\rho)}{ch\mu_k l}sh\mu_k(\varsigma-l)\right]\right\}\qquad(\rho\ <\ 1) \tag{22}$$

$$T^1(\rho,\varsigma)=T_0\sum_{k=1}^{\infty}\left[G(\mu_k,\varsigma)J_0(\mu_k\rho)-\frac{k_1^1}{1+k_1^1l_1}\left(\xi+l_1+\frac{1}{k_1^1}\right)J_0(\mu_k)G(\mu_k,0)\right]C_k^{(1)}\ (\rho\ <\ 1) \tag{23}$$

Якщо коефіцієнт проміжкового шару $\lambda_0^* = 0,$ то одержимо розв'язок задачі [4].

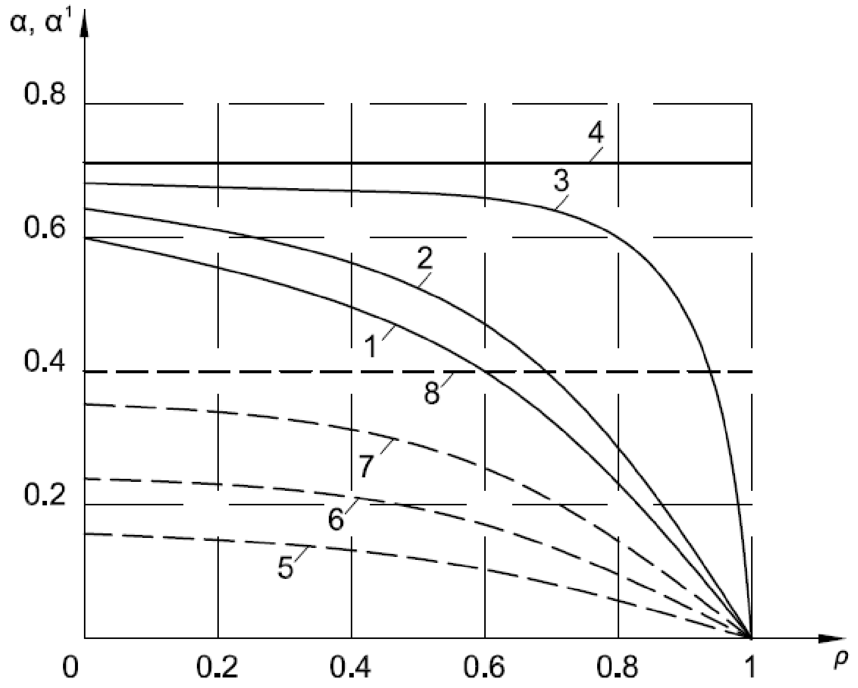

Рис.1. - Розподіл температури для різних значень параметрів $e_z = e_z^1$ при фіксованому $h_0^1 = 1$: крива $1 - e_z = 0{,}5$; $2 - e_z = 1$; $3 - e_z = 5$; $4 - e_z = \infty$, $5 - e_z^1 = 0{,}5$; $6 - e_z^1 = 1$; $7 - e_z^1 = 5$; $8 - e_z^1 = \infty$.

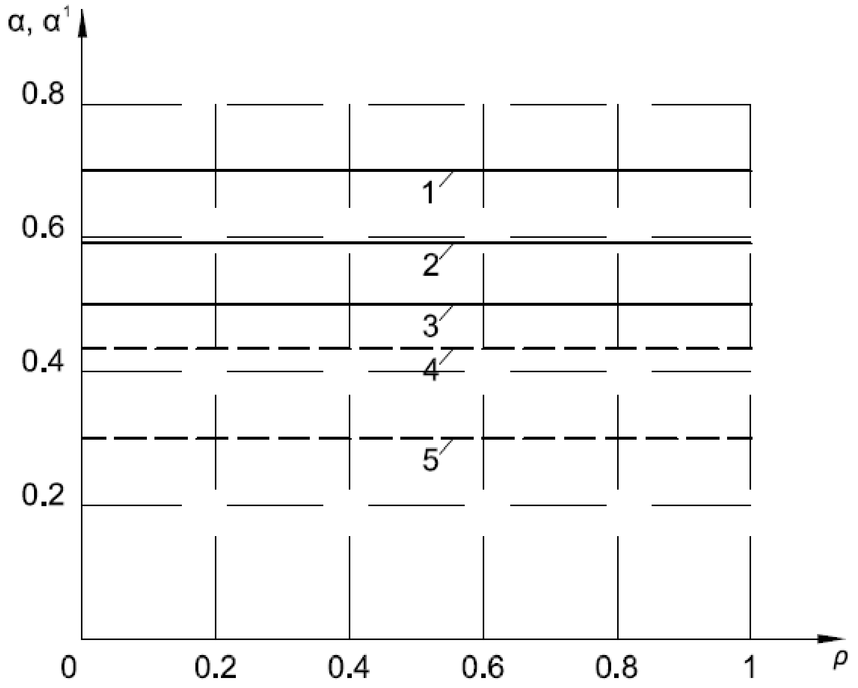

Рис.2. – Розподіл температури для різних значень контактної провідності h_0^1 при $e_z = e_z^1 = \infty$.: крива $1 - h_0^1 = 1$; $2 - h_0^1 = 5$; $3 - h_0^1 = \infty$; $4 - h_0^1 = 5$; $5 - h_0^1 = 1$.

