

**Міністерство освіти і науки України  
Тернопільський національний економічний університет**

**Березька К.М. Неміш В. М.**

**Фінансова математика**

**Навчальний посібник**

Тернопіль 2010

УДК 336.6(075.8)  
ББК 65в641я73  
Б 48

Фінансова математика: навчальний посібник / Березька К.М., Неміш В.М. – Тернопіль: 2010. – 195 с.

У посібнику викладено основні розділи фінансової математики і ризику фінансових операцій. Головна увага приділена методам розв'язування задач, а також розгляду основних питань теорії при їх аналізі.

Посібник містить теоретичні відомості, багато прикладів розв'язування задач, вправи для самостійної, контрольної та індивідуальної роботи, питання для самоконтролю.

Посібник можуть використовувати викладачі, аспіранти студенти стаціонарної та заочної форм навчання.

Рекомендовано до видання Радою Тернопільського національного економічного університету. Протокол №7 від 25.11.09.

Рецензенти:

**Гуцайлюк З.В.**, доктор економічних наук, професор, завідувач кафедри фінансів, обліку і контролю Тернопільського державного технічного університету ім. І.Пулюя;

**Притула М.М.**, доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри дискретного аналізу та інтелектуальних систем Львівського національного університету імені Івана Франка;

**Кузнецова Л.В.**, кандидат економічних наук, професор кафедри банківської справи Одеського державного економічного університету

ISBN

© К.М.Березька, В. М. Неміш, 2010

© ТНЕУ, 2010

## ЗМІСТ

|                                                                                       |    |
|---------------------------------------------------------------------------------------|----|
| ВСТУП .....                                                                           | 5  |
| 1. БАЗОВІ ПОНЯТТЯ ФІНАНСОВОЇ МАТЕМАТИКИ .....                                         | 6  |
| 1.1. Фінансова математика – основа кількісного аналізу фінансових операцій .....      | 6  |
| 1.2. Принцип зміни цінності грошей у часі та принцип фінансової еквівалентності ..... | 7  |
| 1.3. Відсотки, види відсоткових ставок .....                                          | 8  |
| Питання для самоконтролю .....                                                        | 10 |
| 2. ПРОСТА ВІДСОТКОВА СТАВКА .....                                                     | 11 |
| 2.1. Формула нарощення .....                                                          | 11 |
| 2.2. Погашення заборгованості частинами .....                                         | 19 |
| 2.3. Нарощення відсотків у споживчому кредиті .....                                   | 24 |
| 2.4. Дисконтування за простими відсотковими ставками .....                            | 25 |
| 2.5. Визначення терміну позички і величини відсоткової ставки .....                   | 28 |
| 2.6. Операції конвертування (обміну) валюти і нарощення відсотків .....               | 30 |
| 2.7. Фінансова еквівалентність платежів .....                                         | 32 |
| Питання для самоконтролю .....                                                        | 37 |
| Вправи .....                                                                          | 38 |
| 3. СКЛАДНА ВІДСОТКОВА СТАВКА .....                                                    | 45 |
| 3.1. Нарахування складних річних відсотків .....                                      | 45 |
| 3.2. Порівняння зростання за складними і простими відсотками.....                     | 49 |
| 3.3. Номінальна і ефективна ставки .....                                              | 51 |
| 3.4. Дисконтування за складною ставкою .....                                          | 53 |
| 3.5. Порівняння результатів нарощення і дисконтування за різними видами ставок .....  | 56 |
| 3.6. Визначення терміну позички і величини відсоткової ставки .....                   | 57 |
| 3.7. Неперервне нарощення і дисконтування .....                                       | 59 |
| 3.8. Фінансові функції в EXCEL .....                                                  | 62 |
| 3.9. Фінансова еквівалентність платежів для складної ставки .....                     | 64 |
| Питання для самоконтролю .....                                                        | 68 |
| Вправи .....                                                                          | 69 |

|           |                                                                                  |     |
|-----------|----------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 4.        | ФІНАНСОВІ РЕНТИ .....                                                            | 75  |
| 4.1.      | Види потоків платежів і їхні параметри .....                                     | 75  |
| 4.2.      | Прямий метод розрахунку нарощеної суми і сучасної вартості потоку платежів ..... | 76  |
| 4.3.      | Нарощена сума постійної ренти постнумерандо ....                                 | 77  |
| 4.4.      | Сучасна вартість постійної ренти постнумерандо ..                                | 83  |
| 4.5.      | Визначення параметрів постійних рент постнумерандо .....                         | 88  |
| 4.6.      | Нарощені суми і сучасні вартості інших видів постійних рент .....                | 93  |
| 4.7.      | Конверсії рент .....                                                             | 98  |
| 4.7.1.    | Види конверсій .....                                                             | 98  |
| 4.7.2.    | Зміна параметрів рент .....                                                      | 100 |
|           | Питання для самоконтролю .....                                                   | 104 |
|           | Вправи .....                                                                     | 105 |
| 5.        | РИЗИК ФІНАНСОВИХ ОПЕРАЦІЙ .....                                                  | 110 |
| 5.1.      | Аналіз економічного ризику .....                                                 | 110 |
| 5.2.      | Управління ризиком .....                                                         | 121 |
| 5.3.      | Система показників кількісного оцінювання ступеня ризику .....                   | 129 |
| 5.4.      | Використання нерівності Чебишева .....                                           | 144 |
| 5.5.      | Систематичний і несистематичний ризик .....                                      | 147 |
| 5.6.      | Оптимізація структури портфеля цінних паперів і оцінка ризику .....              | 152 |
|           | Питання для самоконтролю .....                                                   | 161 |
|           | Вправи .....                                                                     | 162 |
| Додаток 1 | .....                                                                            | 164 |
|           | Порядкові номери днів у невисокосному році .....                                 | 164 |
|           | Порядкові номери днів у високосному році .....                                   | 165 |
| Додаток 2 | .....                                                                            | 166 |
|           | Множники нарощення (складні відсотки) .....                                      | 166 |
|           | Дисконтні множники (складні відсотки) .....                                      | 168 |
| Додаток 3 | .....                                                                            | 170 |
|           | Коефіцієнти нарощення дискретних рент .....                                      | 170 |
|           | Коефіцієнти приведення дискретних рент .....                                     | 172 |
| Додаток 4 | .....                                                                            | 174 |
|           | Тестові завдання .....                                                           | 174 |
|           | ЛІТЕРАТУРА .....                                                                 | 195 |

## ВСТУП

В останнє десятиріччя значно збільшилась зацікавленість фінансовою математикою. Це зумовлено, перш за все, тим, що на фінансових ринках і у сфері послуг збільшилась кількість працівників. З них не всі мають відповідну підготовку з сучасних методів фінансових обчислень. Тому в студентів, аспірантів та спеціалістів у цій галузі виникла потреба в оволодінні математичним апаратом фінансової математики.

Не менш важливий вплив на розвиток цієї дисципліни має поширення персональних комп'ютерів у середовищі фінансової системи, що привело до удосконалення фінансово-кредитної діяльності.

Навчальний посібник умовно можна поділити на три частини. Перша складається з трьох розділів і охоплює базові поняття фінансової математики – концепцію вартості грошей у часі, відсотки, види відсоткових ставок, процеси нарощення і дисконтування, операції конвертування (обміну) валюти, принцип фінансової еквівалентності платежів.

Друга (розділ 4) присвячена фінансовим потокам платежів, тобто тим випадкам фінансової практики, коли за умовами операції платежі розподілені в часі. Особливу увагу приділено фінансовим рентам постнумерандо і пренумерандо, визначенню їхніх параметрів, конверсії рент.

Проблеми вимірювання та управління ризику фінансових операцій, впливу диверсифікації на величину ризику, види ризику висвітлено в третій частині (розділі 5).

У кінці кожного розділу містяться питання для самоконтролю та вправи для розв'язування, а в додатках – тестові завдання. Така структура посібника дає змогу студентам працювати як під керівництвом викладача, так і самостійно опрацьовувати матеріал.

При підготовці посібника використані матеріали з [1–16].

## 1. БАЗОВІ ПОНЯТТЯ ФІНАНСОВОЇ МАТЕМАТИКИ

### 1.1. Фінансова математика – основа кількісного аналізу фінансових операцій

Будь-який інвестиційний проект, фінансово-кредитна операція чи комерційна угода припускають наявність певних умов їхнього виконання. Обумовлюється обсяг грошових сум, платежів, час, термін виконання, відсоткові ставки і деякі інші додаткові величини. В межах однієї фінансової операції перераховані показники утворюють деяку взаємопов'язану систему. При зміні хоча б одного параметру в цій системі зміниться кінцевий результат операції. Такі системи є об'єктом додатку кількісного фінансового аналізу. Перевірені практикою методи цього аналізу і становлять предмет фінансової математики (ФМ).

Кількісний фінансовий аналіз на нині розвивається як наука. На це вказує те, що кілька останніх Нобелівських премій з економіки присуджені за роботи саме в цьому напрямку.

Кількісний фінансовий аналіз застосовується як в умовах визначеності, так і невизначеності. У першому випадку передбачається, що дані для аналізу заздалегідь відомі і фіксовані. Наприклад, при випуску звичайних облігацій однозначно визначаються всі параметри – термін, купонна прибутковість, порядок викупу. Аналіз помітно ускладнюється, коли доводиться враховувати невизначеність – динаміку грошового ринку (рівень відсоткової ставки, коливання валютного курсу і т. д.), поводження контрагента.

ФМ вивчає як елементарні нарахування відсотків, так і відносно складні розрахунки, наприклад, оцінювання впливу різних чинників на ефективність випуску облігацій чи методів скорочення ризику шляхом диверсифікації портфеля фінансових інвестицій і т. д.

Основні завдання ФМ такі:

- розробка планів виконання фінансових операцій;
- визначення кінцевих результатів фінансових операцій для всіх учасників;
- вимірювання залежності кінцевих результатів операції від основних її параметрів та маневрування цими параметрами для розрахунку еквівалентної зміни початкових умов операції;
- оптимізація портфеля активів.

Цей перелік не є вичерпним. У сучасній практиці виникають нові завдання.

Методи ФМ використовуються в будь-якій сфері фінансів і кредиту. В тому числі і на етапі розробки умов контрактів, при фінансовому проектуванні, при порівнянні і виборі довготермінових інвестиційних проектів. Фінансові обчислення використовуються для розрахунків у довготерміновому особистому страхуванні, наприклад, при проектуванні й аналізі стану пенсійних фондів (розрахунок тарифів, оцінювання спроможності фондів виконати свої зобов'язання перед пенсіонерами і т. д.), довготерміновому медичному страхуванні. Причому сфера застосування методів кількісного аналізу фінансових операцій поступово розширюється.

## **1.2. Принцип зміни цінності грошей у часі та принцип фінансової еквівалентності**

У практичних фінансових операціях суми грошей завжди пов'язані з часом. У контрактах фіксуються відповідні терміни, дати, періодичність виплат. Для довготермінових операцій час відіграє не меншу, а іноді навіть і більшу роль, ніж обсяги грошових сум. Необхідність обліку часового фактора впливає із сутності фінансування, кредитування й інвестування і виражається у принципі *нерівноцінності грошей*, що належать до різних моментів часу, чи в принципі *зміни цінності грошей у часі*.

Гроші, що наявні сьогодні, можуть бути інвестовані і принести дохід у майбутньому. Отриманий дохід, відповідно, реінвестується і т. д. Тому дві однакові за абсолютною величиною, але внесені в різні часи суми, нерівноцінні, тобто сьогоднішні гроші, цінніші за майбутні, а, майбутні надходження менш коштовні.

У період інфляції вплив фактора часу ще більше підсилюється. Тому є неправомірним підсумовування грошових величин, що належать до різних моментів часу, особливо при прийнятті довготермінових фінансових рішень.

Підсумовування грошових величин різного моменту часу можливе для операцій, де фактор часу не має принципового значення, наприклад, у бухгалтерському обліку (для одержання підсумків за періодами) і у фінансовому контролі. Також неправомірно порівнювати різночасні грошові величини. Їх можна порівняти тільки тоді, коли суми звести до одного моменту часу.

Не менш важливий у фінансовому аналізі принцип *фінансової еквівалентності* чи *рівності фінансових зобов'язань сторін*, які беруть участь в операції. Покажемо цей принцип на прикладі. 1) Банк бере у фізичної особи гроші і зобов'язується періодично виплачувати відсотки, а наприкінці терміну повернути суму, яка дорівнює початковій вартості грошей. 2) Страхувальник оплачує вартість страхування, а страховик зобов'язується виплатити йому страхову суму, але тільки при настанні страхового випадку. В першому прикладі платежі обох сторін безумовні, в другому – платіж страховика має імовірнісний характер.

Принцип еквівалентності в старій фінансовій літературі називався умовою безпеки [15]. Він дає змогу змінювати умови контрактів без порушення прийнятих зобов'язань. За згоди контрагента, відповідно до принципу еквівалентності, можна змінювати рівень відсоткових ставок, їхній вид, терміни виконання зобов'язань, розподіл платежів у часі і т. д. в межах однієї операції, не порушуючи взаємної відповідальності.

Проте зазначені вище принципи не можуть бути реалізовані без нарощення відсотків чи дисконтування із застосуванням якогонебудь виду відсоткової ставки.

### 1.3. Відсотки, види відсоткових ставок

*Відсотки* або *відсоткові гроші* – це абсолютна величина доходу від надання грошей у борг у будь-якій його формі (видача позички, продаж товару в кредит, купівля облігації, переміщення грошей на депозитний рахунок і т. д.).

При фінансовій угоді кредитор і позичальник домовляються про обсяг відсоткової ставки. *Відсоткова ставка* – це відносна величина доходу за фіксований проміжок часу (відношення доходу або відсоткових грошей до суми боргу). Відсоткова ставка вимірюється у відсотках або десяткових чи звичайних дробах. В останньому випадку вона фіксується з точністю до 1/16 чи 1/32. Найчастіше при виконанні розрахунків відсоткові ставки звичайно вимірюються в десяткових дробах.

*Період нарахування* – це часовий інтервал, до якого прив'язана відсоткова ставка. Його не варто плутати з терміном нарахування. Періодом нарахування може бути рік, півріччя, квартал,



місяць, день: Найчастіше на практиці мають справу з річними ставками.

Нараховані відсотки відповідно до домовленості між кредитором і позичальником можуть виплачуватися в міру їхнього нарахування або приєднуватися (капіталізуватися) до основної суми боргу. **Нарощення** – це процес збільшення суми грошей у часі у зв'язку з приєднанням відсотків до суми боргу.

Крім визначення відсотків при русі в часі від сьогодні до майбутнього, існує визначення відсотків в зворотному напрямку – від майбутнього до сьогодні. У цьому випадку сума грошей, яка належить до майбутнього, зменшується на величину відповідного дисконту (знижки). Такий спосіб називають **дисконтуванням** (скороченням).

Залежно від умов контрактів існують різні способи нарахування відсотків і, відповідно, різні види відсоткових ставок. Можна виокремити ознаки, за якими розрізняються відсоткові ставки:

- за базою нарахування;

Базу – сума, отримана на попередньому етапі нарощення чи дисконтування. База може бути **постійною** або **змінною**. У першому випадку використовують **прості**, у другому – **складні** відсоткові ставки.

- за принципом розрахунку відсоткових грошей;

Принципів розрахунків, як було сказано вище, є два – від сьогодні до майбутнього і, навпаки, від майбутнього до сьогодні. Відповідно застосовують **ставки нарощення** і **дисконтні (дисконтіві, облікові)** ставки.

Інколи у фінансовій літературі відсотки, отримані за ставкою нарощення, називають **декурсивними**, за дисконтною ставкою – **антисипативними** [8, 9].

Крім цього основного поділу, відсоткові ставки потрібно розрізняти:

- за стабільністю обсягу відсоткових ставок;

Відсоткові ставки можуть бути **фіксованими** чи **плаваючими**. У другому випадку вказується не сама ставка, а база, що змінюється в часі, (базова ставка) і обсяг надбавки до неї – маржа.

- за принципом погашення заборгованості;

Відсоткова ставка (проста чи складна) може застосовуватися до фактичної суми боргу (та сума, яка враховує послідовні його погашення) або прості відсотки нараховуються відразу на всю суму бор-

гу без обліку послідовного його погашення (наприклад, застосування в споживчому кредиті).

- відсотки бувають *дискретні*, тобто ті, що нараховуються за фіксовані інтервали часу (рік, півріччя і т. д.), і *неперервні*, коли нарощення чи дисконтування відбувається безупинно, за нескінченно малі проміжки часу – *неперервні* відсоткові ставки.

### Питання для самоконтролю

1. Що є предметом фінансової математики?
2. Охарактеризуйте основні завдання фінансової математики.
3. Розкрийте основні принципи фінансових операцій.
4. Поясніть принцип зміни цінності грошей у часі.
5. Охарактеризуйте принцип фінансової еквівалентності.
6. Дайте визначення понять “відсотки” і “відсоткова ставка”.
7. Чи існує відмінність між періодом нарахування і терміном нарахування?
8. Порівняйте процеси нарощення і дисконтування.
9. За якими ознаками розрізняються відсоткові ставки?
10. Назвіть види відсоткових ставок.

## 2. ПРОСТА ВІДСОТКОВА СТАВКА

### 2.1. Формула нарощення

Як уже зазначалося, залежно від постійної або змінної бази нарахування відсотків використовується проста або складна відсоткова ставка. Розглянемо випадок перший – база нарахування відсотків не змінюється, відсотки не приєднуються до суми боргу, а періодично виплачуються. Тут відсоткова ставка – проста<sup>1</sup>. Введемо деякі означення.

**Нарощена сума** позички (боргу, депозиту, інших видів виданих у чи борг інвестованих грошей) – це первісна (початкова) сума з нарахованими відсотками до кінця терміну нарахування. Визначається вона як добуток первісної суми боргу на множник нарощення.

**Множник нарощення** показує, у скільки разів нарощена сума більша за первісну. Його розрахункова формула залежить від виду застосовуваної відсоткової ставки.

Візьмемо такі позначення:

$I$  – відсотки за весь термін позички;

$P$  – первісна сума боргу;

$S$  – нарощена сума, тобто сума наприкінці терміну;

$i$  – ставка нарощення відсотків (у десятковому дробі);

$n$  – термін позички.

Якщо термін вимірюється в роках, то  $i$  – річна відсоткова ставка. За один рік відсотки становитимуть  $Pi$ . Відповідно за  $n$  років, тобто за весь термін, відсотки становитимуть

$$I = Pni, \quad (2.1)$$

а нарощена сума дорівнюватиме

$$S = P + I = P + Pni = P(1 + ni). \quad (2.2)$$

Вираз (2.2) називають **формулою нарощення** за простими відсотками чи **формулою простих відсотків**. Множник  $(1 + ni)$  – множник нарощення простих відсотків.

Множник нарощення однаково залежить як від відсоткової ставки, так і від терміну. Якщо збільшити один із цих показників у  $k$  раз, то множник збільшиться в

---

<sup>1</sup> *Примітка.* Нарощення за простими відсотками, крім випадків з постійною базою, використовується при короткотермінових позичках (на термін до 1 року).

$$\frac{(1 + kni)}{(1 + ni)} \text{ разів.}$$

**Приклад 2.1.** Позику 1000 грн. було взято на термін 5 років. Відсотки прості за ставкою 20% річних ( $i = 0,2$ ).

Необхідно визначити суму заборгованості та нараховані відсотки. У скільки разів збільшиться нарахована сума боргу, якщо термін взяття позики зріс у 2 рази?

▲ Суму боргу вираховуємо за формулою (2.2)

$$S = 1000(1 + 5 \cdot 0,2) = 1000 \cdot 2 = 2000 \text{ грн.},$$

а відсотки за формулою (2.1)

$$I = 1000 \cdot 5 \cdot 0,2 = 1000 \text{ грн.}$$

Якщо термін взяття позики збільшився у 2 рази, то множник нарощення і відповідно нарахована сума боргу зросте у

$$\frac{(1 + 2 \cdot 5 \cdot 0,2)}{(1 + 5 \cdot 0,2)} = 1,5 \text{ рази.} \quad \blacktriangle$$

Графічно процес нарощення за простими відсотками має вигляд (рис. 2.1).

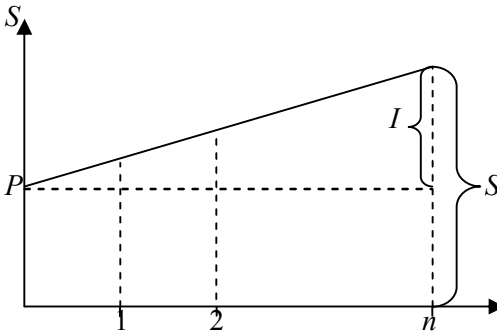


Рис. 2.1. Процес нарощення за простими відсотками

### ***А. Розрахунок відсотків „зі 100”, „на 100”, „в 100”***

**Нарощене число** – це число, яке дорівнює сумі початкового числа і нарахованих на нього відсотків.

**Зменшене число** – це число, яке дорівнює різниці початкового числа і нарахованих на нього відсотків.

Відсотки відносно нарощеного числа називаються відсотками „на 100”.

Відсотки щодо початкового числа – відсотки „зі 100”.

Відсотки щодо зменшеного числа називаються відсотками „в 100”.

Відсотки „на 100” використовуються в задачах, коли відома ставка відсотків  $i$  та сума двох чисел, одне з яких – відсотки „зі 100” іншого.

Відсотки „в 100” використовуються в задачах, коли відома ставка відсотків  $i$  та різниця двох чисел, одне з яких – відсотки „зі 100” іншого.

Позначимо  $Q$  – початкове число, тоді

$$Q' = iQ \text{ – відсотки „зі 100”};$$

$$S' = \frac{iQ}{1+i} \text{ – відсотки „на 100”};$$

$$K' = \frac{iQ}{1-i} \text{ – відсотки „в 100”}.$$

Приклад 2.2. Знайти з 40 тис. грн. 20% а) „зі 100”; б) на 100”; „в 100”. Перевірити отримані результати.

▲ а)  $Q' = 0,2 \cdot 40 = 8$  тис. грн.;

б)  $S' = \frac{0,2 \cdot 40}{1+0,2} = 6,67$  тис. грн.;

в)  $S' = \frac{0,2 \cdot 40}{1-0,2} = 10$  тис. грн.

Перевірка. „На 100”:  $40 - 6,67 = 33,33$  тис. грн.

$$33,33 \cdot 0,2 = 6,67 \text{ тис. грн.}$$

„В 100”:  $40 + 10 = 50$  тис. грн.

$$50 \cdot 0,2 = 10 \text{ тис. грн. } \blacktriangle$$

### ***Б. короткотермінові позички***

Якщо відсоткова ставка річна, а термін позички менший року або коли термін позички менший періоду нарахування, то для визначення нарощеної суми боргу термін подамо у вигляді:

$$n = \frac{t}{K},$$

де  $t$  – число днів позички,

$K$  – число днів у році. Показник  $K$  називають *часовою базою* нарахування відсотків.

Існують дві часові бази:

- 1)  $K = 360$  днів (припускають, що місяць має 30 днів, отже, 12 місяців  $\times$  30 днів = 360 днів);
- 2)  $K = 365, 366$  днів (залежно від того, чи рік високосний).

Якщо  $K = 360$ , то одержують *звичайні* чи *комерційні* відсотки, а при використанні дійсної тривалості року (365, 366 днів) розраховують *точні* відсотки.

Число днів позички також можна визначати приблизно (тривалість позички визначається за умови, що будь-який місяць дорівнює 30 дням) і точно (підрахунок числа днів між датою видачі позички і датою її погашення). День видачі і день погашення вважають за один день. Існують таблиці для визначення точного числа днів між двома датами.

Відповідно до того, що є різні часові бази і різний підрахунок днів позички, на практиці застосовують три варіанти розрахунку простих відсотків.

1. *Точні відсотки з точним числом днів позички.* Цей спосіб застосовують центральні банки багатьох країн і великих комерційних банків, наприклад у Великобританії, США. У комерційних документах він позначається як 365/365 чи АСТ/АСТ. Цей варіант дає найточніші результати.

2. *Звичайні відсотки з точним числом днів позички.* Цей метод іноді називають *банківським*. Спосіб поширений у позичкових операціях комерційних банків між країнами, та всередині країн Бельгії, Франції, Швейцарії. Він позначається як 365/360 чи АСТ/360. Цей варіант дає трохи більший результат, ніж застосування точних відсотків. Цікавим є те, що якщо число днів позички буде більшим за 360, то сума нарахованих відсотків буде більшою, ніж передбачалася річною ставкою. Наприклад, якщо  $t = 362$ ,  $n = \frac{362}{360} = 1,005556$ , то

множник нарощення за рік за умови, що  $i = 18\%$ , становитиме 1,181. Хоча згідно з формулою (2.2) він має становити  $1 + 1 \cdot 0,18 = 1,18$ .

3. *Звичайні відсотки з наближеним числом днів позички.* Такий метод застосовують тоді, коли не потрібно великої точності, наприклад, для проміжних розрахунків. Його практикують комер-

ційні банки Німеччини, Швеції, Данії. Метод умовно позначається як 360/360.

Варіант розрахунку з точними відсотками і наближеним числом днів позички не існує.

*Примітка.* Для розрахунку числа днів позички найкраще використати таблицю порядкових днів у році (додаток 1). Позначимо  $N(\partial)$  – порядковий номер дати в таблиці. Якщо  $\partial_1$  і  $\partial_2$  – дві дати одного року, то число днів між цими датами:

$$D(\partial_1, \partial_2) = N(\partial_2) - N(\partial_1).$$

Якщо  $\partial_1$  і  $\partial_2$  – дві дати різних років, то число днів між цими датами:

$$D(\partial_1, \partial_2) = N(\partial_2) - N(\partial_1) + 365n,$$

де  $n$  – число років. Якщо ж цей період – високосний рік, то потрібно додати ще 1 день.

Розрахунок наближеного числа днів між датами проводиться за іншою схемою. Нехай  $\partial_1 = [d_1; m_1; y_1]$  і  $\partial_2 = [d_2; m_2; y_2]$  – дві дати, де  $y$  – рік,  $m$  – порядковий номер місяця,  $d$  – число. Наближене число днів між цими датами:

$$D(\partial_1, \partial_2) = 360(y_2 - y_1) + 30(m_2 - m_1) + (d_2 - d_1).$$

Приклад 2.3. Позику 1000 грн. було взято з 5 січня по 20 листопада 2003 р. за ставкою  $i=0,22$  річних.

Яку суму повинен заплатити боржник наприкінці терміну при нарахуванні простих відсотків? Розрахунок зробити для трьох методів.

▲ Визначимо число днів позики: точне – 319, наближене – 315 ( $30 \cdot (11 - 1) + (20 - 5) = 315$ ).

1. Точні відсотки з точним числом днів позики (365/365):

$$S = 1000 \left( 1 + \frac{319}{365} \cdot 0,22 \right) = 1000 \cdot 1,192274 = 1192,274 \text{ грн.}$$

2. Звичайні відсотки з точним числом днів позики (365/360):

$$S = 1000 \left( 1 + \frac{319}{360} \cdot 0,22 \right) = 1000 \cdot 1,194944 = 1194,944 \text{ грн.}$$

3. Звичайні відсотки з наближеним числом днів позики (360/360):

$$S = 1000 \left( 1 + \frac{315}{360} \cdot 0,22 \right) = 1000 \cdot 1,1925 = 1192,5 \text{ грн. } \blacktriangle$$

### ***В. Нарахування відсотків у суміжних календарних періодах***

Часто дати початку і закінчення позики знаходяться в двох різних суміжних календарних періодах. При оподаткуванні, в бухгалтерському обліку, при визначенні річних сум доходу і т. д. виникає необхідність у розподілі суми відсотків за періодами. Тоді загальна сума нарахованих простих відсотків становитиме суму відсотків, отриманих у кожному році:

$$I = I_1 + I_2 = Pn_1i + Pn_2i,$$

де  $n_1, n_2$  – частки терміну позички, що припадають на кожний календарний рік.

### ***Г. Змінні ставки***

Формула (2.2) припускає, що протягом періоду  $n$  ставка відсотка постійна. Але часто в кредитних угодах відсоткові ставки змінюються в часі. Для простих ставок нарахована сума на закінчення терміну визначається за формулою:

$$S = P(1 + n_1i_1 + n_2i_2 + \dots + n_m i_m) = P \left( 1 + \sum_{j=1}^m n_j i_j \right), \quad (2.3)$$

де  $i_j$  – ставка простих відсотків у  $j$ -му періоді,  $n_j$  – тривалість  $j$ -го періоду з постійною ставкою.

Приклад 2.4. На 2000 грн., вкладених у банк під прості відсотки на 1,5 року, згідно з контрактом передбачається такий порядок нарахування відсотків: перший квартал – 10% річних, другий – 12% річних, третій – 13%, за два наступних – 15% і за останній – 20%. Необхідно визначити нараховану суму вкладу на кінець терміну, ставку відсотків за період контракту, відповідну річну просту ставку відсотків.

▲ Нарховану суму вкладу вираховуємо за формулою (2.3):

$$S = 2000 \left( 1 + \frac{1}{4} \cdot 0,1 + \frac{1}{4} \cdot 0,12 + \frac{1}{4} \cdot 0,13 + \frac{1}{2} \cdot 0,15 + \frac{1}{4} \cdot 0,2 \right) = 2425 \text{ грн.}$$

Такий же результат можна отримати, перейшовши від річної ставки відсотків до квартальної. Якщо  $i$  – річна, то  $i/4$  – квартальна. Тоді



$$S = 2000 \left( 1 + 1 \cdot \frac{0,1}{4} + 1 \cdot \frac{0,12}{4} + 1 \cdot \frac{0,13}{4} + 2 \cdot \frac{0,15}{4} + 1 \cdot \frac{0,2}{4} \right) = 2425 \text{ грн.}$$

Ставка відсотків за період контракту:

$$p = \frac{2425 - 2000}{2000} = \frac{425}{2000} = 0,21, \text{ тобто } 21\%.$$

Річна ставка відсотків:

$$i = \frac{0,21}{1,5} = 0,14, \text{ тобто } 14\%. \blacktriangle$$

#### ***Д. Нарахування відсотків при зміні сум депозиту в часі***

Якщо сума, на яку нараховуються відсотки, змінює свою величину в часі (на поточний рахунок періодично надходять чи знімаються гроші і т. п.), то відсотки розраховуються за формулою:

$$I = \sum_j R_j n_j i, \quad (2.4)$$

де  $R_j$  – залишок засобів на рахунку в момент  $j$  після наступного надходження чи знімання засобів,  $n_j$  – термін перебування грошей на рахунку (в роках) до нової зміни залишку засобів.

В ощадно-банківській справі використовують такий спосіб нарахування відсотків. Для цього перетворимо (2.4). Термін виміряємо у днях, а ставку відсотків – у відсотках. Нехай  $n_j = \frac{t_j}{K}$ , де  $t_j$  – число днів між надходженням і зняттям грошей (дні надходження і зняття рахуються як один день). Після нескладних перетворень (2.4) буде такою:

$$I = \sum_j R_j \frac{t_j}{K} \cdot \frac{i}{100} = \sum_j \frac{R_j t_j}{100} \cdot \frac{i}{K} = \sum_j \frac{R_j t_j}{100} : \frac{K}{i}. \quad (2.5)$$

Величину  $\sum_j \frac{R_j t_j}{100}$  називають *відсотковим числом*, а  $\frac{K}{i}$  – *відсотковим дільником (дивізор)* (дивізор – величина постійна).

***Приклад 2.5.*** На рахунку відбуваються такі операції: 4 лютого надійшли 500 грн., 4 березня – 700 грн., 10 березня знято 400 грн., 4 квітня надійшли 1000 грн. Знайти суму грошей на 4 травня цього ж року (рік не високосний). Ставка відсотків 20% річних.

▲ Відсотковий дільник становитиме  $365:20 = 18,25$ . Розрахунок суми відсоткових чисел подамо у таблиці.

| Дата   | Рух за-<br>собів | Залишок | Термін | Відсоткове<br>число |
|--------|------------------|---------|--------|---------------------|
| 4.02   | 500              | 500     | 28     | 140                 |
| 4.03   | 700              | 1200    | 6      | 72                  |
| 10.03  | - 400            | 800     | 25     | 200                 |
| 4.04   | 1000             | 1800    | 30     | 540                 |
| 4.05   | -                | 1800    | -      | -                   |
| Всього |                  |         |        | 952                 |

Відсоткове число рахуємо так:  $\frac{500 \cdot 28}{100} = 140$ ;  $\frac{1200 \cdot 6}{100} = 72$ ;

$$\frac{800 \cdot 25}{100} = 200; \quad \frac{1800 \cdot 30}{100} = 540.$$

Згідно з формулою (2.5) відсотки за весь період становлять:

$$I = \frac{952}{18,25} = 52,16 \text{ грн.}$$

Отже, на 4 травня на рахунку є  $1800 + 52,16 = 1852,16$  грн. ▲

### ***Е. Реінвестування за простими ставками.***

Задачу зі змінними ставками дещо змінимо. Вважаємо, що після періоду  $n_1$ , коли проста ставка  $i_1$  змінюється на  $i_2$ , закінчується перша кредитна операція. В результаті отримаємо нарощену суму  $S_1$ . Ця сума буде початковою для другої кредитної операції з простою ставкою  $i_2$  і терміном  $n_2$  і т. д. Фактично це є реінвестування засобів, отриманих на кожному етапі нарощення, за допомогою постійної чи змінної ставок. Нарощена сума для всього терміну в цьому випадку буде така:

$$S = P(1 + n_1 i_1)(1 + n_2 i_2) \dots (1 + n_m i_m), \quad (2.6)$$

де  $n_m$  – термін, протягом якого існує постійна ставка простих відсотків  $i_m$ .

Якщо всі терміни нарахування  $n_m$  і ставки  $i_m$  однакові ( $n_m = n$ ,  $i_m = i$ ), то (2.6) буде такою:

$$S = P(1 + ni)^m, \quad (2.7)$$

де  $m$  – кількість повторень реінвестування.

Приклад 2.6. 1.02.03 на місячний депозит покладено 2000 грн. під 18% річних. Якою буде нарощена сума, якщо операція повторюється 4 рази? Розрахунок провести за методами  $ACT/ACT$  та  $360/360$ .

▲ Якщо нараховувати точні відсотки з точним числом днів, то

$$S = 2000 \cdot \left(1 + \frac{28}{365} \cdot 0,18\right) \left(1 + \frac{31}{365} \cdot 0,18\right) \left(1 + \frac{30}{365} \cdot 0,18\right) \times \\ \times \left(1 + \frac{31}{365} \cdot 0,18\right) = 2120,635 \text{ грн.}$$

Звичайні відсотки з наближеним числом днів:

$$S = 2000 \left(1 + \frac{30}{360} \cdot 0,18\right)^4 = 2122,727 \text{ грн.} \quad \blacktriangle$$

## 2.2. Погашення заборгованості частинами

Якщо борг віддається не в кінці терміну позички, а виплачується частинами протягом цього терміну, то грошові надходження називають *частковими платежами*.

### А. Контур фінансової операції

Необхідна умова фінансової чи кредитної операції в будь-якій її формі – збалансованість вкладів і віддач. Пояснимо її на прикладі.

Нехай взято позичку обсягом  $P$  на термін  $T$ . Через період  $t_1$  вона збільшилась до величини  $P_1$  (відповідно до нарахування відсотків) і її частково погашаємо платежем  $R_1$ . Борг зменшується до  $K_1$ . Через  $t_2$  борг зростає до  $P_2$  і його частково погашаємо платежем  $R_2$  до величини  $K_2$ . До кінця терміну через період  $t_3$  борг зростає до  $P_3$  і ми його повністю погашаємо сумою  $R_3$ . І нехай для нас не має значення, яка частина з цих платежів  $R_1, R_2, R_3$  йде на виплату відсотків, а яка – на погашення боргу. Відобразимо усі операції на графіку (рис. 2.2). У кінцевий момент заборгованість має дорівнювати нулю. Такий графік називається *контуром операції*.

Збалансованою буде операція, яка обов'язково має замкнутий контур. Тобто, остання виплата повністю покриває залишок заборгованості. У цьому випадку сукупність платежів точно відповідає умові угоди.

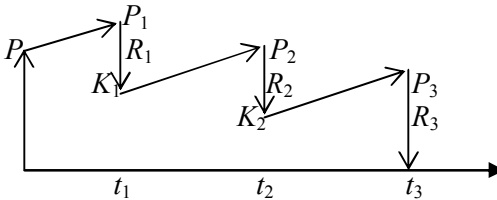


Рис. 2.2. Контур операції

### Б. Часткові платежі

При часткових платежах виникає два питання:

1. Яку суму брати за основу нарахування відсотків?
2. Як визначати залишок заборгованості?

Ці питання визначаються двома методами: *актуарним* і *правилком торговельника (продавця)* [15]. За замовчуванням, при нарахуванні відсотків в обох методах використовуються звичайні відсотки з наближеним числом днів (360/360).

*Актуарний метод* застосовується переважно в операціях з терміном більше року. Цей метод припускає послідовне нарахування відсотків на фактичні суми боргу. Частковий платіж: йде спочатку на погашення відсотків, нарахованих на дату платежу. Якщо частковий платіж більший, ніж нараховані відсотки, то різниця (залишок) йде на погашення основної суми боргу. Наступні відсотки нараховуються від зменшеної на цю різницю суми і т. д. Якщо ж частковий платіж менший, ніж нараховані відсотки, то основна сума боргу не змінюється, а цей частковий платіж приєднується до наступного платежу. Для випадку, показаного на рис. 2.2, одержимо такі розрахункові формули для визначення залишку заборгованості  $K_j$ :

$$K_1 = P(1 + t_1 i) - R_1; \quad K_2 = K_1(1 + t_2 i) - R_2. \quad (2.8)$$

Оскільки остання виплата повністю має покривати залишок заборгованості, то:

$$K_2(1 + t_3 i) - R_3 = 0. \quad (2.8')$$

Приклад 2.7. Підприємство зобов'язалося погасити борг обсягом 1 млн. грн. за 1,5 року (з 15.04.02 по 15.10.03 р.). Кредитор згідний одержувати часткові платежі. Відсотки нараховуються за ставкою 18% річних. Часткові надходження були такі:

15.08.02 р. – 50 тис. грн.;

30.04.03 р. – 400 тис. грн.;

15.07.03 р. – 300 тис. грн.

Необхідно знайти залишок боргу на 15.10.03 р. Нарисувати контур операції.

▲ Рахуємо борг на 15.08.02 р.:

$$S = 1000000 \left( 1 + \frac{120}{360} \cdot 0,18 \right) = 1060000 \text{ грн.}$$

Отже, нараховані відсотки  $I = 60000$  грн. Платіж на це число 50000 грн. менший, ніж відсотки, тому він приєднується до наступного надходження, а основна сума боргу 1 млн. грн. не змінюється.

30.04.03 р.

Борг із відсотками:

$$S = 1000000 \left( 1 + \frac{375}{360} \cdot 0,18 \right) = 1187500 \text{ грн.}$$

Нараховані відсотки  $I = 1187500 - 1000000 = 187500$  грн.

Платіж дорівнює  $50000 + 400000 = 450000$  грн.

Оскільки платіж більший, ніж відсотки, то залишок боргу становить:

$$1187500 - 450000 = 737500 \text{ грн.}$$

15.07.03 р.

Борг із відсотками:

$$S = 737500 \left( 1 + \frac{75}{360} \cdot 0,18 \right) = 754093,8 \text{ грн.}$$

Нараховані відсотки  $I = 754093,8 - 737500 = 16593,8$  грн.

Платіж дорівнює 300000 грн.

Оскільки платіж більший, ніж відсотки, то залишок боргу буде такий

$$754093,8 - 300000 = 454093,8 \text{ грн.}$$

15.10.03 р.

Борг із відсотками становить:

$$S = 454093,8 \left( 1 + \frac{90}{360} \cdot 0,18 \right) = 474528 \text{ грн.}$$

Отже, останнє надходження повинно становити 474528 грн. Контур цієї операції відображений на рис. 2.3.

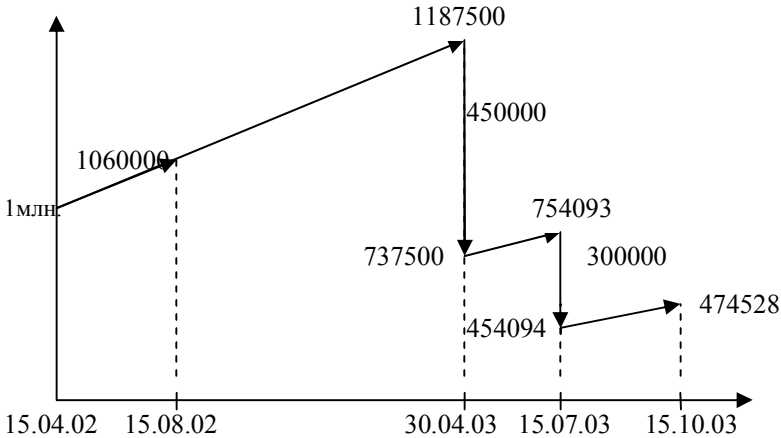


Рис. 2.3. Контур операції прикладу 2.6 ▲

Другий метод – *правило торговельника*. Тут можливі два варіанти.

- якщо термін позички не перевищує рік, то сума боргу з відсотками залишається незмінною до повного погашення. Відповідно накопичуються часткові платежі з нарахованими на них до кінця терміну відсотками. Останній платіж повинен має дорівнювати різниці цих сум;

- якщо термін позички перевищує рік, то зазначені вище розрахунки робляться для річного періоду заборгованості. Наприкінці року із суми заборгованості віднімається нарашена сума накопичених часткових платежів. Залишок погашається в наступному році. Алгоритм можна записати так:

$$Q = S - K = P(1 + ni) - \sum_j R_j (1 + t_j i_j), \quad (2.9)$$

де  $Q$  – залишок боргу на кінець терміну чи року,  $S$  – нарашена сума боргу,  $K$  – наражена сума платежів,  $R_j$  – сума часткового платежу,  $n$

– загальний термін позички,  $t_j$  – інтервал часу від моменту платежу до кінця терміну позички чи року.

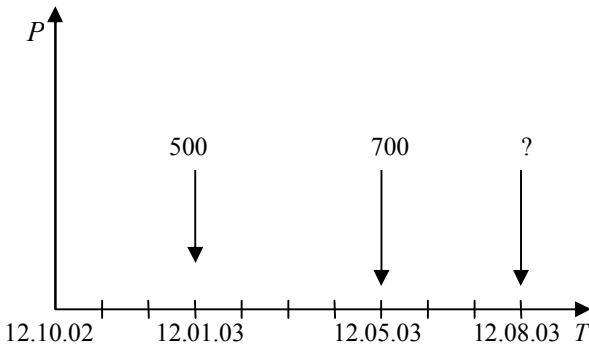
Приклад 2.8. Позичка обсягом 2000 грн. взята 12.10.02 р. по 12.08.03 р. Відсотки нараховуються за ставкою 15% річних. Часткові надходження були такі:

12.01.03 р. – 500 грн.;

12.05.03 р. – 700 грн.

Який залишок боргу?

▲ Для підрахунку зобразимо задачу графічно.



Термін позички не перевищує рік. Рахуємо борг за весь період:

$$S = 2000 \left( 1 + \frac{10}{12} \cdot 0,15 \right) = 2250 \text{ грн.}$$

Обчислюємо нарощену суму платежів:

$$K = 500 \left( 1 + \frac{7}{12} \cdot 0,15 \right) + 700 \left( 1 + \frac{3}{12} \cdot 0,15 \right) = 1270 \text{ грн.}$$

Залишок боргу:  $Q = 2250 - 1270 = 980$  грн. ▲

Приклад 2.9. Для даних прикладу 2.7 необхідно знайти залишок боргу на 15.10.03 р. за правилом торговельника.

▲ Термін позички перевищує рік. Тому розрахунки будемо робити спочатку на рік, а потім на решту періоду. Рахуємо борг на кінець року, тобто на 15.04.03 р.:

$$S = 1000000(1 + 1 \cdot 0,18) = 1180000 \text{ грн.}$$

Обчислюємо нарощену суму платежів за рік. З 15.04.02 р. по 15.04.03 р. відбувся лише один платіж 15 серпня обсягом 50000 грн.

$$K = 50000 \left( 1 + \frac{240}{360} \cdot 0,18 \right) = 56000 \text{ грн.}$$

Залишок боргу  $Q = 1180000 - 56000 = 1124000$  грн.

Борг з відсотками на наступних півроку з 15.04.03 р. по 15.10.03 р.

$$S = 1124000(1 + 0,5 \cdot 0,18) = 1225160 \text{ грн.}$$

Нарощена сума платежів:

$$K = 400000 \left( 1 + \frac{165}{360} \cdot 0,18 \right) + 300000 \left( 1 + \frac{90}{360} \cdot 0,18 \right) = 746500 \text{ грн.}$$

Залишок боргу:  $Q = 1225160 - 746500 = 478660$  грн. ▲

*Зауваження.* Для тих же даних актуарний метод і правило торговельника в загальному випадку дають різні результати.

### 2.3. Нарощення відсотків у споживчому кредиті

Споживчий кредит жорсткий для боржника. Відсотки нараховуються на всю суму кредиту і приєднуються до боргу вже в момент відкриття кредиту.

Кредит погашається частинами найчастіше однаковими через рівні проміжки часу. Тоді нарощена сума:

$$S = P(1 + ni),$$

а разовий платіж:

$$R = \frac{S}{nm}, \quad (2.10)$$

де  $n$  – термін кредиту в роках,

$m$  – число платежів у році.

Якщо споживчий кредит оформляється за схемою: кредит сплачується рівними частинами, а відсотки нараховуються на залишок боргу, то разова плата складається з двох доданків – відповідна частина основного боргу і відсоткова плата. Остання постійно зменшується. В такому випадку нараховані відсотки:

$$I = \frac{P \cdot i}{12} \left[ m - \frac{1}{m} \cdot \frac{m}{2} (m - 1) \right] = \frac{P \cdot i}{24} (m + 1), \quad (2.10')$$



де  $m$  – кількість місяців.

Приклад 2.10. Покупець планує купити машину вартістю 6000 дол. США. Він у змозі оплатити 3500 дол., а решту зобов'язується виплатити протягом 3-х років під 5% простих річних. Платежі повинен вносити щомісячно. 1) Розрахувати величину разового платежу. 2) Розрахувати величину разового платежу, коли кредит сплачується рівними частинами, а відсотки нараховуються на залишок боргу.

▲ 1) Обчислюємо наращену суму боргу:

$$S = 2500(1 + 3 \cdot 0,05) = 2875 \text{ дол.}$$

та величину разового платежу:

$$R = \frac{2875}{3 \cdot 12} = 79,86 \approx 80 \text{ дол.}$$

Отже, щоби погасити борг покупець повинен щомісячно виплачувати 80 дол.

2) Розрахуємо величину відсотків за формулою (2.10'):

$$I = \frac{2500 \cdot 0,05}{24} (36 + 1) = 192,71.$$

Тоді разовий платіж згідно з формулою (2.10) буде такий:

$$R = \frac{2500 + 192,71}{3 \cdot 12} = \frac{2692,71}{36} = 74,80 \text{ дол.}$$

Щоби погасити борг, покупець повинен щомісячно виплачувати 74,80 дол.

Отже, вибір схеми кредитування суттєво впливає на фінансові результати. ▲

#### 2.4. Дисконтування за простими відсотковими ставками

У фінансовій практиці часто виникає задача: за заданою сумою  $S$ , яку треба оплатити через деякий час  $n$ , визначити суму позички  $P$ . Така ситуація виникає при розробці умов контракту або ж коли відсотки з суми  $S$  отримуються безпосередньо при видачі кредиту. У цих випадках кажуть, що сума  $S$  *дисконтується*, про-

цес нарахування і отримання відсотків називається *обліком*, отримані відсотки – *дисконтом* або *скидкою*.

Величина  $P$ , знайдена за допомогою дисконтування, – це *сучасна вартість (величина)* майбутнього платежу  $S$ .

Розрізняють математичне дисконтування і банківський (комерційний) облік.

**А. Математичне дисконтування** – це процес розв’язування задачі, оберненої до нарощення початкової суми позички. Задача формулюється так: яку початкову суму позички треба дати в борг, щоб отримати після закінчення терміну суму  $S$ , за умови, що на борг нараховуються відсотки за ставкою  $i$ . З формули (2.2) нарощення за простими відсотками знаходимо:

$$P = \frac{S}{1 + ni}, \quad (2.11)$$

де  $P$  – сучасна величина;

$n$  – термін позички (якщо термін задається в днях, тоді  $n = \frac{t}{K}$ );

$\frac{1}{1 + ni}$  – дисконтний множник, що показує, яку частку становить початкова величина боргу в кінцевій його сумі.

Різниця  $S - P$  вважається відсотками, нарахованими на  $P$  або дисконтом із суми  $S$ .

**Приклад 2.11.** Через 150 днів після підписання договору боржник сплатить 2 тис. грн. Кредит видано під 17% річних. Яка початкова сума боргу, якщо часова база  $K = 365$  днів?

▲ Обчислюємо сучасну величину:

$$P = \frac{2000}{1 + \frac{150}{365} \cdot 0,17} = \frac{2000}{1,07} \approx 1869 \text{ грн.} \quad \blacktriangle$$

### **Б. Банківський облік (облік векселів)**

Суть операції така: банк (фінансова установа) до настання терміну платежу за векселем або іншим платіжним зобов’язанням купує його у власника за ціною, яка менша за суму, що вказана на векселі, тобто купує його з дисконтом. Отримавши при настанні терміну векселя гроші, банк реалізує відсотковий дохід у вигляді дисконту. Відповідно, власник векселя за допомогою його обліку має

можливість отримати гроші не в повному обсязі, проте раніше вказаного на ньому терміну.