Розглянуто числовий приклад для задачі з граничними умовами (1)-(7). Так як безмежні системи лінійних алгебраїчних рівнянь є квазірегулярними при будь-яких співвідношеннях теплофізичних характеристик тіл, то розв'язуємо їх методом редукції з усічених систем. Розв'язавши систему із 30-ма невідомими, на основі їх значень побудуємо графіки розподілу температури $\alpha = \frac{T}{T_0}$, $\alpha^{(1)} = \frac{T^1}{T_0}$ вздовж безрозмірної координати ρ при $l = l_1 = 1$, $k_1^1 = \infty$ та різних значеннях контактної провідності $h_0^1 = \frac{h_0 R}{\lambda_z}$ і параметрів $e_z = \frac{\lambda_z R}{\lambda_0^*}$, $e_z^1 = \frac{\lambda_z^1 R}{\lambda_0^*}$. Пунктирною лінією зображено графіки для температури $\alpha^1 = \frac{T^1(\rho)}{T_0}$.

Висновок. Застосовуючи інтегральне перетворення Ганкелля та метод Фур'є, розв'язок температурної задачі зведено до визначення деяких постійних із двох взаємно-зв'язаних квазі-регулярних нескінчених системи лінійних алгебраїчних рівнянь, через які знаходимо температурні поля в будь-якій точці системи двох контактуючих тіл.

Результати розрахунків показують, що значення температури в тілах, з врахуванням тонкого проміжкового шару зменшуються тому, що частина тепла виходить через бічну поверхню проміжкового шару. Контактна провідність h_0^1 значно впливає на розподіл температурних полів в зоні контакту тіл.

1.Грилицкий Д.В. Осесиметричные контактные задачи теории упругости и термоупругости /Д.В.Грилицкий, Я.М.Кизыма.– Львов:Изд.-во при Львов. ун.те, 1981, -135с.

2. Окрепкий Б.С. Осесиметрична температурна задача для системи тіл циліндр-півпростір при неідеальному тепловому контакті (Богдан Окрепкий, Марія Шелестовська) Вісник Тернопільського державного технічного університету, 2005, №3, ст..23-27

3.Окрепкий Б.С. Тиск циліндричного кругового штампа на пружний півпростір з врахуванням неідеального теплового контакту / Богдан Окрепкий, Марія Шелестовська / Вісник Тернопільського державного технічного університету - 2006, -№3, с.26-33.

4.Окрепкий Б.С., Новосад І.Я. Осесиметрична температурна задача для системи двох контактуючих циліндрів. // Міжвузівський збірник за напрямом «Інженерна механіка».-ЛНТУ.-Вип.№28,- Луцьк.- 2010.-с.367-379.

5.Подстригач Я.С. Условия теплового контакта твердих тел.- ДАН УССР, Серия А, 1963,№7. ст.129-136.

6.Подстригач Я.С. Температурное поле в системе твердих тел, сопрекосаемих з помощью тонкого промежуточного слоя.- ИФЖ., 1963, т.6, №10.ст.129-136.

7.Коваленко А.Д. Основы термоупругости / -К: Наук.думка, 1970,-304с.

B.Okrepkiy, I.Novosad. Axes-symmetric temperature task for the body system two cylinders under non-ideal heat contact in the occasion of thin intermediate layer *The summary. The solution of the axes-symmetric temperature task for the body system two circular cylinders under non-ideal heat contact between bodies in the occasion of thin intermediate layer in the case of isotropic materials have been built. Formulas for determination temperature for different temperature conditions on the border surface and basis of the cylinders have been obtained. Investigation was made on the influence of the contact conductivity and coefficients of the heat conductivity of the intermediate layer on the distributing of the temperature fields in the area of contact of two bodies.*

Окрепкий Б., Новосад И. Осесимметрическая температурная задача для системы двух цилиндрических тел в неидеальном тепловом контакте з учетом тонкого промежуточного слоя. *Основано решения осесимметрической температурной задачи для системы двух круговых цилиндров в неидеальном тепловом контакте, з учетом тонкого промежуточного слоя в случае изотропных материалов. Получены формулы для определения температуры в случае разных температурных условиях на боковых поверхностях и основах цилиндров. Исследовано влияние контактной проводности и коэффициентов теплопроводности промежуточного слоя на распределения температурных полей в зоне контакту двух тел.*