При обліку векселя застосовується банківський або комерційний облік. Відсотки за користування позичкою у вигляді дисконту нараховуються на суму, яку треба сплатити в кінці терміну. При цьому застосовується облікова ставка  $d$ .

Обсяг дисконту –  $Snd$ ,

де  $d$  – річна облікова ставка,  $n$  – роки.

$$P = S - Snd = S(1 - nd), \quad (2.12)$$

де  $1 - nd$  – дисконтний множник,  $n$  – термін від моменту обліку до дати погашення векселя.

Якщо  $n = \frac{1}{d}$ , то  $P = 0$ , якщо  $n > \frac{1}{d}$ , то  $P < 0$ . Отже, при відносно великому терміні векселя облік може привести до нульової або від'ємної суми  $P$ , що не має змісту.

Облік за обліковою ставкою найчастіше проводиться при часовій базі  $K = 360$  днів, число днів позички найчастіше точне, тобто відсотки  $\frac{ACT}{360}$ .

Приклад 2.12. Видано вексель на суму 1000 грн. з оплатою 15.01.04. Власник векселя облікував його в банку 15.09.03 за обліковою ставкою 20% ( $\frac{ACT}{360}$ ). Обчислити отриману суму при обліку і дисконт.

▲ До кінця терміну оплати залишилось 122 дні. Отримана при обліку сума становить:

$$P = 1000(1 - \frac{122}{360} \cdot 0,2) = 932,22 \text{ грн.}$$

Дисконт становить:

$$D = 1000 - 932,22 = 67,78 \text{ грн.}$$

Змінимо умову задачі.

Нехай на всю суму боргу нараховувались відсотки за ставкою  $i = 17\%$  річних. Борг було взято на рік.

Тоді  $P^* = P(1 + ni)(1 - n'd)$ ,

де  $n'$  – термін від моменту обліку до погашення,

$n$  – загальний термін зобов'язання.

$$\begin{aligned}
 P^* &= 1000\left(1 + \frac{365}{360} \cdot 0,17\right)\left(1 - \frac{122}{360} \cdot 0,2\right) = \\
 &= 1000 \cdot 1,17 \cdot 0,93 = 1088,1. \quad \blacktriangle
 \end{aligned}$$

Дисконт також може бути фіксованою величиною для всього терміну за домовленістю сторін. Проте величина ставки не завжди мається на увазі.

### ***В. Нарощення за обліковою ставкою***

Проста облікова ставка іноді застосовується і при розрахунку нарощеної суми, а саме: коли необхідно визначити суму, яку треба проставити у векселі, якщо задана поточна сума боргу  $P$ . Тоді:

$$S = P \frac{1}{1 - nd}. \quad (2.13)$$

Приклад 2.13. Позичку було взято з 20.01 по 15.10 обсягом 1000 грн. Визначити нарощену суму за умови, що відсотки нараховуються за простою обліковою ставкою  $d = 18\%$ .

▲ Обчислюємо за формулою (2.13):

$$S = 1000 \left( \frac{1}{1 - \frac{258}{360} \cdot 0,18} \right) = 1000 \left( \frac{1}{0,87} \right) \approx 1149 \text{ грн. } \blacktriangle$$

## **2.5. Визначення терміну позички і величини відсоткової ставки**

Обидві ставки (нарощення і дисконтування) застосовуються для розв'язування подібних задач. Проте для ставки нарощення прямою задачею є визначення нарощеної суми, оберненою – дисконтування. Для облікової ставки прямою задачею є дисконтування суми, оберненою – нарощення. При однакових ставках результати завжди різні.

Зазначимо, що облікова ставка відображає фактор часу більш жорстко.

| Ставка | Пряма задача    | Обернена задача  |
|--------|-----------------|------------------|
| $i$    | $S = P(1 + ni)$ | $P = S/(1 + ni)$ |
| $d$    | $P = S(1 - nd)$ | $S = P/(1 - nd)$ |

а) Термін позички:

- у роках:

$$n = \frac{S/P - 1}{i} = \frac{S - P}{Pi}, \quad (2.14)$$

$$n = \frac{1 - P/S}{d} = \frac{S - P}{Sd}; \quad (2.15)$$

- у днях:

$$t = \frac{S - P}{Pi} \cdot K, \quad (2.14')$$

$$n = \frac{S - P}{Sd} \cdot K. \quad (2.15')$$

б) Величина відсоткової ставки:

$$i = \frac{S - P}{nP} = \frac{S - P}{Pt} \cdot K, \quad (2.16)$$

$$d = \frac{S - P}{nS} = \frac{S - P}{St} \cdot K. \quad (2.17)$$

Іноді величина дисконту фіксується в договорі у вигляді відсотка скидки (загальної облікової ставки)  $d'$  за весь термін позички. Тоді:

$$P = S(1 - d').$$

Оскільки 
$$P = \frac{S}{1 + ni},$$

то прирівняємо множники 
$$\frac{1}{1 + ni} = (1 - d').$$

Виразимо ставку  $i$  через  $d'$ :

$$i = \frac{d'}{n(1 - d')}. \quad (2.18)$$

Річна облікова ставка дорівнює:

$$d = \frac{d'}{n}. \quad (2.19)$$

Приклад 2.14. Згідно з контрактом із суми позички, яку видали на 240 днів, утримується дисконт обсягом 11%. Необхідно визначити ціну кредиту в вигляді річної ставки простих відсотків і облікової ставки ( $K = 360$ ).

- ▲ Згідно з вище наведеними формулами (2.18, 2.19):

$$i = \frac{0,11}{\frac{240}{360}(1-0,11)} = \frac{0,11}{0,59} = 0,186 \text{ або } 18,6\%,$$

$$d = \frac{0,11}{\frac{240}{360}} = 0,164 \text{ або } 16,4\%. \blacktriangle$$

## 2.6. Операції конвертування (обміну) валюти і нарощення відсотків

Розглянемо операції конвертування (обміну) валюти і нарощення відсотків.

Існують 4 можливі варіанти для нарощення суми з конвертуванням грошових ресурсів і без нього:

- без конвертування: ВКВ  $\rightarrow$  ВКВ (вільно конвертована валюта);
- з конвертуванням: ВКВ  $\rightarrow$  Грн.  $\rightarrow$  Грн.  $\rightarrow$  ВКВ;
- без конвертування: Грн.  $\rightarrow$  Грн.;
- з конвертуванням: Грн.  $\rightarrow$  ВКВ  $\rightarrow$  ВКВ  $\rightarrow$  Грн.

а) Варіант ВКВ  $\rightarrow$  Грн.  $\rightarrow$  Грн.  $\rightarrow$  ВКВ.

Ця операція має три кроки:

- обмін валюти на гривні;
- нарощення відсотків на цю суму;
- конвертування у вихідну валюту.

Якщо ввести позначення:

$P_v$  – сума депозиту в ВКВ;

$P_g$  – сума депозиту в гривнях;

$S_v$  – нарощена сума у ВКВ;

$S_g$  – нарощена сума в гривнях;

$K_0$  – курс обміну на початку операції;

$K_1$  – курс обміну в кінці операції;

$n$  – термін депозиту;

$i$  – ставка нарощення для гривневих сум;

$j$  – ставка нарощення для конкретного виду ВКВ,

то нарощена сума для цього варіанта обчислюватиметься за формулою:

$$S_v = P_v K_0 (1 + ni) \frac{1}{K_1}. \quad (2.20)$$

б) Варіант Грн. → ВКВ → ВКВ → Грн.

Ця операція має три кроки:

- обмін гривень на валюту;
- нарощення відсотків на валюту;
- конвертування в гривні.

При наведених позначеннях нарощена сума для цього варіанта буде вираховуватись за формулою:

$$S_g = \frac{P_g}{K_0} (1 + nj) K_1. \quad (2.21)$$

Приклад 2.15. Поміщають 1000 дол. на гривневий депозит. Курс продажу 1 дол. на початок терміну депозиту – 5,28 грн., курс купівлі долара в кінці – 5,36 грн. Відсоткові ставки  $i = 22\%$ ,  $j = 15\%$  (360/360). Термін депозиту – 4 місяці. Необхідно визначити нарощену суму в доларах.

▲ Використаємо формулу (2.20):

$$S_v = 1000 \cdot 5,28 \left(1 + \frac{4}{12} \cdot 0,22\right) \frac{1}{5,36} = 1057 \text{ дол.}$$

Знайдемо нарощену суму в доларах для варіанта без обміну на гривні:

$$S_v = 1000 \left(1 + \frac{4}{12} \cdot 0,15\right) = 1049,5 \text{ дол.}$$

Перший варіант кращий, ніж другий. ▲

Приклад 2.16. Доповнимо попередній приклад. Припустимо, що на доларовий депозит потрібно покласти 10000 грн. Необхідно визначити нарощену суму в гривнях.

▲ Використаємо формулу (2.21):

$$S_g = \frac{10000}{5,28} \left(1 + \frac{4}{12} \cdot 0,15\right) \cdot 5,36 = 10659 \text{ грн.}$$

Знайдемо нарощену суму в гривнях для варіанта без конвертування у валюту:

$$S_g = 10000 \left(1 + \frac{4}{12} \cdot 0,22\right) = 10733,33 \text{ грн.}$$

Варіант без конвертування кращий, ніж з конвертуванням. ▲

## 2.7. Фінансова еквівалентність платежів

Інколи в банківській практиці бувають випадки, коли необхідно замінити одне фінансове зобов'язання на інше. Наприклад, відкласти на подальший період платіж, об'єднати декілька платежів в один (*консолідація* платежів). Умови угод можна змінювати лише тоді, коли між сторонами до і після зміни умов платежів спостерігається незмінність фінансових відносин або *принцип фінансової еквівалентності*. Платежі будуть еквівалентними тоді, коли після приведення їх до одного і того ж моменту часу вони будуть однаковими.

Найчастіше відбуваються такі види змін в умовах контрактів:

- *об'єднання декількох платежів в один;*
- *заміна однієї кількості платежів іншою;*
- *зміна термінів платежів;*
- *зміна обсягів платежів і т. д.*

При розв'язуванні такого типу задач для того, щоб виконувався принцип фінансової еквівалентності, розробляють *рівняння еквівалентності*. У цьому рівнянні сума платежів за старим контрактом, розрахована в певний період часу, дорівнює сумі платежів за новим контрактом на цей самий період часу.

### ***А. Об'єднання декількох платежів в один***

Нехай необхідно об'єднати платежі з сумами  $S_1, S_2, \dots, S_m$  і термінами  $n_1, n_2, \dots, n_m$  в один об'єднаний платіж з сумою  $S_0$  і терміном  $n_0$ .

- Розглянемо задачу при відомому терміні  $n_0$ , а невідомій  $S_0$ . Згідно з принципом фінансової еквівалентності сума об'єднаного платежу буде дорівнювати:

$$S_0 = \sum_{j=1}^m k_{nj} S_j, \quad (2.22)$$

де  $k_{nj}$  – коефіцієнт приведення.

Коефіцієнт приведення може бути множником нарощення, множником дисконтування або дорівнювати 1 залежно від термінів платежів.



Розглянемо випадки:

- 1)  $n_0 > n_j$ , де  $n_0$  – термін об'єднаного платежу,  $n_j$  – термін  $j$ -го платежу.

Коефіцієнт приведення – це множник нарощення, який розраховується за формулою:

$$k_{nj} = 1 + t_j i,$$

де  $t_j = n_0 - n_j = \frac{\partial_0 - \partial_j}{K}$ ,  $\partial_0$  – дата об'єднання платежу,  $\partial_j$  – дата  $j$ -го платежу;

- 2)  $n_0 < n_j$ .

Коефіцієнт приведення – це дисконтний множник, який розраховується за формулою:

$$k_{nj} = \frac{1}{1 + t_j i},$$

де  $t_j = n_j - n_0 = \frac{\partial_j - \partial_0}{K}$ ;

- 3)  $n_0 = n_j$ .

Коефіцієнт приведення дорівнює одиниці.

Приклад 2.17. Об'єднуються чотири платежі із сумами обсягом 10, 15, 20, 13 тис. грн. з термінами 2.03, 23.04, 3.06, 5.08. Термін об'єднання платежів 14.07 при простій ставці  $i = 10\%$  річних і  $K = 365$ . Необхідно розрахувати суму об'єднаного платежу.

▲ Для перших трьох платежів  $n_0 > n_j$ , ( $j = \overline{1,3}$ ), для четвертого  $n_0 < n_4$ . Розрахуємо число днів від терміну вихідного (початкового) платежу до об'єднаного:

$$\partial_0 - \partial_1 = 134 \text{ дні}; \quad \partial_0 - \partial_2 = 82 \text{ дні};$$

$$\partial_0 - \partial_3 = 41 \text{ день}; \quad \partial_4 - \partial_0 = 22 \text{ дні}.$$

Згідно з формулою (2.22) сума об'єднаного платежу становить:

$$S_0 = \left(1 + \frac{134}{365} \cdot 0,1\right) \cdot 10 + \left(1 + \frac{82}{365} \cdot 0,1\right) \cdot 15 + \left(1 + \frac{41}{365} \cdot 0,1\right) \cdot 20 + \frac{1}{1 + \frac{22}{365} \cdot 0,1} \cdot 13 = 10,36712 + 15,33699 + 20,22466 + 12,92211 =$$

= 58,85088 тис. грн. ▲

- Розглянемо задачу при відомій сумі об'єднаного платежу  $S_0$ , а невідомому терміні  $n_0$ . Рівняння еквівалентності представимо у вигляді рівності сучасних вартостей відповідних платежів:

$$S_0 \frac{1}{1+n_0 i} = \sum_{j=1}^m S_j \frac{1}{1+n_j i}, \quad (2.23)$$

$$1+n_0 i = \frac{S_0}{\sum_{j=1}^m S_j \frac{1}{1+n_j i}},$$

отже,

$$n_0 = \frac{1}{i} \left( \frac{S_0}{\sum_{j=1}^m S_j \frac{1}{1+n_j i}} - 1 \right). \quad (2.24)$$

Рівняння (2.24) має розв'язок у тому випадку, коли платіж  $S_0$  більший від суми сучасних вартостей платежів, що замінюються, тобто  $S_0 > \sum_{j=1}^m S_j \frac{1}{1+n_j i}$ .

Приклад 2.18. Чотири платежі з сумами обсягом 10, 15, 20, 13 тис. грн., які мали бути виплачені через 70, 100, 110, 135 днів замінюються одним платежем обсягом 65 тис. грн. Необхідно розрахувати термін об'єднаного платежу за простої ставки  $i = 10\%$  річних і  $K = 365$ .

▲ Розрахуємо суму сучасних вартостей платежів:

$$P = \frac{10}{1 + \frac{70}{365} \cdot 0,1} + \frac{15}{1 + \frac{100}{365} \cdot 0,1} + \frac{20}{1 + \frac{110}{365} \cdot 0,1} + \frac{13}{1 + \frac{135}{365} \cdot 0,1} =$$

$$= 9,81 + 14,60 + 19,41 + 12,54 = 56,36 \text{ тис. грн.}$$

Термін об'єднаного платежу розрахуємо за формулою 2.4:

$$n_0 = \frac{1}{0,1} \left( \frac{65}{56,36} - 1 \right) = 1,53 \text{ року, або } 558 \text{ днів. } \blacktriangle$$

### Б. Заміна однієї кількості платежів на іншу

Якщо платежі замінюються не на один платіж, як в попередньому випадку, а на декілька, то необхідно записати загальне рівняння еквівалентності. У ньому сума платежів за старими умовами, які приведені за заданою відсотковою ставкою і датою, прирівнюється до суми платежів за новими умовами, які приведені за тією самою відсотковою ставкою і датою.

Рівняння має такий вигляд:

$$\sum_{i=1}^{N_{\text{ст}}} k_{\text{пi(ст)}} S_{i(\text{ст})} = \sum_{j=1}^{N_{\text{н}}} k_{\text{пj(н)}} S_{j(\text{н})}, \quad (2.25)$$

де  $S_{i(\text{ст})}$  ( $i = \overline{1, N_{\text{ст}}}$ ) – суми платежів за старими умовами;

$k_{\text{пi(ст)}}$  ( $i = \overline{1, N_{\text{ст}}}$ ) – коефіцієнти приведення платежів за старими умовами до заданої дати;

$S_{j(\text{н})}$  ( $j = \overline{1, N_{\text{н}}}$ ) – суми платежів за новими умовами;

$k_{\text{пj(н)}}$  ( $j = \overline{1, N_{\text{н}}}$ ) – коефіцієнти приведення платежів за новими умовами до тієї самої заданої дати.

Найчастіше задача зводиться до знаходження суми останнього платежу. Перетворимо рівняння (2.25) до вигляду:

$$\sum_{i=1}^{N_{\text{ст}}} k_{\text{пi(ст)}} S_{i(\text{ст})} = k_{\text{пN(н)}} S_{N(\text{н})} + \sum_{j=1}^{N_{\text{н}}-1} k_{\text{пj(н)}} S_{j(\text{н})}, \quad (2.26)$$

де  $S_{N(\text{н})}$  – сума останнього платежу;  $k_{\text{пN(н)}}$  – коефіцієнт приведення останнього платежу до заданої дати.

З (2.26) маємо:

$$S_{N(\text{н})} = \frac{1}{k_{\text{пN(н)}}} \left( \sum_{i=1}^{N_{\text{ст}}} k_{\text{пi(ст)}} S_{i(\text{ст})} - \sum_{j=1}^{N_{\text{н}}-1} k_{\text{пj(н)}} S_{j(\text{н})} \right). \quad (2.27)$$

Приклад 2.19. У прикладі 2.17 змінимо умови платежів: 1.07 виплачується 25 тис. грн., решту боргу виплачується 10.09. Визначити суму останнього платежу для дати приведення 3.08 і 10.09.

▲ *Випадок 1.* Розрахуємо число днів від початкового платежу до дати приведення 3.08:

$$\partial_0 - \partial_{1(\text{ст})} = 154 \text{ (дні);}$$

$$\partial_{4(\text{ст})} - \partial_0 = 2 \text{ (дні);}$$

$$\partial_0 - \partial_{2(\text{ст})} = 102 \text{ (дні);}$$

$$\partial_0 - \partial_{1(\text{н})} = 33 \text{ (дні);}$$

$$\partial_0 - \partial_{3(\text{кр})} = 61 \text{ (день);}$$

$$\partial_{2(\text{н})} - \partial_0 = 38 \text{ (днів).}$$

Визначимо значення коефіцієнтів приведення:

$$k_{1(\text{кр})} = 1 + \frac{154}{365} \cdot 0,1 = 1,0422;$$

$$k_{4(\text{кр})} = \left(1 + \frac{2}{365} \cdot 0,1\right)^{-1} = 0,9995;$$

$$k_{2(\text{кр})} = 1 + \frac{102}{365} \cdot 0,1 = 1,0279;$$

$$k_{1(\text{н})} = 1 + \frac{33}{365} \cdot 0,1 = 1,0090;$$

$$k_{3(\text{кр})} = 1 + \frac{61}{365} \cdot 0,1 = 1,0167;$$

$$k_{2(\text{н})} = \left(1 + \frac{38}{365} \cdot 0,1\right)^{-1} = 0,9897.$$

Розрахуємо суму останнього платежу:

$$\begin{aligned} S_{2(\text{н})} &= \frac{1}{0,9897} (10 \cdot 1,0422 + 15 \cdot 1,0279 + 20 \cdot 1,0167 + 13 \cdot 0,9995 - 25 \cdot 1,0090) = \\ &= 34,29557 \text{ тис. грн.} \end{aligned}$$

*Випадок 2.* Розрахуємо число днів від початкового платежу до дати приведення 10.09:

$$\partial_0 - \partial_{1(\text{кр})} = 192 \text{ (дні);}$$

$$\partial_0 - \partial_{4(\text{кр})} = 36 \text{ (днів);}$$

$$\partial_0 - \partial_{2(\text{кр})} = 140 \text{ (днів);}$$

$$\partial_0 - \partial_{1(\text{н})} = 71 \text{ (день);}$$

$$\partial_0 - \partial_{3(\text{кр})} = 99 \text{ (днів);}$$

$$\partial_0 - \partial_{2(\text{н})} = 0 \text{ (днів).}$$

Визначимо значення коефіцієнтів приведення:

$$k_{1(\text{кр})} = 1 + \frac{192}{365} \cdot 0,1 = 1,0526;$$

$$k_{4(\text{кр})} = 1 + \frac{36}{365} \cdot 0,1 = 1,0099;$$

$$k_{2(\text{кр})} = 1 + \frac{140}{365} \cdot 0,1 = 1,0384;$$

$$k_{1(\text{н})} = 1 + \frac{71}{365} \cdot 0,1 = 1,0195;$$

$$k_{3(\text{кр})} = 1 + \frac{99}{365} \cdot 0,1 = 1,0271;$$

$$k_{2(\text{н})} = 1 + \frac{0}{365} \cdot 0,1 = 1.$$

Розрахуємо суму останнього платежу:

$$\begin{aligned} S_{2(\text{н})} &= 10 \cdot 1,0526 + 15 \cdot 1,0384 + 20 \cdot 1,0271 + 13 \cdot 1,0099 - 25 \cdot 1,0195 = \\ &= 34,28575 \text{ тис. грн.} \end{aligned}$$

Отже, зміна дати приведення приводить до деякої зміни суми останнього платежу. ▲

## Питання для самоконтролю

1. Дайте визначення нарощеної суми позички.
2. Запишіть формулу нарощення за простими відсотками.
3. Що показує множник нарощення?
4. В яких задачах використовується розрахунок відсотків „зі 100”?
5. Коли проводиться розрахунок відсотків „на 100” та „в 100”?
6. Які часові бази існують для нарахування відсотків?
7. Як проводиться підрахунок днів для нарахування відсотків?
8. Охарактеризуйте три варіанти розрахунку простих відсотків.
9. Запишіть формулу нарощення за простими відсотками при зміні відсоткових ставок у часі.
10. Наведіть формулу нарахування відсотків при зміні суми депозиту в часі.
11. Яка величина називається відсотковим числом?
12. Запишіть формулу відсоткового дільника (дивізора).
13. Зобразіть і поясніть на графіку контур збалансованої фінансової операції.
14. Розкрийте суть актуарного методу погашення заборгованості частковими платежами.
15. У чому полягає суть погашення заборгованості частковими платежами за правилом торговельника?
16. Запишіть формули погашення споживчого кредиту.
17. Дайте визначення сучасної вартості майбутнього платежу.
18. Які види дисконтувань вам відомі?
19. Розкрийте суть математичного дисконтування.
20. Запишіть формулу банківського обліку.
21. Виведіть формули визначення терміну позички для ставок нарощення і дисконтування.
22. За якими формулами визначаються ставка нарощення та облікова ставка?
23. Запишіть рівняння еквівалентності при об’єднанні декількох платежів в один.
24. Який вигляд має рівняння еквівалентності при заміні однієї кількості платежів на іншу?

## ВПРАВИ

1. Фірма “Любава” взяла позику обсягом 100 тис. грн. терміном на 2 роки під 15% річних і після закінчення позичкового періоду має повернути кредит з відсотками. Яку суму поверне “Любава” банку, якщо відсотки прості?

2. Молода сім'я отримала від банку позику на будівництво житла обсягом 60 тис. грн. терміном на 3 роки під прості відсотки 16% річних. Визначте наращену суму кредиту і відсотки.

3. Внески на ощадний рахунок становлять 50 тис. грн. на початку кожного року. Визначте, яка сума буде на рахунку через 10 років при відсотковій ставці 11% (відсотки прості)?

4. Банк приймає внески на терміновий депозит на таких умовах: відсоткова ставка при терміні 35 днів – 45%; при терміні 65 днів – 48% ,при терміні 90 днів – 50%. Розрахуйте дохід клієнта на вказані терміни, якщо внесок становить 10 тис. грн., а рік не високосний. Метод розрахунку: точні відсотки з точним числом днів.

5. Клієнт вклав у банк на депозит 2000 грн. на термін з 1 квітня по 6 травня з простою відсотковою ставкою 6% річних. Розрахуйте дохід клієнта за трьома методами, якщо рік не високосний.

6. Банк приймає депозити на 3 місяці за ставкою 5% річних, на 6 місяців за ставкою 6% річних і на рік за ставкою 8% річних. Визначте суму, яку отримає власник депозиту обсягом 500000 грн. для трьох випадків. Порівняйте отримані результати для 5% кварталних, 6% піврічних, 8% річних.

7. Комерційний банк приймає кошти від населення під прості відсотки з відсотковою ставкою 36% річних. Клієнт вніс 6 тис. грн. на депозит з 12 лютого по 24 квітня. Визначте величину множника нарощення і наращену суму для випадку: а) точних відсотків з точним числом днів; б) звичайних відсотків з точним числом днів; в) звичайних відсотків з наближеним числом днів; рік не високосний.

8. Клієнт вклав у банк 3 тис. грн. 1 лютого. Відсоткова ставка банку з 1 лютого по 18 лютого – 60% річних; з 19 лютого по 7 березня – 56% річних; з 8 березня по 23 березня – 53% річних; з 24 березня по 19 квітня, коли був вилучений внесок, – 48% річних. Визначте дохід клієнта і ефективну відсоткову ставку. Метод розрахунку: звичайні відсотки з точним числом днів, рік не високосний.

9. Фірма вклала в комерційний банк 28 тис. грн. на термін з 9 листопада по 21 листопада. На внески “до запитання” банк нараховує відсотки – 36% річних. Відсотки звичайні з наближеним числом днів у році. Визначте наращену суму.

10. Клієнт вклав у банк 14 тис. грн. на термін з 14 лютого 2003 р. по 23 липня цього ж року. На внески “до запитання” терміном більше місяця банк нараховує 84% річних. Визначте наращену суму при розрахунку за: а) точними відсотками з точним числом днів; б) банківським методом; в) звичайними відсотками з наближеним числом днів, якщо рік не високосний.

11. Клієнт вклав в Ощадбанк 3 тис. грн. Згідно з умовами договору “до запитання”, відсоткова ставка може бути змінена банком в односторонньому порядку. Внесок було зроблено 3 квітня під 24% річних. 22 квітня відсоткова ставка, згідно з рішенням Правління банку, встановлена в 12% річних, а 20 травня – 84% річних. Внесок разом з відсотками отриманий 3 червня. Визначте наращену суму, якщо розрахунок відсотків проводиться за точними відсотками з точним числом днів у році ( $K = 365$ ).

12. Клієнт отримав кредит обсягом 6 тис. грн. терміном на 3 місяці. Сума повернення кредиту – 7,5 тис. грн. Визначте відсоткову ставку банку.

13. На який термін виданий кредит обсягом 300 тис. грн. під відсоткову ставку 60% річних, якщо банк отримав суму від позичальника 380 тис. грн. Методика розрахунку: банківська.

14. Скільки років потрібно, щоб сума 1 млн. грн. досягла величини 2,16 млн. грн., якщо відсоткова ставка – 14,5%.

15. Визначте, який відсоток повинна встановити кредитна спілка “Калина” при наданні позики обсягом 8000 грн., щоби при терміні 187 днів мати дохід не менший, ніж 1400 грн. Відсотки звичайні з наближеним числом днів.

16. Клієнт поклав на депозитний рахунок 4000 грн. терміном на 3 місяці під відсоткову ставку 35% річних. Відсотки прості. Сума, отримана клієнтом після закінчення терміну, 4540 грн. Визначте відсоткову ставку податку на дохід.

17. Обсяг кредиту, отриманого фірмою “Фокстрот” на термін 6 місяців, дорівнює 60 млн. грн. Сума повернення кредиту – 70 млн. грн. Визначте просту відсоткову і облікову ставку кредиту.

18. Підприємство міняє 60 млн. грн. на долари США за курсом 1 дол. – 5,32 грн. Скільки доларів США отримає підприємство?

19. Туристична фірма має 50000 грн. і хоче поміняти їх на євро. Курс купівлі/продажу євро – 6,62/6,72. Яку суму отримає фірма і скільки заробить банк на цій операції?

20. Студент має 100 дол. США і хоче купити євро. Курс купівлі – долара 5,25. Скільки євро купить студент, якщо курс продажу євро – 6,40?

21. Необхідно поміняти 1000 євро на італійські ліри. Курс купівлі/продажу євро 6,40/6,65; 1,92/2,05 для італійської ліри. Яку суму отримає клієнт, який прибуток отримає банк на цій операції?

22. Турист повертається з Бельгії через Чехію і вирішив поміняти 300 бельгійських франків на чеські крони. Курс американський долар/бельгійський – 4,6/4,7; американський долар/чеська крона: 2,62/2,72. Яку суму отримає турист у результаті обміну?

23. Визначте курс англійського фунта відносно долара США на початку лютого 2004 р., якщо 535 грн. = 100 дол., а 930 грн. = 100 фунтів.

24. Визначте курс гривні відносно латвійського лата і литовського лита, якщо: 1 латвійський лат = 9859 рос. руб., 1 литовський лит = 1449 рос. руб., 10 рос. руб. = 1,85 грн.

25. Підприємство для модернізації устаткування вирішило взяти в банку кредит на 600 млн. грн. Кредит видається під 28% річних. Термін кредиту – 9 місяців. Крім того, банк вимагає 8% від суми кредиту в заставу. Яку суму отримає підприємство, якщо відсотки прості і оплачуються при видачі кредиту. Визначте реальну відсоткову ставку для кредиту.

26. Фірма “ВІКА” отримала на півроку банківський кредит на 8000 грн. під 24% річних. Відсотки за кредит банк бере авансом. Розрахуйте реальну відсоткову ставку за кредит у випадку: а) застава не вимагається; б) застава за надання кредиту становить 6% від суми кредиту.

27. Є два варіанти купівлі квартири: заплатити 20 тис. дол. сьогодні або 21 тис. дол. через рік. Крім цього, є можливість вкласти 20 тис. дол. на депозит у банку на рік під 6% річних. Яку альтернативу вигідніше вибрати?

28. Фірма “КОМФОРТ” отримала кредит на 3 місяці під заставу нерухомості вартістю 160000 грн. Величина кредиту становить 80% від вартості нерухомості. Відсоткова ставка за кредитом – 36% річних, комісійні з обслуговування кредиту становлять 2%.



Визначте суму отриманого кредиту, реальну відсоткову ставку і дохід банку, якщо відсотки за кредит банк бере авансом.

29. Підприємство отримало кредит в 80000 грн. терміном на 2 роки під просту відсоткову ставку 24% річних. Розгляньте план погашення кредиту і нарахованих на залишкову суму кредиту відсотків серією з восьми рівних платежів, які виплачуються в кінці кожного кварталу.

30. Фірма взяла в банку позику 100 тис. грн. терміном на 1 рік під 12% річних. Відсотки прості і виплачуються в кінці року. Знайти суму, яку фірма має повернути.

31. Банк розміщує валютні кошти фізичних осіб на депозит під 25% річних. Визначте множник нарощення і нарощену суму депозиту в 1000 дол., якщо термін депозиту 3 роки, а відсотки прості.

32. Фірмі виділили банківський кредит на термін з 3 січня по 12 березня під прості відсотки з ставкою 12% річних. Сума кредиту – 80 тис. грн. Визначити за трьома методами множник нарощення і нарощену суму.

33. За який час позика величиною 6000 грн., вкладена під 7% простих річних ( $K = 360$ ), збільшиться на таку ж суму, що й вклад 7000, внесений з 3.03 по 1.07 під 9% простих річних ( $K = 365$ ).

34. Фірма взяла в комерційному банку кредит на суму 600 тис. грн. терміном на 4 роки. Згідно з угодою за перший рік відсоткова ставка становила 24% і з урахуванням інфляції кожний подальший рік підвищувалася на 5 пунктів. Визначте множник нарощення, нарощену суму і дохід банку.

35. Ощадний банк приймає вклади “до запитання” під відсоткову ставку  $i\% = 4\%$ . Відсотки прості,  $K = 365$  днів. Через скільки днів вклад в 45000 грн. наросте до 50000 грн.?

36. Українські банки приймають у населення грошові кошти на термінові вклади. Клієнт хоче вкласти в банк грошову суму 3000 грн. на 3 місяці з таким розрахунком, щоб нарощена сума була не менше 4800 грн. Якою повинна бути річна проста відсоткова ставка?

37. На який термін виписаний вексель, якщо його номінальна вартість становить 14000 грн., а власник векселя отримав 12560 грн. за обліковою простою відсотковою ставкою 90% річних?

38. Власник векселя облікував його в банку за 3 місяці до терміну погашення і отримав 4560 грн. Облікова ставка банку – 14%. Визначте номінальну вартість векселя.

39. Визначте номінальну вартість векселя і дисконт банку, якщо його власник облікував за простою обліковою ставкою 18% за два місяці до терміну погашення і отримав 12000 грн.

40. Банк купує акції фірми за ціною 1000 грн., дисконтна ставка – 30% річних, а дата погашення – через місяць. Визначте номінал цієї акції.

41. Визначте просту облікову ставку, еквівалентну простій відсотковій ставці 6% річних при обліку векселя за два місяці до терміну погашення.

42. Визначте просту відсоткову ставку, еквівалентну простій обліковій ставці 5% річних при депозиті 4 місяці.

43. Власник векселя номінальною вартістю 10000 грн., облікував його в банку за два місяці до терміну погашення за простою обліковою ставкою 6% річних. Банк отримує комісійні за обсягом 2% від вартості векселя. Яку суму отримав власник і який дохід цієї операції за ефективною ставкою простих відсотків?

44. Власник векселя номінальною вартістю 3000 грн., облікував його в банку за три місяці до терміну погашення за простою обліковою ставкою 6% річних. Комісійні – 1% від номінальної вартості векселя. Яку суму отримає власник і скільки становить дохід цієї операції за ефективною ставкою простих відсотків?

45. Чотири векселі номінальною вартістю 2000 грн., 3000 грн., 4000 грн., 8500 грн., з терміном погашення 35, 60, 70, 90 днів потрібно об'єднати в один з терміном погашення 120 днів. Визначте вартість об'єданого векселя, якщо проста відсоткова ставка, за якою відбувається об'єднання – 6% річних.

46. Три векселі номінальною вартістю 2000 грн., 6000 грн., 8000 грн. з термінами 40, 56, 75 днів необхідно об'єднати в один з терміном погашення 95 днів. Об'єднання відбувається за ставкою простих відсотків 8% річних. Яка вартість об'єданого векселя?

47. Підприємець купив партію товару за 20000 грн., а продав за 35600 грн. Скільки відсотків прибутку отримав підприємець?

48. Товарообіг магазину в червні місяці становив 940 тис. грн., а в липні – 890 тис. грн. На скільки відсотків зменшився товарообіг у липні?

49. За продаж дачної ділянки посередник отримав 2000 грн., що становить 5% від вартості продажу. Визначте, за яку суму було продано дачну ділянку?

50. Підприємець купив першу і другу партію товару відповідно за 36 тис. грн. і 42 тис. грн., продав відповідно за 39,5 тис. грн. і 45,6 тис. грн. При продажі якої партії було отримано найбільший відсоток прибутку?

51. Знайдіть: а) 4% “на 100” з 456; б) 6% “на 100” з 785; в) 10% “на 100” з 2400; г) 15% “на 100” з 56000.

52. Знайдіть: а) 3% “в 100” з 1241; б) 5% “в 100” з 356; г) 23% “в 100” з 2340.

53. Знайдіть з 1320 грн. і 3467 грн.: а) 45% “зі 100”; б) 27% “на 100”; в) 61% “в 100”.

54. Підприємство реалізувало партію товару за 380000 грн., і отримало 25% прибутку. Визначте величину прибутку і собівартість товару.

55. Фірма реалізувала партію товару за 24560 грн. і отримала 6% збитку. Визначте величину збитку і собівартість товару.

56. Через псування було списано 12% товару. Визначте, скільки товару було списано, якщо його залишилось 567 кг?

57. Загальний оклад робітника, включаючи премію обсягом 10% від місячного окладу, становить 864 грн. Знайдіть величину премії і величину окладу.

58. Підприємець за 1 кг деякого товару хоче отримати 10 грн. 67 коп. Яку ціну йому потрібно назначити, щоб зробивши 3%-у знижку, отримати 10,67 грн. за 1 кг?

59. Об’єднуються три платежі на суму 5, 7, 4 тис. грн. і з термінами платежів 12.04, 7.06, 22.09. Термін об’єднання платежів – 11.08. Визначте суму об’єданого платежу при простій ставці 8% і часовій базі  $K = 365$  днів.

60. Для умови задачі 59 задані нові терміни платежів: 7.07, 12.09, 11.10, термін об’єднання платежів – 1.09.

61. Об’єднуються чотири платежі з сумами обсягом 8, 10, 12, 14 тис. грн. з термінами 2.04, 28.04, 13.08, 15.08. Термін об’єднання платежів 11.08 при складній ставці  $i = 11\%$  річних і  $K = 360$ . Необхідно розрахувати суму об’єданого платежу.

62. Для умови задачі 61 задані нові терміни платежів: 7.07, 12.09, 11.10, 22.12, термін об’єднання платежів – 12.10.

63. Платежі сумами 150, 100, 165 тис. грн. і термінами погашення 100, 120, 250 днів від деякої дати заміщуються одним платежем з терміном 270 днів від цієї ж дати. Визначте суму об’єданого платежу при простій ставці 9% річних і часовій базі  $K = 360$  днів.

64. Для умови задачі 63 задані нові терміни погашення: 120, 150, 190 днів від деякої дати та термін об'єднання платежів – 180 днів від цієї ж дати, часова база  $K = 365$  днів.

65. Для умови задачі 63 задані нові терміни погашення: 80, 210, 290 днів від деякої дати та термін об'єднання платежів – 200 днів від цієї ж дати, часова база  $K = 365$  днів.

66. Рух коштів на рахунку відбувався так:

5.04.02 – надходження 3000 грн. (відкрито рахунок);

12.05.02 – зняття 1000 грн.;

30.06.02 – надходження 700 грн.;

11.08.02 – надходження 400 грн.;

15.09.02 – зняття 350 грн.;

7.10.02 – надходження 200 грн.;

30.12.02 – рахунок закрито.

Відсоткова ставка – 21% річних. Визначити суму нарахованих відсотків, використавши точні відсотки з точною кількістю днів. Визначити загальну суму коштів.

### 3. СКЛАДНА ВІДСОТКОВА СТАВКА

#### 3.1. Нарахування складних річних відсотків

##### *А. Формула нарощення*

У середньо- і довготермінових кредитно-фінансових операціях, якщо відсотки не виплачуються зразу після їхнього нарахування, а приєднуються (капіталізуються) до суми боргу, застосовують складні відсотки. База нарахування відсотків змінюється, а саме: збільшується.

Нарощення за складними відсотками нагадує послідовне реінвестування засобів вкладених під прості відсотки на один період нарахування.

Знайдемо формулу нарощеної суми за складними відсотками за умови, що відсотки нараховуються і капіталізуються один раз у рік.

Нехай позначення будуть ті самі, що й в попередньому розділі:

$I$  – відсотки за весь термін позички;

$P$  – первісна (початкова) сума боргу;

$S$  – нарощена сума, тобто сума наприкінці терміну;

$i$  – річна ставка відсотків (у десятковому дробі);

$n$  – термін позички в роках.

За перший рік відсотки становитимуть  $Pi$ , а нарощена сума:

$$S = P + Pi = P(1 + i).$$

За другий рік відсотки становитимуть  $P(1 + i)i$ , а нарощена сума:

$$S = P(1 + i) + P(1 + i)i = P(1 + i)^2.$$

Відповідно можна показати, що за  $n$  років, тобто за весь термін, нарощена сума буде дорівнювати:

$$S = P(1 + i)^n. \quad (3.1)$$

Відсотки за весь термін позички становитимуть:

$$I = S - P = P[(1 + i)^n - 1]. \quad (3.2)$$

Відсотки, нараховані на відсотки:

$$I_{\%} = P[(1 + i)^n - (1 + ni)]. \quad (3.3)$$

Вираз (3.1) називають **формулою нарощення** за складними відсотками чи **формулою складних відсотків**. Множник  $(1 + i)^n$  – множник нарощення складних відсотків.

Він показує, у скільки разів нарощена сума більша від первісної. При великих термінах він різко зростає навіть при невеликій ставці. Невелика зміна ставки при великому терміні зумовлює значне збільшення множника нарощення. Існують готові таблиці для значень цього множника.

Зростання за складними відсотками нагадує геометричну прогресію, для якої перший член  $b_1 = P$ , знаменник  $q = 1 + i$ .

Графічно зростання за складними відсотками показано на рис. 3.1.

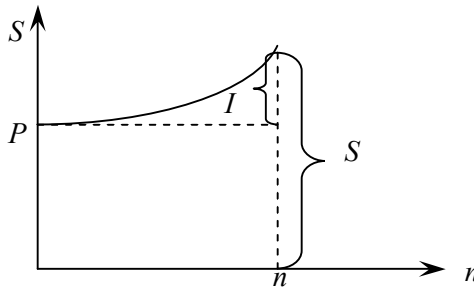


Рис. 3.1. Зростання за складними відсотками

Термін позички при нарощенні за складними відсотками найчастіше вимірюється як АСТ/АСТ.

Формулу 3.1 можна використати не тільки при  $n$ , виміряному в роках, а й коли  $i$  – ставка відсотків за період (півріччя, квартал, місяць), то  $n$  – число таких періодів.

Приклад 3.1. Позику 1000 грн. було взято на термін 5 років. Відсотки складні за ставкою 15% річних.

Необхідно визначити суму заборгованості та нараховані відсотки.

▲ Суму боргу знаходимо за формулою (3.1):

$$S = 1000(1 + 0,15)^5 = 1000 \cdot 1,15^5 = 2011,36 \text{ грн.},$$

а відсотки за формулою (3.2):

$$I = 2011,36 - 1000 = 1011,36 \text{ грн.}$$

Якщо порівняти отримані результати з результатами прикладу 2.1, знайденими за простими відсотками ( $S = 2000$ ,  $I = 1000$ ), то бачимо, що нарощена сума і відсотки при складних відсотках є більші. ▲

У формулах (3.1)–(3.3) використовується ставка відсотків  $i$  при нарахуванні відсотків з основної суми боргу і відсотків, нарахованих на відсотки. Іноді обумовлюється, що відсотки на відсотки нараховуються за іншою ставкою  $k \neq i$ . У цьому випадку нарахована сума становитиме:

$$S = P + Pi \left[ 1 + (1+k) + (1+k)^2 + \dots + (1+k)^{n-1} \right] = P \left( 1 + i \frac{(1+k)^n - 1}{k} \right). \quad (3.4)$$

### ***Б. Нарахування відсотків у суміжних календарних періодах***

Часто дати початку і закінчення позики перебувають у двох різних суміжних календарних періодах. При оподаткуванні, в бухгалтерському обліку, при визначенні річних сум доходу і т. д. виникає необхідність у розподілі суми відсотків за періодами. Тоді загальна сума нарахованих складних відсотків становитиме суму відсотків, отриманих у кожному році:

$$I = I_1 + I_2.$$

Нехай  $n_1$ ,  $n_2$  – частки терміну позички, що приходяться на кожний календарний рік. Тоді відсотки будуть такі:

$$I_1 = P \left( (1+i)^{n_1} - 1 \right); \quad (3.5)$$

$$I_2 = P(1+i)^{n_1} \left[ (1+i)^{n_2} - 1 \right] = P \left[ (1+i)^n - (1+i)^{n_1} \right]. \quad (3.6)$$

Приклад 3.2. Позика була видана з 15 червня 2001 р. по 15 червня 2003 р. Обсяг позики – 1 млн. грн. Необхідно розподілити нараховані відсотки ( $i = 0,15$ ,  $ACT/ACT$ ) за календарними роками.

▲ Відсотки за період з 15 червня 2001 р. до кінця року (200 днів) знаходимо за формулою (3.5):

$$1000000 \left( (1 + 0,15)^{\frac{200}{365}} - 1 \right) = 79590,6 \text{ грн.}$$

Відсотки за 2002 р.:

$$1000000 \cdot 1,15^{\frac{200}{365}} \cdot 0,15 = 161938,6 \text{ грн.}$$

Відсотки за період з 1 січня 2003 до 15 червня 2003 р. (165 днів) вихаровуємо за формулою (3.6):

$$1000000 \cdot 1,15^{\frac{200}{365}} \left[ 1,15^{\frac{165}{365}} - 1 \right] = 80970,8 \text{ грн.}$$

Усіх нарахованих відсотків  $79590,6 + 161938,6 + 80970,8 = 322500$  грн.

Для перевірки знайдемо відсотки за два роки:

$$1000000(1,15^2 - 1) = 322500 \text{ грн. } \blacktriangle$$

### ***В. Змінні ставки***

Формула (3.1) припускає, що протягом періоду  $n$  ставка відсотка постійна. Проте часто в кредитних угодах відсоткові ставки змінюються в часі. Якщо в контрактах фіксуються змінні обсяги ставок, то загальний множник нарощення визначається як добуток часткових, а нарахована сума визначається за формулою:

$$S = P \left[ (1 + i_1)^{n_1} \cdot (1 + i_2)^{n_2} \times \dots \times (1 + i_m)^{n_m} \right], \quad (3.7)$$

де  $i_j$  – ставка складних відсотків у  $j$ -му періоді,  $n_j$  – тривалість  $j$ -го періоду з постійною ставкою.

Приклад 3.3. На 2000 грн., вкладених у банк під складні відсотки на 1,5 року згідно з контрактом передбачається такий порядок нарахування відсотків: перший квартал – 10% річних, другий – 12% річних, третій – 13%, за два наступних – 15% і за останній – 20%. Необхідно визначити нараховану суму вкладу на кінець терміну, обчислити множник нарощення.

▲ Нарощену суму вкладу знаходимо за формулою (3.7):

$$S = 2000 \left( (1 + 0,1)^{1/4} \cdot (1 + 0,12)^{1/4} \cdot (1 + 0,13)^{1/4} \cdot (1 + 0,15)^{1/2} \cdot (1 + 0,2)^{1/4} \right) = 2438,353 \text{ грн.}$$

Обчислюємо множник нарощення:

$$q = \left( (1 + 0,1)^{1/4} \cdot (1 + 0,12)^{1/4} \cdot (1 + 0,13)^{1/4} \cdot (1 + 0,15)^{1/2} \cdot (1 + 0,2)^{1/4} \right) = 1,219176. \blacktriangle$$

Приклад 3.4. Термін позички 3 роки. Згідно з контрактом базова ставка відсотків – 12% річних плюс маржа 0,25% у першому році і 0,5% – у двох наступних. Необхідно обчислити множник нарощення.

▲ Множник нарощення:

$$q = \left( (1 + 0,1225)^1 \cdot (1 + 0,125)^2 \right) = 1,1225 \cdot 1,265625 \approx 1,42066.$$



Отже, за 3 роки позичка зросте у 1,42 рази. ▲

### ***Г. Нарахування відсотків при дробовому числі років***

У фінансово-кредитних операціях терміни нарахування відсотків можуть виражатись цілим числом років і дробовим.

У другому випадку використовуються два способи нарахування відсотків:

- 1) загальний (за формулою (3.1));
- 2) змішаний.

При змішаному нарахуванні відсотків на цілу частину терміну нараховуються складні відсотки, на дробову – прості. Інакше кажучи, отримується формула для нарощеної суми:

$$S = P(1 + i)^a \cdot (1 + bi), \quad (3.8)$$

де термін позички  $n = a + b$ ,  $a$  – ціла частина терміну,  $b$  – дробова.

Приклад 3.5. Кредит обсягом 1 тис. грн. виданий на 2 роки і 180 днів під 15% складних річних. Необхідно обчислити суму боргу на кінець терміну за обома методами.

- ▲ 1) Знаходимо за формулою (3.1):

$$S = 1000(1 + 0,15)^2 \frac{180}{365} = 1000(1 + 0,15)^{2,493151} = 1416,866 \text{ грн.}$$

- 2) Розраховуємо за формулою (3.8):

$$S = 1000(1 + 0,15)^2 \cdot \left(1 + \frac{180}{365} \cdot 0,15\right) = 1000 \cdot 1,15^2 \cdot (1 + 0,493151 \cdot 0,15) = = 1420,329 \text{ грн.}$$

Сума боргу, обчислена змішаним методом, більша, ніж обчислена загальним. ▲

## **3.2. Порівняння зростання за складними і простими відсотками**

Щоби порівняти зростання за простими чи складними відсотками потрібно порівняти множники нарощення (присвоїмо індекс  $s$  для ставки простих відсотків).

$$q_s = (1 + ni_s) \quad q = (1 + i)^n$$

Якщо ставка  $i$  однакова, то множник залежить від терміну  $n$ . Розглянемо різні значення  $n$ .

Якщо термін менше року ( $0 < n < 1$ ), то

$1 + ni_s > (1 + i)^n$  – нарощена сума за простими відсотками буде більша, ніж за складними.

Якщо термін рік ( $n = 1$ ), то

$1 + ni_s = (1 + i)^n$  – нарощені суми за простими і складними відсотками рівні.

Якщо термін більше року ( $n > 1$ ), то

$1 + ni_s < (1 + i)^n$  – нарощена сума за простими відсотками буде менша, ніж за складними.

Графічно це зображено на рис. 3.1.

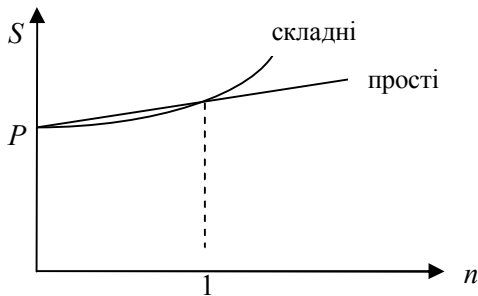


Рис. 3.1. Порівняння зростання за відсотками

Часто виникає потреба в знаходженні терміну, за який початкова сума боргу збільшиться вдвічі. Це буде тоді, коли множник нарощення буде дорівнювати 2, тобто  $S = 2P$ :

- для простої ставки:

$$\begin{aligned} 1 + ni &= 2, \\ n &= \frac{1}{i}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

- для складної ставки:

$$\begin{aligned} (1 + i)^n &= 2, \\ n &= \log_{1+i} 2 = \frac{\ln 2}{\ln(1 + i)}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Приклад 3.6. Знайти термін подвоєння суми боргу для ставки відсотків  $i = 18$  річних.

- ▲ 1) Для простих відсотків використовуємо формулу (3.9):

$$n = \frac{1}{0,18} = 5,5556 \text{ років.}$$

2) Для складних – формулу (3.10):

$$n = \frac{\ln 2}{\ln(1 + 0,18)} = \frac{0,693147}{0,165514} = 4,1878 \text{ років.}$$

Отже, термін подвоєння суми боргу для складних відсотків менший, ніж для простих. ▲

### 3.3. Номінальна і ефективна ставки

#### *А. Номінальна ставка*

У сучасних умовах відсотки капіталізуються, як правило, не один, а декілька раз в році – по півріччях, поквартально, щомісячно. Деякі зарубіжні комерційні банки практикують навіть щоденне нарахування відсотків.

Формула (3.1) використовується і для нарахування відсотків декілька раз у році, де  $n$  – число періодів нарахування,  $i$  – ставка за відповідний період.

На практиці, як правило, фіксується не ставка за період нарахування, а річна ставка, а період нарахування вказується. Наприклад, „15% річних з поквартальним нарахуванням відсотків”.

Нехай

$j$  – річна ставка;

$m$  – число періодів нарахувань у році.

Щоразу відсотки нараховуються за ставкою  $\frac{j}{m}$ ,  $j$  називають *номінальною* ставкою. Ставка  $j$  потрібна для того, щоб знати, яке число потрібно розділити на кількість періодів у році, щоб одержати ставку за період.

Формула нарощення буде мати такий вигляд:

$$S = P \left( 1 + \frac{j}{m} \right)^{mn} = P \left( 1 + \frac{j}{m} \right)^N, \quad (3.11)$$

де  $N$  – загальна кількість періодів нарахувань,  $N = m \cdot n$ .

Приклад 3.7. Яким буде борг, що дорівнює 1000 грн., через 5 років при складній ставці 15% річних, якщо відсотки нараховуються поквартально.

▲ Нарощену суму боргу знаходимо за формулою (3.11):

$$S = 1000 \left( 1 + \frac{0,15}{4} \right)^{4 \cdot 5} = 2088,152 \text{ грн.}$$

Пригадаємо, що нарощена сума боргу при річному нарахуванні відсотків дорівнювала 2011,36 грн. ▲

Чим частіше нараховуються відсотки, тим швидше відбувається процес нарощення.

### ***Б. Ефективна (дійсна) ставка***

Ця ставка вимірює той реальний відносний дохід, який отримують загалом за рік. Або ефективна ставка – це річна ставка складних відсотків, яка дає той самий результат, що й  $m$ -разове нарахування відсотків за ставкою  $j/m$ . Позначається ефективна ставка буквою  $i$ .

За означенням множники  $\left( 1 + \frac{j}{m} \right)^{mn}$  і  $(1+i)^n$  рівні, тобто

$$(1+i)^n = \left( 1 + \frac{j}{m} \right)^{mn} \text{ або}$$

$$1+i = \left( 1 + \frac{j}{m} \right)^m .$$

Звідси можна знайти номінальну ставку через ефективну  $i$ , навпаки, ефективну через номінальну:

$$j = m(\sqrt[m]{1+i} - 1) \quad (3.12)$$

$$i = \left( 1 + \frac{j}{m} \right)^m - 1 . \quad (3.13)$$

Обидві ставки еквівалентні у фінансовому відношенні. Звідси випливає, що різні за величиною номінальні ставки будуть еквівалентними, якщо відповідні їм ефективні ставки мають одну величину.

Приклад 3.8. Яка величина ефективної ставки, якщо номінальна ставка 25% при щомісячному нарахуванні відсотків?

▲ Використаємо формулу (3.13):

$$i = \left(1 + \frac{0,25}{12}\right)^{12} - 1 = 0,280732.$$

Отже, для сторін не має значення, яку ставку використовувати: 25% при щомісячному нарахуванні відсотків чи ефективну (річну) 28,0732%. ▲

Введемо надалі позначення  $j^{(m)}$  – номінальна ставка  $j$  з  $m$  нарахуваннями на рік.

Іноді виникає необхідність у визначенні еквівалентної ставки, якщо збільшується чи зменшується кількість нарахувань відсотків. Еквівалентними ставки будуть, якщо є рівність:

$$\left(1 + \frac{j_1^{(m_1)}}{m_1}\right)^{m_1} = \left(1 + \frac{j_2^{(m_2)}}{m_2}\right)^{m_2},$$

тобто  $j_2^{(m_2)} = m_2 \left[ \left(1 + \frac{j_1^{(m_1)}}{m_1}\right)^{\frac{m_1}{m_2}} - 1 \right].$  (3.14)

Приклад 3.9. Визначити номінальну ставку  $j^{(4)}$ , яка еквівалентно замінить ставку  $j^{(12)} = 25\%$ .

▲ Використаємо формулу (3.14):

$$j^{(4)} = 4 \left[ \left(1 + \frac{0,25}{12}\right)^{\frac{12}{4}} - 1 \right] = 0,25524.$$

Отже, за рахунок зменшення кількості нарахувань, потрібно збільшити ставку до 25,524%. ▲

### 3.4. Дисконтування за складною ставкою

Для простих відсотків ми розглянули математичне дисконтування і банківський облік векселів. Аналогічно розглянемо їх і для складних відсотків.

**А. Математичне дисконтування**

Полягає у визначенні сучасної вартості  $P$ , якщо відома майбутня вартість  $S$  при заданій відсотковій ставці  $i$ .

Знайдемо  $P$  з формули (3.1):

$$P = \frac{S}{(1+i)^n} = Sv^n, \quad (3.15)$$

де  $v^n = \frac{1}{(1+i)^n} = (1+i)^{-n}$ ,  $v$  – дисконтний або обліковий множник.

Значення  $v$  протабульоване.

Якщо нарахування відсотків проводиться  $m$  раз в рік, то

$$P = \frac{S}{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn}} = Sv^{mn}. \quad (3.16)$$

Різниця  $S - P$  називається *дисконтом* і позначається  $D$ . Дисконт можна визначити за формулою:

$$D = S - P = S(1 - v^n). \quad (3.17)$$

Приклад 3.10. Сума 5000 грн. виплатиться через 7 років. Необхідно визначити сучасну вартість суми за умови, що застосовується ставка складних відсотків 14% річних.

▲ Дисконтний множник  $v^7 = 1,14^{-7} = 0,399637$ , тобто початкова сума зменшиться майже на 60%. Сучасна вартість становить:

$$P = 5000 \cdot 1,14^{-7} = 1998,187. \quad \blacktriangle$$

Зазначимо, що чим вища ставка відсотка, тим сильніше дисконтування, при незмінності інших умов.

Приклад 3.11. Знайти величину дисконтного множника при збільшенні ставки складних відсотків попереднього прикладу вдвічі.

▲  $i = 0,28$ . Дисконтний множник  $v^7 = 1,28^{-7} = 0,177636$ . Якщо дисконтний множник зменшився, то початкова сума зменшиться майже на 82%. ▲

**Б. Дисконтування за складною обліковою ставкою**

Процес дисконтування при застосуванні складної облікової ставки відбувається сповільнено, так як кожен раз облікова ставка

застосовується не до початкової суми, а до суми, дисконтованої на попередньому кроці в часі. Розраховується сучасна вартість за формулою:

$$P = S(1 - d)^n, \quad (3.18)$$

де  $d$  – складна річна облікова ставка.

Приклад 3.12. Боргове зобов'язання на суму 7000 грн., термін оплати якого – через 4 роки, продано з дисконтом за складною обліковою ставкою 15% річних. Знайти величину отриманої суми і дисконту. Порівняти ці величини для складної і простої облікової ставки.

▲ Для складної облікової ставки:

$$P = 7000(1 - 0,15)^4 = 3654,044 \text{ грн.}$$

$$D = 7000 - 3654,044 = 3345,956 \text{ грн.};$$

для простої облікової ставки:

$$P = 7000(1 - 4 \cdot 0,15) = 2800 \text{ грн.}$$

$$D = 7000 - 2800 = 4200 \text{ грн.} \quad \blacktriangle$$

Отже, дисконтування для боржника вигідне за складною обліковою ставкою, для банку – за простою.

### ***В. Номінальна і ефективна облікові ставки***

Дисконтування може проводитися не один, а  $m$  раз у рік, тобто кожен раз облік проводиться за ставкою  $\frac{f}{m}$ :

$$P = S \left( 1 - \frac{f}{m} \right)^{mn}, \quad (3.19)$$

де  $f$  – номінальна річна облікова ставка.

Ефективна облікова ставка  $d$  характеризує ступінь дисконтування за рік, тобто множники дисконтування рівні:

$$(1 - d)^n = \left( 1 - \frac{f}{m} \right)^{nm}. \quad (3.20)$$

Звідси знайдемо номінальну облікову ставку через ефективну і, навпаки, ефективну через номінальну:

$$f = m \left( 1 - \sqrt[n]{1 - d} \right); \quad (3.21)$$

$$d = 1 - \left(1 - \frac{f}{m}\right)^m. \quad (3.22)$$

### ***Г. Нарощення за складною обліковою ставкою***

Якщо потрібно знайти нарощену суму за допомогою складної облікової ставки, то її розраховують за формулою:

$$S = \frac{P}{(1-d)^n} \quad (3.23)$$

чи при нарощенні  $m$  раз у році:

$$S = \frac{P}{\left(1 - \frac{f}{m}\right)^{mn}}. \quad (3.24)$$

Множник нарощення дорівнює  $(1-d)^{-n}$ .

### **3.5. Порівняння результатів нарощення і дисконтування за різними видами ставок**

Ми проаналізували нарощення і дисконтування за різними видами ставок  $i$ ,  $j$ ,  $d$ ,  $f$ ,  $i_s$ ,  $d_s$ .

(*Зауваження.*  $i_s$ ,  $d_s$  – проста відсоткова і облікова ставки відповідно. Індекс введено для того, щоб відрізнити складні ставки від простих).

Застосування цих ставок приводить до різних результатів. Для порівняння результатів нарощення і дисконтування достатньо порівняти множники нарощення і дисконтування. Для ставок  $j$ ,  $f$  результат залежатиме також і від значення  $m$ , тому ці ставки не будемо аналізувати.

Припускаємо, що величини ставок однакові. Множники нарощення залежать від терміну нарощення.

Для  $0 < n < 1$ :

$$(1+i)^n < 1 + ni_s < \frac{1}{1 - nd_s} < \frac{1}{(1-d)^n}.$$

Найбільшу нарощену суму дає складна облікова ставка, найменшу – складна відсоткова.



Для  $n = 1$  :

$$1 + i = 1 + i_s < \frac{1}{1 - d_s} = \frac{1}{1 - d}.$$

Облікова ставка дає більше зростання, ніж відсоткова.

Для  $n > 1$  :

$$1 + ni_s < (1 + i)^n < \frac{1}{(1 - d)^n} < \frac{1}{1 - nd_s}.$$

Найбільшу нарощену суму дає проста облікова ставка, найменшу – проста відсоткова.

Аналогічно множники дисконтування залежать від терміну дисконтування.

Для  $0 < n < 1$  :

$$(1 - d)^n < 1 - nd_s < \frac{1}{1 + ni_s} < \frac{1}{(1 + i)^n}.$$

Найбільшу початкову суму дає складна відсоткова ставка, найменшу – складна облікова.

Для  $n = 1$  :

$$1 - d = 1 - d_s < \frac{1}{1 + i_s} = \frac{1}{1 + i}.$$

Відсоткова ставка дає більше зростання, ніж облікова.

Для  $n > 1$  :

$$1 - nd_s < (1 - d)^n < \frac{1}{(1 + i)^n} < \frac{1}{1 + ni_s}.$$

Найбільшу початкову суму дає проста відсоткова ставка, найменшу – проста облікова.

### 3.6. Визначення терміну позички і величини відсоткової ставки

При розробці умов контрактів, при порівнянні їхніх результатів виникає необхідність у визначенні терміну позички чи величини відсоткової ставки при заданих усіх інших умовах. Зрозуміло, що ці величини можна отримати, розв'язавши рівняння, які пов'язують  $S$  та  $P$  ((3.1), (3.11), (3.18), (3.19)).

#### *А. Термін позички*

- при нарощенні за складною річною ставкою  $i$  маємо:

$$n = \frac{\ln(S/P)}{\ln(1+i)} ; \quad (3.25)$$

- при нарощенні за складною номінальною ставкою  $j$  отримаємо:

$$n = \frac{\ln(S/P)}{m \ln\left(1 + \frac{j}{m}\right)} ; \quad (3.26)$$

- при дисконтуванні за складною річною обліковою ставкою  $d$  маємо:

$$n = \frac{\ln(P/S)}{\ln(1-d)} ; \quad (3.27)$$

- при дисконтуванні за складною номінальною обліковою ставкою  $f$  отримаємо:

$$n = \frac{\ln(P/S)}{m \ln\left(1 - \frac{f}{m}\right)} . \quad (3.28)$$

Приклад 3.13. Потрібно розрахувати, за який термін сума 3000 грн. буде дорівнювати 5000 грн., якщо відсотки нараховуються за складною ставкою 15%:

а) один раз на рік;

б) поквартально;

за складною обліковою ставкою 13%:

в) один раз у рік;

г) щомісячно.

▲ Використаємо формули (3.25) та (3.26):

$$\text{а) } n = \frac{\ln(5000/3000)}{\ln(1+0,15)} = \frac{0,5108}{0,1398} = 3,654 \text{ р.};$$

$$\text{б) } n = \frac{\ln(5000/3000)}{4 \ln\left(1 + \frac{0,15}{4}\right)} = \frac{0,5108}{0,1473} = 3,468 \text{ р.};$$

Використаємо формули (3.27) та (3.28):

$$\text{в) } n = \frac{\ln(3000/5000)}{\ln(1-0,13)} = \frac{-0,511}{-0,139} = 3,668 \text{ р.};$$

$$г) n = \frac{\ln(3000/5000)}{12 \ln(1 - \frac{0,13}{12})} = \frac{-0,511}{12 \cdot (-0,011)} = 3,908 \text{ р. } \blacktriangle$$

### **Б. Величина ставки відсотків**

Аналогічно з формул ((3.1), (3.11), (3.18), (3.19)) впливають формули для визначення ставок:

- складна річна ставка  $i$  :

$$i = \sqrt[n]{S/P} - 1; \quad (3.29)$$

- складна номінальна ставка  $j$  :

$$j = m \left( \sqrt[mn]{S/P} - 1 \right); \quad (3.30)$$

- складна річна облікова ставка  $d$  :

$$d = 1 - \sqrt[n]{P/S}; \quad (3.31)$$

- складна номінальна облікова ставка  $f$  :

$$f = m \left( 1 - \sqrt[mn]{P/S} \right). \quad (3.32)$$

Приклад 3.14. Якими повинні бути складні ставки, щоб за 5 років сума 3500 грн. зросла до 6000 грн.:

- а) відсотки нараховуються один раз на рік;
- б) за півріччями.

▲ Використаємо формули (3.29) та (3.30):

$$а) i = \sqrt[5]{6000/3500} - 1 = 0,113824;$$

$$б) j = 2 \left( \sqrt[5 \cdot 2]{6000/3500} - 1 \right) = 0,110757. \quad \blacktriangle$$

### **3.7. Неперервне нарощення і дисконтування**

Неперервне нарощення (за нескінченно малі проміжки часу) в практичних фінансово-кредитних операціях застосовується рідко. Найчастіше його використовують в аналізі складних фінансових проблем, фінансовому проектуванні, наприклад, коли відсоткові ставки змінюються відповідно до певного закону.

При неперервному нарощенні застосовують відсоткову ставку – *силу росту*, яка характеризує відносний приріст нарощеної суми за нескінченно малий проміжок часу. Вона буває постійною і змінною в часі.

### А. Постійна сила росту

При дискретному нарахованні відсотків  $m$  раз у рік, нарощена сума становить:

$$S = P \left( 1 + \frac{j}{m} \right)^{mn}.$$

При  $m \rightarrow \infty$ :

$$S = P \lim_{m \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{j}{m} \right)^{mn} = P e^{jn}.$$

Позначимо силу росту через  $\xi$ , тоді

$$S = P e^{\xi n}. \quad (3.33)$$

Отже, сила росту – це номінальна ставка складних відсотків при  $m \rightarrow \infty$ .

Визначимо залежність між ставками  $i$  та  $\xi$  з рівності множників нарощення:

$$(1 + i)^n = e^{\xi n}.$$

Звідси:

$$i = e^{\xi} - 1, \quad (3.34)$$

$$\xi = \ln(1 + i). \quad (3.35)$$

Приклад 3.15. Сума, на яку нараховуються неперервні відсотки, дорівнює 1000 грн., сила росту – 10%, термін – 3 роки. Знайти нарощену суму та рівнозначну дискретну річну складну ставку відсотків.

▲ Нарощена сума становить:

$$S = 1000 e^{0,13} = 1000 \cdot 1,34986 = 1349,9 \text{ грн.}$$

Неперервне нарощення при силі росту 10% рівнозначне нарощуванню за цей же термін дискретних складних відсотків за річною ставкою:

$$i = e^{0,1} - 1 = 0,10517.$$

Перевіримо за формулою (3.1):

$$S = 1000(1 + 0,10517)^3 = 1349,9 \text{ грн.} \quad \blacktriangle$$

Для неперервного дисконтування з формули (3.33) отримуємо формулу:

$$P = S e^{-\xi n}, \quad (3.36)$$

де  $e^{-\xi n}$  – дисконтний множник.

**Приклад 3.16.** Боргове зобов'язання на суму 7000 грн., термін оплати якого – через 4 роки, продано з дисконтом за силою росту 15%. Знайти величину отриманої суми і дисконту. Порівняти ці величини для дискретної складної ставки такої самої величини з прикладу 3.12.

▲ З формули (3.36) отримаємо:

$$P = 7000e^{-0,15 \cdot 4} = 3841,681 \text{ грн.}$$

$$D = 7000 - 3841,681 = 3158,319 \text{ грн.}$$

Пригадаємо, що для складної облікової ставки  $P = 3654,044$  грн.,  $D = 3345,956$  грн.

Отже, дисконтування для боржника вигідне за силою росту, для банку – за складною обліковою ставкою. ▲

### **Б. Змінна сила росту**

Якщо сила росту змінюється в часі за законом  $\xi_t = f(t)$ , то

$$S = Pe^{\int_0^n f(t) dt}, \quad P = Se^{-\int_0^n f(t) dt}.$$

Функція  $\xi_t = f(t)$  може бути різною. Тому задача знаходження нарощеної і початкової суми зводиться до знаходження відповідних інтегралів.

### **Г. Визначення терміну позички і обсягу відсоткової ставки при постійній силі росту**

З формули (3.33) знаходимо, що термін позички

$$n = \frac{\ln S/P}{\xi}, \quad (3.37)$$

а сила росту

$$\xi = \frac{\ln S/P}{n}. \quad (3.38)$$

### 3.8. Фінансові функції в EXCEL

Фінансові функції в EXCEL охоплюють такі розрахунки [10]:

- а) обчислення наращеної суми (майбутньої вартості);
- б) розрахунок початкової, сучасної, поточної вартості;
- в) визначення терміну платежу і відсоткової ставки;
- г) розрахунок періодичних платежів.

**A. Визначення наращеної суми** (майбутньої вартості) відбувається за допомогою функції:

**БЗ** (*норма; число періодів нарахувань; виплата; початкова сума; тип*),

де *норма* – відсоткова ставка;

*виплата* – величина платежу ренти (розглянемо у розділі “Фінансові ренти”, а при обчисленні наращеної суми за формулами (3.1, 3.11) нічого не вводимо);

*початкова сума* – це величина  $P$ , вводиться завжди від’ємною;

*тип* – характеризує фінансові ренти:

0 – виплата в кінці періоду;

1 – виплата на початку періоду;

за замовчуванням – 0.

Англійський варіант функції **БЗ** – **FV**.

Приклад 3.17. Яка сума буде на рахунку, якщо 5 тис. грн. покласти на 10 років під 17% відсотків річних. Відсотки нараховуються а) 1 раз на рік; б) щоквартально.

▲ Обчислюємо за формулою:

$$а) S = 5 \cdot (1 + 0,17)^{10},$$

в EXCEL      БЗ (0,17; 10; ; -5);

$$б) S = 5 \cdot \left(1 + \frac{0,17}{4}\right)^{10 \cdot 4},$$

в EXCEL      БЗ (0,17/4; 10×4; ; -5). ▲

Якщо ставка  $i$  не постійна протягом періоду нарахувань відсотків, а змінюється, то використовуємо функцію:

**БЗРАСПИС** ( $P, \{ставка\ 1; ставка\ 2; \dots; ставка\ N\}$ ).

(Англійський варіант цієї функції **FVSchedule**).

Приклад 3.18. За облигацією номіналом 6 тис. грн., випущеною на 5 років, передбачено такий порядок нарахування відсотків: 1-й і 2-й рік – 10%, 3-й – 15%, 4-й і 5-й – 20%. Визначити нарощену суму.

▲ Обчислюємо за формулою:

$$S = 6 \cdot (1 + 0,1)^2 \cdot (1 + 0,15) \cdot (1 + 0,2)^2,$$

в EXCEL БЗРАСПИС (6, {0,1; 0,1; 0,15; 0,2; 0,2}),  
або якщо занести відсотки в деякий масив, наприклад, A1:A5, то функція матиме вигляд БЗРАСПИС (6, A1:A5). ▲

**Б. Визначення початкової суми** (сучасної вартості) проводиться за допомогою функції:

**ПЗ** (норма; число періодів нарахувань; виплата; нарощена сума; тип),

де *нарощена сума* – це величина  $S$ , вводиться завжди додатною, решта параметрів – такі самі, як у попередніх функціях.

Англійський варіант функції **ПЗ** – **PV**.

Приклад 3.19. Фірмі потрібні 6 тис. грн. через 5 років. Скільки треба вкласти сьогодні під 10% відсотків річних? Відсотки нараховуються а) 1 раз на рік; б) щомісячно.

▲ Обчислюємо за формулою:

$$а) P = \frac{6}{(1 + 0,1)^5} = 3,73 \text{ тис. грн.},$$

в EXCEL ПЗ (0,1; 5; ; 6)=3,73 тис. грн.;

$$б) P = \frac{6}{\left(1 + \frac{0,1}{12}\right)^{5 \cdot 12}} = 3,65 \text{ тис. грн.},$$

в EXCEL ПЗ (0,1/12; 12×5; ; 6). ▲

**В. Визначення терміну платежу** проводиться з допомогою функції:

**КПЕР** (норма; виплата; початкова сума; нарощена сума; тип),

де параметри такі самі, як у попередніх функціях.

Англійський варіант функції **КПЕР** – **NPER**.

Приклад 3.20. Перевіримо результати прикладу 3.13 для пунктів а) та б).

- ▲ Обчислюємо за формулою в EXCEL:  
 а) КПЕР(0,15; ; -3000; 5000) = 3,654 р.;  
 б) КПЕР(0,15/4; ; -3000; 5000) = 3,468 р. ▲

**Г. Визначення відсоткової ставки  $i$**  проводиться за допомогою функції:

**НОРМА** (кількість періодів; виплата; початкова сума; нарощена сума; тип; припущення),

де припущення вводиться у випадку, коли немає розв'язку. Тоді задається інший варіант  $i$ , за замовчуванням – 10%. Решта параметрів такі самі, як у попередніх функціях.

Англійський варіант функції **НОРМА** – **RATE**.

Приклад 3.21. Перевіримо результати прикладу 3.14 для пункту а).

- ▲ Обчислюємо за формулою в EXCEL:  
 а) НОРМА(5; ; -3500; 6000) = 0,113824. ▲

Також існують функції, які за відомою номінальною ставкою обчислюють ефективну (річну)  $i$  навпаки.

Це функції:

**ЕФФЕКТ** (номінальна ставка, кількість періодів),

**НОМИНАЛ** (ефективна ставка, кількість періодів).

Англійський варіант функцій **EFFEKT**, **NOMINAL**. Обчис-

лення відповідають формулам  $i = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^m - 1$  та  $j = m(\sqrt[m]{1+i} - 1)$ .

### 3.9. Фінансова еквівалентність платежів для складної ставки

У пункті 2.7 розглянуто випадки, коли необхідно замінити одне фінансове зобов'язання іншим, а саме: зміни умов контрактів при об'єднанні декількох платежів в один та заміні однієї кількості платежів іншою. Проаналізовано для простої відсоткової ставки. Аналогічно зробимо це для складної відсоткової ставки.



При розв'язуванні такого типу задач для того, щоб діяв принцип фінансової еквівалентності, розробляють *рівняння еквівалентності*. У ньому сума платежів за старим контрактом, розрахована в певний проміжок часу, дорівнює сумі платежів за новим контрактом на цей же період.

***А. Об'єднання декількох платежів в один***

Нехай необхідно об'єднати платежі із сумами  $S_1, S_2, \dots, S_m$  і термінами  $n_1, n_2, \dots, n_m$  в один об'єднаний платіж із сумою  $S_0$  і терміном  $n_0$ .

- Розглянемо задачу при відомому терміні  $n_0$ , а невідомій  $S_0$ . Згідно з принципом фінансової еквівалентності сума об'єданого платежу буде дорівнювати:

$$S_0 = \sum_{j=1}^m k_{nj} S_j, \quad (3.39)$$

де  $k_{nj}$  – коефіцієнт приведення.

Він може бути множником нарощення, множником дисконтування або дорівнювати 1 залежно від термінів платежів.

Розглянемо такі випадки:

- 1)  $n_0 > n_j$ , де  $n_0$  – термін об'єданого платежу,  $n_j$  – термін  $j$ -го платежу.

Коефіцієнт приведення – це множник нарощення, який розраховується за формулою:

$$k_{nj} = (1 + i)^{t_j},$$

де  $t_j = n_0 - n_j = \frac{\partial_0 - \partial_j}{K}$ ,  $\partial_0$  – дата об'єднання платежу,  $\partial_j$  – дата  $j$ -го платежу;

- 2)  $n_0 < n_j$ .

Коефіцієнт приведення – це дисконтний множник, який розраховується за формулою:

$$k_{nj} = \frac{1}{(1 + i)^{t_j}},$$

де  $t_j = n_j - n_0 = \frac{\partial_j - \partial_0}{K}$ ;

- 3)  $n_0 = n_j$ .

Коефіцієнт приведення дорівнює одиниці.

Приклад 3.22. Об'єднуються чотири платежі з сумами обсягом 10, 15, 20, 13 тис. грн. з термінами 2.03, 23.04, 3.06, 5.08. Термін об'єднання платежів – 14.07 за складною ставкою  $i = 10\%$  річних і  $K = 365$ . Необхідно розрахувати суму об'єднаного платежу.

▲ Для перших трьох платежів  $n_0 > n_j$ , ( $j = \overline{1,3}$ ), для четвертого  $n_0 < n_4$ . Розрахуємо число днів від терміну початкового платежу до об'єднаного:

$$\partial_0 - \partial_1 = 134 \text{ дні}; \quad \partial_0 - \partial_2 = 82 \text{ дні};$$

$$\partial_0 - \partial_3 = 41 \text{ день}; \quad \partial_4 - \partial_0 = 22 \text{ дні}.$$

Згідно з формулою (2.22) сума об'єднаного платежу становить:

$$\begin{aligned} S_0 &= (1 + 0,1)^{\frac{134}{365}} \cdot 10 + (1 + 0,1)^{\frac{82}{365}} \cdot 15 + (1 + 0,1)^{\frac{41}{365}} \cdot 20 + \\ &+ \frac{1}{(1 + 0,1)^{\frac{22}{365}}} \cdot 13 = 10,3561 + 15,3246 + 20,2153 + 12,9255 = \\ &= 58,8215 \text{ тис грн. } \blacktriangle \end{aligned}$$

- Розглянемо задачу при відомій сумі об'єднаного платежу  $S_0$ , а невідомому терміні  $n_0$ . Рівняння еквівалентності виразимо у вигляді рівності сучасних вартостей відповідних платежів:

$$S_0 \frac{1}{(1+i)^{n_0}} = \sum_{j=1}^m S_j \frac{1}{(1+i)^{n_j}}, \quad (3.40)$$

$$(1+i)^{n_0} = \frac{S_0}{\sum_{j=1}^m S_j \frac{1}{(1+i)^{n_j}}},$$

отже,

$$n_0 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{X}\right)}{\ln(1+i)}, \quad (3.41)$$

$$\text{де } X = \sum_{j=1}^m S_j \frac{1}{(1+i)^{n_j}}.$$

Рівняння (3.41) має розв'язок у тому випадку, коли платіж  $S_0$  більший від суми сучасних вартостей платежів, що замінюються, тобто  $S_0 > X$ .

**Приклад 3.23.** Чотири платежі із сумами 10, 15, 20, 13 тис. грн., які мали бути виплачені через 70, 100, 110, 135 днів відповідно, замінюються одним платежем величиною 65 тис. грн. Необхідно розрахувати термін об'єднаного платежу за складною ставкою  $i = 10\%$  річних і  $K = 365$ .

▲ Розрахуємо суму сучасних вартостей платежів:

$$X = \frac{10}{(1+0,1)^{\frac{70}{365}}} + \frac{15}{(1+0,1)^{\frac{100}{365}}} + \frac{20}{(1+0,1)^{\frac{110}{365}}} + \frac{13}{(1+0,1)^{\frac{135}{365}}} =$$

$$= 9,819 + 14,613 + 19,434 + 12,55 = 56,416 \text{ тис. грн.}$$

Термін об'єднаного платежу розрахуємо за формулою (3.41):

$$n_0 = \frac{\ln\left(\frac{65}{56,416}\right)}{\ln(1+0,1)} = \frac{0,141634}{0,09531} = 1,486 \text{ року, або } 542 \text{ дні. } \blacktriangle$$

### **Б. Заміна однієї кількості платежів на іншу**

Якщо платежі замінюються не на один платіж, а на декілька, то необхідно записати загальне рівняння еквівалентності. У ньому сума платежів за старими умовами, які приведені за заданою відсотковою ставкою і датою, прирівнюється до суми платежів за новими умовами, які приведені за тією самою відсотковою ставкою і датою.

Тобто рівняння має такий вигляд:

$$\sum_{i=1}^{N_{\text{ст}}} k_{\text{пi(ст)}} S_{i(\text{ст})} = \sum_{j=1}^{N_{\text{н}}} k_{\text{пj(н)}} S_{j(\text{н})}, \quad (3.42)$$

де  $S_{i(\text{ст})}$  ( $i = \overline{1, N_{\text{ст}}}$ ) – суми платежів за старими умовами;

$k_{\text{пi(ст)}}$  ( $i = \overline{1, N_{\text{ст}}}$ ) – коефіцієнти приведення платежів за старими умовами до заданої дати;

$S_{j(\text{н})}$  ( $j = \overline{1, N_{\text{н}}}$ ) – суми платежів за новими умовами;

$k_{\text{пj(н)}}$  ( $j = \overline{1, N_{\text{н}}}$ ) – коефіцієнти приведення платежів за новими умовами до тієї самої заданої дати.

Формула 3.42 аналогічна формулі 2.25, але коефіцієнти при-  
ведення обчислюються для складної відсоткової ставки.

Величину останнього платежу знаходять так, як для простої  
відсоткової ставки за формулою (2.27).

### **Питання для самоконтролю**

1. Запишіть формулу нарощення за складними відсотками .
2. На що вказує множник нарощення при нарахуванні за скла-  
дними відсотками ?
3. Зобразіть графічно зростання за складними відсотками.
4. Запишіть формулу нарощення за складними відсотками при  
зміні відсоткових ставок у часі.
5. Зростання за складними і простими відсотками при різних  
термінах позички.
6. В яких випадках при нарахуванні відсотків використовується  
номінальна ставка?
7. Дайте визначення ефективної ставки.
8. Наведіть формулу нарощення при номінальній ставці.
9. Виведіть формули визначення номінальної ставки через  
ефективну і навпаки.
10. Пригадайте визначення сучасної вартості майбутнього пла-  
тежу.
11. Які види дисконтувань вам відомі?
12. Розкрийте суть математичного дисконтування за складними  
відсотками.
13. Запишіть формулу банківського обліку за складною обліко-  
вою ставкою.
14. Коли застосовуються номінальна і ефективна облікові став-  
ки?
15. Виведіть формули визначення номінальної облікової ставки  
через ефективну облікову і навпаки.
16. Порівняйте результати нарощення за різними видами ставок  
при різних термінах позички.
17. Порівняйте результати дисконтування за різними видами  
ставок при різних термінах позички.
18. Виведіть формули визначення терміну позички для склад-  
них ставок нарощення і дисконтування.

19. За якими формулами визначаються складні ставки нарощення та облікові ставки (номінальні та ефективні)?
20. Коли застосовується сила росту?
21. Які розрахунки охоплюють фінансові функції в EXCEL?
22. Запишіть рівняння еквівалентності при об'єднанні декількох платежів в один.
23. Який вигляд має рівняння еквівалентності при заміні однієї кількості платежів на іншу?

## ВПРАВИ

1. Банк приймає валютні внески на депозит за номінальною відсотковою ставкою 12% річних. Нарахування відсотків щомісячне. Визначте дохід клієнта, якщо внесок 2500 грн., а термін внеску – 6 місяців.

2. Визначте, яка сума буде на рахунку, якщо вклад на суму 800 тис. грн. зроблено під 8% річних на 20 років, а відсотки нараховуються щоквартально.

3. Визначте нарощену суму внеску в 3 тис. грн. при терміні 2 роки за номінальною відсотковою ставкою 4% річних. Нарахування відсотків проводиться: а) один раз на рік, б) за півріччями, в) щоквартально, г) щомісячно.

4. Яка сума повинна бути виплачена, якщо п'ять років назад була видана позика 2000 грн. під 15% річних із щомісячним нарахуванням відсотків.

5. Банк приймає внески від населення за номінальною відсотковою ставкою 12% річних. Нарахування відсотків щомісячне. Внесок 1200 грн. був повернений через 102 дні. Визначте дохід клієнта.

6. Внески на ошадний рахунок становлять 50 тис. грн. на початку кожного року. Визначте, скільки буде на рахунку через 10 років при відсотковій ставці 11%. Відсотки прості.

7. Для будівництва заводу банк надав фірмі кредит у 200 млн. грн. терміном на 10 років з розрахунку 13% річних. Обчисліть множник нарощення, суму нарахованих відсотків і вартість кредиту на кінець кожного року.

8. Фірмі "BMW" було надано пільгову позичку в 500000 дол. на 3 роки під 12% річних. Відсотки на позичку нараховуються один раз на рік. За умовами договору фірма має право оплати позичку і

відсотки одним платежем в кінці трьохрічного періоду. Скільки повинна заплатити фірма при розрахунку за простими і складними відсотками?

9. Визначте період часу, необхідний для потроєння капіталу за простими і складними відсотками при відсотковій ставці 22% річних. В останньому випадку нарахування відсотків щоквартальне.

10. На який термін потрібно покласти кошти в банк під 26% річних при щомісячному, щоквартальному, піврічному нарахуванні відсотків, щоб сума вкладу подвоїлась. Метод розрахунку – банківський.

11. Клієнт вклав на депозит терміном на 5 місяців 1345 грн. Після закінчення терміну він отримав 1748 грн. Визначте відсоткову ставку банку.

12. За який час позика величиною 6000 грн., вкладає під 7% складних річних ( $K = 360$ ), збільшиться на таку ж суму, що й вклад 7000 грн., зроблений з 3.03 по 1.07 під 9% складних річних ( $K=365$ ).

13. Якою повинна бути мінімальна відсоткова ставка, щоб сума вкладу подвоїлась за рік при нарахуванні відсотків: а) щоквартально, б) щомісячно.

14. Реклама одного комерційного банку пропонує 82% річних при щомісячному нарахуванні відсотків. Другий комерційний банк пропонує 86% річних при щоквартальному нарахуванні відсотків. Термін вкладу – 11 місяців. Якому банку віддати перевагу?

15. Банк не може забезпечити прибутковість за внесками населення більше, ніж 15% на рік. Яку номінальну ставку він повинен оголосити, якщо капіталізацію відсотків передбачається здійснювати а) раз на півріччя; б) щоквартально; в) щомісячно?

16. Порівняйте умови чотирьох банків: а) відсотки прості і відсоткова ставка 28%; б) номінальна відсоткова ставка – 26% річних, нарахування відсотків відбувається за півріччями; в) номінальна відсоткова ставка – 24%, нарахування відсотків щоквартальне; г) номінальна відсоткова ставка – 22%, нарахування відсотків щомісячне.

17. Клієнт вклав 15000 грн. на терміновий депозитний рахунок терміном на 8 місяців під номінальну відсоткову ставку 36% річних. Визначте нарощену суму і ефективну відсоткову ставку.

18. Яку суму потрібно покласти до банку, щоб через 1,5 року при нарахуванні відсотків раз на півроку можна було б одержати 2500 грн., якщо річна ставка становить 22%?

19. Підприємство взяло кредит на 6 років під річну відсоткову ставку 48%. Комісійні становлять 3% від суми кредиту. Визначте ефективну відсоткову ставку при нарахуванні відсотків: а) один раз на рік; б) щоквартально; в) щомісячно.

20. Підприємство отримало позику на 3 роки під річну відсоткову ставку 38%. Комісійні становлять 5% від суми кредиту. Визначте ефективну відсоткову ставку позики, якщо: а) позика отримана під прості відсотки, б) позика отримана під складні відсотки з нарахуванням відсотків один раз на рік, в) при щомісячному нарахуванні відсотків.

21. Визначте дохід клієнта і податок за терміновим депозитом у 8000 грн. на 7 місяців з номінальною відсотковою ставкою 28% річних, якщо відсоткова ставка податку 20%. Нарахування відсотків проводиться: а) щоквартально, б) щомісячно.

22. Визначте номінальну ефективну ставку простих і складних відсотків для депозиту терміном на 4 місяці, якщо номінальна відсоткова ставка податку 13%. Банк нараховує відсотки щомісячно.

23. Сума термінового депозиту на 6 місяців – 3000 дол. Номінальна відсоткова ставка банку – 16% річних при щомісячному нарахуванні відсотків. Який дохід клієнта, якщо податок на прибуток – 15%.

24. Виробнича фірма отримала кредит в 240000 грн. терміном на 4 роки. Відсотки – складні. Відсоткова ставка за перший рік – 24% і кожен наступний рік збільшується на 3%. Визначте суму повернення кредиту.

25. Визначте період часу, необхідний для подвоєння капіталу за простими і складними відсотками при відсотковій ставці 12% річних. В останньому випадку нарахування відсотків щомісячне.

26. 3.09.03 р. курс купівлі долара в банку “Аваль” становив 5,25 дол. Клієнт купив гривні на суму 500 дол. і помістив їх на терміновий депозит терміном на два місяці. Гривнева відсоткова ставка банку на цей період становила 8% річних. Валютна відсоткова ставка – 4%. Курс продажу долара 3.11.03 р. становив 5,45 дол. Потрібно визначити нарощену валютну суму і ефективну відсоткову ставку такого нарощення.

27. Яким умовам віддасть перевагу клієнт при отриманні кредиту: а) відсоткова ставка – 12%, нарахування відсотків щомісячно;

б) відсоткова ставка – 14%, нарахування відсотків щоквартальне; в) відсоткова ставка – 23%, нарахування відсотків за півріччями.

28. Розрахувати майбутню вартість облігації номіналом 100 тис. грн., яка випущена на 5 років. Перші два роки відсотки нараховуються за ставкою 15%, а в наступні три роки – за ставкою 20% річних.

29. Фірма “Техфарм” для будівництва цеху з виробництва медпрепаратів отримала від держави пільговий кредит під 6% річних на 4 роки. Сума кредиту – 180000 грн. Відсотки складні і оплачуються при видачі кредиту. Яку суму отримає фірма?

30. Підприємець отримав кредит в 18000 грн. на три роки під 18% річних. Погашення кредиту і відсотків повинне відбуватись у кінці кожного року рівними сумами. Відсотки нараховуються на непогашену частину кредиту. Визначити платежі за кредитом і відсоткові платежі за роками.

31. Сума кредиту – 20000 грн. Кредит отриманий на 4 роки під відсоткову ставку 24% річних. Нараховуються відсотки на непогашену суму кредиту. Погашення кредиту і відсотків повинне відбуватись рівними платежами в кінці кожного року. Визначте величину річного платежу, загальну суму відсотків і нарощену суму кредиту.

32. Фірма узяла в комерційному банку кредит на суму 600 тис. грн. терміном на 4 роки. Згідно з угодою, за перший рік відсоткова ставка становила 24% і з урахуванням інфляції кожного року підвищувалася на 5 пунктів. Визначте множник нарощування, нарощену суму і дохід банку.

33. Векселевласник отримав 5000 грн. за векселем з терміном погашення 7 місяців. Номінальна вартість векселя 7000 грн. Визначте облікову ставку банку.

34. Номінальна вартість векселя 11000 грн. Векселевласник обготівкував його в банку за 38 днів до терміну погашення під облікову ставку 84%. Яку суму отримає векселевласник?

35. Векселевласник облікував вексель у банку за 6 місяців до терміну погашення за номінальною відсотковою ставкою  $j = 0,6$ . Нарахування відсотків щомісячне. Номінальна вартість векселя – 120000 грн. Скільки отримав власник векселя і чому дорівнює дисконт банку?



36. Визначте, скільки коштує акція 15 червня, дата погашення якої 15 серпня, якщо її номінал 325 грн., а складна дисконтна облікова ставка 30%.

37. Фінансова компанія за кредит в 40000 грн. терміном на 5 місяців під номінальний обліковий відсоток 0,9 отримала дисконт 4000 грн. Відсотки складні і нараховуються щомісячно. На який термін було видано кредит?

38. Визначте номінальний обліковий відсоток, за яким був обготівкований вексель номіналом 3000 грн. і терміном погашення 80 днів, якщо векселевласник отримав 2750 грн. Нарахування відсотків щомісячне.

39. Власник векселя облікував його в банку за три місяці до кінця терміну погашення і отримав 1600 грн. Номінальний обліковий відсоток банку – 0,72. Відсотки складні і нараховуються щомісячно. Визначте номінальну вартість векселя.

40. Визначте просту і складну облікові ставки, якщо за кредит в 2400 грн. з терміном погашення три місяці потрібно заплатити 3200 грн. Нарахування дисконту щомісячне.

41. Власник векселя номінальною вартістю 10000 грн. облікував його в банку за обліковою ставкою 6%. До терміну погашення залишилось 4 місяці. Визначте поточну вартість векселя і дисконт банку у випадку простої і складної облікових ставок. В останньому випадку дисконтування щомісячне.

42. Визначте просту і складну номінальні облікові ставки при кредитуванні, якщо за кредит в 5000 грн., виданий на чотири місяці, потрібно заплатити 6000 грн. В останньому випадку нарахування дисконту щомісячне.

43. На який термін видано кредит при обліковій ставці 0,7, якщо позичальник отримав 1800 грн., а номінальна вартість кредиту – 2000 грн. Дисконтування за простою і складною обліковими ставками. В останньому випадку нарахування дисконту щомісячне.

44. Яку суму необхідно вкласти у банк під складну відсоткову ставку 25% річних, щоб накопичити 30 тис. грн. за 2 роки за щомісячного нарахування відсотків?

45. Визначте номінальну вартість векселя і дисконт банку, якщо банк облікував вексель за три місяці до терміну погашення за обліковою ставкою 6% і власник векселя отримав 4800 грн. Нарахування дисконту щомісячне.

46. Визначте складну облікову ставку, еквівалентну складній відсотковій ставці 6% річних. Нарахування дисконту і відсотків один раз на рік.

47. Визначте річну відсоткову ставку для вкладу величиною 100 тис. грн., якщо за 13 років ця сума зросла до 1 млн. грн. при щоквартальному нарахуванні відсотків.

48. Визначте номінальну складну облікову ставку, еквівалентну номінальній ставці, яка дорівнює 4% складних відсотків, при щомісячному нарахуванні дисконту і відсотків.

49. Визначте складну відсоткову ставку, еквівалентну складній обліковій ставці 7% річних при депозиті 4 місяці.

50. Власник векселя номінальною вартістю 3000 грн., облікував його в банку за три місяці до терміну погашення за простою обліковою ставкою 6% річних. Комісійні – 1% від номінальної вартості векселя. Яку суму отримає власник і який дохід цієї операції за ефективною ставкою простих і складних відсотків?

51. Три векселі номінальною вартістю 1000 грн., 3000 грн., 8000 грн. з терміном погашення 80 днів об'єднали в один номінальною вартістю 14000 грн. Об'єднання відбувається за річною ставкою складних відсотків – 19%. Знайдіть термін погашення об'єданого векселя.

52. Об'єднуються чотири платежі з сумами 8, 10, 12, 14 тис. грн. з термінами 2.04, 28.04, 3.07, 15.08. Термін об'єднання платежів – 11.08 за складною ставкою  $i = 11\%$  річних і  $K = 365$ . Необхідно розрахувати суму об'єданого платежу.

53. Об'єднуються три платежі з сумами 5, 7, 4 тис. грн. і термінами платежів 12.04, 7.06, 22.09. Термін об'єднання платежів – 11.08. Визначте суму об'єданого платежу за складною ставкою 8% і часовою базою  $K = 360$  днів.

54. Платежі на суми 150, 100, 165 тис. грн. і з термінами погашення 100, 120, 250 днів від деякої дати замінюються одним платежем з терміном 270 днів від цієї самої дати. Визначте суму об'єданого платежу за складної ставки 9% річних і часової бази  $K = 360$  днів.

55. Чотири векселі номінальною вартістю 2000 грн., 3000 грн., 4000 грн., 8500 грн., з терміном погашення 35, 60, 70, 90 днів потрібно об'єднати в один з терміном погашення 120 днів. Визначте вартість об'єданого векселя, якщо складна відсоткова ставка, за якою відбувається об'єднання, – 6% річних.

## 4. ФІНАНСОВІ РЕНТИ

### 4.1. Види потоків платежів і їхні параметри

Сучасні фінансово-банківські операції мають не окремі чи разові платежі, а деяку послідовність у часі [12]. Наприклад, погашення заборгованості в кредит, періодичне надходження доходів від інвестицій, виплати пенсій і т. д. Такі послідовності називають *потокком платежів*.

Класифікація потоків:

- регулярні (обсяги платежів постійні, або через рівні інтервали);
- нерегулярні.

Платежі можуть бути додатними (надходження); від'ємними (виплати).

Потік платежів, всі платежі якого – додатні величини та часові інтервали однакові, називається *фінансовою рентою*, або *рентою*, або *ануїтетом*. Наприклад, платіж за споживчим кредитом, отримання відсотків за облігації.

Рента описується параметрами:

- платіж ренти (величина платежу);
- період ренти (часовий інтервал між двома послідовними платежами);
- термін ренти (час від початку першого періоду ренти до кінця останнього);
- відсоткова ставка;
- додаткові параметри (кількість платежів у році, частота та спосіб нарахування відсотків).

Ренти класифікуються:

За кількістю платежів на рік:

- річні;
- $p$ -термінові.

За частотою:

- дискретні;
- неперервні.

За кількістю нарахувань відсотків протягом року:

- один раз на рік;
- $m$  раз на рік;
- неперервне нарахування.

За величиною платежів ренти:

- постійні;
- змінні.

За виплатами ренти:

- в кінці періоду (постнумерандо);
- на початку періоду (пренумерандо);
- в середині періоду.

Аналіз потоку платежів припускає розрахунок таких характеристик:

- нарощеної суми всіх платежів потоку з нарахованими на них до кінця терміну відсотками;
- оцінку сучасної вартості усього потоку платежів, дисконтованих на початок терміну ренти.

#### 4.2. Прямий метод розрахунку нарощеної суми і сучасної вартості потоку платежів

Нехай є ряд платежів  $R_t$ , що виплачуються протягом часу  $n_t$ , після деякого початкового моменту часу. Загальний термін виплат –  $n$  років. Необхідно визначити нарощену на кінець терміну потоку платежів суму  $S$ .

Якщо відсотки нараховуються один раз на рік, то

$$S = \sum_t R_t (1+i)^{n-n_t}. \quad (4.1)$$

Сучасна вартість такого потоку платежів дорівнює:

$$A = \sum_t \frac{R_t}{(1+i)^{n_t}}. \quad (4.2)$$

*Сучасна вартість потоку платежів* – це узагальнена оцінка, пов'язана з деяким попереднім проміжком часу; загальна сума, яка на даний момент рівноцінна майбутнім виплатам.

*Нарощена сума* – це узагальнення усіх платежів потоку у вигляді одного числа, наращеного до кінця терміну.

Приклад 4.1. Передбачено видачу позики в часі:

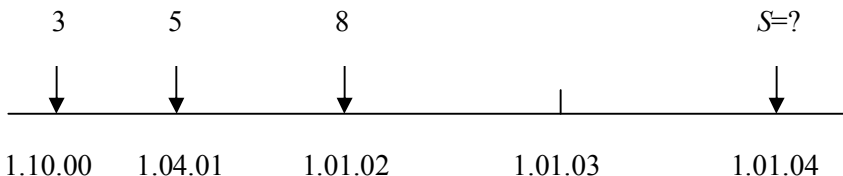
1 жовтня 2000 р. – 3 тис. грн.

1 квітня 2001 р. – 5 тис. грн.

1 січня 2002 р. – 8 тис. грн.

Необхідно визначити суму заборгованості на 1 січня 2004 р. за умови, що відсотки нараховуються за ставкою 17%.

▲ Зобразимо схематично видачу позики



Нарощену суму боргу розраховуємо, використовуючи формулу (4.1):

$$\begin{aligned}
 S &= 3 \cdot 1,17^{3,25-0} + 5 \cdot 1,17^{3,25-0,5} + 8 \cdot 1,17^{3,25-1,25} = \\
 &= 3 \cdot 1,17^{3,25} + 5 \cdot 1,17^{2,75} + 8 \cdot 1,17^2 = 3 \cdot 1,6657 + 5 \cdot 1,5400 + 8 \cdot 1,3689 = \\
 &= 4,9971 + 7,7 + 10,9512 = 23,6483 \text{ тис. грн.}
 \end{aligned}$$

За цими даними визначимо сучасну вартість потоку на момент виплати першої суми за формулою (4.2):

$$\begin{aligned}
 A &= 3 \cdot \frac{1}{1,17^0} + 5 \cdot \frac{1}{1,17^{0,5}} + 8 \cdot \frac{1}{1,17^{1,25}} = 3 + 4,6225 + 6,5744 = \\
 &= 14,1969 \text{ тис. грн. } \blacktriangle
 \end{aligned}$$

Коли величини платежів потоку довільні, але виплати постнумерандо через рівні проміжки часу, то для підрахунку сучасної вартості потоку можна використати функцію в EXCEL:

**НПЗ** (*норма; значення*),

де *норма* – відсоткова ставка для того періоду, в якому проводяться виплати;

*значення* – послідовні дані, що характеризують потік платежів.

### 4.3. Нарощена сума постійної ренти постнумерандо

Формулами (4.1–4.2) можна скористатися для будь-якого потоку платежів, в тому числі для постійної ренти. Проте є більш компактні формули.

Розглянемо постійну ренту постнумерандо і знайдемо основні формули, що описують її.

### ***A. Річна рента***

Нехай  $n$  років у банк в кінці кожного року вноситься  $R$  грн. На внески нараховуються складні річні відсотки за ставкою  $i$ . Це є рента з платежем  $R$ , терміном  $n$ . Всі платежі ренти, крім останнього, приносять відсотки:

$$R(1+i)^{n-1}, R(1+i)^{n-2}, R(1+i)^{n-3}, \dots, R(1+i), R.$$

Ряд платежів утворює геометричну прогресію, причому якщо розглянути ряд у зворотному порядку, то перший член прогресії  $b_1 = R$ , знаменник  $q = 1 + i$ . Суму ряду обчислимо за формулою суми членів геометричної прогресії  $S = b_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$ . Отримаємо:

$$S = R \frac{(1+i)^n - 1}{i} = R s_{n;i}, \quad (4.3)$$

де  $s_{n;i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$  – коефіцієнт нарощення ренти.

***Приклад 4.2.*** Створюється фонд, у який внески надходять у вигляді постійної річної ренти постнумерандо протягом 4 років. Величина разового внеску – 1 млн. грн. На засоби, що надходять, нараховуються відсотки за ставкою 18% річних.

Розрахувати величину фонду на кінець терміну.

▲ Обчислюємо за формулою (4.3):

$$S = 1 \cdot s_{4;0,18} = 1 \cdot \frac{(1+0,18)^4 - 1}{0,18} = \frac{0,938778}{0,18} = 5,215432 \text{ млн. грн.}$$

Для випадку річної ренти з одноразовим нарахуванням відсотків у році обчислити нарощену суму можна в EXCEL за допомогою функції **БЗ**. У цьому прикладі обчислення будуть такі:

**БЗ** (0,18; 4; -1; ; 0) = 5,215432 млн. грн.

або **БЗ** (0,18; 4; -1) = 5,215432 млн. грн.

**Зауваження.** На місці виплати вводимо величину платежу ренти завжди від'ємною, на місці початкової суми нічого не вводимо, тип 0 відповідає ренті постнумерандо. ▲

**Б. Річна рента з нарахуванням відсотків  $m$  раз на рік**

$$S = R \frac{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn} - 1}{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^m - 1} = R s_{mn; \frac{j}{m}}, \quad (4.4)$$

де  $s_{mn; \frac{j}{m}} = \frac{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn} - 1}{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^m - 1}$  – коефіцієнт нарощення ренти.

Приклад 4.3. Змінимо умову попередньої задачі. Нехай на засоби, які надходять, нараховуються відсотки за півріччями. Тоді кожен раз вони рахуються за ставкою  $\frac{j}{m} = 0,18/2$ .

▲ Величина фонду на кінець терміну становить:

$$S = 1 \cdot s_{2 \cdot 4; 0,18/2} = 1 \cdot \frac{(1 + 0,09)^{2 \cdot 4} - 1}{(1 + 0,09)^2 - 1} = \frac{0,992563}{0,1881} = 5,276782 \text{ млн. грн.} \quad \blacktriangle$$

**В. Рента  $p$ -термінова ( $m = 1$ )**

Нехай рента виплачується  $p$  раз на рік рівними сумами, відсотки нараховуються раз в кінці року. Якщо  $R$  – виплата за рік, то кожен раз виплачується сума  $\frac{R}{p}$ . Загальна кількість платежів ренти дорівнює  $np$ . Послідовність платежів утворює геометричну прогресію з першим членом  $b_1 = \frac{R}{p}$ , знаменником –  $(1+i)^{1/p}$ , тому нарощена сума ренти дорівнює:

$$S = \frac{R}{p} \frac{(1+i)^{np/p} - 1}{(1+i)^{1/p} - 1} = R \frac{(1+i)^n - 1}{p[(1+i)^{1/p} - 1]} = R s_{n; i}^{(p)}. \quad (4.5)$$

$s_{n; i}^{(p)} = \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^{1/p} - 1}$  – коефіцієнт нарощення ренти.

Приклад 4.4. Повернемося до умови попередньої задачі. Нехай на засоби, які надходять, нараховуються відсотки раз на рік, платежі виплачуються щоквартально.

▲ Тоді величина одного платежу становить  $\frac{R}{p} = \frac{1}{4} = 0,25$  млн. грн. Загальна кількість платежів  $4 \cdot 4 = 16$ . Нарощена сума дорівнює:

$$S = 1 \cdot \frac{(1 + 0,18)^4 - 1}{4 \cdot [(1 + 0,18)^{1/4} - 1]} = 1 \cdot \frac{0,938778}{0,168987} = 5,55534 \text{ млн. грн. } \blacktriangle$$

### ***Г. Рента р-термінова ( $m = p$ )***

Нехай рента виплачується  $p$  раз на рік рівними сумами, відсотки нараховуються  $m$  раз у рік, а  $p = m$ , тобто число виплат дорівнює числу нарахування відсотків.

Щоб знайти нарощену суму, підставляємо у формулу (4.3)  $i = \frac{j}{m}$ , число періодів виплат  $np = nm$ , платіж ренти  $\frac{R}{p} = \frac{R}{m}$ :

$$S = \frac{R}{m} \frac{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn} - 1}{\frac{j}{m}} = R \frac{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn} - 1}{j} = R s_{mn;j/m}. \quad (4.6)$$

$$R s_{mn;j/m} = \frac{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn} - 1}{j} - \text{коефіцієнт наращення ренти.}$$

*Зауваження.* Для випадку  $p$ -термінової ренти, для якої число виплат дорівнює числу нарахування відсотків, обчислити нарощену суму можна в EXCEL за допомогою функції **БЗ**.

Приклад 4.5. Повернемося до умови попередньої задачі. Нехай платежі виплачуються щоквартально і відсотки нараховуються теж щоквартально.

▲ Обчислимо нарощену суму за формулою (4.6):

$$S = 1 \cdot s_{44;0,18/4} = 1 \cdot \frac{\left(1 + \frac{0,18}{4}\right)^{44} - 1}{0,18} = \frac{1,02237}{0,18} = 5,679834 \text{ млн. грн.}$$

В EXCEL за допомогою функції **БЗ** обчислення такі:

**БЗ** (0,18/4; 4\*4; -1/4; ; 0) = 5,679834 млн. грн.

або **БЗ** (0,18/4; 4\*4; -1/4) = 5,679834 млн. грн. ▲



### Д. Рента $p$ -термінова ( $p \neq m$ )

Нехай рента виплачується  $p$  раз на рік рівними сумами, відсотки нараховуються  $m$  раз у рік, а число виплат не дорівнює числу нарахування відсотків  $p \neq m$ .

Щоб знайти нарощену суму, використовуємо формулу суми членів геометричної прогресії з першим членом  $b_1 = \frac{R}{p}$ , знаменником –  $q = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m/p}$ . Тоді нарощена сума ренти має такий вигляд:

$$S = \frac{R}{p} \cdot \frac{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p} np} - 1}{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1} = \frac{R}{p} \cdot \frac{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn} - 1}{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1} = R s_{mn; j/m}^p. \quad (4.7)$$

$$s_{mn; j/m}^p = \frac{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn} - 1}{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1} - \text{кофіцієнт нарощення ренти.}$$

Приклад 4.6. Для даних до попередньої задачі при

а) виплачуванні платежів щоквартально додамо, що відсотки нараховуються щомісячно;

б) виплачуванні платежів щомісячно додамо, що відсотки нараховуються щоквартально.

▲ Величина фонду за формулою (4.7) становить:

$$\text{а) } S = 1 \cdot s_{12.4; 0,18/12}^4 = \frac{1}{4} \cdot \frac{\left(1 + \frac{0,18}{12}\right)^{12.4} - 1}{\left(1 + \frac{0,18}{12}\right)^{\frac{12}{4}} - 1} = \frac{1,043478}{0,182713} = 5,711 \text{ млн. грн.};$$

$$\text{б) } S = 1 \cdot s_{4 \cdot 4; 0,18/4}^{12} = \frac{1}{12} \cdot \frac{\left(1 + \frac{0,18}{4}\right)^{44} - 1}{\left(1 + \frac{0,18}{4}\right)^4 - 1} = \frac{0,085198}{0,01478} = 5,7642 \text{ млн. грн.}$$

▲

### ***Е. Рента з неперервним нарахуванням відсотків***

Нехай рента виплачується один раз на рік, а відсотки нараховуються безперервно.

Платежі ренти будуть такі:

$$Re^{(n-1)\xi}, Re^{(n-2)\xi}, \dots, Re^{2\xi}, Re^{\xi}, R.$$

У зворотному порядку – це геометрична прогресія з  $b_1 = R$ , знаменником –  $q = e^{\xi}$ . Тому нарахована сума ренти має такий вигляд:

$$S = R \cdot \frac{e^{\xi n} - 1}{e^{\xi} - 1} = R \cdot s_{n;\xi}. \quad (4.8)$$

Для  $p$ -термінової ренти з неперервним нарахуванням:

$$S = R \cdot \frac{e^{\xi n} - 1}{p(e^{p/p} - 1)} = R \cdot s_{n;\xi}^{(p)}. \quad (4.9)$$

$$s_{n;\xi}^{(p)} = \frac{e^{\xi n} - 1}{e^{p/p} - 1} - \text{кофіцієнт нарахування ренти, } e = 2,718282.$$

Приклад 4.7. До умови попередньої задачі, додамо, що відсотки нараховуються безперервно із силою росту  $\xi = 0,18$ .

▲ Розрахуємо нараховану суму при  $p = 1$  за формулою (4.8):

$$S = 1 \cdot \frac{e^{0,18 \cdot 4} - 1}{e^{0,18} - 1} = \frac{1,0544}{0,1972} = 5,34655 \text{ млн. грн.}$$

Якщо  $p = 4$ , то за формулою (4.9) отримаємо:

$$S = 1 \cdot \frac{e^{0,18 \cdot 4} - 1}{4 \cdot (e^{0,18/4} - 1)} = \frac{1,0544}{0,1841} = 5,7271 \text{ млн. грн. } \blacktriangle$$



**Приклад 4.8.** Створюється фонд, у який внески надходять у вигляді постійної річної ренти постнумерандо протягом 4 років. Величина разового внеску 1 млн. грн. На засоби, що надходять, нараховуються відсотки за ставкою 18% річних.

Розрахувати сучасну вартість майбутніх платежів.

▲ Обчислення проводяться за формулою (4.10):

$$A = 1 \cdot a_{4;0,18} = 1 \cdot \frac{1 - (1 + 0,18)^{-4}}{0,18} = \frac{0,484211}{0,18} = 2,690062 \text{ млн. грн.}$$

Отже, сучасна вартість майбутніх платежів дорівнює 2,690062 млн. грн. або, інакше кажучи, 2,690062 млн. грн., розміщені під 18% річних, забезпечать щорічну виплату по 1 млн. грн. протягом 4-ох років.

Для випадку річної ренти з одноразовим нарахуванням відсотків у році обчислити сучасну вартість можна в EXCEL за допомогою функції ПЗ. У цьому прикладі обчислення такі:

ПЗ (0,18; 4; -1; ; 0) = 2,690062 млн. грн.

або ПЗ (0,18; 4; -1) = 2,690062 млн. грн. ▲

### ***Б. Річна рента з нарахуванням відсотків $m$ раз на рік***

Аналогічно, як і в попередньому випадку, можна показати, що сучасна вартість такої ренти:

$$A = R \frac{1 - \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-mn}}{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^m - 1} = Ra_{mn; \frac{j}{m}} \quad (4.11)$$

**Приклад 4.9.** Змінимо умову попередньої задачі. Нехай на засоби, що надходять, нараховуються відсотки щопівроку. Тоді щоразу вони рахуються за ставкою  $\frac{j}{m} = \frac{0,18}{2}$ .

▲ Сучасна вартість майбутнього фонду становить:

$$A = 1 \cdot a_{2 \cdot 4; 0,18/2} = 1 \cdot \frac{1 - (1 + 0,09)^{-2 \cdot 4}}{(1 + 0,09)^2 - 1} = \frac{0,498134}{0,1881} = 2,648239 \text{ млн. грн.} \quad \blacktriangle$$

### ***В. Рента $p$ -термінова ( $m = 1$ )***

Нехай рента виплачується  $p$  раз на рік рівними сумами, відсотки нараховуються раз у кінці року. Якщо  $R$  виплата за рік, то що-

разу виплачується сума  $\frac{R}{p}$ . Загальна кількість платежів ренти дорівнює  $np$ . Сума дисконтованих платежів ренти становить:

$$A = \frac{R}{p} \frac{1 - (1+i)^{-np/p}}{(1+i)^{1/p} - 1} = R \frac{1 - (1+i)^{-n}}{p[(1+i)^{1/p} - 1]} = Ra_{n,i}^{(p)}. \quad (4.12)$$

Приклад 4.10. Повернемося до умови попередньої задачі. Нехай на засоби, які надходять, нараховуються відсотки раз на рік, платежі виплачуються щоквартально.

▲ Тоді величина одного платежу  $\frac{R}{p} = \frac{1}{4} = 0,25$  млн. грн.

Загальна кількість платежів  $4 \cdot 4 = 16$ . Сучасна вартість становить:

$$A = 1 \cdot \frac{1 - (1 + 0,18)^{-4}}{4 \cdot [(1 + 0,18)^{1/4} - 1]} = 1 \cdot \frac{0,484211}{0,168987} = 2,865383 \text{ млн. грн. } \blacktriangle$$

### Г. Рента $p$ -термінова ( $m = p$ )

Нехай число виплат дорівнює числу нарахування відсотків.

Щоб знайти сучасну вартість, підставляємо у формулу (4.10)

$i = \frac{j}{m}$ , число періодів виплат  $np = nm$ , платіж ренти  $\frac{R}{p} = \frac{R}{m}$ .

Тоді

$$A = \frac{R}{m} \frac{1 - \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-mn}}{\frac{j}{m}} = R \frac{1 - \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-mn}}{j} = Ra_{mn; j/m}. \quad (4.13)$$

*Зауваження.* Для випадку  $p$ -термінової ренти, для якої число виплат дорівнює числу нарахування відсотків, обчислити сучасну вартість можна в EXCEL за допомогою функції ПЗ.

Приклад 4.11. Повернемося до умови попередньої задачі. Нехай платежі виплачуються щоквартально і відсотки нараховуються теж щоквартально.

▲ Обчислимо сучасну вартість за формулою (4.13):

$$A = 1 \cdot a_{4 \cdot 4; 0,18/4} = 1 \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{0,18}{4}\right)^{-4 \cdot 4}}{0,18} = \frac{0,505531}{0,18} = 2,808504 \text{ млн. грн.}$$

В EXCEL за допомогою функції ПЗ обчислення такі:

ПЗ (0,18/4; 4\*4; -1/4; ; 0) = 2,808504 млн. грн.

або ПЗ (0,18/4; 4\*4; -1/4) = 2,808504 млн. грн. ▲

#### Д. Рента $p$ -термінова ( $p \neq m$ )

Для такої ренти сучасна вартість визначається за формулою:

$$A = \frac{R}{p} \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-mn}}{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1} = Ra_{mn;j/m}^{(p)}. \quad (4.14)$$

Приклад 4.12. Для даних до попередньої задачі при

а) виплачуванні платежів щоквартально додамо, що відсотки нараховуються щомісячно;

б) виплачуванні платежів щомісячно додамо, що відсотки нараховуються щоквартально.

▲ Сучасна вартість фонду за формулою (4.14) становить:

$$\text{а) } A = 1 \cdot a_{12 \cdot 4; 0,18/12}^{(4)} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{0,18}{12}\right)^{-12 \cdot 4}}{\left(1 + \frac{0,18}{12}\right)^{\frac{12}{4}} - 1} = \frac{0,510638}{0,182713} = 2,7947 \text{ млн. грн.}$$

$$\text{б) } A = 1 \cdot a_{4 \cdot 4; 0,18/4}^{(12)} = \frac{1}{12} \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{0,18}{4}\right)^{-4 \cdot 4}}{\left(1 + \frac{0,18}{4}\right)^{\frac{4}{12}} - 1} = \frac{0,505531}{0,177366} = 2,8502 \text{ млн.}$$

грн. ▲

#### Е. Рента з неперервним нарахуванням відсотків

Нехай рента виплачується один раз на рік, а відсотки нараховуються безперервно за ставкою  $\xi$ .

При дисконтуванні всіх платежів отримаємо ряд:



**Ж. Залежність між нарощеною і сучасною вартістю ренти та коефіцієнтами нарощення та приведення**

Неважко показати, що нарощена і сучасна вартість річної і  $p$ -термінової ренти з нарахуванням відсотків один раз на рік, залежать одна від одної:

$$A(1+i)^n = R \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} (1+i)^n = R \frac{(1+i)^n - 1}{i} = S \quad (4.17)$$

або

$$Sv^n = A. \quad (4.18)$$

Для рент з нарахуванням відсотків  $m$  раз на рік взаємозалежність така:

$$A \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn} = S, \quad (4.19)$$

$$S \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-mn} = A. \quad (4.20)$$

Аналогічні залежності характерні і для коефіцієнтів нарощення та приведення:

$$a_{n;i} (1+i)^n = s_{n;i}, \quad s_{n;i} v^n = a_{n;i}.$$

#### 4.5. Визначення параметрів постійних рент постнумерандо

Було зазначено, що основні параметри ренти –  $R$ ,  $n$ ,  $i$  та допоміжні –  $p$ ,  $m$ . При розробці контрактів бувають випадки, коли нарощена сума або сучасна вартість відомі, а необхідно знайти один із невідомих параметрів.

##### **А. Визначення величини платежу ренти**

Якщо невідома величина платежу ренти, відомі  $S$  або  $A$  і решта параметрів, то для річної постійної ренти постнумерандо  $R$  знаходимо за формулами (4.3) або (4.10):

$$R = \frac{S}{s_{n;i}}, \quad (4.21)$$

$$R = \frac{A}{a_{n;i}}. \quad (4.22)$$

Формулу (4.21) використовують у випадку, коли ставиться задача накопичення за певний термін деякої суми  $S$ , формулу (4.22) – при погашенні заборгованості в сумі  $A$ .



Аналогічно визначають величину платежу  $i$  для інших умов ренти (табл. 4.1).

Таблиця 4.1 – Визначення величини платежів ренти

| Вид ренти |                        | Вихідні параметри                                                                                                    |                                                                                                                       |
|-----------|------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|           |                        | $S$                                                                                                                  | $A$                                                                                                                   |
| $p = 1$   | $m=1$                  | $R = \frac{Si}{(1+i)^n - 1}$                                                                                         | $R = \frac{Ai}{1 - (1+i)^{-n}}$                                                                                       |
|           | $m > 1$                | $R = \frac{S \left( \left(1 + \frac{j}{m}\right)^m - 1 \right)}{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn} - 1}$              | $R = \frac{A \left( \left(1 + \frac{j}{m}\right)^m - 1 \right)}{1 - \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-mn}}$              |
|           | $m \rightarrow \infty$ | $R = \frac{S(e^{\xi} - 1)}{e^{\xi n} - 1}$                                                                           | $R = \frac{A(e^{\xi} - 1)}{1 - e^{-\xi n}}$                                                                           |
| $p > 1$   | $m = 1$                | $R = \frac{Sp \left( (1+i)^{1/p} - 1 \right)}{(1+i)^n - 1}$                                                          | $R = \frac{Ap \left[ p \left( (1+i)^{1/p} - 1 \right) \right]}{1 - (1+i)^{-n}}$                                       |
|           | $p = m$                | $R = \frac{Sj}{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn} - 1}$                                                               | $R = \frac{Aj}{1 - \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-mn}}$                                                               |
|           | $m \neq p$             | $R = \frac{Sp \left( \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1 \right)}{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn} - 1}$ | $R = \frac{Ap \left( \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1 \right)}{1 - \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-mn}}$ |
|           | $m \rightarrow \infty$ | $R = \frac{Sp(e^{\xi/p} - 1)}{e^{\xi n} - 1}$                                                                        | $R = \frac{Ap(e^{\xi/p} - 1)}{1 - e^{-\xi n}}$                                                                        |

### ***Б. Визначення терміну ренти***

Якщо невідомий термін ренти, відомі  $S$  або  $A$  і решта параметрів, то для різних видів рент постнумерандо  $n$  знаходимо за формулою нарощеної суми або сучасної вартості. Для річної ренти постнумерандо з одним нарахуванням відсотків  $n$  знаходимо за формулою (4.3), якщо відома  $S$ , і за формулою (4.10), якщо відома  $A$ .

$$S = R \frac{(1+i)^n - 1}{i}; \quad (1+i)^n = 1 + \frac{Si}{R};$$

$$n = \frac{\ln\left(1 + \frac{Si}{R}\right)}{\ln(1+i)}. \quad (4.23)$$

$$A = R \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}; \quad (1+i)^{-n} = 1 - \frac{Ai}{R};$$

$$n = \frac{\ln\left(\frac{R}{R - Ai}\right)}{\ln(1+i)}. \quad (4.24)$$

Формули для різних рент наведено в табл. 4.2.

### ***В. Визначення величини відсоткової ставки***

Відсоткову ставку для попередніх випадків ми отримували, розв'язавши рівняння, які пов'язували нарощену суму  $S$  та сучасну вартість  $P$ . Для річної постійної ренти постнумерандо ці параметри визначаються за формулами:

$$S = R \frac{(1+i)^n - 1}{i} = Rs_{n;i};$$

$$A = R \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} = Ra_{n;i}.$$

Явного задання відсоткової ставки  $i$  з цих рівнянь не існує. Можна лише використати інтерполяційну формулу:

$$i = i_l + \frac{a - a_l}{a_d - a_l} (i_d - i_l), \quad (4.25)$$

де  $i_d$  і  $i_l$  – верхній і нижній рівні ставок;

$a_d$  і  $a_l$  – таблицні значення коефіцієнтів нарощення або приведення рент для  $i_d$  та  $i_l$  відповідно;

$a$  – значення коефіцієнта нарощення або приведення, для якого визначається величина ставки. Тобто  $a = s_{n;i} = S/R$  або  $a = a_{n;i} = A/R$ .

Таблиця 4.2 – Визначення терміну ренти

| Кількість платежів | Кількість нарахувань | Вихідні параметри                                                                                                                       |                                                                                                                                              |
|--------------------|----------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                    |                      | $S$                                                                                                                                     | $A$                                                                                                                                          |
| $p = 1$            | $m = 1$              | $n = \frac{\ln\left(1 + \frac{Si}{R}\right)}{\ln(1+i)}$                                                                                 | $n = \frac{\ln\left(\frac{R}{R-Ai}\right)}{\ln(1+i)}$                                                                                        |
|                    | $m > 1$              | $n = \frac{\ln\left\{\frac{S}{R}\left[\left(1 + \frac{j}{m}\right)^m - 1\right] + 1\right\}}{m \ln\left(1 + \frac{j}{m}\right)}$        | $n = \frac{\ln\left\{1 - \frac{A}{R}\left[\left(1 + \frac{j}{m}\right)^m - 1\right]\right\}^{-1}}{m \ln\left(1 + \frac{j}{m}\right)}$        |
| $p > 1$            | $m = 1$              | $n = \frac{\ln\left\{\frac{S}{R} p \left[(1+i)^{1/p} - 1\right] + 1\right\}}{\ln(1+i)}$                                                 | $n = \frac{\ln\left\{1 - \frac{A}{R} p \left[(1+i)^{1/p} - 1\right]\right\}^{-1}}{\ln(1+i)}$                                                 |
|                    | $m = p$              | $n = \frac{\ln\left(\frac{S}{R} j + 1\right)}{m \ln\left(1 + \frac{j}{m}\right)}$                                                       | $n = \frac{\ln\left(1 - \frac{A}{R} j\right)^{-1}}{m \ln\left(1 + \frac{j}{m}\right)}$                                                       |
|                    | $m \neq p$           | $n = \frac{\ln\left\{\frac{S}{R} p \left[\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m/p} - 1\right] + 1\right\}}{m \ln\left(1 + \frac{j}{m}\right)}$ | $n = \frac{\ln\left\{1 - \frac{A}{R} p \left[\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m/p} - 1\right]\right\}^{-1}}{m \ln\left(1 + \frac{j}{m}\right)}$ |

Приклад 4.14. Заплановано протягом 6-ти років створити фонд величиною 7 млрд. грн. шляхом щорічних внесків постнумерандо по 1 млрд. грн. Якою повинна бути річна відсоткова ставка, щоб досягнути мети?

▲ Визначимо коефіцієнт нарощення:

$$a = s_{6,i} = \frac{7}{1} = 7.$$

З таблиць коефіцієнтів нарощення знаходимо, що близькі до цього коефіцієнта такі:

$$s_{6,0,05} = 6,801913 \text{ і}$$

$$s_{6,0,07} = 7,153291.$$

Тому припускаємо, що шукана відсоткова ставка перебуває в межах 5% – 7%. Підставляємо всі значення у формулу (4.25):

$$\begin{aligned} i &= 0,05 + \frac{7 - 6,801913}{7,153291 - 6,801913} (0,07 - 0,05) = \\ &= 0,05 + \frac{0,198087}{0,351378} (0,02) = 0,0612748 \approx 0,061 = 6,1\%. \end{aligned}$$

Перевіримо, підрахувавши нарощену суму для знайденого значення відсоткової ставки:

$$S_{6;6,1} = \frac{(1 + 0,061)^6 - 1}{0,061} = 6,99 \approx 7 \text{ млрд. грн.} \quad \blacktriangle$$

Крім формули (4.25), в сучасних умовах для знаходження відсоткової ставки  $i$  використовують комп'ютер.

В EXCEL визначення відсоткової ставки  $i$  проводиться за допомогою функції:

**НОРМА** (кількість періодів; виплата; початкова сума; нарощена сума; тип; припущення),

де припущення вводиться у випадку, коли немає розв'язку. Тоді задається інший варіант  $i$ , за замовчуванням – 10%. Решта параметрів такі самі, як у попередніх функціях.

*Зауваження.* У вищих версіях EXCEL замість функції НОРМА використовується функція СТАВКА.

Англійський варіант функції **НОРМА – RATE**.

Попередній приклад матиме таке розв'язування:

$$\text{НОРМА} (6; -1; ; 7) = 0,061402412.$$

#### 4.6. Нарощені суми і сучасні вартості інших видів постійних рент

Вище було наведено методики розрахунку нарощених сум і сучасних вартостей постійних рент постнумерандо.

Аналогічно розглянемо ці показники для інших видів постійних рент.

##### *А. Ренти пренумерандо*

Для цієї ренти платежі проводяться на початку періоду. Зрозуміло, що на кожен платіж будуть нараховуватися відсотки на 1 раз більше, ніж у ренті постнумерандо. Тому нарощена сума ренти пренумерандо (позначимо  $\tilde{S}$ ) більша в  $(1+i)$  раз від  $S$ . Тобто

$$\tilde{S} = S(1+i). \quad (4.26)$$

Коефіцієнт нарощення річної ренти пренумерандо дорівнює:

$$\tilde{s}_{n,i} = s_{n,i}(1+i).$$

Аналогічно для річної ренти пренумерандо з нарахуванням відсотків  $m$  раз у рік становить:

$$\tilde{S} = S \left( 1 + \frac{j}{m} \right)^m. \quad (4.27)$$

Нарощені суми  $p$ -термінової ренти пренумерандо також можна знайти через відповідні величини ренти постнумерандо за формулами:

- для випадку  $m = 1$  :

$$\tilde{S} = S(1+i)^{1/p}; \quad (4.28)$$

- для випадку  $m \neq p$  :

$$\tilde{S} = S \left( 1 + \frac{j}{m} \right)^{m/p}. \quad (4.29)$$

Така сама ситуація для ренти пренумерандо спостерігається із сучасними вартостями і коефіцієнтами приведення:

- річна при  $m = 1$  :

$$\tilde{A} = A(1+i); \quad \tilde{a}_{n,i} = a_{n,i}(1+i); \quad (4.30)$$

- річна при  $m > 1$  :

$$\tilde{A} = A \left(1 + \frac{j}{m}\right)^m; \quad \tilde{a}_{nm;j/m} = a_{n;j/m} \left(1 + \frac{j}{m}\right)^m; \quad (4.31)$$

-  $p$ -термінова при  $m = 1$ :

$$\tilde{A} = A(1+i)^{1/p}; \quad \tilde{a}_{n;i}^{(p)} = a_{n;i}^{(p)}(1+i)^{1/p}; \quad (4.32)$$

-  $p$ -термінова при  $m \neq p$ :

$$\tilde{A} = A \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m/p}; \quad \tilde{a}_{np;j/m} = a_{np;j/m} \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m/p}. \quad (4.33)$$

### ***Б. Ренти з платежами в середині періодів***

Для таких рент узагальнені характеристики також можна знайти через характеристики ренти постнумерандо. Якщо платежі відбуваються в середині періодів, то нарощені суми і сучасні вартості таких рент обчислюються за допомогою множення відповідних величин рент постнумерандо на множник нарощення за половину періоду. Так, для нарощеної суми і сучасної вартості при:

-  $p = 1$  і  $m = 1$ :

$$S_{1/2} = S(1+i)^{1/2}, \quad A_{1/2} = A(1+i)^{1/2}; \quad (4.34)$$

-  $p = 1$  і  $m > 1$ :

$$S_{1/2} = S \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m/2}, \quad A_{1/2} = A \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m/2}; \quad (4.35)$$

-  $p > 1$  і  $m = 1$ :

$$S_{1/2} = S(1+i)^{1/2p}, \quad A_{1/2} = A(1+i)^{1/2p}; \quad (4.36)$$

-  $p > 1$  і  $m > 1$ :

$$S_{1/2} = S \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m/2p}, \quad A_{1/2} = A \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m/2p}. \quad (4.37)$$

### ***В. Відкладені ренти***

Початок виплат у відкладеній ренти зсунутий вперед відносно деякого моменту часу. На нарощену суму це не впливає. Розглянемо сучасну вартість такої ренти.

Нехай рента сплачується через  $t$  років після деякого моменту часу. Сучасна вартість ренти на початковий момент дорівнює  $A$ . Сучасна вартість на початок терміну відкладення в  $t$  років дорів-

нює дисконтованій на цей термін величині сучасної вартості відкладеної ренти. Для річної:

$${}_t A = A \frac{1}{(1+i)^t} = Av^t = Ra_{n;i} v^t. \quad (4.38)$$

Розглянемо відкладену ренту на прикладі.

Приклад 4.15. Річна рента постнумерандо з параметрами  $R$  та  $n$  ділиться в часі між двома учасниками. Нехай ділиться спадок. Умови поділу такі:

- а) кожен отримує 50% капіталізованої вартості ренти;
- б) рента сплачується спочатку першому учаснику, потім другому.

Протягом якого періоду часу сплачується рента для кожного учасника?

▲ Нехай перший учасник отримує свої 50% протягом  $n_1$  років, тоді другий – протягом  $n_2 = n - n_1$ . Перший учасник отримує термінову ренту, другий – відкладену. Згідно з умовами:

$$A_1 = n_1 A_2;$$

$$Ra_{n_1;i} = Ra_{n_2;i} v^{n_1};$$

$$\frac{1 - (1+i)^{-n_1}}{i} = \frac{1 - (1+i)^{-(n-n_1)}}{i} v^{n_1}.$$

Звідси знайдемо  $n_1$ :

$$\frac{1}{i} - \frac{(1+i)^{-n_1}}{i} - \left( \frac{1}{i} - \frac{(1+i)^{-(n-n_1)}}{i} \right) \cdot \frac{1}{(1+i)^{n_1}} = 0,$$

$$\frac{1}{i} - \frac{(1+i)^{-n_1}}{i} - \frac{(1+i)^{-n_1}}{i} + \frac{(1+i)^{-n}}{i} = 0,$$

$$2 \cdot \frac{(1+i)^{-n_1}}{i} = \frac{1 + (1+i)^{-n}}{i},$$

$$(1+i)^{-n_1} = \frac{1 + (1+i)^{-n}}{2},$$

$$n_1 = \frac{-\ln\left\{\frac{1+(1+i)^{-n}}{2}\right\}}{\ln(1+i)}, \quad (4.39)$$

$$\text{а } n_2 = n - n_1. \quad \blacktriangle \quad (4.40)$$

Продемонструємо формули (4.39) і (4.40) на числовому прикладі.

**Приклад 4.16.** Нехай ділиться спадок за такими умовами поділу, як у попередньому прикладі для  $n = 8$ ,  $i = 0,14$ .

Знайти періоди часу, протягом яких сплачується рента, для кожного учасника.

▲ Використовуємо формулу (4.39):

$$n_1 = \frac{-\ln\left\{\frac{1+(1+0,14)^{-8}}{2}\right\}}{\ln(1+0,14)} = \frac{0,392629}{0,131028} = 2,996518 \approx 3 \text{ роки,}$$

$$\text{а } n_2 = 8 - 3 = 5 \text{ років.}$$

Отже, для першого учасника рента сплачується 3 роки, для другого – 5 років. ▲

Оскільки ренти, початок виплат у яких зсунутий вперед відносно деякого моменту часу, називаються відкладеними, то надалі усі ренти, початок виплат у яких відбувається у початковий момент часу, називаються *терміновими*.

### ***Г. Вічні ренти***

Вічна рента – це ряд платежів, кількість яких необмежена. Така рента виплачується нескінченну кількість років. Найчастіше такий вид ренти застосовують для облігацій.

Для вічної ренти нарощена сума – нескінченно велика величина:

$$S_\infty \rightarrow \infty.$$

Оцінимо сучасну вартість такої ренти. Для випадку річної ренти при  $m = 1$ :

$$A_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} A = \lim_{n \rightarrow \infty} R \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{R}{i}.$$



Цю формулу можна використовувати при великих термінах  $n$  і високій відсотковій ставці  $i$ .

Для випадку  $p > 1$ ,  $m = 1$ :

$$A_{\infty} = \frac{R}{p \left[ (1+i)^{1/p} - 1 \right]},$$

при  $p = m > 1$ :

$$A_{\infty} = \frac{R}{j}.$$

#### ***Д. Рента з періодом платежів більше року***

Нехай  $r$  – часовий інтервал між двома платежами, число нарахувань відсотків  $m = 1$ .

Сучасна вартість першого платежу на початок ренти становить:

$$Tv^r,$$

другого

$$Tv^{2r},$$

...

останнього

$$Tv^n,$$

де  $T$  – платіж,

$n$  – термін кратний  $r$ .

Сучасні вартості утворюють геометричну прогресію з першим членом  $b_1 = Tv^r$ , знаменником  $q = v^r$ . Число членів геометричної прогресії  $\frac{n}{r}$ . Сучасна вартість обчислюється за формулою:

$$\begin{aligned} A &= Tv^r \frac{v^{\frac{n}{r}r} - 1}{v^r - 1} = Tv^r \frac{v^n - 1}{v^r - 1} = T \frac{v^n - 1}{v^{-r}(v^r - 1)} = T \frac{1 - v^n}{v^{-r} - 1} = \\ &= T \frac{1 - (1+i)^{-n}}{(1+i)^r - 1} = T \frac{a_{n;i}}{s_{r;i}}. \end{aligned}$$

#### ***Е. Змінна ставка***

На практиці часто трапляються потоки платежів зі змінними відсотковими ставками. Наприклад, при погашенні заборгованості в перші роки застосовуються низькі ставки і вищі – в наступні.

Зміни ставок можуть бути будь-якими.

Якщо зміни „сходинкові”, то для  $S$  і  $A$  використовуються стандартні формули:

$$S = Rs_{n_1; i_1} (1 + i_2)^{n_2} + Rs_{n_2; i_2},$$

$$A = Ra_{n_1; i_1} + Ra_{n_2; i_2} (1 + i_1)^{n_1}.$$

## 4.7. Конверсії рент

### 4.7.1. Види конверсій

Іноколи при розробці контрактів або при його виконанні необхідно змінити умови виплати ренти. Інакше кажучи, відбувається конвертування умов, які були передбачені при виплаті ренти фінансової ренти.

Розрізняють такі види конверсії:

- *викуп ренти* (заміна її разовим платежем);
- *розстрочка платежу* (вид конверсії обернений до попереднього, коли платіж замінюється рентою);
- *консолідація (об'єднання) рент*.

Будь-який вид конверсії повинен відбуватися із врахуванням *принципу фінансової еквівалентності*.

#### ***A. Викуп ренти***

Як відмічено вище, цей вид конверсії полягає в заміні ренти разовим платежем. *Платіж повинен дорівнювати сучасній вартості відповідної ренти*.

#### ***B. Розстрочка платежу***

Як вказано вище, цей вид конверсії обернений до попереднього і полягає у заміні платежу рентою. *Сучасна вартість ренти, за якою будуть проводитися платежі, має дорівнювати сумі боргу*. Задача полягає у визначенні величини платежу  $R$  або терміну  $n$  за умови, що всі інші параметри задані згідно з формулами таблиць 4.1 та 4.2.

#### ***B. Об'єднання рент***

Об'єднання рент полягає в заміні декількох рент однією, параметри якої необхідно визначити. Як і в попередніх випадках, при цій заміні теж має бути принцип фінансової еквівалентності: *суми*

сучасних вартостей рент, яких ми замінюємо, дорівнюють сучасній вартості однієї ренти.

$$A = \sum_q A_q .$$

Ренти, які об'єднуються, можуть бути будь-які: термінові або відкладені, річні або  $p$ -термінові і т. д. З рентою, яка заміняє, треба чітко визначитися, знати її вид, усі параметри, крім одного. Найчастіше невідомим параметром є величина платежу  $R$  або термін  $n$ , які шукаємо згідно з формулою попередньої теми.

Наприклад, якщо невідомий  $R$  і рента термінова, то з формули

$$A = Ra_{n;i} = \sum_q A_q$$

знаходимо:

$$R = \frac{\sum_q A_q}{a_{n;i}} . \quad (4.41)$$

Якщо невідомий термін, то значення його знаходимо з рівності:

$$a_{n;i} = \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} = \frac{\sum_q A_q}{R} .$$

Отже,

$$n = \frac{-\ln\left(1 - \frac{i \sum_q A_q}{R}\right)}{\ln(1+i)} . \quad (4.42)$$

Зазначимо, що термін можна знайти лише у випадку  $\frac{i \sum_q A_q}{R} < 1$ .

Приклад 4.17. Дві річні термінові ренти постнумерандо з терміном 5 і 6 років і разовими платежами 80 і 90 тис. грн. заміняються на одну термінову ренту терміном на 7 років і відсотковою ставкою 20%. Визначити суму нового разового внеску і суму нового разового внеску для випадку, якщо об'єднана рента була відкладена на два роки.

▲ Знаходимо сучасні вартості ренти, які підлягають заміні.

$$A_1 = Ra_{n,i} = 80 \cdot a_{5;20} = 80 \cdot 2,99061 = 239,2488,$$

$$A_2 = Ra_{n,i} = 90 \cdot a_{6;20} = 90 \cdot 3,32551 = 299,2959.$$

Отже, сучасна вартість об'єднаної ренти дорівнює:

$$A = 239,2488 + 299,2959 = 538,5447.$$

Коефіцієнт приведення:

$$a_{7;20} = 3,60459.$$

Отже, згідно з формулою (4.41) новий разовий платіж становить:

$$R = \frac{538,5447}{3,60459} = 149,4.$$

Для випадку, коли об'єднана рента відкладена на два роки:

$$R = \frac{538,5447}{a_{7,20} \cdot v^2} = \frac{538,5447}{3,60459 \cdot 1,2^{-2}} = 215,1436.$$

Отже, при відкладенні ренти на подальший термін платіж зріс. ▲

#### **4.7.2. Зміна параметрів ренти**

Якщо у ренті зміниться хоча б одна умова, то це рівносильно тому, що одну ренту замінюють іншою. Як і в попередніх випадках, ця заміна базується на принципі фінансової еквівалентності. Тому для збереження цього принципу потрібна рівність сучасних вартостей обох рент. Розглянемо випадки заміни однієї ренти на іншу.

##### ***A. Заміна термінової ренти на відкладену***

Нехай є термінова рента постнумерандо з параметрами  $R_1$ ,  $n_1$  і відсотковою ставкою  $i$ . Необхідно відкласти виплати на  $t$  років, тобто термінову ренту замінити на відкладену з параметрами  $R_2$ ,  $n_2$ ,  $i$  ( $t$  не входить у термін ренти  $n_2$ ).

- Розглянемо задачу при відомій величині платежу ренти  $R_2 = R_1 = R$ , а невідомому  $n_2$ . Згідно з принципом фінансової еквівалентності:

$$Ra_{n_1, i} = Ra_{n_2, i} v^t,$$

$$\frac{1 - (1+i)^{-n_1}}{i} = \frac{1 - (1+i)^{-n_2}}{i} \cdot \frac{1}{(1+i)^t}.$$

Звідси знайдемо  $n_2$ :

$$\frac{1 - (1+i)^{-n_2}}{i} = \frac{(1 - (1+i)^{-n_1}) \cdot (1+i)^t}{i},$$

$$1 - (1+i)^{-n_2} = (1 - (1+i)^{-n_1}) \cdot (1+i)^t,$$

$$(1+i)^{-n_2} = 1 - (1 - (1+i)^{-n_1}) \cdot (1+i)^t.$$

Отже,

$$n_2 = \frac{-\ln\{1 - (1 - (1+i)^{-n_1}) \cdot (1+i)^t\}}{\ln(1+i)}. \quad (4.43)$$

Приклад 4.18. Річна термінова рента постнумерандо терміном 8 років, відсотковою ставкою 7% і разовим платежем 70 тис. грн. була відкладена на 2 роки. Визначити термін нової ренти, якщо разовий платіж і відсоткова ставка залишаються ті самі.

▲ Знаходимо термін нової ренти згідно з формулою (4.43).

Виконуємо необхідні обчислення:

$$(1 + 0,07)^8 = \frac{1}{1,07^8} = 0,582009;$$

$$(1 + 0,07)^2 = 1,144900;$$

$$\ln(1 + 0,07) = 0,067659;$$

$$n_2 = \frac{-\ln\{1 - (1 - 0,582009) \cdot 1,144900\}}{0,067659} = \frac{0,65116}{0,067659} = 9,624147.$$

Отже, якщо ренту відкладемо на 2 роки, то це призведе до збільшення терміну виплати: на 1,62 роки.

Перетворимо термін виплати до цілого числа років. Нехай це буде 9 років (без врахування 2 років відкладення).

Сучасна вартість вихідної ренти становить:

$$A = Ra_{n,i} = 70 \cdot a_{8,0,07} = 70 \cdot \frac{1 - 1,07^{-8}}{0,07} = 70 \cdot 5,97130 = 417,9909.$$

Сучасна вартість відкладеної ренти дорівнює:

$$\begin{aligned} A &= Ra_{n,i}v^t = 70 \cdot a_{9,0,07} \cdot 1,07^{-2} = 70 \cdot \frac{1 - 1,07^{-9}}{0,07} \cdot 1,07^{-2} = \\ &= 70 \cdot 6,51523 \cdot 0,873439 = 398,3459. \end{aligned}$$

Сучасна вартість відкладеної на 2 роки і терміном 9 років ренти менша від вихідної, тому треба зробити доплату. Різницю  $417,9909 - 398,3459 = 19,645$  тис. грн. треба виплатити на початку дії контракту або в будь-який період з нарахованими відсотками. ▲

- Термін  $n_2$  при відомій величині платежу ренти  $R_2 \neq R_1$ , розраховуємо за формулою:

$$n_2 = \frac{-\ln\left\{\frac{R_1}{R_2} \left[1 - \left(1 - (1+i)^{-n_1}\right) \cdot (1+i)^t\right]\right\}}{\ln(1+i)}.$$

Доведення аналогічне наведеному вище.

- Розглянемо задачу при відомому терміні  $n_2 = n_1 = n$ , а невідомій величині платежу ренти  $R_2$ . Згідно з принципом фінансової еквівалентності отримаємо:

$$R_1 a_{n_1,i} = R_2 a_{n_2,i} v^t.$$

Оскільки  $n_2 = n_1 = n$ , то

$$R_2 = \frac{R_1}{v^t} = R_1 (1+i)^t.$$

- Величина платежу ренти  $R_2$  при  $n_2 \neq n_1$  обчислюється за формулою:

$$R_2 = \frac{R_1 a_{n_1,i}}{a_{n_2,i} v^t} = R_1 \frac{a_{n_1,i}}{a_{n_2,i}} (1+i)^t.$$

### ***В. Заміна річної ренти на р-термінову***

Нехай річна термінова рента з параметрами  $R_1$ ,  $n_1$  і відсотковою ставкою  $i$  замінюється на  $p$ -термінову з параметрами  $R_2$ ,  $n_2$ ,  $i$ ,  $p$ .

- Розглянемо задачу при відомому терміні  $n_2$ , а невідомій величині платежу ренти  $R_2$ . Згідно з принципом фінансової еквівалентності маємо:

$$R_1 a_{n_1, i} = R_2 a_{n_2, i}^{(p)}.$$

Підставивши формули коефіцієнтів приведення, отримаємо результат:

$$R_2 = R_1 \frac{a_{n_1, i}}{a_{n_2, i}^{(p)}} = R_1 \frac{\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}}{\frac{1 - (1+i)^{-n}}{p[(1+i)^{1/p} - 1]}} = R_1 \frac{p[(1+i)^{1/p} - 1]}{i}.$$

- Розглянемо задачу при відомій величині платежу ренти  $R_2$ , а невідомому терміні  $n_2$ . Згідно з принципом фінансової еквівалентності отримаємо:

$$R_1 a_{n_1, i} = R_2 a_{n_2, i}^{(p)},$$

$$a_{n_2, i}^{(p)} = \frac{R_1 a_{n_1, i}}{R_2},$$

$$\begin{aligned} \frac{1 - (1+i)^{-n_2}}{p[(1+i)^{1/p} - 1]} &= \frac{R_1 \frac{1 - (1+i)^{-n_1}}{i}}{R_2}, \\ 1 - (1+i)^{-n_2} &= \frac{p[(1+i)^{1/p} - 1] \cdot R_1 [1 - (1+i)^{-n_1}]}{iR_2} = \\ &= \frac{R_1 p [(1+i)^{1/p} - (1+i)^{-n_1/p} + (1+i)^{-n_1} - 1]}{iR_2}, \\ (1+i)^{-n_2} &= \frac{iR_2 - R_1 p [(1+i)^{1/p} - (1+i)^{-n_1/p} + (1+i)^{-n_1} - 1]}{iR_2}, \\ n_2 &= \frac{-\ln\left(\frac{iR_2 - R_1 p [(1+i)^{1/p} - (1+i)^{-n_1/p} + (1+i)^{-n_1} - 1]}{iR_2}\right)}{\ln(1+i)}. \end{aligned}$$

### ***В. Загальний випадок конверсії***

Розглянемо тільки постійні дискретні ренти. Нехай потік ренти постнумерандо нерегулярний: платежі  $R_t$  виплачуються протягом часу  $n_t$  з початку контракту. Рента, яка замінить цей потік пла-

тежів, має параметри  $R$  та  $n$ . Тоді рівняння еквівалентності має такий вигляд:

$$Ra_{n,i} = \sum R_t v^{-n_t}.$$

З цієї рівності знаходимо  $R$  або  $n$ .

Розв'язок оберненої задачі досягається шляхом підбору величин платежів, що задовольняють рівність.

### Питання для самоконтролю

25. Дайте визначення потоку платежів і розкрийте його класифікацію.
26. Який платіж називається фінансовою рентою?
27. Охарактеризуйте параметри ренти.
28. Проаналізуйте ренти за класифікаційними групами.
29. Дайте визначення сучасної вартості та нарощеної суми потоку платежів.
30. Наведіть формули розрахунку нарощеної суми та сучасної вартості потоку платежів.
31. Виведіть формулу обчислення нарощеної суми річної постійної ренти постнумерандо.
32. Наведіть декілька формул обчислення нарощеної суми ренти постнумерандо з різними параметрами.
33. Порівняйте результати нарощення для рент з різними параметрами.
34. Виведіть формулу обчислення сучасної вартості річної постійної ренти постнумерандо.
35. Наведіть декілька формул обчислення сучасної вартості ренти постнумерандо з різними параметрами.
36. Порівняйте сучасні вартості для рент з різними параметрами.
37. Запишіть формули залежностей між нарощеною і сучасною вартістю ренти та коефіцієнтами нарощення і приведення.
38. Наведіть декілька формул визначення величини платежу ренти з різними параметрами.
39. Наведіть декілька формул визначення терміну ренти з різними параметрами.



40. Опишіть алгоритм визначення величини відсоткової ставки.
41. Яка методика розрахунку нарощених сум і сучасних вартостей постійних рент пренумерандо?
42. Наведіть методику розрахунку нарощених сум і сучасних вартостей постійних рент з платежами в середині періодів.
43. Охарактеризуйте відкладені ренти на прикладі задачі про поділ спадку.
44. Дайте визначення вічної ренти і оцініть її нарощену суму і сучасну вартість.
45. Прокласифікуйте види конверсії рент.

### ВПРАВИ

15. Фірма створює резервний фонд. Для цього в кінці кожного року протягом 4 років у банк вкладається по 2000 грн. Відсоткова ставка банку – 16%. Визначте нарощену суму фонду і його поточну вартість.

16. Організація створює фонд страховки в 800 тис. грн. Планується створити його протягом п'яти років. Внески робляться: а) щомісячно; б) в кінці року під відсоткову ставку 14% річних. Визначте поточну вартість фонду і величину разового внеску.

17. Фірма “Мрія ” взяла кредит в 50000 грн. на 3 роки. Річна відсоткова ставка за користування кредитом – 16%. Визначте величину разового платежу і загальну вартість кредиту при оплаті: а) щорічними рівними внесками в кінці кожного року, б) щомісячними рівними внесками в кінці кожного місяця.

18. Поточна вартість звичайної ренти з внесками 5500 грн. в кінці кожного місяця і нарахуванням 4% річних один раз на рік дорівнює 20 тис. грн. Визначте термін ренти і нарощену суму.

19. Поточна вартість звичайної ренти із щомісячними рівними внесками в кінці кожного місяця і терміном 5 років дорівнює 80000 грн. Нарощена вартість – 240000 грн. Визначте річну відсоткову ставку, якщо нарахування відсотків відбувається один раз на рік.

20. Фірма “ЛОЛА” створює резервний фонд і для цього щомісячно переводить в банк 8 тис. грн. Річна відсоткова ставка при нарахуванні відсотків один раз на рік – 14%. Через який час на рахунок фірми буде 230000 грн.?

21. Пенсіонер збирає гроші для купівлі телевізора вартістю 1240 грн. Для цього він вкладає в банк щомісячно, але в кінці місяця, 50 грн. Номінальна відсоткова ставка банку – 7%. Нарахування відсотків щомісячне. Розрахуйте динаміку нарощування внеску за перших 1,5 року.

22. В кінці кожного місяця сім'я вкладає в банк 100 грн. під номінальну ставку відсотків 14%. Нарахування відсотків щомісячне. Який термін необхідний для того, щоб сума заощадження стала достатньою для придбання легкового автомобіля вартістю 70000 грн.?

23. Проводиться заміна річної ренти постнумерандо з річним платежем 1000 грн. і терміном 10 років річною рентою постнумерандо терміном 6 років. Обчислити річний платіж нової ренти, якщо відсоткова ставка – 10%.

24. Яку суму повинен щомісячно в кінці місяця вкласти член спілки “Калина”, щоб на його рахунку через 2 роки була сума 4000 грн. Номінальна відсоткова ставка спілки при щомісячному нарахуванні відсотків – 12%.

25. Кредитна спілка “Калина” створює резервний фонд 60000 грн. Заплановано створити його протягом 3 років: а) рівними річними платежами на початку кожного року, б) рівними щомісячними платежами на початку місяця. Відсоткова ставка спілки – 16%, і відсотки нараховуються раз на рік. Визначте величину разового платежу.

26. Молокозавод отримав кредит вартістю 6 млн. грн. на 1 рік. Річна відсоткова ставка за користування кредитом – 23%. Платежі за кредитом відбуваються на початку кожного місяця рівними сумами. Визначте величину місячного платежу.

27. Для створення резервного фонду фірма вносить 1440 грн.: а) на початку кожного року, б) щомісячно. Резервний фонд заплановано створити протягом 8 років. Відсоткова ставка банку – 12% річних. Визначте нарощену і поточну вартість фонду.

28. Нарощена вартість термінової ренти з щомісячними внесками на початку кожного місяця по 7500 грн. і щомісячним нарахуванням відсотків дорівнює 325 тис. грн. Номінальна річна відсоткова ставка – 13%. Визначте термін ренти.

29. Яку суму отримає студент на випускний вечір якщо буде вкладати свою стипендію величиною 126 грн. на початку кожного місяця протягом п'яти років навчання.

30. Для створення фонду страхування фірма щорічно на початку кожного року протягом п'яти років вкладає в банк привілейовані акції. Визначте дохід фірми і прибутковність операції за ефективною ставкою простих і складних відсотків.

31. Студент вкладає на початку кожного місяця в банк по 30 грн. під 18% річних. Визначте, через який час він збере суму, достатню для купівлі холодильника вартістю 1450 грн. Відсотки нараховуються щомісячно.

32. Сім'я хоче купити через 5 років автомобіль за 8 тис. дол. Яку суму їй потрібно вносити кожного року в банк за умови, що банк нараховує відсотки щомісячно при ставці 8% річних: а) на початку року; б) в кінці року?

33. Яку суму повинен батько покласти сьогодні на рахунок при ставці 8% річних, щоб забезпечити сину щорічні виплати обсягом 700 дол. протягом 4-ох років навчання в інституті. (Син навчається на першому курсі, за перший рік батько оплатив).

34. Потрібно об'єднати три фінансові ренти в одну із щоквартальними платежами і щоквартальним нарахуванням відсотків. Термін об'єднаної ренти – 2 роки. Номінальна відсоткова ставка – 24%. Платежі об'єднаної ренти відкладаються на півроку. Умови об'єднання рент наведені в табл. 5.1, де  $m$  і  $p$  – число періодів нарахування відсотків і платежів у році;  $j$  – номінальна відсоткова ставка рент;  $t$  – тривалість періоду, на який відкладаються платежі,  $R$  – разові платежі.

Таблиця 5.1

| № ренти | Термін ренти | $m$ | $p$ | $t$ , років | $R$ , тис. | $j$ , % |
|---------|--------------|-----|-----|-------------|------------|---------|
| 1       | 1            | 4   | 4   | 0           | 18         | 16      |
| 2       | 2            | 6   | 6   | 0           | 24         | 14      |
| 3       | 2,5          | 12  | 2   | 1           | 16         | 18      |

35. Потрібно об'єднати три фінансові ренти (табл. 5.2) в одну із щомісячними платежами і щомісячними нарахуваннями відсотків терміном на один рік. Номінальна відсоткова ставка об'єднаної ренти – 28%. Рентні платежі об'єднаної ренти починаються відразу. Визначте вартість місячного платежу.

Таблиця 5.2

| № ренти | Термін ренти | $m$ | $p$ | $t$ , років | $R$ , тис. | $j$ , % |
|---------|--------------|-----|-----|-------------|------------|---------|
|         |              |     |     |             |            |         |

|   |     |    |   |   |     |    |
|---|-----|----|---|---|-----|----|
| 1 | 2   | 4  | 4 | 0 | 14  | 14 |
| 2 | 1   | 12 | 4 | 0 | 50  | 23 |
| 3 | 1,5 | 6  | 4 | 0 | 120 | 18 |

36. Потрібно об'єднати три фінансові ренти (табл. 5.3) в одну із щоквартальними платежами і щоквартальними нарахуваннями відсотків. Термін об'єднаної ренти – 3 роки. Платежі ренти відкладаються на півроку. Відсоткова ставка об'єднаної ренти – 23%.

Таблиця 5.3

| № ренти | Термін ренти | $m$ | $p$ | $t$ , років | $R$ , тис. | $j$ % |
|---------|--------------|-----|-----|-------------|------------|-------|
| 1       | 2            | 12  | 6   | 0.5         | 3          | 24    |
| 2       | 3            | 6   | 6   | 1           | 60         | 30    |
| 3       | 5            | 12  | 6   | 0           | 40         | 26    |

37. Передбачається поставка обладнання вартістю 80000000 грн. Можливі наступні варіанти оплати:

1) аванс – 15%. Оплата залишкової суми протягом 2-х років рівними місячними платежами під номінальну відсоткову ставку 16% річних. Нарахування відсотків щомісячне;

2) аванс – 10%. Відстрочка платежу протягом 6 місяців. Оплата залишку рівними щоквартальними платежами протягом 2-х років. Нарахування відсотків один раз на рік за відсотковою ставкою 17% річних;

3) оплата обладнання протягом року рівними щоквартальними платежами за номінальною відсотковою ставкою – 18% річних нарахування відсотків щоквартальне.

Розгляньте фінансові умови запропонованих варіантів.

38. Продається об'єкт вартістю 3,5 млн. грн. Продавець пропонує оплату рівними місячними платежами протягом 2-х років. Нарахування відсотків щомісячне під номінальну відсоткову ставку 24,5 річних. Покупець пропонує такі умови: оплата рівними щоквартальними платежами протягом 3-х років. Нарахування відсотків два рази на рік під номінальну відсоткову ставку 20% річних. Визначте величину річних платежів і загальну нараховану суму для обох варіантів.

39. Автосалон реалізує автомобіль вартістю 84000 грн. Можливі такі варіанти оплати:

1) аванс – 15%. Залишок вартості – в кредит терміном на рік під номінальну відсоткову ставку 24% річних. Відсотки нарахову-

ються щомісячно. Рівні платежі за кредитом проводяться щоквартально;

2) аванс – 20% вартості. Можлива відстрочка платежів на три місяці. Кредит нараховується і виплачується щомісячно рівними сумами під номінальну відсоткову ставку 25,5% річних протягом року;

3) аванс – 25% вартості кредиту. Кредит нараховується і виплачується терміново протягом 2-х років під номінальну відсоткову ставку 26% річних щоквартально рівними сумами.

Розрахуйте фінансові можливості трьох варіантів.

40. Замініть річну ренту з річним платежем 600 грн. і терміном 10 років семирічною річною рентою. Ставка відсотка – 8% на рік.

41. Замініть річну десятирічну ренту з річним платежем 1000 грн. на ренту з піврічним платежем по 600 грн., річна ставка відсотка – 8%.

42. Син мав у банку на рахунку 50000 грн., на які щомісячно нараховувались 0,8%. Син поїхав у десятирічне відрядження за кордон і попросив батька за цих 10 років потратити всі його гроші, що є на рахунку. Скільки грошей буде отримувати батько кожного місяця?

43. Покупець запропонував два варіанти розрахунку при купівлі дачі: 1) 5000 дол. терміново, а потім по 1000 дол. протягом 5-ти років; 2) 8000 дол. терміново і по 300 дол. протягом 5-ти років. Який варіант вигідніший при річній ставці відсотка: а) 10%, б) 5%.

44. Яким повинен бути платіж кінцевої річної ренти терміном 8-ми років, щоб її сучасна вартість була 16000 при ставці 12%?

45. Скільки років буде потрібно, щоби платежі обсягом 1 млн. грн. в кінці кожного року досягли 10,897 млн. грн., якщо відсоткова ставка – 14,5%.

46. Фонд обсягом 21 млн. грн. був створений за 2 роки шляхом надходжень по 770 тис. грн. на початку кожного місяця. Визначити річну відсоткову ставку.

47. Позичка величиною 5000 тис. грн. погашається щомісячними платежами по 141,7 тис. грн. Скільки років відбуватиметься погашення при річній відсотковій ставці 16%?

48. Визначте річну відсоткову ставку для позики в 980 тис. грн., що погашається рівномірними періодичними платежами по 100 тис. грн. кожні півроку протягом семи років.

## 5. РИЗИК ФІНАНСОВИХ ОПЕРАЦІЙ

### 5.1. Аналіз економічного ризику

На фінансовому ринку існує невідомість, невизначеність, неоднозначність, недостовірність, конфліктність показників витрат і віддачі. Тому виникає проблема вимірювання ризику і його впливу на результати інвестицій.

Під *невизначеністю* [6] розуміють об'єктивну неможливість здобуття абсолютного знання про об'єктивні і суб'єктивні фактори функціонування системи, неоднозначність її параметрів. З імовірнісної точки зору *невизначеність* [5] – неможливість оцінки майбутнього розвитку подій, як з погляду ймовірності їхньої реалізації, так і з погляду виду їхнього прояву. Чим більша невизначеність під час прийняття рішення, тим більший ступінь ризику прийняти несприятливе рішення.

Перше визначення ризику належить Ф. Найту (1921). Ризик виникає тоді, коли деяка дія може призвести до декількох взаємозаперечуючих результатів з відомим розподілом їхніх ймовірностей. Якщо такий розподіл невідомий, то відповідна ситуація розглядається як невизначеність.

Термін ризик у перекладі з італійської (*risiko*) – це „небезпека”, „загроза”; слова „*risikon*”, „*risa*” з грецької – це „стрімчак”, „скеля”; з французької „*risque*” – „об'їжджати скелю”.

В економічній літературі немає єдиного, загальновизнаного та загальноприйнятого тлумачення поняття „економічний ризик”, що пояснюється багатоаспектністю цієї економічної категорії. Виокремимо такі підходи до інтерпретації цієї категорії:

- ризик [7] – це можливість відхилення від мети, заради досягнення якої було прийнято управлінське рішення;
- ризик [14] – невизначеність, пов'язана з якою-небудь подією або її наслідком;
- ризик [7] – це імовірність загрози втрати підприємством частини своїх ресурсів, недоодержання доходів або прояв додаткових витрат в результаті здійснення певної виробничої і фінансової діяльності;
- ризик [4] – це дія, яка відбувається в умовах вибору в надії на сприятливий результат, коли у випадку невдачі існує небезпека опинитися в гіршому становищі, ніж до вибору.

На наш погляд, вдале визначення економічного ризику наведено у посібнику [2]. На основі останнього пропонуємо таке визначення:

*Економічний ризик* – це економічна категорія, притаманна діяльності суб'єктів господарювання, яка пов'язана із подоланням невизначеності, конфліктності, альтернативності в ситуаціях оцінювання, управління, неминучого вибору.

Невизначеність та спричинений нею ризик неминучі в усіх прийнятих економічних рішеннях. Незважаючи на те, що ризик може призвести до збитків, недоодержання доходу, він є рушійною силою господарювання в сучасних умовах. З досвіду вітчизняних і зарубіжних провідних підприємств відомо, що їхній успіх пов'язаний з проникненням на нові ринки, впровадженням нових інноваційних технологій, розробкою нових товарів, а це все – ризикові рішення.

В економічній літературі виокремлюють такі функції ризику (рис. 5.1):

- інноваційна, виконуючи яку, ризик стимулює пошук нетрадиційних вирішень проблем, з якими стикається суб'єкт діяльності;
- регулятивна функція має суперечливий характер і виступає у двох формах: конструктивній і деструктивній. Конструктивна форма полягає в тому, що здатність ризикувати – один зі шляхів успішної діяльності. Деструктивна форма полягає в тому, що ризик може функціонувати як дестабілізуючий фактор;

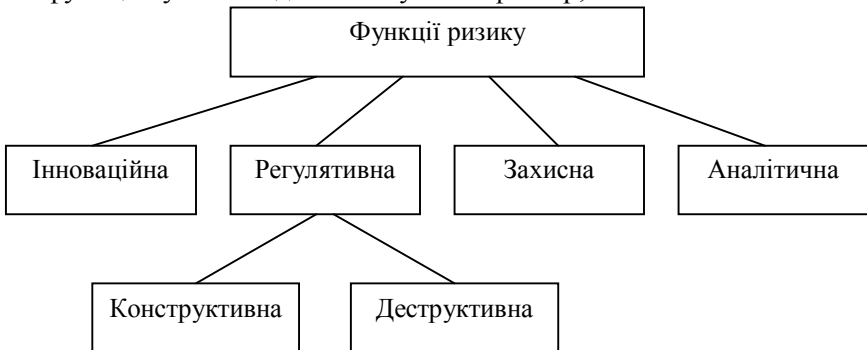


Рис. 5.1. Функції ризику

- захисна функція ризику виявляється в тому, що якщо для суб'єкта діяльності ризик – природний стан, то нормальним має бути і терпиме ставлення до невдач;

- аналітична функція пов'язана з тим, що, аналізуючи всі можливі альтернативи, суб'єкт діяльності прагне вибирати найбільш рентабельні і найменш ризиковані рішення;

Багатовекторність економічних процесів породжує проблеми проведення процедури класифікації ризику, яка полягає, насамперед, в їхній різноманітності.

Враховуючи характерні особливості діяльності об'єктів, можна виокремити такі ризики:

- виробничий (пов'язаний з виробничою діяльністю, в результаті якої неефективно використовується сировина, застосовуються нові методи виробництва, збільшується собівартість продукції, або з можливістю невиконання суб'єктом економічної діяльності своїх зобов'язань щодо контракту чи договору з іншим суб'єктом економічної діяльності);
- фінансовий (ризик, що виникає за фінансового підприємства чи фінансових операцій, тоді коли в ролі товару виступають або грошові кошти, або валюта, або цінні папери; пов'язаний з можливістю невиконання суб'єктом економічної діяльності своїх фінансових зобов'язань перед інвестором внаслідок використання для фінансування діяльності кредиту);
- інвестиційний (пов'язаний з можливістю знецінювання інвестиційно-фінансового портфеля, який складається як з власних цінних паперів, так і з позичених);
- ринковий (пов'язаний з можливим коливанням ринкових відсоткових ставок, як національної грошової одиниці, так і курсів іноземних валют);
- портфельний (полягає у ймовірності втрати за окремими типами цінних паперів, а також за всіма категоріями кредитів). Портфельні ризики поділяються на фінансові, ризики ліквідності, систематичні та несистематичні.

У практичній діяльності, виокремлюють класифікацію ризику цінних паперів:

- 1) ризик падіння загальноринкових цін;



- 2) ризик інфляції;
- 3) галузевий ризик;
- 4) фінансовий ризик;
- 5) ризик ліквідності;
- 6) систематичний та несистематичний.

Фінансовий ризик, пов'язаний з грошово-фінансовою сферою, й призводить до загрози грошових втрат підприємцем, банком, підприємством. Водночас, фінансовий ризик ділиться на валютний, кредитний, інвестиційний (рис.5. 2).

Валютний ризик – це ризик фінансових втрат внаслідок зміни курсу валют. Коли курс валют занижений, тоді підвищується ефективність експорту і відбувається приплив іноземного капіталу. У випадку підвищеного курсу валют вигідним стає імпорт, а ефективність експорту знижується. Валютний ризик має три різновиди: ризик операцій, ризик переказу, економічний ризик.

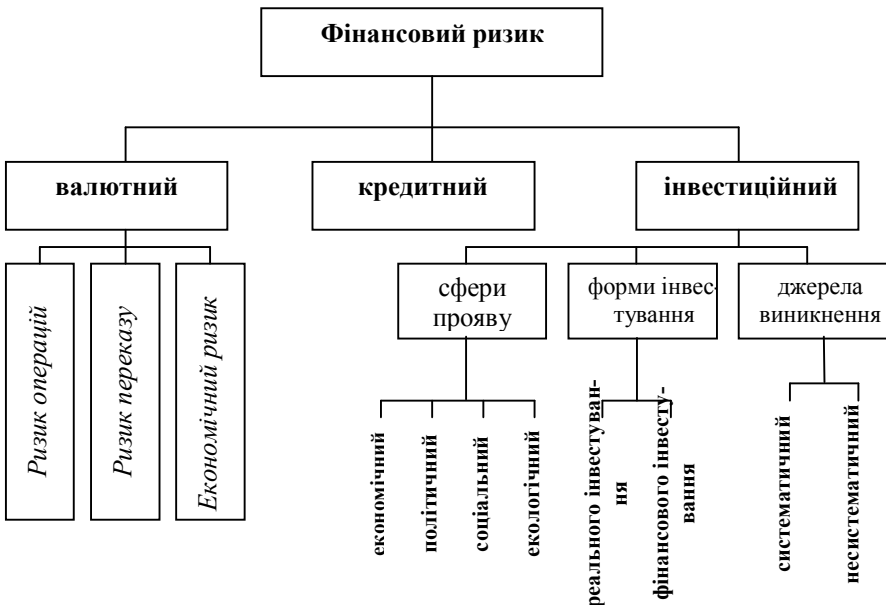


Рис. 5.2. Класифікація фінансових ризиків

Ризик операцій – це ймовірність валютних втрат за операціями в іноземній валюті. Ризик операцій виникає через невизначен-

ність вартості в національній валюті операції в майбутньому. Для експортера ризик операцій виникає за падіння курсу валюти з моменту підписання договору до отримання платежу. Для імпортера ризик операцій виникає за зростання курсу валюти з моменту підтвердження замовлення до дати платежу. Страхуванням від цього виду ризику можуть бути форвардні контракти і їхні інструменти, валютні ф'ючерси, опціони, свопи, споти.

*Приклад 5.1.* Компанія продала за кордон металопродукцію на суму 323 тис. дол. На момент підтвердження замовлення обмінний курс долар/фунт стерлінгів був 1,9 дол. за 1 фунт стерлінгів. На момент оплати, яка відбулася через два місяці, курс становив 2,02 доларів за 1 фунт стерлінгів. Обчислити у фунтах стерлінгів отримані засоби і прибуток (або втрати).

▲ Курс долара щодо фунта стерлінгів знизився, тому фінансовий стан компанії обтяжений ризиком операцій. Компанія продала продукції на суму  $323000 : 1,9 = 170000$  фунтів стерлінгів. Отримала  $323000 : 2,02 = 159901$  фунтів стерлінгів. Отже, вона недоотримала  $170000 - 159901 = 10099$  фунтів стерлінгів. ▲

*Приклад 5.2.* Компанія закупила в фірми “Brother” (Японія) швейне обладнання на 20 млн. ієн. На момент доставки обмінний курс становив 120 ієн за 1 дол., а на момент оплати – 116 ієн. Обчислити в доларах вартість угоди, сплачені засоби і суму переплати.

▲ У зв'язку зі зростанням курсу ієни фінансовий стан компанії обтяжений операційним ризиком. Компанія планувала заплатити  $20000000 : 120 = 166666,7$  дол., а змушена була сплатити  $20000000 : 116 = 172413,8$  дол. Отже, компанія переплатила 5747,1 дол. ▲

Ризик переказу полягає в ймовірності різної вартості активів й пасивів в бухгалтерському обліку. Якщо курс іноземної валюти, в якій виражені активи фірми, знижується, то вартість таких активів зменшується.

Економічний ризик полягає в тому, що змінюється вартість товару зі зміною курсу валют.

*Приклад 5.3.* Компанія експортує товари в різні країни. Собівартість одиниці товару 8,5 – фунтів стерлінгів, а продає вона його по 10. Курс обміну фунта стерлінгів з часом зростає щодо інших

валют. У найближчий час очікують його зміцнення. Проаналізувати ситуацію на наявність економічного ризику.

▲ У зв'язку зі зростанням курсу фунта стерлінгів компанія обтяжена економічним ризиком. Якщо фунт стерлінгів зміцниться, то, можливо, зменшиться попит і прибутки. У випадку, коли курс фунта стерлінгів щодо євро зросте від 1,28 до 1,45 за 1 фунт стерлінгів, то громадянин, наприклад Франції, буде платити не 12,8, а 14,5 євро. Якщо попит знизиться, то це призведе до зменшення експорту. Тому компанія має зменшити ціну виробу, наприклад до 9,5 фунтів стерлінгів, незважаючи на зменшення прибутку одиниці товару. ▲

Кредитний ризик – це ймовірність невиконання фірмою своїх фінансових зобов'язань перед інвестором чи кредитором. При розрахунку нарощеної суми потрібно постійно враховувати інфляцію, оскільки інфляція в Україні стала невід'ємним елементом економічної діяльності. Нарощена сума визначається за формулою:

$$S = S_0 \left( \frac{1+i}{1+h} \right)^n,$$

де  $S$  – нарощена сума на кінець терміну сплати кредиту з урахуванням інфляції;  $S_0$  – початкова сума боргу;  $i$  – відсоткова ставка;  $h$  – темп інфляції;  $n$  – термін позики в роках.

Інвестиційний ризик – це ризик втрати вкладеного капіталу і сподіваного доходу. Інвестиційна діяльність в усіх її формах та видах обтяжена ризиком, ступінь якого збільшується з переходом до ринкової економіки. Зростання ступеня ризику в сучасних умовах пов'язане зі зростаючою невизначеністю та швидкими динамічними змінами в економічній ситуації країни загалом і на інвестиційному ринку зокрема; розширюються пропозиції для інвестування приватизованих об'єктів; виникають нові емітенти і фінансові інструменти тощо. Види інвестиційних ризиків доволі різноманітні та численні:

- ризики щодо сфери прояву:
  - економічний – спричинений можливими змінами економічних чинників;
  - політичний – спричинений обмеженнями інвестиційної діяльності, внаслідок змін державою політичного курсу;
  - соціальний – спричинений можливими незапланова-

ними соціальними програмами;

- екологічний – спричинений можливими екологічними катастрофами та лихами;

- інші види ризиків (рекет, крадіжки майна);

- ризики щодо форми інвестування:

- ризик реального інвестування. Цей ризик спричинений невдалим місцем розташування об'єкта, що будується; невчасним постачанням будматеріалів, обладнання; вибором некомпетентного підрядника; різким зростанням цін на інвестиційні товари;

- ризик фінансового інвестування – спричинений фінансовими труднощами чи навіть банкрутством емітентів; незапланованими змінами щодо умов інвестування; неправильним підбором фінансових інструментів для інвестування;

- ризики щодо джерел виникнення:

- систематичний (ринковий). Це ризик спричинений факторами, на які інвестор не може вплинути при виборі об'єктів інвестування (зміна стадій економічного циклу країни чи кон'юнктурних циклів розвитку інвестиційного ринку; зміни в податковому законодавстві);

- несистематичний – властивий певному об'єкту інвестування внаслідок некваліфікованого керівництва об'єктом інвестування; посилення конкуренції; нераціональної структури інвестованих засобів. Його можна уникнути при ефективному управлінні інвестиційним проектом.

**Банківський ризик** – це загроза втрати банком частини своїх ресурсів, недоодержання доходів чи одержання додаткових витрат у результаті здійснення фінансових операцій. У банківській сфері ризик наявний у всіх видах операцій, тільки він може виникати в різних масштабах. Тому діяльність банку має спрямовуватись не на запобігання ризику, а на його передбачення і зниження до мінімального рівня.

Основні види ризиків, які можуть впливати на діяльність банків, представлено на рис. 5.3.

До банківських ризиків належать:

- 1) кредитний – пов’язаний з можливістю невиконання позичальником основної суми боргу і відсотків згідно з договором;
- 2) відсотковий – пов’язаний з можливістю втрат при непередбачених для банку відсоткових ставках і значному зменшенні маржі;

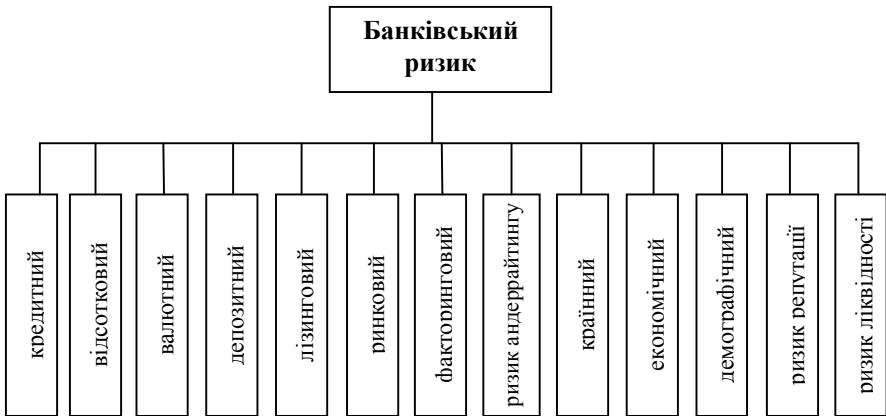


Рис. 5.3. Класифікація банківських ризиків

- 3) валютний – пов’язаний з несприятливим впливом на банк динаміки курсів валют;
- 4) депозитний – пов’язаний з дотерміновими вимогами повернення вкладів з банків;
- 5) лізинговий. Лізинг – це здача в оренду різних видів технічних засобів, будинків і споруд за посередництвом лізингової компанії; громадянсько-правовий договір, за яким орендодавець зобов’язується придбати вказане орендарем майно у визначеного ним продавця і надати орендарю це майно за плату в тимчасове користування для підприємницьких цілей. Цей ризик може спричинити неправильна оцінка платоспроможності лізингоодержувача, неякісне обладнання, що ввійшло в лізингову угоду, недотримання термінів поставки обладнання та ін.;
- 6) ринковий – ризик на ринку цінних паперів за операціями з цінними паперами. Його можуть спричинити коливання ринкової відсоткової ставки національної грошової одиниці чи іноземної. Щоб запобігти цьому ризику, необхідно систематично аналізу-

вати дохідність цінних паперів та перевіряти структуру портфеля. Більшу частку портфеля цінних паперів доцільно зберігати в довготермінових облігаціях, зрівноважених цінними короткотерміновими паперами, за відсутності цінних паперів із середніми термінами;

7) факторинговий – пов’язаний з договорами, за якими одна сторона (фінансовий агент) передає або зобов’язується передати іншій (клієнту) грошові кошти в рахунок грошової вимоги клієнта (кредитора) до третьої особи (боржнику), що впливає з представлення клієнтом товару, виконання робіт або надання послуг третій особі, а клієнт поступається або зобов’язується поступитися фінансовому агенту на цю грошову вимогу;

8) ризик андеррайтингу – ризик залишитися банку з пакетом акцій, які виставлялись на ринку, але не були продані, що призводить до потреби банку в ресурсах (гарантування випуску цінних паперів);

9) країнний – ризик банків, які прямо чи опосередковано займаються діяльністю, пов’язаною із обслуговуванням зовнішньої торгівлі й іноземних інвестицій. Цей ризик пов’язаний з політичними та економічними змінами в країні, які можуть вплинути на здатність країни, компаній та інших позичальників відповідати за зобов’язаннями зовнішнього боргу. На основі даних національної статистики розраховуються показники, за якими оцінюють країнний ризик:

| Назва показника                            | Формула                                | Нормальне значення                              |
|--------------------------------------------|----------------------------------------|-------------------------------------------------|
| Показник обслуговування зовнішнього боргу  | $K_1 = \frac{CBK_3}{O_E} \cdot 100\%$  | Оптимальне $\leq 10\%$<br>Прийнятне $\leq 25\%$ |
| Показник обслуговування відсоткових виплат | $K_2 = \frac{B_{II}}{O_E} \cdot 100\%$ | Не повинно перевищити 15–20%                    |

*Примітка:*  $CBK_3$  – сукупні витрати країни за обслуговування свого зовнішнього боргу;  $B_{II}$  – відсоткові платежі;  $O_E$  – обсяг експорту;

10) економічний – пов’язаний із загальними змінами в економіці. Це ризик неінформованості банку, фірми, підприємства, підприємця щодо як внутрішніх, так і зовнішніх ситуацій, що впливають на них. Економічний ризик спричиняє зниження конкурентоспроможності, довготермінову рентабельність, зміну вартості акти-

вів і пасивів підприємств через майбутні зміни курсів валют. Цей ризик прогнозований;

11) демографічний – пов’язаний з різницею інтересів окремих груп населення. Потрібно його враховувати при стратегічному плануванні банків, компаній;

12) ризик репутації – також суттєво впливає на доходи банку, тому що через підірвану репутацію він втратить потенційних клієнтів;

13) ризик ліквідності. Ліквідність – це можливість швидкого перетворення активів підприємств, торгово-посередницьких організацій та інше на кошти для своєчасного погашення своїх боргових зобов’язань. Ризик ліквідності полягає в небезпеці затримки такого перетворення. Під ліквідністю банку розуміють його здатність своєчасно забезпечувати виконання своїх обов’язків. Якщо банк вклав певні засоби в активи, для яких спостерігається спад ліквідності, то вимушений продаж одного з активів, може принести банку збитки. Тому необхідно постійно аналізувати вплив цього виду ризику на операції банку. З метою контролю за станом ліквідності визначені нормативи поточної, миттєвої й довготермінової ліквідності. Ці нормативи встановлюються в певних обсягах і обчислюються за формулами:

$$H_{\Pi} = \frac{LA_{\Pi}}{3B_{\Pi}} \cdot 100\%, \quad H_M = \frac{LA_M}{3B_M} \cdot 100\%, \quad H_{ДВ} = \frac{K_{ДВ}}{K + 3Д} \cdot 100\%,$$

де  $LA_{\Pi}$  – ліквідні активи;  $3B_{\Pi}$  – зобов’язання до вимоги і на термін до 30 днів;  $LA_M$  – сума високоліквідних активів банку;  $3B_M$  – сума зобов’язань банку за квитанціями до вимоги;  $K_{ДВ}$  – кредити, видані банком з терміном погашення понад один рік;  $K$  – капітал банку;  $3Д$  – зобов’язання банку з терміном погашення понад один рік.

*Фактори*, що впливають на ступінь ризику, поділяють на дві групи: об’єктивні (зовнішні) і суб’єктивні (внутрішні).

*Об’єктивні фактори* – це фактори, які не залежать від суб’єктів прийняття рішень (підприємств, фірм, менеджерів). До них належать: суперечливість законодавства, роздутий управлінський апарат, інфляція, демографічна ситуація, конкуренція, корупція, політичні та економічні кризи, анархія, екологія, мита, податкова

система, наявність режиму найбільшого сприяння, можлива робота в зоні вільного економічного підприємництва і т. д.

Об'єктивні фактори поділяють на дві групи: фактори прямого і опосередкованого впливу (рис. 5.4).

*Суб'єктивні фактори* – це фактори, які залежать від суб'єктів прийняття рішень. До них належать: технічне оснащення, кваліфікація менеджера, організація праці, ступінь зв'язків з іншими фірмами, вибір типу контрактів із замовником або інвестором, якість продукції, місце розташування підприємства і т. д. Від останнього фактора залежить ступінь ризику і величина нагороди після закінчення робіт.

Наведені вище групи факторів тісно пов'язані між собою і мають спільні елементи.

Отже, *об'єкт ризику* – це діяльність фірм різних видів, виробничих підприємств, банків, інвестиційних фондів, тобто діяльність виробників і підприємців.

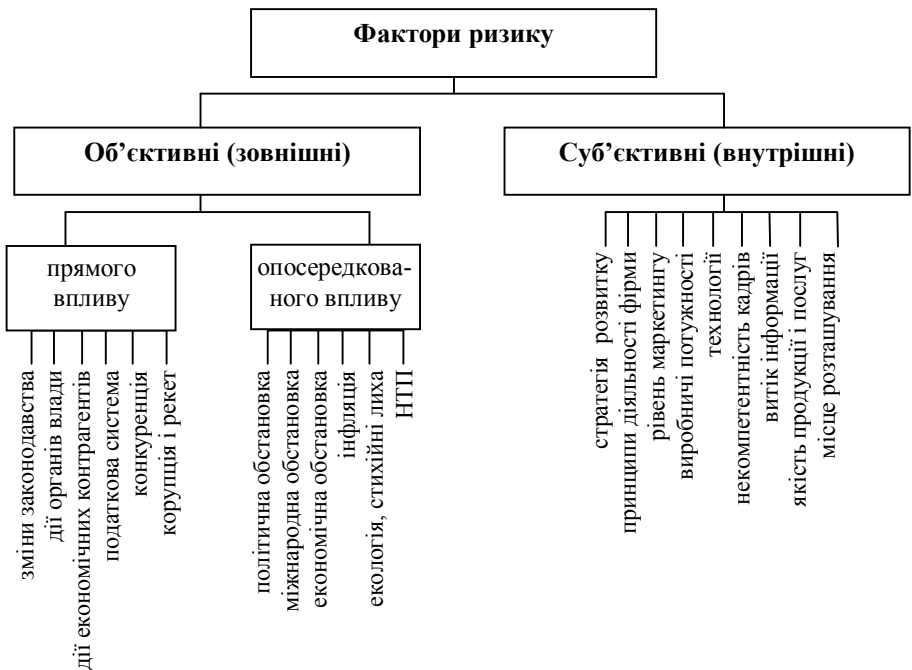


Рис. 5.4. Фактори ризику



*Суб'єкт ризику* – це особа, яка приймає рішення (менеджер, керівник). Від того, наскільки кваліфіковане і обгрунтоване управлінське рішення залежить, ступінь ризику суб'єкта діяльності. Успіх у менеджменті можливий для тих, хто на високому професійному рівні вирішує поставлені перед ним завдання, хто має неординарне мислення, хто має змогу творчо застосувати знання в реальній економічній і фінансовій ситуаціях.

Наприклад, проведемо якісний аналіз однієї ситуації ризику за схемою: сутність ризику, причини ризику, фактори ризику, способи зниження ризику [5]:

- *ризик, який пов'язаний з не укладанням договорів на реалізацію виробленої продукції.* У результаті цього відбувається затоварення готовою продукцією, що призводить до погіршення фінансового стану;
- *причини ризику* – зміна структури споживчого попиту на певний вид продукції; заповнення ринку продукцією конкурентів; моральний знос продукції; переорієнтація відомих виробників продукції; відсутність маркетингового аналізу ринку;
- *фактори ризику* – технічний прогрес; непрозорість підписання договорів; зміна умов імпорту, що полегшує ввезення імпортної продукції; активізація маркетингової діяльності конкурентів; збільшення конкурентів;
- *способи зниження ризику* – диверсифікація виробництва і збуту; створення на підприємстві системи баз даних про можливих споживачів продукції (їхню діяльність, наміри, тенденції розвитку тощо); активне використання всіх форм маркетингу; обмін акціями з традиційними споживачами; освоєння гнучких технологій виробництва.

## 5.2. Управління ризиком

Будь-яка економічна діяльність, як говорилося вище, пов'язана з факторами випадковості, розпливчастості, недостатньої інформації (невизначеності), тобто з ризиком. Тому паралельно із аналізуванням, оцінюванням ризику необхідно прогнозувати ризик і розсудливо реагувати на нього. Досвідчений керівник повинен ви-

значати шляхи зниження загрози втрат, спричинених ризиками, обирати найефективніші дії, що забезпечать прийнятний ступінь ризику, тобто управляти ризиком.

Процедура управління ризиком – важлива структурна складова процесу прийняття вигідних рішень.

*Управління ризиком (ризик-менеджмент)* – це сукупність методів, прийомів, заходів, які дають змогу певною мірою прогнозувати настання ризикових ситуацій і вживати заходи для ліквідації чи зниження негативних наслідків таких подій.

Розроблених планів управління ризиком при прийнятті господарських рішень у конкретній фірмі немає і бути не може. Кожна фірма має свої цілі і на основі них виявляє ризик, якого вона може зазнати, визначає прийнятний рівень ризику, шукає способи його зниження та уникнення. Ці дії називаються *системою управління ризиком* [4].

Складові системи управління ризиком такі:

- об'єкт управління (керована підсистема);
- суб'єкт управління (керівна підсистема) (рис. 5.5).

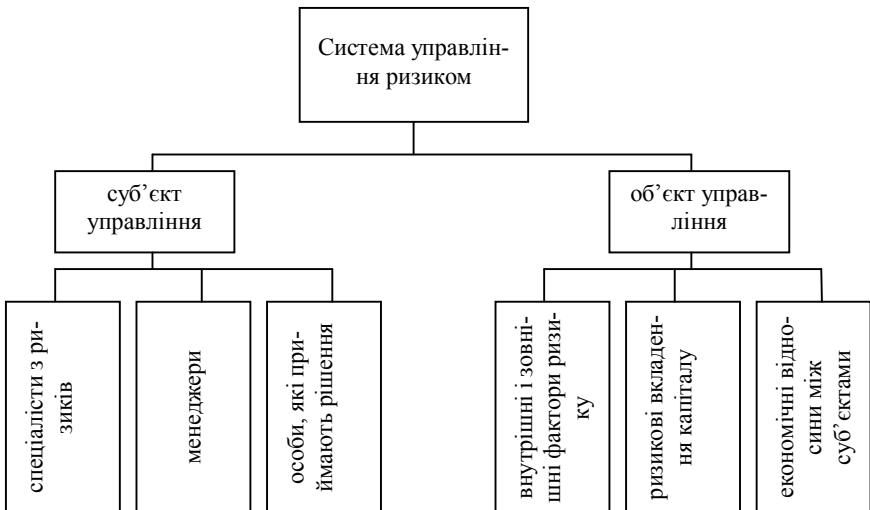


Рис. 5.5. Складові системи управління ризиком

*Об'єкт управління* – це безпосередньо ризик, ризиковані вкладення капіталу й економічні відносини між суб'єктами в процесі діяльності.

До них належать, наприклад, відносини між страховиком і страхувальником, позичальником й кредитором, між підприємцями (партнерами, конкурентами) і т. п.

*Суб'єкт управління* – це спеціальна група людей (фінансові менеджери, фахівці зі страхування та ін.), яка здійснює цілеспрямоване функціонування об'єкта управління, використовуючи різні прийоми і способи управлінського впливу.

Основні функції об'єкта управління такі:

- дозвіл ризику;
- ризиковане вкладення капіталу;
- робота зі зниження величини ризику;
- страхування ризиків;
- економічні відносини і зв'язки між суб'єктами діяльності.

До основних функцій суб'єкта управління належать:

- прогнозування – це здатність передбачати певну подію. Для цього необхідно відчувати ринковий механізм, мати інтуїцію, вміти приймати гнучкі оперативні рішення;
- організація – це об'єднання людей, які спільно реалізують програму ризикованого вкладення капіталу на основі певних правил і процедур (створення органів управління, налагодження взаємозв'язку між управлінськими підрозділами, розробку норм, методик і т. п.);
- регулювання – це певний механізм впливу на об'єкт управління для досягнення стійкості цього об'єкта в ситуації ризику;
- координація – це дії, що налагоджують роботу всієї системи управління ризиком, апарату керування і фахівців;
- стимулювання – це спонукання фахівців до зацікавленості результатом своєї роботи;
- контроль – це збір інформації про ступінь виконання визначеної програми з управління ризиком. Завершальний

етап контролю – аналіз результатів заходів щодо зниження ступеня ризику.

Процес управління ризиком відбувається за тісної взаємодії об'єктів і суб'єктів управління. Остання може відбуватися лише за умови циркуляції певної інформації між суб'єктом та об'єктом управління (рис. 5.6). Інформаційне забезпечення охоплює різноманітні дані: статистичні, економічні, комерційні, фінансові і т. д.

Особа, яка приймає рішення при управлінні ризиком, повинна дотримуватися таких *принципів*:

1. Не можна ризикувати більше, ніж дозволяє власний капітал.
2. Не можна ризикувати великим заради малого.
3. Необхідно пам'ятати про наявність альтернативних рішень.
4. Необхідно заздалегідь думати про наслідки ризику.

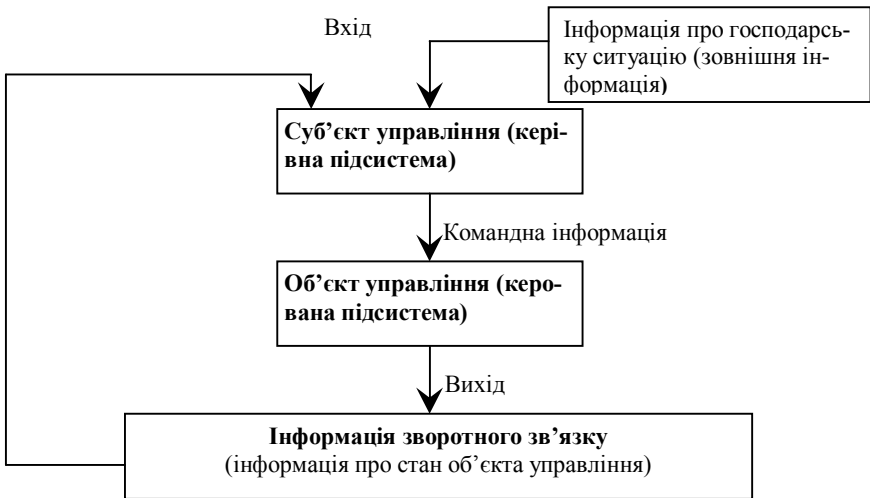


Рис. 5.6. Обмін інформацією в системі управління ризиками

Загальну схему процесу управління ризиком відображено на рис. 5.7 [2].

Як видно з блок-схеми розрізняють такі методи управління ризиком:

- уникнення;
- попередження;
- прийняття (збереження чи навіть збільшення);
- зниження (оптимізація) ступеня ризику.

*Уникнення ризику* – це відмова від реалізації певного заходу, обтяженого ризиком. Це може бути у випадку, коли рівень можливих втрат значно перевищує сподіваний прибуток. Це рішення найпростіше в управлінні ризиком. Воно дає змогу уникнути можливих втрат, але водночас означає відмову від прибутку, що пов'язаний з ризиком невикористаних можливостей.

*Попередження ризику* – це відхилення від заходу, пов'язаного з ризиком. Наприклад, для банків засобами попередження ризику будуть: ненадання кредитів ризикованим клієнтам і керівництву банку, перегляд умов кредитування, контроль за виплатами кредитів.

*Прийняття ризику* – це залишення ризику на відповідальності особи, яка приймає рішення. В цьому випадку повинні бути можливості покриття можливих збитків.

*Зниження ризику* – це зменшення величини можливих збитків чи імовірності настання несприятливих подій.

Розрізняють такі методи зниження ступеня ризику:

- диверсифікація;
- лімітування;
- самострахування;
- страхування;
- хеджування;
- отримання додаткової інформації;
- розподіл ризику між учасниками проекту;
- контроль над діяльністю в пов'язаних галузях;
- облік і оцінювання частини використання специфічних фондів компанії в її загальних фондах та ін.

*Диверсифікація* – це процес розподілу капіталу між різними об'єктами вкладення, що безпосередньо не пов'язані між собою. На цій процедурі базують свою діяльність інвестиційні фонди. Вони

продають клієнтам свої акції, а одержані кошти вкладають у різноманітні цінні папери, які приносять стійкий середній прибуток.

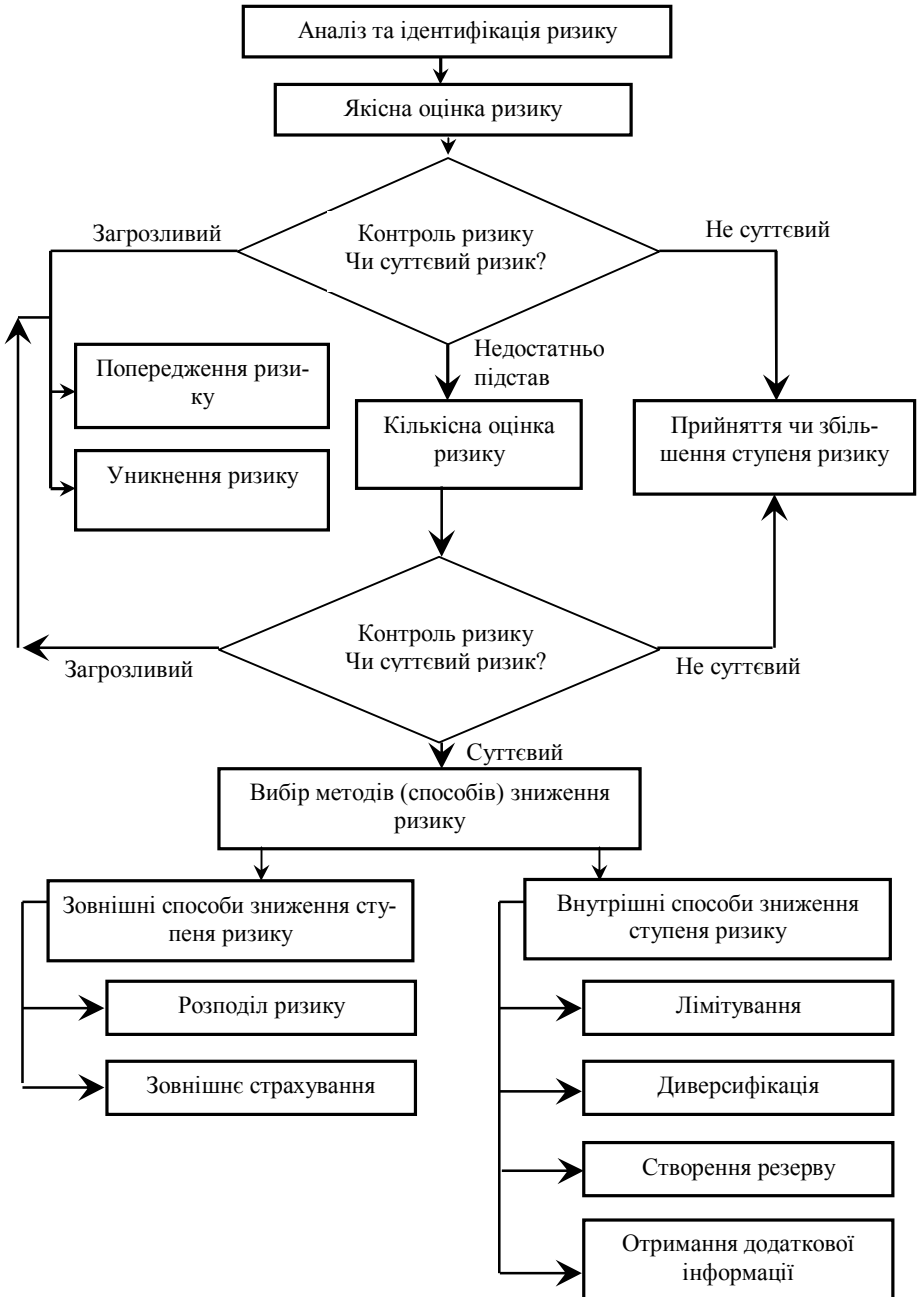


Рис. 5.7. Узагальнена блок-схема процесу управління ризиком



Прикладами диверсифікації можуть бути: диверсифікація різних видів діяльності; диверсифікація постачальників товарів; диверсифікація асортименту продукції, що випускається; диверсифікація портфеля цінних паперів; диверсифікація депозитного портфеля.

*Лімітування* – це обмеження граничних сум вкладення капіталу, продажу товарів у кредит, наданні позик, укладанні договору на овердрафт і т. д. Лімітування може охоплювати максимальний обсяг закупівлі товарів в одного постачальника, сукупних запасів товарів, споживчого кредиту, наданого одному покупцю, мінімальний обсяг обігових активів, граничний обсяг використання позикових коштів в обігу, максимальний обсяг депозиту розміщеного в одному комерційному банку.

*Самостраховування* – це створення резервних і страхових фондів у межах самої фірми для оперативного подолання тимчасових утруднень фінансово-комерційної діяльності. Цей вид методу зниження є альтернативою страхуванню і доцільний тоді, коли вартість майна, що наражається на певний ризик, відносно невелика порівняно з майновими та фінансовими параметрами всього проекту.

*Страховування* – це відшкодування збитків за рахунок страхового фонду. Інвестор відмовляється від частини доходів, щоб уникнути ризику або звести його до нуля. Страховик бере на себе відповідальність за ризик. Він повинен компенсувати наслідки реалізації цього ризику в обсязі, що не перевищує страхової суми, яка є мірою зобов'язань з боку страховика. Таким чином, реалізується ризикова функція страхування.

*Хеджування* – це страхування учасників комерційної угоди від ризику втрат, пов'язаних з можливою зміною цін (курсів валют, відсоткових ставок) за час її реалізації. Принцип операції „хеджування” полягає в тому, що, купуючи товар (цінні папери) постачанням у майбутньому періоді, підприємство, водночас, продає ф'ючерсні контракти на аналогічну кількість товарів (цінних паперів) [4]. Якщо воно зазнає фінансових втрат через зміну ринкових (біржових) цін як покупець реального товару (конкретних видів цінних паперів), то одержить вигреш у такому самому обсязі, як продавець ф'ючерсних контрактів на нього.

Загальне хеджування всіх ризиків – це єдиний спосіб їх повністю уникнути. Один із недоліків загального хеджування – це доволі великі витрати на комісійні брокерам і премії опціонів. Тому фінансові директори багатьох компаній віддають перевагу вибірково-му хеджуванню. Якщо вони вважають, що курси валют чи відсоткові ставки зміняться несприятливо для них, то вони хеджують ризик, а якщо рух буде на їхню користь – тоді ні. Зрештою, це називають спекуляцією.

*Здобуття додаткової інформації* – важливий засіб зниження ступеня ризику. Точність прогнозування майбутніх результатів залежить від повноти та достовірності інформації. Це робить інформацію цінним товаром. Вартість його розраховується як різниця між сподіваною вартістю придбання певного товару (вкладення капіталу), коли є повна інформація, та вартістю, коли інформація неповна.

*Розподіл ризику між учасниками проекту* – дієвий спосіб його зниження. Він полягає в розподілі ризику між учасником і виконавцем проекту, або між продавцем і покупцем. Переважно стосунки між учасником і виконавцем проекту базуються на договірності. Тому при підписанні договору домовляються про всі штрафні санкції, які будуть застосовані до підрядчика за невиконання його договірних зобов'язань. Отже, ризик буде розподілений між учасниками договору і, певним чином, компенсований. У цьому випадку ініціатором розподілу ризику вважається виконавець проекту, оскільки він є виробником і зацікавлений у тому, щоби всі підзвітні йому особи своєчасно та якісно виконали свої зобов'язання.

Якщо ризик розподіляється між продавцем і покупцем, то обидві сторони є ініціаторами ризику. Продавець хоче, щоб його товар купили, а покупець – щоб товар був якісним. Тому при укладенні договору або контракту кожна із сторін намагається розподілити ризик так, щоб для неї він був найменшим. Приклад цього способу зниження ризику – коносамент. Це транспортний документ, за умовами якого ризик за транспортування і втрату якості товару при транспортуванні від продавця до покупця бере на себе транспортна фірма.

### 5.3. Система показників кількісного оцінювання ступеня ризику

#### *А. Ймовірнісний підхід до оцінювання ризику*

Для кількісного визначення величини ризику необхідно знати всі можливі наслідки якої-небудь окремої події і ймовірність її настання. Під ймовірністю розуміємо можливість отримання певного результату. Щодо економічних задач методи теорії ймовірностей зводяться до визначення ймовірності настання події і до вибору з можливих подій найоптимальніших (найраціональніших) подій (результатів, рішень, проектів, стратегій).

Ймовірність настання події може бути визначена об'єктивним і суб'єктивним методами.

*Об'єктивний метод* визначення ймовірності базується на обчисленні частоти, з якою відбувається певна подія (статистична ймовірність). Припустимо відомо, що при вкладенні капіталу в який-небудь захід прибуток на суму 20 тис. грн. отримано в 40 випадках із 100, тоді ймовірність отримання такого прибутку дорівнює 0,4:

$$W(A) = \frac{M}{N} = \frac{40}{100} = 0,4,$$

де  $A$  – випадкова подія, яка полягає у тому, що при вкладенні капіталу в захід буде отримано прибуток на суму 20 тис. грн.;  $M$  – число всіх фактичних появ події  $A$ ;  $N$  – число усіх випадків вкладень капіталу.

Ця ймовірність об'єктивна, тому що вона визначена на підставі фактичних даних.

Якщо немає подібної статистики в минулому, то неможливо розрахувати ймовірність об'єктивним методом і необхідні суб'єктивні критерії.

*Суб'єктивна ймовірність* – це припущення щодо певного результату. Це припущення базується на міркуваннях або особистому досвіді експерта з оцінювання. Коли ймовірність визначається суб'єктивно, то різні люди можуть встановлювати різне її значення для однієї і тієї ж події, а отже, робити різний вибір. Наприклад, якщо певний захід має проводитися перший раз у відповідному ра-

йоні, то суб'єктивна ймовірність може мати дуже велике значення. Різна інформація або різні можливості оперувати однією інформацією можуть пояснити, чому суб'єктивні ймовірності змінюються.

Як об'єктивна, так і суб'єктивна ймовірності використовуються при визначенні показників абсолютного та відносного вимірювання ризику.

### ***Б. Ризик в абсолютному виразі***

В абсолютному виразі міру ризику визначають як добуток ймовірності невдачі (небажаних наслідків) на величину цих небажаних наслідків (збитки, платежі), які спостерігаються в цьому випадку:

$$W = p_H \cdot x,$$

де  $W$  – величина ризику;  $p_H$  – ймовірність небажаних наслідків;  $x$  – величина цих наслідків.

В окремих випадках, наприклад у страхуванні, міру ризику визначають як ймовірність настання небажаних наслідків:

$$W = p_H$$

*Середнє сподіване значення* (математичне сподівання), зумовлене з невизначеною ситуацією, – це середньозважена всіх можливих результатів, де ймовірність кожного результату використовується як частота або вага відповідного значення:

$$\bar{x} = M(x) = \sum_{i=1}^n x_i p_i, \quad (5.1)$$

де  $x_i$  – значення  $i$ -го результату;  $p_i$  – ймовірність настання  $i$ -го результату.

Середнє сподіване значення вимірює результат, який очікується в середньому.

Наприклад, нехай проїзд у тролейбусі становить 60 коп., а штраф за безквитковий проїзд – 12 грн. Якщо ймовірність перевірки квитка 0,1, то сподіване значення результату від безквиткового проїзду  $\bar{x} = 0,9 \cdot 0,6 + 0,1 \cdot (-12) = -0,66$ . Отже, їздити без квитка за цих умов не вигідно, оскільки збитки будуть перевищувати вигоду.

*Приклад 5.4.* Відомо, що при вкладанні капіталу в варіант *A* з 150 випадків прибуток 10000 грн. був у 60 випадках (ймовірність 0,4), прибуток 13400 грн. – у 78 випадках (ймовірність 0,52), прибуток 28500 грн. – в 12 випадках (ймовірність 0,08). При вкладанні капіталу в варіант *B*: прибуток 12500 грн. був в 30 випадках із 120 (ймовірність 0,25), прибуток 14000 грн. – в 54 випадках (ймовірність 0,45), прибуток 25000 грн. – в 36 випадках (ймовірність 0,3). Визначити сподіване значення прибутку за варіантами *A* та *B*.

▲ Дані занесемо у таблицю:

| Варіант вкладення капіталу | Ймовірні наслідки       |          |                         |          |                         |          |
|----------------------------|-------------------------|----------|-------------------------|----------|-------------------------|----------|
|                            | 1                       |          | 2                       |          | 3                       |          |
|                            | імовірність             | прибуток | імовірність             | прибуток | імовірність             | прибуток |
| <i>A</i>                   | $\frac{60}{150} = 0,4$  | 10000    | $\frac{78}{150} = 0,52$ | 13400    | $\frac{12}{150} = 0,08$ | 28500    |
| <i>B</i>                   | $\frac{30}{120} = 0,25$ | 12500    | $\frac{54}{120} = 0,45$ | 14000    | $\frac{36}{120} = 0,3$  | 25000    |

Застосувавши для розрахунків формулу (5.1) знайдемо сподівані значення прибутків для варіантів *A* та *B*:

$$\bar{x}_A = 10000 \cdot 0,4 + 13400 \cdot 0,52 + 20500 \cdot 0,08 = 12608 \text{ грн.}$$

$$\bar{x}_B = 12500 \cdot 0,25 + 14000 \cdot 0,45 + 25000 \cdot 0,3 = 16925 \text{ грн.}$$

Сума сподіваного прибутку для варіанта *B* більша, ніж для *A*. На перший погляд, можна вибрати варіант *B*, оскільки сума сподіваного прибутку більша, ніж *A*. Проте, порівнюючи два варіанти, бачимо, що при вкладанні в *A* величина прибутку коливається від 10000 до 20500 грн., а в *B* – від 12500 до 25000 грн. ▲

Середнє сподіване значення – це узагальнена величина, тому для кінцевого вибору варіанту необхідно обчислити коливання (мінливість) можливого результату.

Колівання можливого результату – це міра відхилення сподіваного значення від середньої величини. На практиці застосову-

ють два показники: *дисперсію (варіацію)* і *стандартне відхилення (середньоквадратичне відхилення)*.

*Дисперсія (варіація,  $\sigma^2(x)$ )* – це середньозважена з квадратів відхилень дійсних результатів від середнього сподіваного. Вона характеризує розсіювання значення випадкового параметра від його середнього прогнозованого значення й обчислюється за формулою:

$$\sigma^2(x) = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \cdot p_i = \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot p_i - \bar{x}^2. \quad (5.2)$$

*Стандартне відхилення ( $\sigma(x)$ )* дорівнює квадратному кореню з дисперсії:

$$\sigma(x) = \sqrt{\sigma^2(x)} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \cdot p_i}. \quad (5.3)$$

Стандартне відхилення показує максимально можливе коливання певного параметра від його середньо сподіваної величини та дає змогу оцінити ступінь ризику з погляду ймовірності його здійснення (чим більша величина цієї числової характеристики, тим ризикованіше рішення).

Якщо вважати, що є два проекти, в які можна вкласти кошти і вони у визначений момент в майбутньому забезпечують випадкові величини прибутку, то при відповідних середніх сподіваних значеннях  $\bar{x}_1$  та  $\bar{x}_2$  і дисперсіях  $\sigma_1$  та  $\sigma_2$  при  $\bar{x}_1 > \bar{x}_2$  і  $\sigma_1 < \sigma_2$  кращим вважається проект перший.

Загалом, коли  $\bar{x}_1 > \bar{x}_2$ ,  $\sigma_1 > \sigma_2$  або  $\bar{x}_1 < \bar{x}_2$ ,  $\sigma_1 < \sigma_2$  однозначного рішення немає. Інвестор може вибрати проект з більшим сподіваним прибутком, але пов'язаним із великим ризиком, або варіант з меншим сподіваним прибутком, але менш ризикованим. Цю ситуацію можна показати на графіку, де кожен вид вкладень позначено точкою з координатами  $(\sigma_i, \bar{x}_i)$  (рис.5. 8). Чим більший сподіваний ефект, тим вище розміщена точка, чим більший ризик – тим точка розташована правіше.

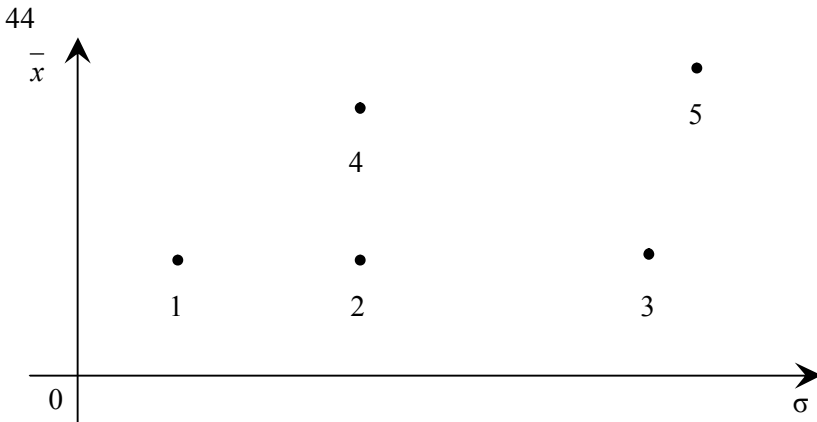


Рис. 5.8. Діаграма взаємозв'язку ризику і прибутку

Очевидно, що досвідчений інвестор віддасть перевагу проєкту 1, а не 2 і 3, 4, а не 2. Проте, залежно від схильності до ризику залежить вибір проєктів 1, 4 або 5.

Приклад 5.5. Для даних прикладу 5.4 необхідно оцінити ризик варіантів через дисперсію і стандартне відхилення.

▲ Визначимо дисперсію і стандартне відхилення за формулами (5.2), (5.3).

Для варіанта А:

$$\sigma_A^2 = (10000 - 12608)^2 \cdot 0,4 + (13400 - 12608)^2 \cdot 0,52 + (20500 - 12608)^2 \cdot 0,08 = 2720666 + 4982693 + 326177 = 8029536 \text{ грн.}^2$$

$$\sigma_A = 2834 \text{ грн.}$$

Для варіанту Б:

$$\sigma_B^2 = (12500 - 16925)^2 \cdot 0,25 + (14000 - 16925)^2 \cdot 0,45 + (25000 - 16925)^2 \cdot 0,3 = 4895156 + 3850031 + 19561688 = 28306875 \text{ грн.}^2$$

$$\sigma_B = 5320 \text{ грн.}$$

Отже, при вкладанні капіталу у відповідні варіанти маємо:

варіант А –  $\bar{x} = 12608$  грн.,  $\sigma^2 = 8029536$  грн.<sup>2</sup>,  $\sigma = 2834$  грн.

варіант Б –  $\bar{x} = 16925$  грн.,  $\sigma^2 = 28306875$  грн.<sup>2</sup>,  $\sigma = 5320$  грн.

Як бачимо варіант Б має вище сподіване значення прибутку, але він ризикованіший, ніж А. Який варіант вибрати – це залежить від конкретної людини. Заповзятлива особа віддасть перевагу ви-

щому сподіваному значенню прибутку і стандартному відхиленню, а консервативніша – обере варіант  $A$ . ▲

Підхід, який ґрунтується на використанні дисперсії і стандартного відхилення, вважається *класичним*. У дисперсії та стандартному відхиленні ризик визначається через відхилення відповідних показників випадкової величини від їхнього середнього сподіваного значення (математичного сподівання). Зазначимо, що за такого визначення міри ризику однаково трактуються як додатні (сприятливі), так і від'ємні (несприятливі) відхилення від  $\bar{x}$ .

Проте, якщо існує від'ємне відхилення, то відповідне сподіване значення результату нижче від середнього сподіваного. Це означає несприятливу ситуацію. Додатне відхилення, водночас, вказує на те, що сподіване значення результату вище від середнього сподіваного. Це сприятлива ситуація для особи, котра приймає рішення.

Переважно ризик насамперед пов'язаний з несприятливими ситуаціями. За цієї причини за міру ризику часто вибирають *семіваріацію* (неокласичний підхід до оцінювання ризику). Її обчислюють за формулою:

$$SV = \frac{1}{P^-} \sum_{i=1}^n d_i^2 p_i, \quad (5.4)$$

де  $p_i$  – ймовірність настання  $i$ -го результату;  $d_i$  – від'ємні відхилення дійсних результатів від середнього сподіваного, тобто:

$$d_i = \begin{cases} 0, & x_i \geq \bar{x}, \\ x_i - \bar{x}, & x_i < \bar{x}, \end{cases} \quad (5.5)$$

де  $x_i$  – значення  $i$ -го результату;  $\bar{x}$  – середнє сподіване значення;  $P^-$  – сума ймовірностей, для яких  $d_i$  від'ємні.

Квадратний корінь із семіваріації називається *семіквадратичним відхиленням*:

$$SSV = \sqrt{SV}. \quad (5.6)$$

Зрозуміло, що чим більшою буде величина  $SV$  чи  $SSV$ , тим більшим буде ступінь ризику.



### ***В. Ризик у відносному виразі***

У відносному виразі ризик визначається як, наприклад, величина можливих збитків, яка належить до деякої бази, за яку найзручніше брати або майно підприємця, або загальні витрати ресурсів на відповідний вид підприємницької діяльності, або ж сподіваний дохід (прибуток) від цього підприємництва.

Для підприємства (корпорації) за базу визначення відносної величини ризику беруть вартість основних фондів та обігових засобів або планові сумарні затрати на певний вид ризикової діяльності, маючи на увазі як поточні затрати, так і капіталовкладення чи розрахунковий дохід тощо.

Співвідношення максимально можливого величини збитків та величини власних фінансових ресурсів інвестора – це міра (оцінка) ризику, що веде до банкрутства. Ризик вимірюється за допомогою коефіцієнта:

$$W = \frac{x}{K}, \quad (5.7)$$

де  $W$  – коефіцієнт ризику;  $x$  – максимально можливий обсяг збитків (грн.);  $K$  – обсяг власних фінансових ресурсів із врахуванням точно відомих надходжень коштів (грн.).

Дослідження ризикових заходів дає змогу зробити висновок, що оптимальний коефіцієнт ризику становить 0,3, а коефіцієнт ризику, який веде до банкрутства інвестора, – 0,7 і більше.

*Приклад 5.6.* Досвідчений інвестор запланував 50 тис. грн. вкласти в перспективні, на його думку, акції під 25% річних з надією отримати  $50 \cdot 0,25 = 12,5$  тис. грн. Коли ці акції почали різко падати, він їх продав, зазнавши 30% збитків, тобто його втрати становили  $50 \cdot 0,3 = 15$  тис. грн. Коефіцієнт ризику для нього:

$$W = \frac{15}{50} = 0,3.$$

Молодий бізнесмен, який має 15 тис. грн., бере в борг 35 тис. грн. під 12% річних і також вкладає всі 50 тис. грн. в ці акції. Він планує отримати  $50 \cdot 0,25 - 35 \cdot 0,12 = 8,3$  тис. грн. Проте в результаті тих же операцій він зазнав збитків, що дорівнюють  $50 \cdot 0,3 + 35 \cdot 0,12 = 19,2$  тис. грн. Для нього ці втрати – це банкрутст-

во. Коефіцієнт ризику для нього:  $W = \frac{19,2}{15} = 1,28 \gg 0,7$ , що теж вказує на банкрутство. Цей приклад підтверджує, що ставка на власний капітал менш ризикова. ▲

У відносному виразі ризик також визначають за допомогою *коефіцієнта варіації*. Він є відношенням стандартного відхилення до середнього сподіваного значення:

$$V = \frac{\sigma}{x}. \quad (5.8)$$

Коефіцієнт варіації – відносна величина, тому на його величину не впливають абсолютні значення досліджуваного показника. За допомогою цього показника можна порівнювати навіть коливання показників, виражених у різних одиницях виміру. Діапазон зміни  $V$  від 0 до 1. Чим більший коефіцієнт, тим більший розкид значень показників і тим ризикованіший оцінюваний проект.

Визначена така якісна шкала різних коефіцієнтів варіації:

до 0,1 – слабе коливання;

0,1–0,25 – помірне;

понад 0,25 – високе.

Відповідно, чим вище коливання, тим більший ризик.

Якщо, наприклад, у двох альтернативних проектах  $A$  і  $B$  виявиться, що  $V_A < V_B$ , то перевагу потрібно надати проекту  $A$ , який обтяжений меншим ризиком.

Для випадку  $\overline{x}_A > \overline{x}_B$  та  $\sigma_A > \sigma_B$ , або  $\overline{x}_A < \overline{x}_B$  та  $\sigma_A < \sigma_B$ , і при цьому  $V_A = V_B$ , треба враховувати схильність (несхильність) суб'єкта прийняття рішень до ризику.

У неокласичному підході до оцінювання ризику за аналогією з коефіцієнтом варіації існує *коефіцієнт семіваріації*:

$$CSV = \frac{SSV}{x}, \quad (5.9)$$

де  $SSV$  – семіквадратичне відхилення.

Коефіцієнт семіваріації у багатьох випадках дає змогу краще оцінити ступінь ризику. Це доцільно, зокрема тоді, коли зовніш-

не економічне середовище, фактори ризику, характерні для аналізованого проекту, відзначаються динамізмом.

Отже, система показників кількісної оцінки ризику охоплює абсолютні і відносні величини (табл. 5.1).

Таблиця 5.1.

## Система показників кількісної оцінки ризику

| Показник                                            | Формула                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
|-----------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <i>Абсолютне вимірювання ризику</i>                 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
| Абсолютна величина ризику                           | $W = p_H \cdot x,$ <p>де <math>W</math> – величина ризику; <math>p_H</math> – ймовірність небажаних наслідків, <math>x</math> – величина цих наслідків</p>                                                                                                                                                                                                                                             |
| Середнє сподіване значення (математичне сподівання) | $\bar{x} = M(x) = \sum_{i=1}^n x_i p_i,$ <p>де <math>x_i</math> – значення <math>i</math>-го результату; <math>p_i</math> – ймовірність отримання <math>i</math>-го результату</p>                                                                                                                                                                                                                     |
| Дисперсія (варіація)                                | $\sigma^2(x) = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \cdot p_i$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
| Семіваріація                                        | $SV = \frac{1}{P^-} \sum_{i=1}^n d_i^2 p_i,$ <p>де <math>p_i</math> – ймовірність отримання <math>i</math>-го результату; <math>d_i</math> – від'ємні відхилення дійсних результатів від середнього сподіваного, тобто</p> $d_i = \begin{cases} 0, & x_i \geq \bar{x}, \\ x_i - \bar{x}, & x_i < \bar{x}, \end{cases}$ <p><math>P^-</math> – сума ймовірностей, для яких <math>d_i</math> від'ємні</p> |

Продовження табл. 5.1

|                                                        |                                                                                                                                                                         |
|--------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Стандартне відхилення (середньоквадратичне відхилення) | $\sigma(x) = \sqrt{\sigma^2(x)}$                                                                                                                                        |
| Семіквадратичне відхилення                             | $SSV = \sqrt{SV}$                                                                                                                                                       |
| <i>Відносне вимірювання ризику</i>                     |                                                                                                                                                                         |
| Коефіцієнт ризику                                      | $W = \frac{x}{K},$ де $x$ – максимально можливий обсяг збитків (грн.);<br>$K$ – обсяг власних фінансових ресурсів із врахуванням точно відомих надходжень коштів (грн.) |
| Коефіцієнт варіації                                    | $V = \frac{\sigma}{x}$                                                                                                                                                  |
| Коефіцієнт семіваріації                                | $CSV = \frac{SSV}{x}$                                                                                                                                                   |

*Приклад 5.7.* Фірма планує вкласти певну частину своїх коштів у розвиток економічної діяльності. Альтернативні варіанти розвитку задано певними стратегіями. Зовнішньоекономічні (з/е) умови, які впливатимуть на показники ефективності кожної стратегії, ймовірні. Виграші за реалізацію кожної стратегії та ймовірності зовнішньоекономічних умов наведено в табл. 5.2. Необхідно визначити ефективність і ризикованість кожної стратегії розвитку фірми та зробити висновок, у яку стратегію доцільно вкладати кошти і чому.

▲ 1. Визначасмо середню ефективність кожної стратегії за формулою (5.1):

$$\bar{x}_1 = 18 \cdot 0,2 + 3 \cdot 0,3 + 20 \cdot 0,1 + 9 \cdot 0,25 + 5 \cdot 0,15 = 9,5,$$

$$\bar{x}_2 = 10 \cdot 0,2 + 22 \cdot 0,3 + 14 \cdot 0,1 + 35 \cdot 0,25 + 45 \cdot 0,15 = 25,5,$$

$$\bar{x}_3 = 30 \cdot 0,2 + 5 \cdot 0,3 + 4 \cdot 0,1 + 30 \cdot 0,25 + 3 \cdot 0,15 = 15,85,$$

$$\bar{x}_4 = 14 \cdot 0,2 + 15 \cdot 0,3 + 10 \cdot 0,1 + 28 \cdot 0,25 + 6 \cdot 0,15 = 16,2,$$

$$\bar{x}_5 = 17 \cdot 0,2 + 24 \cdot 0,3 + 19 \cdot 0,1 + 11 \cdot 0,25 + 14 \cdot 0,15 = 17,35.$$

Таблиця 5.2

Виграші при реалізації кожної стратегії та ймовірності зовнішньо-економічних умов

| Стратегії, $S_i$            | Прибуток за з/е умов |     |     |      |      |
|-----------------------------|----------------------|-----|-----|------|------|
|                             | 1                    | 2   | 3   | 4    | 5    |
| $S_1$                       | 18                   | 3   | 20  | 9    | 5    |
| $S_2$                       | 10                   | 22  | 14  | 35   | 45   |
| $S_3$                       | 30                   | 5   | 4   | 30   | 3    |
| $S_4$                       | 14                   | 15  | 10  | 28   | 6    |
| $S_5$                       | 17                   | 24  | 19  | 11   | 14   |
| Ймовірність з/е умов, $P_i$ | 0,2                  | 0,3 | 0,1 | 0,25 | 0,15 |

Оскільки відомо, що чим більша середня ефективність стратегії, тим вигідніша стратегія, то бачимо, що друга стратегія має найбільшу середню ефективність і є найвигіднішою, а решта стратегій найменш ефективні.

2. Кількісна оцінка ризикованості кожної стратегії на основі показників варіації:

а) за дисперсією розраховуємо за формулою (5.2):

$$D_1 = (18 - 9,5)^2 \cdot 0,2 + (3 - 9,5)^2 \cdot 0,3 + (20 - 9,5)^2 \cdot 0,1 + (9 - 9,5)^2 \cdot 0,25 + (5 - 9,5)^2 \cdot 0,15 = 41,25,$$

$$D_2 = (10 - 25,5)^2 \cdot 0,2 + (22 - 25,5)^2 \cdot 0,3 + (14 - 25,5)^2 \cdot 0,1 + (35 - 25,5)^2 \cdot 0,25 + (45 - 25,5)^2 \cdot 0,15 = 144,55,$$

$$D_3 = 164,23, \quad D_4 = 55,66, \quad D_5 = 25,33.$$

Дисперсія – це один із абсолютних показників кількісної оцінки ризику. Чим більша дисперсія, тим більший ризик характерний стратегії. На основі цього – п'ята стратегія характеризується меншим ризиком, ніж решта стратегій, тобто за цим показником п'ята стратегія вигідніша;

б) на основі стандартного відхилення проводимо розрахунки за формулою (5.3):

$$\sigma_1 = \sqrt{41,25} = 6,42,$$

$$\sigma_2 = \sqrt{144,55} = 12,02,$$

$$\sigma_3 = \sqrt{164,23} = 12,82,$$

$$\sigma_4 = \sqrt{55,66} = 7,46,$$

$$\sigma_5 = \sqrt{25,33} = 5,03.$$

Стандартне відхилення – це середнє лінійне відхилення від фактичного значення прибутку, чим менше  $\sigma$ , тим надійніша стратегія. Отже, за цим показником найвигідніша п'ята стратегія;

в) на основі коефіцієнта варіації обчислюємо за формулою (5.8):

$$V_1 = \frac{6,42}{9,5} = 0,68, \quad V_2 = \frac{12,02}{25,5} = 0,47, \quad V_3 = \frac{12,82}{15,85} = 0,81,$$

$$V_4 = \frac{7,46}{16,2} = 0,46, \quad V_5 = \frac{5,03}{17,35} = 0,29.$$

Чим більше значення коефіцієнта варіації, тим ризикованіша та менш ефективна стратегія. За цим показником вигідніша п'ята стратегія. Проте коливання її велике;

г) за семіваріацією:

Обчислюємо відхилення прибутку від середньої ефективності за з/е умов і показники вносимо в табл. 5.3.

За формулою (5.5) додатні відхилення замінимо числом 0, а від'ємні залишаємо, як показано в табл. 5.4.

Таблиця 5.3

| Стратегії, $S_i$            | Відхилення прибутку від середньої ефективності за з/е умов, $x_i - \bar{x}$ |        |        |       |        | $\bar{x}$ |
|-----------------------------|-----------------------------------------------------------------------------|--------|--------|-------|--------|-----------|
|                             | 1                                                                           | 2      | 3      | 4     | 5      |           |
| $S_1$                       | 8,5                                                                         | -6,5   | 10,5   | -0,5  | -4,5   | 9,5       |
| $S_2$                       | -15,5                                                                       | -3,5   | -11,5  | 9,5   | 19,5   | 25,5      |
| $S_3$                       | 14,15                                                                       | -10,85 | -11,85 | 14,15 | -12,85 | 15,85     |
| $S_4$                       | -2,2                                                                        | -1,2   | -6,2   | 11,8  | -10,2  | 16,2      |
| $S_5$                       | -0,35                                                                       | 6,65   | 1,65   | -6,35 | -3,35  | 17,35     |
| Ймовірність з/е умов, $P_i$ | 0,2                                                                         | 0,3    | 0,1    | 0,25  | 0,15   |           |



Таблиця 5.4

| Стратегії,<br>$S_i$            | Від'ємні відхилення прибутку від середньої ефективності за з/е умов, $x_i - \bar{x}$ |        |        |       |        |
|--------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|--------|--------|-------|--------|
|                                | 1                                                                                    | 2      | 3      | 4     | 5      |
| $S_1$                          | 0                                                                                    | -6,5   | 0      | -0,5  | -4,5   |
| $S_2$                          | -15,5                                                                                | -3,5   | -11,5  | 0     | 0      |
| $S_3$                          | 0                                                                                    | -10,85 | -11,85 | 0     | -12,85 |
| $S_4$                          | -2,2                                                                                 | -1,2   | -6,2   | 0     | -10,2  |
| $S_5$                          | -0,35                                                                                | 0      | 0      | -6,35 | -3,35  |
| Ймовірність<br>з/е умов, $P_i$ | 0,2                                                                                  | 0,3    | 0,1    | 0,25  | 0,15   |

Далі обчислюємо семіваріацію за формулою (5.4):

$$SV_1 = \frac{1}{0,3 + 0,25 + 0,15} \left( (-6,5)^2 \cdot 0,3 + (-0,5)^2 \cdot 0,25 + (-4,5)^2 \cdot 0,15 \right) =$$

$$= \frac{15,8}{0,7} = 22,5 ;$$

$$SV_2 = \frac{1}{0,2 + 0,3 + 0,1} \left( (-15,5)^2 \cdot 0,2 + (-3,5)^2 \cdot 0,3 + (-11,5)^2 \cdot 0,1 \right) =$$

$$= \frac{65,0}{0,6} = 108,3 ;$$

$$SV_3 = \frac{1}{0,3 + 0,1 + 0,15} \left( (-10,85)^2 \cdot 0,3 + (-11,85)^2 \cdot 0,1 + (-12,85)^2 \cdot 0,15 \right) =$$

$$= \frac{74,1}{0,55} = 134,7 ;$$

$$SV_4 = \frac{\left( (-2,2)^2 \cdot 0,2 + (-1,2)^2 \cdot 0,3 + (-6,2)^2 \cdot 0,1 + (-10,2)^2 \cdot 0,15 \right)}{0,2 + 0,3 + 0,1 + 0,15} =$$

$$= \frac{20,9}{0,75} = 27,8 ;$$

$$SV_5 = \frac{1}{0,2 + 0,25 + 0,15} \left( (-0,35)^2 \cdot 0,2 + \right.$$



$$+ (-6,35)^2 \cdot 0,25 + (-3,35)^2 \cdot 0,15) = \frac{11,8}{0,4} = 19,6.$$

Семіваріація характеризує середні квадратичні відхилення тих значень прибутку, які менші за нього. Інакше кажучи, чим менша семіваріація, тим менші прогнозовані втрати. За цим показником вигідніша також п'ята стратегія;

д) за семіквадратичним відхиленням. Обчислюємо за формулою (5.6):

$$SSV_1 = 4,75, \quad SSV_2 = 10,40, \quad SSV_3 = 11,61, \quad SSV_4 = 5,27, \quad SSV_5 = 4,43.$$

Отже, вигідніша також п'ята стратегія;

е) за коефіцієнтом семіваріації. Обчислюємо за формулою (5.9):

$$CSV_1 = \frac{4,75}{9,5} = 0,50; \quad CSV_2 = \frac{10,40}{25,5} = 0,41;$$

$$CSV_3 = \frac{11,61}{15,85} = 0,73; \quad CSV_4 = \frac{5,27}{16,2} = 0,33; \quad CSV_5 = \frac{4,43}{17,35} = 0,26.$$

За цим показником вигідніша також п'ята стратегія.

Отже, в цьому прикладі за абсолютними й відносними показниками найменш ризикована п'ята стратегія. ▲

Приклад 5.8. Відомо, що акції виду *A* та *B*, залежно від стану економіки, можуть мати різну дохідність. Спеціалісти з економічних досліджень вказали на п'ять можливих станів економіки та оцінили ймовірності настання цих станів (табл. 5.5). Необхідно зробити кількісний аналіз ризику акцій.

Таблиця 5.5

| Стани економічного середовища | Імовірність, <i>p</i> | Дохідність акції, % |          |
|-------------------------------|-----------------------|---------------------|----------|
|                               |                       | <i>A</i>            | <i>B</i> |
| Значне піднесення             | 0,2                   | 0                   | 2        |
| Незначне піднесення           | 0,1                   | 25                  | 20       |
| Стагнація                     | 0,3                   | 18                  | 13       |
| Незначна рецесія              | 0,3                   | 10                  | 8        |
| Значна рецесія                | 0,1                   | -5                  | -3       |

▲ Обчислимо сподівану дохідність для кожної акції за формулою (5.1):

$$A: \bar{x}_A = 0,2 \cdot 0 + 0,1 \cdot 25 + 0,3 \cdot 18 + 0,3 \cdot 10 + 0,1 \cdot (-5) = 10,4\% ;$$

$$B: \bar{x}_B = 0,2 \cdot 2 + 0,1 \cdot 20 + 0,3 \cdot 13 + 0,3 \cdot 8 + 0,1 \cdot (-3) = 8,4\% .$$

Для оцінювання ступеня ризику в абсолютному виразі знайдемо дисперсію (варіацію) та середньоквадратичне відхилення за формулами (5.2, 5.3) для кожної з акцій.

Дисперсія дохідності для акції  $A$ :

$$\sigma_A^2 = 0,2 \cdot (0 - 10,4)^2 + 0,1 \cdot (25 - 10,4)^2 + 0,3 \cdot (18 - 10,4)^2 + 0,3 \cdot (10 - 10,4)^2 + 0,1 \cdot (-5 - 10,4)^2 = 84,04 .$$

Тут середньоквадратичне відхилення для акції  $A$  буде:  $\sigma_A = 9,17\%$ .

Аналогічно для акції  $B$  обчислюємо дисперсію:

$$\sigma_B^2 = 0,2 \cdot (2 - 8,4)^2 + 0,1 \cdot (20 - 8,4)^2 + 0,3 \cdot (13 - 8,4)^2 + 0,3 \cdot (8 - 8,4)^2 + 0,1 \cdot (-3 - 8,4)^2 = 41,04$$

та середньоквадратичне відхилення:  $\sigma_B = 6,41\%$ .

Отже, акція виду  $A$  забезпечує вищу сподівану дохідність, ніж акція виду  $B$ , але остання менш ризикова за показником середнього квадратичного відхилення. Розраховані коефіцієнти не дають однозначної відповіді щодо вибору кращої за інвестиційною привабливістю акції.

З цієї причини необхідно обчислити ризик у відносному виразі для акцій  $A$  та  $B$  за допомогою коефіцієнта варіації за формулою (5.8):

$$V_A = \frac{9,17}{10,4} = 0,88, \quad V_B = \frac{6,41}{8,4} = 0,76 .$$

Отже, акція виду  $B$  має краще співвідношення між ризиком та дохідністю, але коливання її високі.

Для більшої переконаності в правильності висновків підрахуємо для обох акцій також показники ступеня ризику, які враховують відхилення від сподіваної дохідності лише в несприятливий бік.

За формулою (5.4) семіваріація для акції  $A$  буде такою:

$$SV_A = \frac{0,2 \cdot (0 - 10,4)^2 + 0,3 \cdot (10 - 10,4)^2 + 0,1 \cdot (-5 - 10,4)^2}{0,2 + 0,3 + 0,1} = \frac{45,40}{0,6} = 75,67 ,$$

а семікватратичне відхилення за формулою (5.6):

$$SSV_A = 8,70 \%$$

Аналогічні показники для акції  $B$ :

$$SV_B = \frac{0,2 \cdot (2 - 8,4)^2 + 0,3 \cdot (8 - 8,4)^2 + 0,1 \cdot (-3 - 8,4)^2}{0,2 + 0,3 + 0,1} = \frac{21,24}{0,6} = 35,4,$$

$$SSV_B = 5,95 \%$$

Оцінимо ризик у відносному вираженні для акцій  $A$  та  $B$  за коефіцієнтом семіваріації, використавши формулу (5.9):

$$CSV_A = \frac{8,70}{10,4} = 0,84, \quad CSV_B = \frac{5,95}{8,4} = 0,71.$$

Отже, прагматичний інвестор обере акцію виду  $B$ , адже за всіма відносними показниками ризику вона забезпечує краще співвідношення між ризиком та доходністю капітальних інвестицій. ▲

#### 5.4. Використання нерівності Чебишева

Дисперсія неповністю характеризує ступінь ризику, але вона дає змогу в деяких випадках доволі чітко визначити граничні шанси менеджера (інвестора, підприємця) при прийнятті економічних рішень. Теоретична основа для цього закладена в нерівності Чебишева: ймовірність того, що випадкова величина  $R$  відхилиться від свого математичного сподівання  $m$  за абсолютною величиною більше від додатного числа  $\delta$ , не перевищує її дисперсії, поділеної на  $\delta^2$ :

$$P(|R - m| > \delta) \leq \frac{V}{\delta^2}, \quad (5.10)$$

де  $R$  – випадкова величина;  $m$  – її математичне сподівання;  $V = \sigma^2$  – дисперсія випадкової величини;  $\delta$  – величина відхилення випадкової величини від її математичного сподівання.

Оскільки  $p \leq 1$ , то  $\frac{V}{\delta^2} \leq 1$ , а отже,  $V \leq \delta^2$ .

Розглянемо ще одну економічну ситуацію. Нехай інвестиції здійснюються за рахунок кредиту, взятого під відсоток  $r_s$  під заставу нерухомості. Знайдемо ймовірність того, що інвестор не зможе повернути борг і позбудеться своєї нерухомості.

Нехай  $R$  – випадкова величина ефективності вкладень із математичним сподіванням  $m$  і дисперсією  $V$ . Тоді ймовірність не банкрутства – це ймовірність того, що випадкова величина набуде свого значення, яке відповідає умові:

$$R < r_s. \quad (5.11)$$

У цьому випадку значення ймовірності буде дорівнювати:

$$\begin{aligned} P(R < r_s) &= P(R - m < r_s - m) = P(m - R < m - r_s) = P(|R - m| < m - r_s) \leq \\ &\leq \frac{V}{(m - r_s)^2}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Із проведених алгебраїчних перетворень випливає, що шанс збанкрутувати не перевищує  $\frac{V}{(m - r_s)^2}$ . Треба мати на увазі, що раціонально вкладати під кредит можна тільки тоді, коли  $m > r_s$ , а умова (5.11) виконується лише тоді, коли дисперсія не дуже велика, а саме:  $V \leq (m - r_s)^2$ .

Для того, щоби при виконанні цих умов, шанс банкрутства був не більше одного з 9, треба щоб виконувалася нерівність:

$$\frac{V}{(m - r_s)^2} \leq \frac{1}{9}. \quad (5.13)$$

Звідси випливає, що  $3\sigma \leq m - r_s$  або

$$m \geq r_s + 3\sigma. \quad (5.14)$$

Отже, ми отримали правило трьох сигм.

Одним із параметрів ризику у системі кількісної його оцінки є ймовірність несприятливої події  $p_n = \sigma^2/\delta^2$  поряд з дисперсією. У цьому випадку  $p_n \leq 1/9$ . Інколи суб'єкта прийняття рішення не задовольняє величина  $p_n$  і тоді її визначають на рівні 0,001.

Приклад 5.9. Підприємство бере кредит під 20% річних. Експерти оцінюють, що ризик, пов'язаний з коливаннями сподіваного прибутку становить 5%. Оцінити з імовірністю 1/9 рівень сподіваного прибутку, щоб уникнути банкрутства.

▲ На підставі отриманої формули (5.14) маємо:

$$m \geq 20\% + 3 \cdot 5\% = 35\% ,$$

тобто рівень сподіваного прибутку повинен бути не меншим за 35%. ▲

Розглянемо ще одну економічну ситуацію. Нехай кредитор інвестує лише частину свого капіталу, залишаючи іншу частину на заощадження під майже безризиковий відсоток  $r_0$ .

Позначимо:

$S$  – початковий капітал;

$x_0$  – частка, вкладена на заощадження під відсоток  $r_0$ .

Банкрутство можливе, якщо:

$$x_0 S(1 + r_0) + (1 - x_0)S(1 + R) < 0 .$$

Звідси

$$R < -\frac{1 + x_0 r_0}{1 - x_0} . \quad (5.15)$$

У цьому випадку замість  $r_s$ , що фігурує в нерівності (5.11), є величина  $-\frac{1 + x_0 r_0}{1 - x_0}$ . Оцінка за нерівністю Чебишева визначає ризик банкрутства з імовірністю, меншою від 1/9 тоді, коли:

$$\frac{\sigma}{m + \frac{1 + x_0 r_0}{1 - x_0}} < \frac{1}{3}, \quad 3\sigma < m + \frac{1 + x_0 r_0}{1 - x_0},$$

або

$$m > -\frac{1 + x_0 r_0}{1 - x_0} + 3\sigma . \quad (5.16)$$

Звідси випливає, що ставка на власний капітал значно безпечніша. Якщо інвестувати весь власний капітал, то достатнім рівнем не банкрутства буде:

$$m > -1 + 3\sigma . \quad (5.17)$$

Приклад 5.10. Інвестор, який має 100 тис грн., вкладає половину капіталу в безризикові цінні папери під відсоткову ставку 35%. Решту грошей він хоче вкласти в папери, які обтяжені ризиком. Ризик цих паперів (середньоквадратичне відхилення) становить 8%.

1. Розрахувати сподівану норму прибутку, обтяженого ризиком цінних паперів, якщо інвестор хоче, щоб шанс банкрутства для нього був меншим за 1/9.

2. Обчислити, яким має бути значення середньоквадратичного відхилення цінних паперів, якщо інвестор вирішив вкласти в них весь капітал. Сподівана (середня) норма прибутку дорівнює 10%, шанс банкрутства не більший за 1/9.

▲ 1. За умови прикладу  $r_0 = 35\%$ ,  $x_0 = 0,5$ ,  $\sigma = 8\%$ .

Використавши формулу (5.16), одержимо:

$$m > -\frac{1+0,5 \cdot 0,35}{1-0,5} + 3 \cdot 0,08 = -2,11 \text{ } (-211\%).$$

Тобто, сподівана норма доходу цінних паперів, що обтяжені ризиком, має бути не меншою за  $-211\%$ .

2. Відомо, що  $x_0 = 0$ ,  $m = 10\%$ . Використавши формулу (5.18), одержимо:

$$\sigma \leq (m+1)/3, \text{ тобто } \sigma \leq (0,1+1)/3 = 0,367 \text{ або } 36,7\%.$$

Отже, ризик має бути не вищим за 36,7%. ▲

### 5.5. Систематичний і несистематичний ризик

У фінансовій теорії популярний розподіл ризиків, характерних будь-якому об'єкту на два типи: систематичний і несистематичний.

*Систематичний ризик*  $\beta$  визначає рівень коливань або відхилень у результатах діяльності галузі щодо результатів діяльності ринку або всієї економіки. Він є частиною загального ризику, який залежить від загального стану економіки країни. Цей ризик впливає на всіх учасників господарського процесу й зумовлений динамікою інвестицій, обігом зовнішньої торгівлі, змінами в законодавстві та ін. Систематичний ризик – один із основних показників, що використовуються під час аналізу фінансових ризиків. Він обчислюється за формулою:

$$\beta = \frac{V_{R_i,R}}{\sigma_R^2} = \rho_{R_i,R} \frac{\sigma_{R_i}}{\sigma_R}, \quad (5.18)$$

де  $R$  – випадкова величина, що характеризує всю економіку;  $R_i$  – випадкова величина, що характеризує  $i$ -у галузь;  $V_{R_i R}$  – коефіцієнт коваріації між  $R_i$  та  $R$ ;  $\sigma_R$  – середньоквадратичне відхилення  $R$ ;  $\sigma_{R_i}$  – середньоквадратичне відхилення  $R_i$ ;  $\rho_{R_i R}$  – коефіцієнт кореляції між  $R_i$  та  $R$ .

Обчислюються вищевказані числові характеристики за такими формулами:

$$V_{R_i R} = \frac{n}{n-1} (\overline{R_i R} - \overline{R_i} \cdot \overline{R})^2, \quad \rho_{R_i R} = \frac{V_{R_i R}}{\sigma_{R_i} \sigma_R}, \quad \overline{R_i R} = \frac{\sum_{j=1}^n R_{ij} R_j}{n}, \quad \overline{R_i} = \frac{\sum_{j=1}^n R_{ij}}{n},$$

$$\overline{R} = \frac{\sum_{j=1}^n R_j}{n}, \quad \sigma_{R_i} = \sqrt{\sum_{j=1}^n (R_{ij} - \overline{R_i})^2 / n}, \quad \sigma_R = \sqrt{\sum_{j=1}^n (R_j - \overline{R})^2 / n}.$$

Систематичний ризик ще називають *ринковим ризиком* або *не диверсифікованим*. Вимірюють його величину, як бачимо, *коефіцієнтом чутливості*  $\beta$ . За допомогою цього показника можна порівнювати діяльність підприємств і галузі, ефективність акцій з ефективністю всього ринку цінних паперів і т. д. Його інтерпретують так: коефіцієнт  $\beta$  вказує на скільки відсотків наближено зросте (знизиться) норма прибутку акції, якщо норма прибутку ринку зросте (знизиться) на 1%.

Поширені такі твердження:

- $\beta = 1$  – досліджувана галузь має коливання результатів, що дорівнюють ринковому;
- $\beta < 1$  – коливання результатів менші за ринкові;
- $\beta > 1$  – коливання результатів більші за ринкові.

Чим більший показник  $\beta$ , тим вищий ризик пов'язаний із цією галуззю.

Значення коефіцієнта  $\beta$  регулярно публікуються у фінансовій періодиці країн з розвинутою ринковою економікою. Обчислен-

---

<sup>2</sup> Коефіцієнт  $n/(n-1)$  використовується у випадку  $n < 15$ , при  $n \geq 15$  коефіцієнт дорівнює одиниці.

ня його не є складним. Проте дослідження економістів дають статистичні дані про те, що  $\beta$  нестійкий, він не відображає обчислені на підставі інформації минулого періоду прогнози інвесторів щодо ризику у майбутньому. Крім цього,  $\beta$  обчислені на минулих даних, не можуть відобразити ризик, який відчували інвестори в пізнішому періоді.

Крім цієї проблеми, дослідження показують, що є ще й інша проблема: з часом  $\beta$  наближається до одиниці. Наприклад, якщо акція в період 1995–2003 рр. мала обчислене значення  $\beta = 0,7$ , то в 2003–2008 рр. воно буде вище й перебуватиме в діапазоні 0,7–1,0 і навпаки, якщо  $\beta$  за період 1995–2003 рр. дорівнював 1,6, то в період 2003–2008 рр. ймовірно, що  $\beta$  буде перебувати в діапазоні 1,0–1,6. З цієї причини економісти майбутні значення  $\beta$  обчислюють як середньозважені значення  $\beta$  за минулий період. Наприклад,

$$\beta_{\text{майб}} = 0,6 \cdot \beta_{\text{попередній}} + 0,4 \cdot 1,0.$$

Ваги 60% і 40% кожна фірма вибирає зі своїх міркувань і, як правило, не розкриває методикку їхнього підбору й, крім того, змінює їх з часом.

На розвинутих фондових ринках, де регулярно розраховують значення відповідних ринкових (фондових) індексів, є чітка класифікація акцій за ступенем ризику відповідно до граничних значень коефіцієнта чутливості  $\beta$  (табл. 5.6).

Таблиця 5.6

## Класифікація акцій за ступенем ризику

| Значення        | Економічна суть                                                                                     | Ступінь ризику                   |
|-----------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------|
| $\beta < 0$     | Рідкісний випадок, дохідність акції та ринкового портфеля пов'язані оберненою залежністю            |                                  |
| $\beta = 0$     | Дохідність акції не залежить від змін, що відбуваються на ринку. Тобто це без ризикові цінні папери | Ризику майже немає               |
| $0 < \beta < 1$ | Дохідність акції доволі помірковано реагує на зміни на ринку. Такі акції називаються                | Ризик нижчий за середньоринковий |



|  |                 |  |
|--|-----------------|--|
|  | вають захисними |  |
|--|-----------------|--|

|             |                                                                                                                           |                                  |
|-------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------|
| $\beta = 1$ | Дохідність акції змінюється такою самою мірою, як середньо ринкова дохідність. Такий коефіцієнт має сам ринковий портфель | Ризик на рівні середньоринкового |
| $\beta > 1$ | Дохідність акції значною мірою залежить від змін, що відбуваються на ринку. Такі акції називають агресивними              | Ризик вищий за середньоринковий  |

*Приклад 5.11.* У табл. 5.7 відображено дані ефективності роботи металургійного комбінату й ефективності роботи металургійної промисловості за останні 10 періодів

Таблиця 5.7

|                                                         |    |    |    |    |    |    |    |    |    |   |
|---------------------------------------------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|---|
| Ефективність роботи металургійного комбінату ( $X$ )    | 20 | 15 | 12 | 10 | 12 | 6  | -2 | -4 | 3  | 5 |
| Ефективності роботи металургійної промисловості ( $Y$ ) | 30 | 20 | 10 | 8  | 9  | -2 | -5 | -2 | -2 | 3 |

Обчислити коефіцієнт чутливості  $\beta$  і зробити висновки щодо стабільності роботи металургійного комбінату порівняно з усією металургійною промисловістю.

$$\blacktriangle \bar{x} = 7,7, \quad \bar{y} = 6,9, \quad \bar{y}^2 = 159,1, \quad \sigma_y^2 = 111,49,$$

$$\overline{xy} = \frac{(20 \cdot 30 + 15 \cdot 20 + 12 \cdot 10 + 10 \cdot 8 + 12 \cdot 9 - 6 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + 4 \cdot 2 - 3 \cdot 2 + 5 \cdot 3)}{10} = 122,3;$$

$$V_{xy} = \frac{n}{n-1} (\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}) = \frac{10}{9} (122,3 - 7,7 \cdot 6,9) = 76,86.$$

$$\text{Отже, } \beta = 76,86/111,49 = 0,689 < 1.$$

Оскільки  $\beta < 1$ , то металургійний комбінат працює стабільніше, ніж вся металургійна промисловість. ▲

*Приклад 5.12.* Відомі статистичні дані за 10 послідовних періодів часу про щотижневу дохідність акцій компанії  $N$  ( $Y_N$ ) та ринкового портфеля, що складений на основі фондового індексу  $M$  ( $Y_M$ ) (табл. 5.8). Необхідно підрахувати  $\beta$  акцій компанії  $N$ .

Таблиця 5.8

|       |   |     |     |     |   |     |      |     |      |    |
|-------|---|-----|-----|-----|---|-----|------|-----|------|----|
| $Y_M$ | 4 | 0,5 | -1  | 0,5 | 2 | 3,5 | -0,6 | 0,5 | -0,5 | -2 |
| $Y_N$ | 2 | 3   | 1,5 | 6   | 4 | 3   | 2,5  | -2  | -3   | -4 |

▲ Обчислимо  $\beta$  за формулою (5.18). Щоб уникнути громіздких обчислень коваріації і дисперсії вручну, використаємо відповідні стандартні статистичні функції пакету MS Excel – КОВАР та ДИСП:

$$\text{cov}(Y_M, Y_N) = 2,753, \sigma_M^2 = 3,761, \beta = \frac{2,753}{3,761} 0,732.$$

Оскільки  $0 < \beta < 1$ , то вкладення коштів у такі акції менш ризикові, ніж у середньому на ринку. ▲

Крім систематичного ризику, розрізняють і ризик *несистематичний*. Це обставини, які стосуються кожного підприємства зокрема, характерні лише для нього і не залежать від загального економічного клімату. Вони змушують змінюватися прибутки підприємства за певною акцією незалежно від зміни інших акцій на ринку. Такі події називаються шоком.

Наприклад, підприємство випускало обладнання для металургійного комбінату. У зв'язку із закриттям металургійного комбінату зникає попит на це обладнання.

Залежність між загальним ризиком акції, систематичним і несистематичним ризиком виражається в такий спосіб:

$$\sigma^2 = (\beta_j \sigma_M)^2 + (\sigma_{e_j})^2 \quad (5.19)$$

де  $\sigma_M$  – стандартне відхилення очікуваного прибутку на ринку;

$\sigma_{e_j}$  – стандартне відхилення похибки або шоку  $j$ -ої акції;  $\beta_j$  – коефіцієнт  $\beta$   $j$ -ої акції.

Несистематичний ризик можна зменшувати шляхом ведення правильної інвестиційної політики фірми. Диверсифікація дає змогу

знизити невизначеність отримання доходу шляхом придбання різних фінансових інструментів. Тому несистематичний ризик називають ще *диверсифікованим* ризиком.

Отже, при управлінні підприємствами необхідно ретельно вивчати систематичний ризик і правильно управляти несистематичним.

## 5.6. Оптимізація структури портфеля цінних паперів і оцінка ризику

У цьому підрозділу ознайомимося з методикою оптимізації структури портфеля цінних паперів за допомогою диверсифікації та оцінки ризику. Багато з отриманих результатів можна поширити і на виробничі інвестиції. Якщо диверсифікацію портфеля правильно застосувати, то це приведе до зменшення дисперсії при всіх інших рівних умовах.

Диверсифікація базується на гіпотезі:

*якщо кожна компонента портфеля характеризується деякою дисперсією доходу, то дохід від портфеля має дисперсію, яка визначається його складом.*

Отже, змінюючи складові портфеля, можна змінювати сумарну дисперсію доходу, а в деяких випадках – звести її до мінімуму.

Нехай є портфель з  $n$  видів ЦП. Дохід від одного папера виду  $i$  –  $d_i$ . Сумарний дохід

$$A = \sum_i n_i d_i, \quad (5.20)$$

де  $n_i$  – кількість паперів виду  $i$ .

Якщо  $d_i$  – середній дохід від папера виду  $i$ , то  $A$  – середній дохід від портфеля загалом.

Нехай показники доходів різних видів паперів – статистично незалежні величини (не корелюють між собою). Дисперсії доходу тоді такі:

$$D = \sum_{i=1}^n n_i^2 D_i, \quad (5.21)$$

де  $D_i$  – дисперсія доходу від папера виду  $i$ ;  $n$  – кількість видів ЦП.

Для спрощення припускаємо, що  $n_i$  – не абсолютний показник кількості папера виду  $i$ , а відносний. Тобто  $n_i$  – частка папера виду  $i$  в портфелі. Тоді  $0 \leq n_i \leq 1$ ,  $\sum n_i = 1$ .

Якщо показники доходів різних видів паперів статистично залежні, то дисперсія сумарного доходу [1, 3, 15]:

$$D = \sum_{i=1}^n n_i^2 D_i + 2 \sum_{i \neq j} n_i n_j r_{ij} \sigma_i \sigma_j, \quad (5.22)$$

де  $D_i$  – дисперсія доходу від папера виду  $i$ ;  $r_{ij}$  – коефіцієнт кореляції доходу від паперів виду  $i$  та  $j$ ;  $\sigma_i$ ,  $\sigma_j$  – середні квадратичні відхилення доходу паперів виду  $i$  та  $j$ .

Коефіцієнт кореляції двох випадкових величин  $x$  та  $y$  визначається за формулами:

$$r_{yx} = \frac{\sum (y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})}{n \sigma_y \sigma_x} \quad (5.23)$$

або

$$r_{yx} = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{\sqrt{[n \sum y_i^2 - (\sum y_i)^2] \cdot [n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2]}}. \quad (5.24)$$

Коефіцієнт кореляції приймає значення з інтервалу  $[-1; 1]$ . Якщо  $r_{yx}$  додатній, то з формули (5.22) випливає, що дисперсія доходу збільшується. Якщо  $r_{yx}$  від'ємний, то – дисперсія доходу зменшується

Приклад 5.13. Інвестор має портфель, що складається з двох акцій  $A$  та  $B$  з доходами відповідно 150% та 200%. Причому частка акції  $A$  становить 30% портфеля. Необхідно підрахувати сумарний дохід портфеля.

▲ Сумарний дохід портфеля знаходимо за формулою (5.20):

$$A = 0,3 \cdot 150\% + 0,7 \cdot 200\% = 185\% \quad \blacktriangle$$

Приклад 5.14. Дві акції  $A$  та  $B$  мають відповідно середні доходи  $d_A = 9\%$  та  $d_B = 10\%$ , середні квадратичні відхилення доходу  $\sigma_A = 2,1\%$ ,  $\sigma_B = 2,5\%$ . Доходи акцій статистично залежні з коефіцієнтом кореляції  $r_{AB} = 0,4$ . Частка акції  $A$  становить 65%. Обчислити сумарний дохід і ризик портфеля.

▲ Сумарний дохід портфеля знаходимо за формулою (5.20):

$$A = 0,65 \cdot 9\% + 0,35 \cdot 10\% = 9,35\%,$$

дисперсію – за (5.3):

$$D = 0,65^2 \cdot (2,1\%)^2 + 0,35^2 \cdot (2,5\%)^2 + 2 \cdot 0,65 \cdot 0,35 \cdot 2,1\% \cdot 2,5\% \cdot 0,4 = 3,58.$$

Ризик портфеля становить:

$$\sigma = \sqrt{3,58} = 1,89\%. \quad \blacktriangle$$

Цей приклад показує, яка користь може бути від формування портфеля акцій. Ризик портфеля менший, ніж ризик кожної акції, а сумарний дохід – більший, ніж дохід акції  $A$  з меншим доходом.

Розглянемо вплив кількості видів ЦП на величину ризику (вплив *масштабу диверсифікації*). Нехай портфель складається з паперів різного виду, що мають однакову дисперсію доходу  $\sigma_0^2$ , їхня однакова кількість, показники дохідності статистично незалежні.

Тоді дисперсія доходу дорівнює:

$$D = \frac{1}{n} \sigma_0^2, \quad (5.25)$$

де  $n$  – кількість видів ЦП.

Проаналізуємо цю формулу. Для портфеля з двох видів ЦП:

$$D = \frac{1}{2} \sigma_0^2, \quad \sigma = \sqrt{\frac{1}{2}} \sigma_0 = 0,71 \sigma_0;$$

трьох видів ЦП

$$D = \frac{1}{3} \sigma_0^2, \quad \sigma = \sqrt{\frac{1}{3}} \sigma_0 = 0,58 \sigma_0$$

і т. д.

Зі збільшенням  $n$  ризик зменшується навіть при однаковій дисперсії складових елементів (рис. 5.9).

Розглянемо зміни доходу і величини ризику при зміні структури портфеля на прикладі портфеля з двох видів ЦП, що мають різну дохідність і дисперсію.

Для незалежних доходів:

$$D = n_x^2 D_x + n_y^2 D_y = n_x^2 \sigma_x^2 + n_y^2 \sigma_y^2, \quad (5.26)$$

для залежних:

$$D = n_x^2 \sigma_x^2 + n_y^2 \sigma_y^2 + 2n_x n_y r_{xy} \sigma_x \sigma_y. \quad (5.27)$$

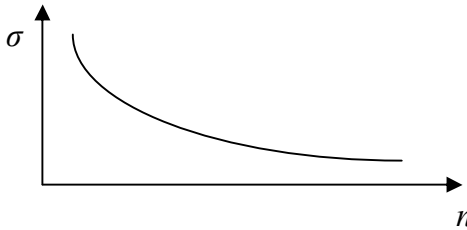


Рис.5.9. Залежність ризику від кількості ЦП

Середнє значення сумарного доходу дорівнює:

$$\begin{aligned} A &= n_x d_x + n_y d_y = n_x d_x + (1 - n_x) d_y = n_x d_x + d_y - n_x d_y = \\ &= d_y + (d_x - d_y) n_x. \end{aligned}$$

Якщо  $d_x > d_y$  і  $\sigma_x > \sigma_y$ , то дохідність портфеля зросте при збільшенні  $n_x$ , тобто при зростанні частки паперів першого виду.

Дисперсія доходу (5.27) залежить від знаку коефіцієнта кореляції і ступеня кореляції.

Розглянемо 3 випадки:

- $r_{xy} = +1$  (повна додатна кореляція);
- $r_{xy} = -1$  (повна від'ємна кореляція);
- $r_{xy} = 0$  (незалежність доходів).

а)  $r_{xy} = +1$ . Це простежується тоді, коли, наприклад, розгляда-ти ЦП підприємств, що виготовляють взаємодоповнюючі товари (автомобілі – шини, черевики – шнурки) і доходи одного ЦП змінюються прямо пропорційно доходу другого. Зробимо алгебраїчні перетворення формули (5.27):

$$D = n_x^2 \sigma_x^2 + n_y^2 \sigma_y^2 + 2n_x n_y \sigma_x \sigma_y = (n_x \sigma_x + n_y \sigma_y)^2, \\ \sigma = n_x \sigma_x + n_y \sigma_y. \quad (5.28)$$

Отже, ризик – це середньозважена величина ризику окремих видів акцій, а вагові коефіцієнти – частки цих акцій у портфелі.

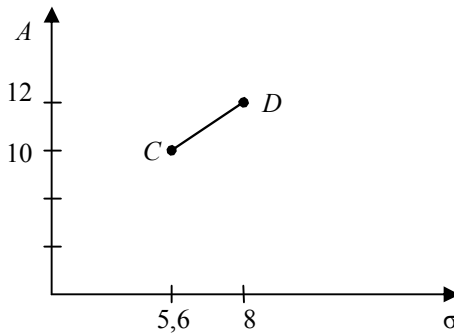
Приклад 5.15. Дві акції  $A$  та  $B$  мають доходи  $d_A = 10\%$ ,  $d_B = 12\%$ , ступені ризику  $\sigma_A = 5,6\%$ ,  $\sigma_B = 8\%$  та  $r_{AB} = 1$ . Проаналізувати сумарний дохід і ризик портфеля, зобразити графічно.

▲ Сумарний дохід і ризик портфеля становить:

$$A = n_A \cdot 10\% + n_B \cdot 12\%;$$

$$\sigma = n_A \cdot 5,6\% + n_B \cdot 8\%.$$

Для графічного зображення надаємо різні значення  $n_A$  і  $n_B$  ( $n_A + n_B = 1$ ).



Зменшивши ризик, одержуємо прямо пропорційне зменшення доходу. Випадок  $r_{AB} = 1$  не цікавий для інвестора. ▲

б)  $r_{xy} = -1$ .

Зробимо алгебраїчні перетворення формули (5.7):



$$D = n_x^2 \sigma_x^2 + n_y^2 \sigma_y^2 - 2n_x n_y \sigma_x \sigma_y = (n_x \sigma_x - n_y \sigma_y)^2.$$

Ризик портфеля буде

$$\sigma = |n_x \sigma_x - n_y \sigma_y|. \quad (5.29)$$

З (5.29) видно, що ризик портфеля можна суттєво зменшити.

Якщо  $\sigma = 0$ , то:

$$\begin{aligned} n_x \sigma_x &= (1 - n_x) \sigma_y; & n_x (\sigma_x + \sigma_y) &= \sigma_y; \\ n_x &= \frac{\sigma_y}{\sigma_x + \sigma_y}; & n_y &= 1 - n_x. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Тобто є можливість обрати таку структуру портфеля, який пов'язаний з ризиком.

Приклад 5.16. Розглянемо випадок, як в попередньому прикладі, тільки з  $r_{AB} = -1$ .

▲ Сумарний дохід і ризик портфеля становить:

$$\begin{aligned} A &= n_A \cdot 10\% + n_B \cdot 12\%; \\ \sigma &= |n_A \cdot 5,6\% - n_B \cdot 8\%|. \end{aligned}$$

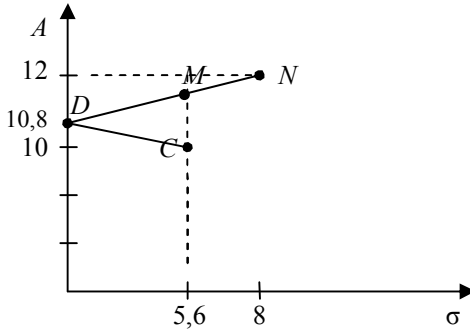
Використаємо формули (5.30):

$$n_A = \frac{8}{5,6 + 8} = 0,59; \quad n_B = 1 - 0,59 = 0,41.$$

Отже, при структурі портфеля  $n_A = 0,59$ ,  $n_B = 0,41$  ризик портфеля дорівнює 0, сумарний дохід:

$$A = 0,59 \cdot 10\% + 0,41 \cdot 12\% = 10,8\%.$$

Для графічного зображення даємо різні значення  $n_A$  і  $n_B$  ( $n_A + n_B = 1$ ).



В точці  $C$  –  $n_A = 1$ , а  $n_B = 0$ , в точці  $D$  – ризик портфеля дорівнює 0, в точці  $N$  –  $n_A = 0$ , а  $n_B = 1$ . На відрізку  $DN$  зростає частка акції  $B$ , зростає сумарний дохід, але ризик теж зростає.

Розсудливий інвестор не обере портфеля з  $CD$ , бо на  $DM$  існує портфель з таким самим ступенем ризику, але більшим доходом.

$DN$  – множина ефективних портфелів. ▲

в)  $r_{xy} = 0$ .

Тоді

$$D = n_x^2 \sigma_x^2 + n_y^2 \sigma_y^2.$$

Ризик портфеля буде:

$$\sigma = \sqrt{n_x^2 \sigma_x^2 + n_y^2 \sigma_y^2}. \quad (5.31)$$

З (5.31) видно, що є можливість зниження ризику портфеля двох акцій.

Підставимо у формулу (5.31)  $n_y = 1 - n_x$ , знайдемо похідну по  $n_x$  і прирівняємо її до нуля:

$$\frac{d\sigma}{dn_x} = \frac{2n_x \sigma_x^2 - 2\sigma_y^2(1 - n_x)}{2\sqrt{n_x^2 \sigma_x^2 + (1 - n_x)^2 \sigma_y^2}};$$

$$n_x \sigma_x^2 = \sigma_y^2(1 - n_x).$$

Ризик досягне мінімуму при  $n_x^*$  і  $n_y^*$ , які визначаються за формулами:

$$n_x^* = \frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}, \quad n_y^* = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}. \quad (5.32)$$

Тому є можливість обрати таку структуру портфеля, ризик якої мінімальний (5.10).

Отже, ефективність диверсифікації (для скорочення ризику) спостерігається при від'ємній або нульовій кореляції.

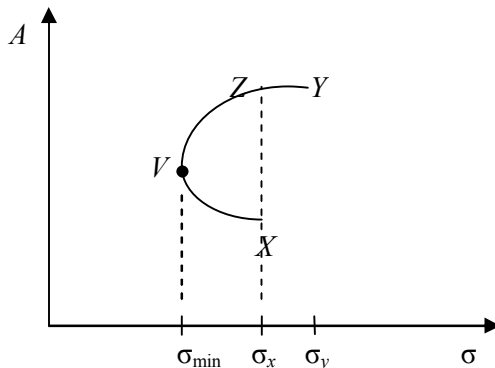


Рис. 5.10. Залежність „дохід-σ” при  $r = 0$

Приклад 5.17. Дві акції  $A$  та  $B$  мають доходи  $d_A = 50\%$ ,  $d_B = 60\%$ , ступені ризику  $\sigma_A = 5\%$ ,  $\sigma_B = 7\%$  та  $r_{AB} = 0$ . Проаналізувати сумарний дохід і ризик портфеля, зобразити графічно.

▲ Сумарний дохід і ризик портфеля:

$$A = n_A \cdot 50\% + n_B \cdot 60\% ;$$

$$\sigma = \sqrt{n_A^2 \cdot 25 + n_B^2 \cdot 49} .$$

Використаємо формули (5.32):

$$n_A = \frac{49}{25 + 49} = 0,66 ; \quad n_B = 1 - 0,66 = 0,34 .$$

Отже, при структурі портфеля  $n_A = 0,66$ ,  $n_B = 0,34$  ризик портфеля мінімальний:

$$\sigma = \sqrt{0,66^2 \cdot 25 + 0,34^2 \cdot 49} = 4,1\%,$$

сумарний дохід:

$$A = 0,66 \cdot 50\% + 0,34 \cdot 60\% = 53,4\%.$$

Для графічного зображення надаємо різні значення  $n_A$  і  $n_B$  ( $n_A + n_B = 1$ ).

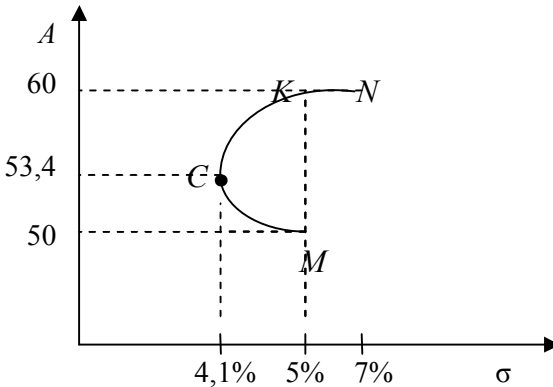


Рис. 5.2. Залежність „дохід- $\sigma$ ” для прикладу 5.17

У точці  $M$   $n_A = 1$ , а  $n_B = 0$ , в точці  $N$  ризик портфеля мінімальний, у точці  $N$   $n_A = 0$ , а  $n_B = 1$ . На відрізку  $CN$  зростає частка акції  $B$ , зростає сумарний дохід, але ризик теж зростає.

Розсудливий інвестор не обере портфеля з  $MC$ , бо на  $CK$  є портфель з таким же ступенем ризику, але більшим доходом.

$CN$  – множина ефективних портфелів. ▲

Знайдемо для загального випадку структуру портфеля, що складається з двох видів акцій і ризик якого найменший.

Згідно з формулою (5.27) дисперсія доходу дорівнює:

$$D = n_x^2 \sigma_x^2 + n_y^2 \sigma_y^2 + 2n_x n_y r_{xy} \sigma_x \sigma_y.$$

Врахувавши, що частку акцій  $Y$  можна представити через частку акцій  $X$ , формула (5.27) набуде вигляду:

$$D = n_x^2 \sigma_x^2 + (1 - n_x)^2 \sigma_y^2 + 2n_x (1 - n_x) r_{xy} \sigma_x \sigma_y.$$

Знайдемо похідну по  $n_x$  та прирівняємо її до нуля:

$$\frac{dD}{dn_x} = 2n_x\sigma_x^2 - 2(1-n_x)\sigma_y^2 + 2r_{xy}\sigma_x\sigma_y - 4n_xr_{xy}\sigma_x\sigma_y = 0.$$

Проведемо перетворення:

$$\frac{dD}{dn_x} = 2n_x\sigma_x^2 - 2\sigma_y^2 + 2n_x\sigma_y^2 + 2r_{xy}\sigma_x\sigma_y - 4n_xr_{xy}\sigma_x\sigma_y = 0,$$

$$\frac{dD}{dn_x} = n_x(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2r_{xy}\sigma_x\sigma_y) - \sigma_y^2 + r_{xy}\sigma_x\sigma_y = 0.$$

Звідси:

$$n_x^* = \frac{\sigma_y^2 - r_{xy}\sigma_x\sigma_y}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2r_{xy}\sigma_x\sigma_y}, \quad n_y^* = (1 - n_x^*) \quad (5.33)$$

Отже, формули (5.33) визначають структуру портфеля, що складається з двох видів акцій і ризик якого найменший.

### Питання для самоконтролю

1. Розкрийте суть понять “невизначеність” та “ризик”.
2. Дайте визначення ризику та поясніть його суть.
3. Розкрийте основні функції ризику.
4. Охарактеризуйте п’ять-шість класифікаційних ознак ризику.
5. Охарактеризуйте види фінансового ризику.
6. Яким видам ризику підлягають банки?
7. Проаналізуйте кроки, за якими аналізується ризик.
8. У чому полягає необхідність якісного аналізу ризику?
9. Поясніть суть кількісного аналізу ризику.
10. На які групи поділяють фактори, що впливають на ступінь ризику?
11. Охарактеризуйте об’єктивні фактори ризику.
12. Проведіть аналіз суб’єктивних факторів ризику.
13. Дайте визначення об’єкта і суб’єкта ризику.
14. Які основні методи кількісного аналізу ризику вам відомі?
15. Назвіть складові системи управління ризиком.

16. Розкрийте зміст методів управління ризиком: уникнення, попередження та прийняття ризику.
17. Охарактеризуйте основні методи зниження ступеня ризику.
18. У чому полягає суть понять об'єктивна і суб'єктивна ймовірність?
19. Наведіть показники кількісного вимірювання величини ризику в абсолютному виразі.
20. Чому і в якому випадку для оцінювання переваг одного з декількох заходів використовують коефіцієнт варіації?
21. Наведіть показники кількісного вимірювання величини ризику в відносному виразі.
22. Чим відрізняються показники кількісного вимірювання в класичному і неокласичному підходах до оцінювання ризику?
23. Яка нерівність має виконуватися для того, щоб шанс банкрутства був не більше одного з 9 випадків (розглянути різні ситуації інвестора)?
24. Що означають терміни систематичний і несистематичний ризику?
25. В чому суть коефіцієнта чутливості  $\beta$ ?
26. Як класифікуються акції за ступенем ризику?
27. Як виражається залежність між загальним ризиком акції, систематичним і несистематичним ризиком?
28. Опишіть алгоритм оптимізації структури портфеля цінних паперів з урахуванням ризиків.
29. Запишіть формулу оцінки ризику портфеля цінних паперів.
30. Як виглядає формула оцінки ризику портфеля цінних паперів у випадку двох акцій?

## ВПРАВИ

1. Підприємство може виготовляти три проекти А, Б, В, при цьому можливі три варіанти (I, II, III) їхньої реалізації. Прибутки (тис. грн.) та ймовірності варіантів дані в таблиці. Визначити величину ризику і прийняти рішення щодо вибору одного проекту. ( $N$  – номер студента в списку групи,  $K$  – остання цифра залікової книж-

| Варіант реалізації | I                    |             | II                    |             | III                  |             |
|--------------------|----------------------|-------------|-----------------------|-------------|----------------------|-------------|
|                    | Види продукції       | Імовірність | Прибуток              | Імовірність | Прибуток             | Імовірність |
| А                  | $\frac{N+5}{4N+20}$  | $K+50$      | $\frac{2N+15}{4N+20}$ | $K+20$      | $\frac{N}{4N+20}$    | $K+10$      |
| Б                  | $\frac{N+25}{4N+60}$ | $K+40$      | $\frac{N+10}{2N+30}$  | $K+30$      | $\frac{N+15}{4N+60}$ | $K+20$      |

2. Підприємство бере кредит під 30% річних. Експерти оцінюють, що ризик, пов'язаний із коливаннями сподіваного прибутку становить 7%. Оцінити з імовірністю  $1/9$  рівень сподіваного прибутку, щоб уникнути банкрутства.

3. Інвестор, який має 200 тис грн., вкладає половину капіталу в безризикові цінні папери під відсоткову ставку 30%. Решту грошей він хоче вкласти в папери, які обтяжені ризиком. Ризик цих паперів (середньоквадратичне відхилення) становить 10%.

1. Розрахувати сподівану норму прибутку, обтяженого ризиком цінних паперів, якщо інвестор хоче, щоб шанс банкрутства для нього був меншим за  $1/9$ .

2. Обчислити, яким має бути значення середньоквадратичного відхилення цінних паперів, якщо інвестор вирішив вкласти в них весь капітал. Сподівана (середня) норма прибутку дорівнює 12 %, шанс банкрутства не більший за  $1/9$ .

4. Відомі статистичні дані за 10 послідовних періодів часу про щотижневу дохідність акцій компанії  $N$  ( $Y_N$ ) та щотижневу дохідність ринкового портфеля, що складений на основі фондового індексу  $M$  ( $Y_M$ ) (таблиця). Необхідно підрахувати  $\beta$  акцій компанії  $N$ .

|       |   |     |    |   |    |     |     |     |   |     |
|-------|---|-----|----|---|----|-----|-----|-----|---|-----|
| $Y_M$ | 3 | 4   | -1 | 2 | 1  | 3,5 | -1  | 0,5 | 2 | 2,5 |
| $Y_N$ | 2 | 2,5 | 1  | 4 | -2 | 3   | 2,5 | -2  | 4 | 6   |

5. Визначити оптимальний портфель акцій двох видів, якщо інвестор хоче вкласти в акції  $S=200N$  гр. од. Ціни однієї акції 1-го та 2-го видів відповідно такі:  $C_1=(K+2)$  гр. од.  $C_2=(K+5)$  гр. од. Інші дані записані в таблиці.

| Стан економіки      | Імовірність | Норми прибутків акцій (%) |                |
|---------------------|-------------|---------------------------|----------------|
|                     |             | I                         | II             |
| Значне піднесення   | 0,2         | $N + 4(K + 1)$            | $N + 2(K + 1)$ |
| Незначне піднесення | 0,2         | $N + K + 2$               | $N + K$        |
| Застій              | 0,1         | $K + 1$                   | $K + 3$        |
| Незначний спад      | 0,3         | $-(K + 1)$                | $-(K + 3)$     |
| Значний спад        | 0,2         | $-2(K + 1)$               | $-(K + 7)$     |



## Додаток 1

Таблиця Д1

| Порядкові номери днів у невисокосному році |        |       |          |         |         |         |        |         |          |         |          |         |
|--------------------------------------------|--------|-------|----------|---------|---------|---------|--------|---------|----------|---------|----------|---------|
| День місяця                                | січень | лютий | березень | квітень | травень | червень | липень | серпень | вересень | жовтень | листопад | грудень |
| 1                                          | 1      | 32    | 60       | 91      | 121     | 152     | 182    | 213     | 244      | 274     | 305      | 335     |
| 2                                          | 2      | 33    | 61       | 92      | 122     | 153     | 183    | 214     | 245      | 275     | 306      | 336     |
| 3                                          | 3      | 34    | 62       | 93      | 123     | 154     | 184    | 215     | 246      | 276     | 307      | 337     |
| 4                                          | 4      | 35    | 63       | 94      | 124     | 155     | 185    | 216     | 247      | 277     | 308      | 338     |
| 5                                          | 5      | 36    | 64       | 95      | 125     | 156     | 186    | 217     | 248      | 278     | 309      | 339     |
| 6                                          | 6      | 37    | 65       | 96      | 126     | 157     | 187    | 218     | 249      | 279     | 310      | 340     |
| 7                                          | 7      | 38    | 66       | 97      | 127     | 158     | 188    | 219     | 250      | 280     | 311      | 341     |
| 8                                          | 8      | 39    | 67       | 98      | 128     | 159     | 189    | 220     | 251      | 281     | 312      | 342     |
| 9                                          | 9      | 40    | 68       | 99      | 129     | 160     | 190    | 221     | 252      | 282     | 313      | 343     |
| 10                                         | 10     | 41    | 69       | 100     | 130     | 161     | 191    | 222     | 253      | 283     | 314      | 344     |
| 11                                         | 11     | 42    | 70       | 101     | 131     | 162     | 192    | 223     | 254      | 284     | 315      | 345     |
| 12                                         | 12     | 43    | 71       | 102     | 132     | 163     | 193    | 224     | 255      | 285     | 316      | 346     |
| 13                                         | 13     | 44    | 72       | 103     | 133     | 164     | 194    | 225     | 256      | 286     | 317      | 347     |
| 14                                         | 14     | 45    | 73       | 104     | 134     | 165     | 195    | 226     | 257      | 287     | 318      | 348     |
| 15                                         | 15     | 46    | 74       | 105     | 135     | 166     | 196    | 227     | 258      | 288     | 319      | 349     |
| 16                                         | 16     | 47    | 75       | 106     | 136     | 167     | 197    | 228     | 259      | 289     | 320      | 350     |
| 17                                         | 17     | 48    | 76       | 107     | 137     | 168     | 198    | 229     | 260      | 290     | 321      | 351     |
| 18                                         | 18     | 49    | 77       | 108     | 138     | 169     | 199    | 230     | 261      | 291     | 322      | 352     |
| 19                                         | 19     | 50    | 78       | 109     | 139     | 170     | 200    | 231     | 262      | 292     | 323      | 353     |
| 20                                         | 20     | 51    | 79       | 110     | 140     | 171     | 201    | 232     | 263      | 293     | 324      | 354     |
| 21                                         | 21     | 52    | 80       | 111     | 141     | 172     | 202    | 233     | 264      | 294     | 325      | 355     |
| 22                                         | 22     | 53    | 81       | 112     | 142     | 173     | 203    | 234     | 265      | 295     | 326      | 356     |
| 23                                         | 23     | 54    | 82       | 113     | 143     | 174     | 204    | 235     | 266      | 296     | 327      | 357     |
| 24                                         | 24     | 55    | 83       | 114     | 144     | 175     | 205    | 236     | 267      | 297     | 328      | 358     |
| 25                                         | 25     | 56    | 84       | 115     | 145     | 176     | 206    | 237     | 268      | 298     | 329      | 359     |
| 26                                         | 26     | 57    | 85       | 116     | 146     | 177     | 207    | 238     | 269      | 299     | 330      | 360     |
| 27                                         | 27     | 58    | 86       | 117     | 147     | 178     | 208    | 239     | 270      | 300     | 331      | 361     |
| 28                                         | 28     | 59    | 87       | 118     | 148     | 179     | 209    | 240     | 271      | 301     | 332      | 362     |
| 29                                         | 29     |       | 88       | 119     | 149     | 180     | 210    | 241     | 272      | 302     | 333      | 363     |
| 30                                         | 30     |       | 89       | 120     | 150     | 181     | 211    | 242     | 273      | 303     | 334      | 364     |
| 31                                         | 31     |       | 90       |         | 151     |         | 212    | 243     |          | 304     |          | 365     |

| Порядкові номери днів у високосному році |        |       |          |         |         |         |        |         |          |         |          |         |
|------------------------------------------|--------|-------|----------|---------|---------|---------|--------|---------|----------|---------|----------|---------|
| День місяця                              | січень | лютий | березень | квітень | травень | червень | липень | серпень | вересень | жовтень | листопад | грудень |
| 1                                        | 1      | 32    | 61       | 92      | 122     | 153     | 183    | 214     | 245      | 275     | 306      | 336     |
| 2                                        | 2      | 33    | 62       | 93      | 123     | 154     | 184    | 215     | 246      | 276     | 307      | 337     |
| 3                                        | 3      | 34    | 63       | 94      | 124     | 155     | 185    | 216     | 247      | 277     | 308      | 338     |
| 4                                        | 4      | 35    | 64       | 95      | 125     | 156     | 186    | 217     | 248      | 278     | 309      | 339     |
| 5                                        | 5      | 36    | 65       | 96      | 126     | 157     | 187    | 218     | 249      | 279     | 310      | 340     |
| 6                                        | 6      | 37    | 66       | 97      | 127     | 158     | 188    | 219     | 250      | 280     | 311      | 341     |
| 7                                        | 7      | 38    | 67       | 98      | 128     | 159     | 189    | 220     | 251      | 281     | 312      | 342     |
| 8                                        | 8      | 39    | 68       | 99      | 129     | 160     | 190    | 221     | 252      | 282     | 313      | 343     |
| 9                                        | 9      | 40    | 69       | 100     | 130     | 161     | 191    | 222     | 253      | 283     | 314      | 344     |
| 10                                       | 10     | 41    | 70       | 101     | 131     | 162     | 192    | 223     | 254      | 284     | 315      | 345     |
| 11                                       | 11     | 42    | 71       | 102     | 132     | 163     | 193    | 224     | 255      | 285     | 316      | 346     |
| 12                                       | 12     | 43    | 72       | 103     | 133     | 164     | 194    | 225     | 256      | 286     | 317      | 347     |
| 13                                       | 13     | 44    | 73       | 104     | 134     | 165     | 195    | 226     | 257      | 287     | 318      | 348     |
| 14                                       | 14     | 45    | 74       | 105     | 135     | 166     | 196    | 227     | 258      | 288     | 319      | 349     |
| 15                                       | 15     | 46    | 75       | 106     | 136     | 167     | 197    | 228     | 259      | 289     | 320      | 350     |
| 16                                       | 16     | 47    | 76       | 107     | 137     | 168     | 198    | 229     | 260      | 290     | 321      | 351     |
| 17                                       | 17     | 48    | 77       | 108     | 138     | 169     | 199    | 230     | 261      | 291     | 322      | 352     |
| 18                                       | 18     | 49    | 78       | 109     | 139     | 170     | 200    | 231     | 262      | 292     | 323      | 353     |
| 19                                       | 19     | 50    | 79       | 110     | 140     | 171     | 201    | 232     | 263      | 293     | 324      | 354     |
| 20                                       | 20     | 51    | 80       | 111     | 141     | 172     | 202    | 233     | 264      | 294     | 325      | 355     |
| 21                                       | 21     | 52    | 81       | 112     | 142     | 173     | 203    | 234     | 265      | 295     | 326      | 356     |
| 22                                       | 22     | 53    | 82       | 113     | 143     | 174     | 204    | 235     | 266      | 296     | 327      | 357     |
| 23                                       | 23     | 54    | 83       | 114     | 144     | 175     | 205    | 236     | 267      | 297     | 328      | 358     |
| 24                                       | 24     | 55    | 84       | 115     | 145     | 176     | 206    | 237     | 268      | 298     | 329      | 359     |
| 25                                       | 25     | 56    | 85       | 116     | 146     | 177     | 207    | 238     | 269      | 299     | 330      | 360     |
| 26                                       | 26     | 57    | 86       | 117     | 147     | 178     | 208    | 239     | 270      | 300     | 331      | 361     |
| 27                                       | 27     | 58    | 87       | 118     | 148     | 179     | 209    | 240     | 271      | 301     | 332      | 362     |
| 28                                       | 28     | 59    | 88       | 119     | 149     | 180     | 210    | 241     | 272      | 302     | 333      | 363     |
| 29                                       | 29     | 60    | 89       | 120     | 150     | 181     | 211    | 242     | 273      | 303     | 334      | 364     |
| 30                                       | 30     |       | 90       | 121     | 151     | 182     | 212    | 243     | 274      | 304     | 335      | 365     |
| 31                                       | 31     |       | 91       |         | 152     |         | 213    | 244     |          | 305     |          | 366     |

## Додаток 2

Таблиця ДЗ

## Множники нарощення (складні відсотки)

| Число періодів <i>n</i> | Ставка відсотка |          |          |          |          |          |
|-------------------------|-----------------|----------|----------|----------|----------|----------|
|                         | 2               | 4        | 6        | 8        | 10       | 11       |
| 1                       | 1,020000        | 1,040000 | 1,060000 | 1,080000 | 1,100000 | 1,110000 |
| 2                       | 1,040400        | 1,081600 | 1,123600 | 1,166400 | 1,210000 | 1,232100 |
| 3                       | 1,061208        | 1,124864 | 1,191016 | 1,259712 | 1,331000 | 1,367631 |
| 4                       | 1,082432        | 1,169859 | 1,262477 | 1,360489 | 1,464100 | 1,518070 |
| 5                       | 1,104081        | 1,216653 | 1,338226 | 1,469328 | 1,610510 | 1,685058 |
| 6                       | 1,126162        | 1,265319 | 1,418519 | 1,586874 | 1,771561 | 1,870415 |
| 7                       | 1,148686        | 1,315932 | 1,503630 | 1,713824 | 1,948717 | 2,076160 |
| 8                       | 1,171659        | 1,368569 | 1,593848 | 1,850930 | 2,143589 | 2,304538 |
| 9                       | 1,195093        | 1,423312 | 1,689479 | 1,999005 | 2,357948 | 2,558037 |
| 10                      | 1,218994        | 1,480244 | 1,790848 | 2,158925 | 2,593742 | 2,839421 |
| 11                      | 1,243374        | 1,539454 | 1,898299 | 2,331639 | 2,853117 | 3,151757 |
| 12                      | 1,268242        | 1,601032 | 2,012196 | 2,518170 | 3,138428 | 3,498451 |
| 13                      | 1,293607        | 1,665074 | 2,132928 | 2,719624 | 3,452271 | 3,883280 |
| 14                      | 1,319479        | 1,731676 | 2,260904 | 2,937194 | 3,797498 | 4,310441 |
| 15                      | 1,345868        | 1,800944 | 2,396558 | 3,172169 | 4,177248 | 4,784589 |
| 16                      | 1,372786        | 1,872981 | 2,540352 | 3,425943 | 4,594973 | 5,310894 |
| 17                      | 1,400241        | 1,947900 | 2,692773 | 3,700018 | 5,054470 | 5,895093 |
| 18                      | 1,428246        | 2,025817 | 2,854339 | 3,996019 | 5,559917 | 6,543553 |
| 19                      | 1,456811        | 2,106849 | 3,025600 | 4,315701 | 6,115909 | 7,263344 |
| 20                      | 1,485947        | 2,191123 | 3,207135 | 4,660957 | 6,727500 | 8,062312 |
| 21                      | 1,515666        | 2,278768 | 3,399564 | 5,033834 | 7,400250 | 8,949166 |
| 22                      | 1,545980        | 2,369919 | 3,603537 | 5,436540 | 8,140275 | 9,933574 |
| 23                      | 1,576899        | 2,464716 | 3,819750 | 5,871464 | 8,954302 | 11,02627 |
| 24                      | 1,608437        | 2,563304 | 4,048935 | 6,341181 | 9,849733 | 12,23916 |
| 25                      | 1,640606        | 2,665836 | 4,291871 | 6,848475 | 10,83471 | 13,58546 |
| 26                      | 1,673418        | 2,772470 | 4,549383 | 7,396353 | 11,91818 | 15,07986 |
| 27                      | 1,706886        | 2,883369 | 4,822346 | 7,988061 | 13,10999 | 16,73865 |
| 28                      | 1,741024        | 2,998703 | 5,111687 | 8,627106 | 14,42099 | 18,57990 |
| 29                      | 1,775845        | 3,118651 | 5,418388 | 9,317275 | 15,86309 | 20,62369 |
| 30                      | 1,811362        | 3,243398 | 5,743491 | 10,06266 | 17,44940 | 22,89230 |
| 35                      | 1,999890        | 3,946089 | 7,686087 | 14,78534 | 28,10244 | 38,57485 |
| 40                      | 2,208040        | 4,801021 | 10,28572 | 21,72452 | 45,25926 | 65,00087 |
| 45                      | 2,437854        | 5,841176 | 13,76461 | 31,92045 | 72,89048 | 109,5302 |
| 50                      | 2,691588        | 7,106683 | 18,42015 | 46,90161 | 117,3909 | 184,5648 |

| Число періодів <i>n</i> | Ставка відсотка |          |          |          |          |          |
|-------------------------|-----------------|----------|----------|----------|----------|----------|
|                         | 13              | 15       | 18       | 20       | 23       | 25       |
| 1                       | 1,130000        | 1,150000 | 1,180000 | 1,200000 | 1,230000 | 1,250000 |
| 2                       | 1,276900        | 1,322500 | 1,392400 | 1,440000 | 1,512900 | 1,562500 |
| 3                       | 1,442897        | 1,520875 | 1,643032 | 1,728000 | 1,860867 | 1,953125 |
| 4                       | 1,630474        | 1,749006 | 1,938778 | 2,073600 | 2,288866 | 2,441406 |
| 5                       | 1,842435        | 2,011357 | 2,287758 | 2,488320 | 2,815306 | 3,051758 |
| 6                       | 2,081952        | 2,313061 | 2,699554 | 2,985984 | 3,462826 | 3,814697 |
| 7                       | 2,352605        | 2,660020 | 3,185474 | 3,583181 | 4,259276 | 4,768372 |
| 8                       | 2,658444        | 3,059023 | 3,758859 | 4,299817 | 5,238909 | 5,960464 |
| 9                       | 3,004042        | 3,517876 | 4,435454 | 5,159780 | 6,443859 | 7,450581 |
| 10                      | 3,394567        | 4,045558 | 5,233836 | 6,191736 | 7,925946 | 9,313226 |
| 11                      | 3,835861        | 4,652391 | 6,175926 | 7,430084 | 9,748914 | 11,64153 |
| 12                      | 4,334523        | 5,350250 | 7,287593 | 8,916100 | 11,99116 | 14,55192 |
| 13                      | 4,898011        | 6,152788 | 8,599359 | 10,69932 | 14,74913 | 18,18989 |
| 14                      | 5,534753        | 7,075706 | 10,14724 | 12,83918 | 18,14143 | 22,73737 |
| 15                      | 6,254270        | 8,137062 | 11,97375 | 15,40702 | 22,31396 | 28,42171 |
| 16                      | 7,067326        | 9,357621 | 14,12902 | 18,48843 | 27,44617 | 35,52714 |
| 17                      | 7,986078        | 10,76126 | 16,67225 | 22,18611 | 33,75879 | 44,40892 |
| 18                      | 9,024268        | 12,37545 | 19,67325 | 26,62333 | 41,52331 | 55,51115 |
| 19                      | 10,19742        | 14,23177 | 23,21444 | 31,94800 | 51,07368 | 69,38894 |
| 20                      | 11,52309        | 16,36654 | 27,39303 | 38,33760 | 62,82062 | 86,73617 |
| 21                      | 13,02109        | 18,82152 | 32,32378 | 46,00512 | 77,26936 | 108,4202 |
| 22                      | 14,71383        | 21,64475 | 38,14206 | 55,20614 | 95,04132 | 135,5253 |
| 23                      | 16,62663        | 24,89146 | 45,00763 | 66,24737 | 116,9008 | 169,4066 |
| 24                      | 18,78809        | 28,62518 | 53,10901 | 79,49685 | 143,7880 | 211,7582 |
| 25                      | 21,23054        | 32,91895 | 62,66863 | 95,39622 | 176,8593 | 264,6978 |
| 26                      | 23,99051        | 37,85680 | 73,94898 | 114,4755 | 217,5369 | 330,8722 |
| 27                      | 27,10928        | 43,53531 | 87,25980 | 137,3706 | 267,5704 | 413,5903 |
| 28                      | 30,63349        | 50,06561 | 102,9666 | 164,8447 | 329,1115 | 516,9879 |
| 29                      | 34,61584        | 57,57545 | 121,5005 | 197,8136 | 404,8072 | 646,2349 |
| 30                      | 39,11590        | 66,21177 | 143,3706 | 237,3763 | 497,9129 | 807,7936 |
| 35                      | 72,06851        | 133,1755 | 327,9973 | 590,6682 | 1401,777 | 2465,190 |
| 40                      | 132,7816        | 267,8635 | 750,3783 | 1469,772 | 3946,430 | 7523,164 |
| 45                      | 244,6414        | 538,7693 | 1716,684 | 3657,262 | 11110,41 | 22958,87 |
| 50                      | 450,7359        | 1083,657 | 3927,357 | 9100,438 | 31279,20 | 70064,92 |

## Дисконтні множники (складні відсотки)

| Число періодів $n$ | Ставка відсотка |          |          |          |          |          |
|--------------------|-----------------|----------|----------|----------|----------|----------|
|                    | 2               | 4        | 6        | 8        | 10       | 11       |
| 1                  | 0,980392        | 0,961538 | 0,943396 | 0,925926 | 0,909091 | 0,900901 |
| 2                  | 0,961169        | 0,924556 | 0,889996 | 0,857339 | 0,826446 | 0,811622 |
| 3                  | 0,942322        | 0,888996 | 0,839619 | 0,793832 | 0,751315 | 0,731191 |
| 4                  | 0,923845        | 0,854804 | 0,792094 | 0,735030 | 0,683013 | 0,658731 |
| 5                  | 0,905731        | 0,821927 | 0,747258 | 0,680583 | 0,620921 | 0,593451 |
| 6                  | 0,887971        | 0,790315 | 0,704961 | 0,630170 | 0,564474 | 0,534641 |
| 7                  | 0,870560        | 0,759918 | 0,665057 | 0,583490 | 0,513158 | 0,481658 |
| 8                  | 0,853490        | 0,730690 | 0,627412 | 0,540269 | 0,466507 | 0,433926 |
| 9                  | 0,836755        | 0,702587 | 0,591898 | 0,500249 | 0,424098 | 0,390925 |
| 10                 | 0,820348        | 0,675564 | 0,558395 | 0,463193 | 0,385543 | 0,352184 |
| 11                 | 0,804263        | 0,649581 | 0,526788 | 0,428883 | 0,350494 | 0,317283 |
| 12                 | 0,788493        | 0,624597 | 0,496969 | 0,397114 | 0,318631 | 0,285841 |
| 13                 | 0,773033        | 0,600574 | 0,468839 | 0,367698 | 0,289664 | 0,257514 |
| 14                 | 0,757875        | 0,577475 | 0,442301 | 0,340461 | 0,263331 | 0,231995 |
| 15                 | 0,743015        | 0,555265 | 0,417265 | 0,315242 | 0,239392 | 0,209004 |
| 16                 | 0,728446        | 0,533908 | 0,393646 | 0,291890 | 0,217629 | 0,188292 |
| 17                 | 0,714163        | 0,513373 | 0,371364 | 0,270269 | 0,197845 | 0,169633 |
| 18                 | 0,700159        | 0,493628 | 0,350344 | 0,250249 | 0,179859 | 0,152822 |
| 19                 | 0,686431        | 0,474642 | 0,330513 | 0,231712 | 0,163508 | 0,137678 |
| 20                 | 0,672971        | 0,456387 | 0,311805 | 0,214548 | 0,148644 | 0,124034 |
| 21                 | 0,659776        | 0,438834 | 0,294155 | 0,198656 | 0,135131 | 0,111742 |
| 22                 | 0,646839        | 0,421955 | 0,277505 | 0,183941 | 0,122846 | 0,100669 |
| 23                 | 0,634156        | 0,405726 | 0,261797 | 0,170315 | 0,111678 | 0,090693 |
| 24                 | 0,621721        | 0,390121 | 0,246979 | 0,157699 | 0,101526 | 0,081705 |
| 25                 | 0,609531        | 0,375117 | 0,232999 | 0,146018 | 0,092296 | 0,073608 |
| 26                 | 0,597579        | 0,360689 | 0,219810 | 0,135202 | 0,083905 | 0,066314 |
| 27                 | 0,585862        | 0,346817 | 0,207368 | 0,125187 | 0,076278 | 0,059742 |
| 28                 | 0,574375        | 0,333477 | 0,195630 | 0,115914 | 0,069343 | 0,053822 |
| 29                 | 0,563112        | 0,320651 | 0,184557 | 0,107328 | 0,063039 | 0,048488 |
| 30                 | 0,552071        | 0,308319 | 0,174110 | 0,099377 | 0,057309 | 0,043683 |
| 35                 | 0,500028        | 0,253415 | 0,130105 | 0,067635 | 0,035584 | 0,025924 |
| 40                 | 0,452890        | 0,208289 | 0,097222 | 0,046031 | 0,022095 | 0,015384 |
| 45                 | 0,410197        | 0,171198 | 0,072650 | 0,031328 | 0,013719 | 0,009130 |
| 50                 | 0,371528        | 0,140713 | 0,054288 | 0,021321 | 0,008519 | 0,005418 |

| Число періодів <i>n</i> | Ставка відсотка |          |          |          |          |          |
|-------------------------|-----------------|----------|----------|----------|----------|----------|
|                         | 13              | 15       | 18       | 20       | 23       | 25       |
| 1                       | 0,884956        | 0,869565 | 0,847458 | 0,833333 | 0,813008 | 0,800000 |
| 2                       | 0,783147        | 0,756144 | 0,718184 | 0,694444 | 0,660982 | 0,640000 |
| 3                       | 0,693050        | 0,657516 | 0,608631 | 0,578704 | 0,537384 | 0,512000 |
| 4                       | 0,613319        | 0,571753 | 0,515789 | 0,482253 | 0,436897 | 0,409600 |
| 5                       | 0,542760        | 0,497177 | 0,437109 | 0,401878 | 0,355201 | 0,327680 |
| 6                       | 0,480319        | 0,432328 | 0,370432 | 0,334898 | 0,288781 | 0,262144 |
| 7                       | 0,425061        | 0,375937 | 0,313925 | 0,279082 | 0,234782 | 0,209715 |
| 8                       | 0,376160        | 0,326902 | 0,266038 | 0,232568 | 0,190879 | 0,167772 |
| 9                       | 0,332885        | 0,284262 | 0,225456 | 0,193807 | 0,155187 | 0,134218 |
| 10                      | 0,294588        | 0,247185 | 0,191064 | 0,161506 | 0,126168 | 0,107374 |
| 11                      | 0,260698        | 0,214943 | 0,161919 | 0,134588 | 0,102576 | 0,085899 |
| 12                      | 0,230706        | 0,186907 | 0,137220 | 0,112157 | 0,083395 | 0,068719 |
| 13                      | 0,204165        | 0,162528 | 0,116288 | 0,093464 | 0,067801 | 0,054976 |
| 14                      | 0,180677        | 0,141329 | 0,098549 | 0,077887 | 0,055122 | 0,043980 |
| 15                      | 0,159891        | 0,122894 | 0,083516 | 0,064905 | 0,044815 | 0,035184 |
| 16                      | 0,141496        | 0,106865 | 0,070776 | 0,054088 | 0,036435 | 0,028147 |
| 17                      | 0,125218        | 0,092926 | 0,059980 | 0,045073 | 0,029622 | 0,022518 |
| 18                      | 0,110812        | 0,080805 | 0,050830 | 0,037561 | 0,024083 | 0,018014 |
| 19                      | 0,098064        | 0,070265 | 0,043077 | 0,031301 | 0,019580 | 0,014412 |
| 20                      | 0,086782        | 0,061100 | 0,036506 | 0,026084 | 0,015918 | 0,011529 |
| 21                      | 0,076798        | 0,053131 | 0,030937 | 0,021737 | 0,012942 | 0,009223 |
| 22                      | 0,067963        | 0,046201 | 0,026218 | 0,018114 | 0,010522 | 0,007379 |
| 23                      | 0,060144        | 0,040174 | 0,022218 | 0,015095 | 0,008554 | 0,005903 |
| 24                      | 0,053225        | 0,034934 | 0,018829 | 0,012579 | 0,006955 | 0,004722 |
| 25                      | 0,047102        | 0,030378 | 0,015957 | 0,010483 | 0,005654 | 0,003778 |
| 26                      | 0,041683        | 0,026415 | 0,013523 | 0,008735 | 0,004597 | 0,003022 |
| 27                      | 0,036888        | 0,022970 | 0,011460 | 0,007280 | 0,003737 | 0,002418 |
| 28                      | 0,032644        | 0,019974 | 0,009712 | 0,006066 | 0,003038 | 0,001934 |
| 29                      | 0,028889        | 0,017369 | 0,008230 | 0,005055 | 0,002470 | 0,001547 |
| 30                      | 0,025565        | 0,015103 | 0,006975 | 0,004213 | 0,002008 | 0,001238 |
| 35                      | 0,013876        | 0,007509 | 0,003049 | 0,001693 | 0,000713 | 0,000406 |
| 40                      | 0,007531        | 0,003733 | 0,001333 | 0,000680 | 0,000253 | 0,000133 |
| 45                      | 0,004088        | 0,001856 | 0,000583 | 0,000273 | 0,000090 | 0,000044 |
| 50                      | 0,002219        | 0,000923 | 0,000255 | 0,000110 | 0,000032 | 0,000014 |

## Додаток 3

Таблиця Д5

## Коефіцієнти нарощення дискретних рент

| Число періодів $n$ | Ставка відсотка |          |          |          |           |            |
|--------------------|-----------------|----------|----------|----------|-----------|------------|
|                    | 2               | 5        | 7        | 9        | 10        | 12         |
| 1                  | 1,00000         | 1,00000  | 1,00000  | 1,00000  | 1,00000   | 1,00000    |
| 2                  | 2,02000         | 2,05000  | 2,07000  | 2,09000  | 2,10000   | 2,12000    |
| 3                  | 3,06040         | 3,15250  | 3,21490  | 3,27810  | 3,31000   | 3,37440    |
| 4                  | 4,12161         | 4,31013  | 4,43994  | 4,57313  | 4,64100   | 4,77933    |
| 5                  | 5,20404         | 5,52563  | 5,75074  | 5,98471  | 6,10510   | 6,35285    |
| 6                  | 6,30812         | 6,80191  | 7,15329  | 7,52333  | 7,71561   | 8,11519    |
| 7                  | 7,43428         | 8,14201  | 8,65402  | 9,20043  | 9,48717   | 10,08901   |
| 8                  | 8,58297         | 9,54911  | 10,25980 | 11,02847 | 11,43589  | 12,29969   |
| 9                  | 9,75463         | 11,02656 | 11,97799 | 13,02104 | 13,57948  | 14,77566   |
| 10                 | 10,94972        | 12,57789 | 13,81645 | 15,19293 | 15,93742  | 17,54874   |
| 11                 | 12,16872        | 14,20679 | 15,78360 | 17,56029 | 18,53117  | 20,65458   |
| 12                 | 13,41209        | 15,91713 | 17,88845 | 20,14072 | 21,38428  | 24,13313   |
| 13                 | 14,68033        | 17,71298 | 20,14064 | 22,95338 | 24,52271  | 28,02911   |
| 14                 | 15,97394        | 19,59863 | 22,55049 | 26,01919 | 27,97498  | 32,39260   |
| 15                 | 17,29342        | 21,57856 | 25,12902 | 29,36092 | 31,77248  | 37,27971   |
| 16                 | 18,63929        | 23,65749 | 27,88805 | 33,00340 | 35,94973  | 42,75328   |
| 17                 | 20,01207        | 25,84037 | 30,84022 | 36,97370 | 40,54470  | 48,88367   |
| 18                 | 21,41231        | 28,13238 | 33,99903 | 41,30134 | 45,59917  | 55,74971   |
| 19                 | 22,84056        | 30,53900 | 37,37896 | 46,01846 | 51,15909  | 63,43968   |
| 20                 | 24,29737        | 33,06595 | 40,99549 | 51,16012 | 57,27500  | 72,05244   |
| 21                 | 25,78332        | 35,71925 | 44,86518 | 56,76453 | 64,00250  | 81,69874   |
| 22                 | 27,29898        | 38,50521 | 49,00574 | 62,87334 | 71,40275  | 92,50258   |
| 23                 | 28,84496        | 41,43048 | 53,43614 | 69,53194 | 79,54302  | 104,60289  |
| 24                 | 30,42186        | 44,50200 | 58,17667 | 76,78981 | 88,49733  | 118,15524  |
| 25                 | 32,03030        | 47,72710 | 63,24904 | 84,70090 | 98,34706  | 133,33387  |
| 26                 | 33,67091        | 51,11345 | 68,67647 | 93,32398 | 109,1818  | 150,33393  |
| 27                 | 35,34432        | 54,66913 | 74,48382 | 102,7231 | 121,0999  | 169,37401  |
| 28                 | 37,05121        | 58,40258 | 80,69769 | 112,9682 | 134,2099  | 190,69889  |
| 29                 | 38,79223        | 62,32271 | 87,34653 | 124,1354 | 148,6309  | 214,58275  |
| 30                 | 40,56808        | 66,43885 | 94,46079 | 136,3075 | 164,4940  | 241,33268  |
| 35                 | 49,99448        | 90,32031 | 138,2369 | 215,7108 | 271,0244  | 431,66350  |
| 40                 | 60,40198        | 120,7998 | 199,6351 | 337,8824 | 442,5926  | 767,09142  |
| 45                 | 71,89271        | 159,7002 | 285,7493 | 525,8587 | 718,9048  | 1358,23003 |
| 50                 | 84,57940        | 209,3480 | 406,5289 | 815,0836 | 1163,9085 | 2400,01825 |

| Число періодів <i>n</i> | Ставка відсотка |          |          |          |          |          |
|-------------------------|-----------------|----------|----------|----------|----------|----------|
|                         | 13              | 15       | 18       | 20       | 23       | 25       |
| 1                       | 1,00000         | 1,00000  | 1,00000  | 1,00000  | 1,00000  | 1,00000  |
| 2                       | 2,13000         | 2,15000  | 2,18000  | 2,20000  | 2,23000  | 2,25000  |
| 3                       | 3,40690         | 3,47250  | 3,57240  | 3,64000  | 3,74290  | 3,81250  |
| 4                       | 4,84980         | 4,99338  | 5,21543  | 5,36800  | 5,60377  | 5,76563  |
| 5                       | 6,48027         | 6,74238  | 7,15421  | 7,44160  | 7,89263  | 8,20703  |
| 6                       | 8,32271         | 8,75374  | 9,44197  | 9,92992  | 10,70794 | 11,25879 |
| 7                       | 10,40466        | 11,06680 | 12,14152 | 12,91590 | 14,17077 | 15,07349 |
| 8                       | 12,75726        | 13,72682 | 15,32700 | 16,49908 | 18,43004 | 19,84186 |
| 9                       | 15,41571        | 16,78584 | 19,08585 | 20,79890 | 23,66895 | 25,80232 |
| 10                      | 18,41975        | 20,30372 | 23,52131 | 25,95868 | 30,11281 | 33,25290 |
| 11                      | 21,81432        | 24,34928 | 28,75514 | 32,15042 | 38,03876 | 42,56613 |
| 12                      | 25,65018        | 29,00167 | 34,93107 | 39,58050 | 47,78767 | 54,20766 |
| 13                      | 29,98470        | 34,35192 | 42,21866 | 48,49660 | 59,77883 | 68,75958 |
| 14                      | 34,88271        | 40,50471 | 50,81802 | 59,19592 | 74,52796 | 86,94947 |
| 15                      | 40,41746        | 47,58041 | 60,96527 | 72,03511 | 92,66940 | 109,6868 |
| 16                      | 46,67173        | 55,71747 | 72,93901 | 87,44213 | 114,9834 | 138,1085 |
| 17                      | 53,73906        | 65,07509 | 87,06804 | 105,9306 | 142,4295 | 173,6357 |
| 18                      | 61,72514        | 75,83636 | 103,7403 | 128,1167 | 176,1883 | 218,0446 |
| 19                      | 70,74941        | 88,21181 | 123,4135 | 154,7400 | 217,7116 | 273,5558 |
| 20                      | 80,94683        | 102,4436 | 146,6280 | 186,6880 | 268,7853 | 342,9447 |
| 21                      | 92,46992        | 118,8101 | 174,0210 | 225,0256 | 331,6059 | 429,6809 |
| 22                      | 105,4910        | 137,6316 | 206,3448 | 271,0307 | 408,8753 | 538,1011 |
| 23                      | 120,2048        | 159,2764 | 244,4868 | 326,2369 | 503,9166 | 673,6264 |
| 24                      | 136,8315        | 184,1678 | 289,4945 | 392,4842 | 620,8174 | 843,0329 |
| 25                      | 155,6196        | 212,7930 | 342,6035 | 471,9811 | 764,6054 | 1054,791 |
| 26                      | 176,8501        | 245,7120 | 405,2721 | 567,3773 | 941,4647 | 1319,489 |
| 27                      | 200,8406        | 283,5688 | 479,2211 | 681,8528 | 1159,002 | 1650,361 |
| 28                      | 227,9499        | 327,1041 | 566,4809 | 819,2233 | 1426,572 | 2063,952 |
| 29                      | 258,5834        | 377,1697 | 669,4475 | 984,0680 | 1755,683 | 2580,939 |
| 30                      | 293,1992        | 434,7451 | 790,9480 | 1181,882 | 2160,491 | 3227,174 |
| 35                      | 546,6808        | 881,1702 | 1816,652 | 2948,341 | 6090,334 | 9856,761 |
| 40                      | 1013,704        | 1779,090 | 4163,213 | 7343,858 | 17154,05 | 30088,66 |
| 45                      | 1874,165        | 3585,128 | 9531,577 | 18281,31 | 48301,77 | 91831,50 |
| 50                      | 3459,507        | 7217,716 | 21813,09 | 45497,19 | 135992,2 | 280255,7 |



## Коефіцієнти приведення дискретних рент

| Число періодів $n$ | Ставка відсотка |          |          |          |         |         |
|--------------------|-----------------|----------|----------|----------|---------|---------|
|                    | 2               | 5        | 7        | 9        | 10      | 12      |
| 1                  | 0,98039         | 0,95238  | 0,93458  | 0,91743  | 0,90909 | 0,89286 |
| 2                  | 1,94156         | 1,85941  | 1,80802  | 1,75911  | 1,73554 | 1,69005 |
| 3                  | 2,88388         | 2,72325  | 2,62432  | 2,53129  | 2,48685 | 2,40183 |
| 4                  | 3,80773         | 3,54595  | 3,38721  | 3,23972  | 3,16987 | 3,03735 |
| 5                  | 4,71346         | 4,32948  | 4,10020  | 3,88965  | 3,79079 | 3,60478 |
| 6                  | 5,60143         | 5,07569  | 4,76654  | 4,48592  | 4,35526 | 4,11141 |
| 7                  | 6,47199         | 5,78637  | 5,38929  | 5,03295  | 4,86842 | 4,56376 |
| 8                  | 7,32548         | 6,46321  | 5,97130  | 5,53482  | 5,33493 | 4,96764 |
| 9                  | 8,16224         | 7,10782  | 6,51523  | 5,99525  | 5,75902 | 5,32825 |
| 10                 | 8,98259         | 7,72173  | 7,02358  | 6,41766  | 6,14457 | 5,65022 |
| 11                 | 9,78685         | 8,30641  | 7,49867  | 6,80519  | 6,49506 | 5,93770 |
| 12                 | 10,57534        | 8,86325  | 7,94269  | 7,16073  | 6,81369 | 6,19437 |
| 13                 | 11,34837        | 9,39357  | 8,35765  | 7,48690  | 7,10336 | 6,42355 |
| 14                 | 12,10625        | 9,89864  | 8,74547  | 7,78615  | 7,36669 | 6,62817 |
| 15                 | 12,84926        | 10,37966 | 9,10791  | 8,06069  | 7,60608 | 6,81086 |
| 16                 | 13,57771        | 10,83777 | 9,44665  | 8,31256  | 7,82371 | 6,97399 |
| 17                 | 14,29187        | 11,27407 | 9,76322  | 8,54363  | 8,02155 | 7,11963 |
| 18                 | 14,99203        | 11,68959 | 10,05909 | 8,75563  | 8,20141 | 7,24967 |
| 19                 | 15,67846        | 12,08532 | 10,33560 | 8,95011  | 8,36492 | 7,36578 |
| 20                 | 16,35143        | 12,46221 | 10,59401 | 9,12855  | 8,51356 | 7,46944 |
| 21                 | 17,01121        | 12,82115 | 10,83553 | 9,29224  | 8,64869 | 7,56200 |
| 22                 | 17,65805        | 13,16300 | 11,06124 | 9,44243  | 8,77154 | 7,64465 |
| 23                 | 18,29220        | 13,48857 | 11,27219 | 9,58021  | 8,88322 | 7,71843 |
| 24                 | 18,91393        | 13,79864 | 11,46933 | 9,70661  | 8,98474 | 7,78432 |
| 25                 | 19,52346        | 14,09394 | 11,65358 | 9,82258  | 9,07704 | 7,84314 |
| 26                 | 20,12104        | 14,37519 | 11,82578 | 9,92897  | 9,16095 | 7,89566 |
| 27                 | 20,70690        | 14,64303 | 11,98671 | 10,02658 | 9,23722 | 7,94255 |
| 28                 | 21,28127        | 14,89813 | 12,13711 | 10,11613 | 9,30657 | 7,98442 |
| 29                 | 21,84438        | 15,14107 | 12,27767 | 10,19828 | 9,36961 | 8,02181 |
| 30                 | 22,39646        | 15,37245 | 12,40904 | 10,27365 | 9,42691 | 8,05518 |
| 35                 | 24,99862        | 16,37419 | 12,94767 | 10,56682 | 9,64416 | 8,17550 |
| 40                 | 27,35548        | 17,15909 | 13,33171 | 10,75736 | 9,77905 | 8,24378 |
| 45                 | 29,49016        | 17,77407 | 13,60552 | 10,88120 | 9,86281 | 8,28252 |
| 50                 | 31,42361        | 18,25593 | 13,80075 | 10,96168 | 9,91481 | 8,30450 |

| Число періодів <i>n</i> | Ставка відсотка |         |         |         |         |         |
|-------------------------|-----------------|---------|---------|---------|---------|---------|
|                         | 13              | 15      | 18      | 20      | 23      | 25      |
| 1                       | 0,88496         | 0,86957 | 0,84746 | 0,83333 | 0,81301 | 0,80000 |
| 2                       | 1,66810         | 1,62571 | 1,56564 | 1,52778 | 1,47399 | 1,44000 |
| 3                       | 2,36115         | 2,28323 | 2,17427 | 2,10648 | 2,01137 | 1,95200 |
| 4                       | 2,97447         | 2,85498 | 2,69006 | 2,58873 | 2,44827 | 2,36160 |
| 5                       | 3,51723         | 3,35216 | 3,12717 | 2,99061 | 2,80347 | 2,68928 |
| 6                       | 3,99755         | 3,78448 | 3,49760 | 3,32551 | 3,09225 | 2,95142 |
| 7                       | 4,42261         | 4,16042 | 3,81153 | 3,60459 | 3,32704 | 3,16114 |
| 8                       | 4,79877         | 4,48732 | 4,07757 | 3,83716 | 3,51792 | 3,32891 |
| 9                       | 5,13166         | 4,77158 | 4,30302 | 4,03097 | 3,67310 | 3,46313 |
| 10                      | 5,42624         | 5,01877 | 4,49409 | 4,19247 | 3,79927 | 3,57050 |
| 11                      | 5,68694         | 5,23371 | 4,65601 | 4,32706 | 3,90185 | 3,65640 |
| 12                      | 5,91765         | 5,42062 | 4,79322 | 4,43922 | 3,98524 | 3,72512 |
| 13                      | 6,12181         | 5,58315 | 4,90951 | 4,53268 | 4,05304 | 3,78010 |
| 14                      | 6,30249         | 5,72448 | 5,00806 | 4,61057 | 4,10816 | 3,82408 |
| 15                      | 6,46238         | 5,84737 | 5,09158 | 4,67547 | 4,15298 | 3,85926 |
| 16                      | 6,60388         | 5,95423 | 5,16235 | 4,72956 | 4,18941 | 3,88741 |
| 17                      | 6,72909         | 6,04716 | 5,22233 | 4,77463 | 4,21904 | 3,90993 |
| 18                      | 6,83991         | 6,12797 | 5,27316 | 4,81219 | 4,24312 | 3,92794 |
| 19                      | 6,93797         | 6,19823 | 5,31624 | 4,84350 | 4,26270 | 3,94235 |
| 20                      | 7,02475         | 6,25933 | 5,35275 | 4,86958 | 4,27862 | 3,95388 |
| 21                      | 7,10155         | 6,31246 | 5,38368 | 4,89132 | 4,29156 | 3,96311 |
| 22                      | 7,16951         | 6,35866 | 5,40990 | 4,90943 | 4,30208 | 3,97049 |
| 23                      | 7,22966         | 6,39884 | 5,43212 | 4,92453 | 4,31063 | 3,97639 |
| 24                      | 7,28288         | 6,43377 | 5,45095 | 4,93710 | 4,31759 | 3,98111 |
| 25                      | 7,32998         | 6,46415 | 5,46691 | 4,94759 | 4,32324 | 3,98489 |
| 26                      | 7,37167         | 6,49056 | 5,48043 | 4,95632 | 4,32784 | 3,98791 |
| 27                      | 7,40856         | 6,51353 | 5,49189 | 4,96360 | 4,33158 | 3,99033 |
| 28                      | 7,44120         | 6,53351 | 5,50160 | 4,96967 | 4,33462 | 3,99226 |
| 29                      | 7,47009         | 6,55088 | 5,50983 | 4,97472 | 4,33709 | 3,99381 |
| 30                      | 7,49565         | 6,56598 | 5,51681 | 4,97894 | 4,33909 | 3,99505 |
| 35                      | 7,58557         | 6,61661 | 5,53862 | 4,99154 | 4,34472 | 3,99838 |
| 40                      | 7,63438         | 6,64178 | 5,54815 | 4,99660 | 4,34672 | 3,99947 |
| 45                      | 7,66086         | 6,65429 | 5,55232 | 4,99863 | 4,34743 | 3,99983 |
| 50                      | 7,67524         | 6,66051 | 5,55414 | 4,99945 | 4,34769 | 3,99994 |

## Додаток 4

### Тестові завдання

1. Відсотки (відсоткові гроші) – це ...

Варіанти відповіді:

- a) абсолютна величина доходу від надання грошей у борг у будь-якій його формі .....
- б) відносна величина доходу від надання грошей у борг у будь-якій його формі .....
- в) нарощена сума боргу до кінця терміну нарахування .....
- г) дисконтована сума боргу на початок терміну нарахування .....

2. Ставка відсотків – це ...

Варіанти відповіді:

- a) абсолютна величина доходу від надання грошей у борг у будь-якій його формі .....
- б) відносна величина доходу від надання грошей у борг у будь-якій його формі .....
- в) нарощена сума боргу до кінця терміну нарахування .....
- г) дисконтована сума боргу на початок терміну нарахування .....

3. Ставка відсотків визначається ...

Варіанти відповіді:

- a) відношенням відсоткових грошей, сплачених за одиницю часу, до величини початкового капіталу .....
- б) відношенням відсоткових грошей, сплачених за одиницю часу, до величини майбутнього капіталу .....
- в) відношенням відсоткових грошей, сплачених за одиницю часу, до величини суми початкового і майбутнього капіталу .....
- г) різницею між нарощеною сумою і боргом .....

4. Процес нарощення – це ...

Варіанти відповіді

- a) процес, в якому задані початкова сума і ставка .....
- б) процес, в якому задані очікувана в майбутньому сума і ставка .....
- в) процес, в якому задані очікувана в майбутньому сума, початкова сума і ставка .....
- г) процес, в якому задані майбутня сума і відсоткові гроші .....

5. Процес дисконтування – це ...

Варіанти відповіді:

- а) процес, в якому задані початкова сума і ставка .....
- б) процес, в якому задані очікувана в майбутньому сума і ставка .....
- в) процес, в якому задані очікувана в майбутньому сума, початкова сума і ставка .....
- г) процес, в якому задані початкова сума і відсоткові гроші .....

6. При нарощуванні суми грошей в часі відсотки визначаються в розрахунку ...

Варіанти відповіді:

- а) від сьогодні до майбутнього .....
- б) від майбутнього до сьогодні .....
- в) від сьогодні до майбутнього або від майбутнього до сьогодні .....
- г) від сьогодні до середини періоду нарахування .....

7. При дисконтуванні суми грошей в часі відсотки визначаються в розрахунку ...

Варіанти відповіді:

- а) від сьогодні до майбутнього .....
- б) від майбутнього до сьогодні .....
- в) від сьогодні до майбутнього або від майбутнього до сьогодні .....
- г) від сьогодні до середини періоду нарахування .....

8. Відсотки відносно до нарощеного числа називаються відсотками ...

Варіанти відповіді:

- а) „зі 100” .....
- б) „на 100” .....
- в) „в 100” .....
- г) дисконтовані відсотки .....

9. Відсотки відносно до початкового числа називаються відсотками ...

Варіанти відповіді:

- а) „зі 100” .....
- б) „на 100” .....
- в) „в 100” .....
- г) дисконтовані відсотки .....

10. Відсотки відносно до зменшеного числа називаються відсотками ...

Варіанти відповіді:

- а) „зі 100” .....
- б) „на 100” .....

- в) „в 100” .....
- г) нарощені відсотки .....
11. Прості відсотки нараховуються, якщо база нарахування ...  
Варіанти відповіді:
- а) дорівнює цілому числу.....
- б) послідовно змінюється .....
- в) постійна або послідовно змінюється .....
- г) постійна .....
12. Складні відсотки нараховуються, якщо база нарахування ...  
Варіанти відповіді:
- а) постійна .....
- б) дорівнює дробовому числу .....
- в) постійна або послідовно змінюється .....
- г) послідовно змінюється .....
13. Нарощеною сумою боргу називається ...  
Варіанти відповіді:
- а) початкова сума з нарахованими відсотками до кінця терміну нарахування .....
- б) майбутня сума боргу зменшена на величину дисконту .....
- в) майбутня сума боргу збільшена на величину дисконту .....
- г) майбутня сума боргу плюс відсоткові гроші .....
14. Нарощена за простими відсотками сума боргу обчислюється за формулою ...  
Варіанти відповіді:
- а)  $S = P(1 - ni)$  .....
- б)  $S = P(1 + i)^n$  .....
- в)  $S = P(1 + ni)$  .....
- г)  $I = Pni$  .....
15. Відсоткові гроші обчислюються за формулою ...  
Варіанти відповіді:
- а)  $S = P(1 - ni)$  .....
- б)  $S = P(1 + i)^n$  .....
- в)  $S = P(1 + ni)$  .....
- г)  $I = Pni$  .....
16. Яка часова база не використовується при розрахунку відсотків? ...  
Варіанти відповіді:

91

- а)  $K = 360$  днів .....
- б)  $K = 365$  днів .....
- в)  $K = 366$  днів .....
- г)  $K = 370$  днів .....

17 Запис АСТ/АСТ означає розрахунок ...

Варіанти відповіді:

- а) точних відсотків з точним числом днів позички .....
- б) точних відсотків з наближеним числом днів позички .....
- в) звичайних відсотків з точним числом днів позички .....
- г) звичайних відсотків з наближеним числом днів позички .....

18 Запис АСТ/360 означає розрахунок ...

Варіанти відповіді:

- а) точних відсотків з точним числом днів позички .....
- б) точних відсотків з наближеним числом днів позички .....
- в) звичайних відсотків з точним числом днів позички .....
- г) звичайних відсотків з наближеним числом днів позички .....

19 Запис 360/360 означає розрахунок ...

Варіанти відповіді:

- а) точних відсотків з точним числом днів позички .....
- б) точних відсотків з наближеним числом днів позички .....
- в) звичайних відсотків з точним числом днів позички .....
- г) звичайних відсотків з наближеним числом днів позички .....

20 Який варіант розрахунку відсотків не має змісту ...

Варіанти відповіді:

- а) точних відсотків з точним числом днів позички .....
- б) точних відсотків з наближеним числом днів позички .....
- в) звичайних відсотків з точним числом днів позички .....
- г) звичайних відсотків з наближеним числом днів позички .....

21 Якщо прості ставки змінюються в часі, то нарощена сума на кінець терміну розраховується за формулою ...

Варіанти відповіді:

- а)  $S = P(1 + n_1 i_1 + n_2 i_2 + \dots + n_m i_m) = P \left( 1 + \sum_{j=1}^m n_j i_j \right)$  .....
- б)  $S = P \left[ (1 + i_1)^{n_1} \cdot (1 + i_2)^{n_2} \times \dots \times (1 + i_m)^{n_m} \right]$  .....

92

в) 
$$S = P(1 - n_1 i_1 - n_2 i_2 - \dots - n_m i_m) = P \left( 1 - \sum_{j=1}^m n_j i_j \right) \dots \dots \dots \square$$

г) 
$$S = P \left[ (1 - i_1)^{n_1} (1 - i_2)^{n_2} \times \dots \times (1 - i_m)^{n_m} \right] \dots \dots \dots \square$$

22 Якщо складні ставки змінюються в часі, то нарощена сума на кінець терміну розраховується за формулою...

Варіанти відповіді:

а) 
$$S = P(1 + n_1 i_1 + n_2 i_2 + \dots + n_m i_m) = P \left( 1 + \sum_{j=1}^m n_j i_j \right) \dots \dots \dots \square$$

б) 
$$S = P \left[ (1 + i_1)^{n_1} \cdot (1 + i_2)^{n_2} \times \dots \times (1 + i_m)^{n_m} \right] \dots \dots \dots \square$$

в) 
$$S = P(1 - n_1 i_1 - n_2 i_2 - \dots - n_m i_m) = P \left( 1 - \sum_{j=1}^m n_j i_j \right) \dots \dots \dots \square$$

г) 
$$S = P \left[ (1 - i_1)^{n_1} (1 - i_2)^{n_2} \times \dots \times (1 - i_m)^{n_m} \right] \dots \dots \dots \square$$

23 Нарощена за складними відсотками сума боргу обчислюється за формулою ...

Варіанти відповіді:

а)  $S = P(1 + ni) \dots \dots \dots \square$

б)  $S = P(1 + i)^n \dots \dots \dots \square$

в)  $I = Pni \dots \dots \dots \square$

г)  $S = P(1 - ni) \dots \dots \dots \square$

24 Збалансована фінансова операція має контур ...

Варіанти відповіді:

а) завжди опуклий  $\dots \dots \dots \square$

б) розімкнутий  $\dots \dots \dots \square$

в) замкнений або розімкнутий  $\dots \dots \dots \square$

г) замкнений  $\dots \dots \dots \square$

25 Облікова (дисконтна) ставка відсотків визначається ...

Варіанти відповіді:

а) відношенням відсоткових грошей, сплачених за одиницю часу, до величини початкового капіталу  $\dots \dots \dots \square$

б) відношенням відсоткових грошей, сплачених за одиницю часу, до величини майбутнього капіталу  $\dots \dots \dots \square$

в) різницею між майбутнім капіталом і відсоткових грошей, сплачених за одиницю часу  $\dots \dots \dots \square$

г) відношенням відсоткових грошей, сплачених за одиницю часу, до величини суми початкового і майбутнього капіталу  $\dots \dots \dots \square$

26 Залежно від виду відсоткової ставки, якого дисконтування не існує? ...

Варіанти відповіді:

- а) математичного дисконтування .....
- б) банківського (комерційного) обліку .....
- в) фінансового дисконтування .....
- 27 Сучасна величина, розрахована згідно з методом математичного дисконтування за простою ставкою, обчислюється за формулою ...  
Варіанти відповіді:
- а)  $P = \frac{S}{1 - ni}$  .....
- б)  $P = \frac{S}{1 + ni}$  .....
- в)  $P = S(1 - nd)$  .....
- г)  $P = S(1 + ni)$  .....
- 28 Сучасна величина, розрахована згідно з методом банківського обліку за простою ставкою, обчислюється за формулою ...  
Варіанти відповіді:
- а)  $P = \frac{S}{1 + ni}$  .....
- б)  $P = S(1 + nd)$  .....
- в)  $P = S(1 - nd)$  .....
- г)  $P = S(1 + ni)$  .....
- 29 Сучасна величина, розрахована згідно з методом математичного дисконтування за складною ставкою, обчислюється за формулою ...  
Варіанти відповіді:
- а)  $P = \frac{S}{(1 - i)^n}$  .....
- б)  $P = S(1 - d)^n$  .....
- в)  $P = S(1 + i)^n$  .....
- г)  $P = \frac{S}{(1 + i)^n}$  .....
- 30 Сучасна величина, розрахована згідно з методом банківського обліку за складною ставкою, обчислюється за формулою ...  
Варіанти відповіді:
- а)  $P = \frac{S}{(1 + i)^n}$  .....
- б)  $P = \frac{S}{(1 - i)^n}$  .....
- в)  $P = S(1 - d)^n$  .....
- г)  $P = S(1 + i)^n$  .....



- 31 Нарощена сума при однаковій величині ставки відсотків менша при розрахунку складних відсотків, ніж простих. На який термін ведеться розрахунок нарощеної суми? ...  
Варіанти відповіді:
- а) дробове число років .....
- б) менше року .....
- в) один рік .....
- г) більше року .....
- 32 Нарощена сума при однаковій величині ставки відсотків більша при розрахунку складних відсотків, ніж простих. На який термін ведеться розрахунок нарощеної суми? ...  
Варіанти відповіді:
- а) менше року .....
- б) один рік .....
- в) дробове число років .....
- г) більше року .....
- 33 Нарощена сума при однаковій величині ставки відсотків і розрахунку складних відсотків дорівнює розрахунку за простими. На який термін ведеться розрахунок нарощеної суми? ...  
Варіанти відповіді:
- а) менше року .....
- б) ціле число років .....
- в) один рік .....
- г) більше року .....
- 34 Яку ставку використовують при неперервному нарощуванні відсотків? ...  
Варіанти відповіді:
- а) ефективну .....
- б) номінальну .....
- в) річну .....
- г) силу зростання .....
- 35 Відсотки, нараховані за складною ставкою за весь термін позички, будуть ...  
Варіанти відповіді:
- а)  $I_{\%} = P[(1+i)^n - (1+ni)]$  .....
- б)  $I = P[(1+i)^n - 1]$  .....
- в)  $I = P[1 - (1+i)^n]$  .....
- г)  $I = S[(1+i)^n - 1]$  .....

36 Номінальна ставка через ефективну визначається за формулою ...

Варіанти відповіді:

а)  $j = m(\sqrt[m]{1+i} - 1)$  .....

б)  $j = m(\sqrt[m]{1+i} - n)$  .....

в)  $i = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^m - 1$  .....

г)  $j = m(\sqrt[m]{1+i} - 1)$  .....

37 Для якого терміну проводиться нарощення, якщо множники розташовані в такому порядку

$$(1+i)^n < 1+ni_s < \frac{1}{1-nd_s} < \frac{1}{(1-d)^n} \dots$$

Варіанти відповіді:

а)  $n = 1$  .....

б)  $0 < n < 1$  .....

в)  $n = 2$  .....

г)  $n > 1$  .....

38 Для якого терміну проводиться нарощення, якщо множники розташовані в такому порядку  $1+ni_s < (1+i)^n < \frac{1}{(1-d)^n} < \frac{1}{1-nd_s}$  ...

Варіанти відповіді:

а)  $n = 1$  .....

б)  $0 < n < 1$  .....

в)  $n > 2$  .....

г)  $n > 1$  .....

39 Для якого терміну проводиться нарощення, якщо множники розташовані в такому порядку  $1+i = 1+i_s < \frac{1}{1-d_s} = \frac{1}{1-d}$  ...

Варіанти відповіді:

а)  $n = 1$  .....

б)  $0 < n < 1$  .....

в)  $n > 2$  .....

г)  $n > 1$  .....

40 Якщо дисконтування проводиться  $m$  раз в рік, то сучасна вартість визначається за формулою ...

Варіанти відповіді:

а)  $P = \frac{S}{\left(1 + \frac{f}{m}\right)^{mn}}$  .....

б)  $P = S \left(1 + \frac{f}{m}\right)^{mn}$  .....

в)  $P = S \left(1 - \frac{f}{m}\right)^{mn}$  .....

г)  $P = \frac{S}{\left(1 - \frac{f}{m}\right)^{mn}}$  .....

41 При неперервному нарощенні використовується ...

Варіанти відповіді:

а) ефективна ставка нарощення .....

б) номінальна ставка нарощення .....

в) сила росту .....

г) ефективна облікова ставка .....

42 Річна ставка  $j = 12\%$ . В якому випадку нарощена сума буде найбільшою?

Варіанти відповіді:

а) при щоквартальному нарахуванні .....

б) при нарахуванні за півріччями .....

в) при щомісячному нарахуванні .....

г) при нарахуванні один раз на рік .....

43 Для якого терміну проводиться дисконтування, якщо множники

розташовані в такому порядку  $(1-d)^n < 1 - nd_s < \frac{1}{1+ni_s} < \frac{1}{(1+i)^n}$  ...

Варіанти відповіді:

а)  $n = 1$  .....

б)  $0 < n < 1$  .....

в)  $n > 2$  .....

г)  $n > 1$  .....

44 Для якого терміну проводиться дисконтування, якщо множники

розташовані в такому порядку  $1-d = 1-d_s < \frac{1}{1+i_s} = \frac{1}{1+i}$  ...

Варіанти відповіді:

97

- a)  $n = 1$  .....
- б)  $0 < n < 1$  .....
- в)  $n > 2$  .....
- г)  $n > 1$  .....

45 Для якого терміну проводиться дисконтування, якщо множники розташовані в такому порядку  $1 - nd_s < (1 - d)^n < \frac{1}{(1 + i)^n} < \frac{1}{1 + ni_s}$  ...

Варіанти відповіді:

- a)  $n = 1$  .....
- б)  $0 < n < 1$  .....
- в)  $n > 2$  .....
- г)  $n > 1$  .....

46 Якщо виплата платежів здійснюється в кінці періоду ренти, то відповідна рента називається ...

Варіанти відповіді:

- a) постнумерандо .....
- б) пренумерандо .....
- в) річна .....
- г) вічна .....

47 Якщо виплата платежів здійснюється на початку періоду ренти, то відповідна рента називається ...

Варіанти відповіді:

- a) постнумерандо .....
- б) річна .....
- в) пренумерандо .....
- г) вічна .....

48 За кількістю платежів у році ренти поділяються на ...

Варіанти відповіді:

- a) річні .....
- б)  $p$ -термінові .....
- в) періодичні .....
- г) рівневі .....

49 Нарощена сума постійної річної ренти постнумерандо з нарахуванням один раз на рік обчислюється за формулою ...

Варіанти відповіді:

- а)  $S = R \frac{(1+i)^{-n} - 1}{i}$  .....
- б)  $S = R \frac{(1+i)^n + 1}{i}$  .....
- в)  $S = R \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$  .....
- г)  $S = R \frac{(1+i)^n - 1}{i}$  .....

50 Нарощена сума постійної річної ренти постнумерандо з нарахуванням  $m$  раз на рік обчислюється за формулою ...

Варіанти відповіді:

- а)  $S = R \frac{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{nm} + 1}{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^m + 1}$  .....
- б)  $S = R \frac{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{nm} - 1}{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^m - 1}$  .....
- в)  $S = R \frac{(1+i)^n + 1}{i}$  .....
- г)  $S = R \frac{1 - \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-nm}}{1 - \left(1 + \frac{j}{m}\right)^m}$  .....

51 Нарощена сума постійної  $p$ -термінової ренти постнумерандо з нарахуванням один раз на рік обчислюється за формулою ...

Варіанти відповіді:

- а)  $S = \frac{R}{p} \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^{\frac{1}{p}} - 1}$  .....
- б)  $S = R \frac{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{nm} - 1}{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^m - 1}$  .....

в)  $S = R \frac{(1+i)^n - 1}{i}$  .....

г)  $S = R \frac{1 - \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-nm}}{1 - \left(1 + \frac{j}{m}\right)^m}$  .....

52 Нарощена сума постійної  $p$ -термінової ренти постнумерандо з нарахуванням  $m$  раз на рік ( $m = p$ ) обчислюється за формулою ...

Варіанти відповіді:

а)  $S = R \frac{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{nm} - 1}{j}$  .....

б)  $S = R \frac{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{nm} - 1}{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^m - 1}$  .....

в)  $S = \frac{R}{p} \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^{\frac{1}{p}} - 1}$  .....

г)  $S = R \frac{(1+i)^n - 1}{i}$  .....

53 Нарощена сума постійної  $p$ -термінової ренти постнумерандо з нарахуванням  $m$  раз на рік ( $m \neq p$ ) обчислюється за формулою ...

Варіанти відповіді:

а)  $S = \frac{R}{p} \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^{\frac{1}{p}} - 1}$  .....

б)  $S = R \frac{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{nm} - 1}{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^m - 1}$  .....

в)  $S = \frac{R}{p} \frac{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn} - 1}{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1}$  .....

г)  $S = R \frac{(1+i)^n - 1}{i}$  .....

54 Нарощена сума постійної річної ренти постнумерандо з неперервним нарахуванням обчислюється за формулою ...

Варіанти відповіді:

а)  $S = R \cdot \frac{e^{\xi n} - 1}{e^{\xi} - 1}$  .....

б)  $S = R \cdot \frac{e^{\xi n} - 1}{p(e^{\xi/p} - 1)}$  .....

в)  $S = R \frac{(1+i)^n - 1}{i}$  .....

г)  $S = R \frac{1 - \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-nm}}{1 - \left(1 + \frac{j}{m}\right)^m}$  .....

55 Нарощена сума постійної  $p$ -термінової ренти з неперервним нарахуванням обчислюється за формулою ...

Варіанти відповіді:

а)  $S = R \cdot \frac{e^{\xi n} - 1}{e^{\xi} - 1}$  .....

б)  $S = R \cdot \frac{e^{\xi n} - 1}{p(e^{\xi/p} - 1)}$  .....

в)  $S = R \frac{(1+i)^n - 1}{i}$  .....

г)  $S = R \frac{(1+i)^n + 1}{i}$  .....

56 Сучасна вартість постійної річної ренти постнумерандо з нарахуванням один раз на рік обчислюється за формулою ...

Варіанти відповіді:

а)  $A = R \frac{1 - \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-mn}}{j}$  .....

б)  $A = R \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$  .....

в)  $A = R \frac{1 - (1+i)^n}{p[(1+i)^{1/p} - 1]}$  .....

г)  $A = R \frac{1 - \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-mn}}{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^m - 1}$  .....

57 Сучасна вартість постійної річної ренти постнумерандо з нарахуванням  $m$  раз на рік обчислюється за формулою ...

Варіанти відповіді:

а)  $A = R \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$  .....

б)  $A = R \frac{1 - \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-mn}}{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^m - 1}$  .....

в)  $A = R \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$  .....

г)  $A = R \frac{1 - (1+i)^n}{p[(1+i)^{1/p} - 1]}$  .....

58 Сучасна вартість постійної  $p$ -термінової ренти постнумерандо з нарахуванням один раз на рік обчислюється за формулою ...

Варіанти відповіді:

а)  $A = R \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$  .....

б)  $A = R \frac{1 - \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-mn}}{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^m - 1}$  .....

в)  $A = R \frac{1 - (1+i)^n}{p[(1+i)^{1/p} - 1]}$  .....

г)  $A = R \frac{1 - \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-mn}}{j}$  .....



- 59 Сучасна вартість постійної  $p$ -термінової ренти постнумерандо з нарахуванням  $m$  раз на рік ( $m = p$ ) обчислюється за формулою ...

Варіанти відповіді:

а) 
$$A = R \frac{1 - \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-mn}}{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^m - 1} \dots\dots\dots \square$$

б) 
$$A = R \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \dots\dots\dots \square$$

в) 
$$A = R \frac{1 - (1+i)^n}{p[(1+i)^{1/p} - 1]} \dots\dots\dots \square$$

г) 
$$A = R \frac{1 - \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-mn}}{j} \dots\dots\dots \square$$

- 60 Сучасна вартість постійної  $p$ -термінової ренти постнумерандо з нарахуванням  $m$  раз на рік ( $m \neq p$ ) обчислюється за формулою ...

Варіанти відповіді:

а) 
$$A = R \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \dots\dots\dots \square$$

б) 
$$A = R \cdot \frac{1 - e^{-\xi n}}{e^{\xi} - 1} \dots\dots\dots \square$$

в) 
$$A = \frac{R}{p} \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-mn}}{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1} \dots\dots\dots \square$$

г) 
$$A = R \frac{1 - (1+i)^n}{p[(1+i)^{1/p} - 1]} \dots\dots\dots \square$$

- 61 Сучасна вартість постійної річної ренти постнумерандо з неперервним нарахуванням обчислюється за формулою ...

Варіанти відповіді:

а) 
$$A = R \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \dots\dots\dots \square$$

б) 
$$A = \frac{R}{p} \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-mn}}{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1}$$
 .....

в) 
$$A = R \frac{1 - (1+i)^n}{p[(1+i)^{1/p} - 1]}$$
 .....

г) 
$$A = R \cdot \frac{1 - e^{-\xi n}}{e^{\xi} - 1}$$
 .....

- 62 Сучасна вартість постійної  $p$ -термінової ренти постнумерандо з неперервним нарахуванням обчислюється за формулою ...

Варіанти відповіді:

а) 
$$A = R \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$
 .....

б) 
$$A = \frac{R}{p} \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-mn}}{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1}$$
 .....

в) 
$$A = R \cdot \frac{1 - e^{-\xi n}}{p(e^{\xi/p} - 1)}$$
 .....

г) 
$$A = R \cdot \frac{1 - e^{-\xi n}}{e^{\xi} - 1}$$
 .....

- 63 Нарощена сума постійної річної ренти пренумерандо з нарахуванням один раз на рік обчислюється за формулою ...

Варіанти відповіді:

а) 
$$\tilde{S} = S \left(1 - \frac{j}{m}\right)^m$$
 .....

б) 
$$\tilde{S} = S(1+i)$$
 .....

в) 
$$\tilde{S} = S(1-i)$$
 .....

г) 
$$\tilde{S} = R \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$
 .....

- 64 Нарощена сума постійної річної ренти пренумерандо з нарахуванням  $m$  раз на рік обчислюється за формулою ...

Варіанти відповіді:

а)  $\tilde{S} = S \left( 1 - \frac{j}{m} \right)^m$  .....

б)  $\tilde{S} = S(1+i)$  .....

в) 
$$\tilde{S} = R \frac{1 - \left( 1 + \frac{j}{m} \right)^{-nm}}{1 - \left( 1 + \frac{j}{m} \right)^m}$$
 .....

г)  $\tilde{S} = S \left( 1 + \frac{j}{m} \right)^m$  .....

- 65 Нарощена сума постійної  $p$ -термінової ренти пренумерандо з нарахуванням один раз на рік обчислюється за формулою ...

Варіанти відповіді:

а)  $\tilde{S} = S(1+i)$  .....

б)  $\tilde{S} = S(1-i)^{1/p}$  .....

в)  $\tilde{S} = S(1+i)^{1/p}$  .....

г)  $\tilde{S} = S \left( 1 + \frac{j}{m} \right)^m$  .....

- 66 Нарощена сума постійної  $p$ -термінової ренти пренумерандо з нарахуванням  $m$  раз на рік ( $m \neq p$ ) обчислюється за формулою ...

Варіанти відповіді:

а)  $\tilde{S} = S \left( 1 + \frac{j}{m} \right)^{m/p}$  .....

б)  $\tilde{S} = S(1+i)$  .....

в)  $\tilde{S} = S \left( 1 - \frac{j}{m} \right)^{m/p}$  .....

г) 
$$\tilde{S} = \frac{R}{p} \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^{1/p} - 1}$$
 .....

- 67 Сучасна вартість постійної річної ренти пренумерандо з нарахуванням один раз на рік обчислюється за формулою ...

Варіанти відповіді:

а)  $\tilde{A} = R \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$  .....

105

- б)  $\tilde{A} = A(1+i)$  .....
- в)  $\tilde{A} = A\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m/p}$  .....
- г)  $\tilde{A} = A\left(1 + \frac{j}{m}\right)^m$  .....

68 Сучасна вартість постійної річної ренти пренумерандо з нарахуванням  $m$  раз на рік обчислюється за формулою ...

Варіанти відповіді:

- а)  $\tilde{A} = R \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$  .....
- б)  $\tilde{A} = A(1+i)$  .....
- в)  $\tilde{A} = A\left(1 + \frac{j}{m}\right)^m$  .....
- г)  $\tilde{A} = A\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m/p}$  .....

69 Сучасна вартість постійної  $p$ -термінової ренти пренумерандо з нарахуванням один раз на рік обчислюється за формулою ...

Варіанти відповіді:

- а)  $\tilde{A} = A(1+i)^{1/p}$  .....
- б)  $\tilde{A} = A\left(1 + \frac{j}{m}\right)^m$  .....
- в)  $\tilde{A} = A\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m/p}$  .....
- г)  $\tilde{A} = A(1+i)$  .....

70 Сучасна вартість постійної  $p$ -термінової ренти пренумерандо з нарахуванням  $m$  раз на рік ( $m \neq p$ ) обчислюється за формулою ...

Варіанти відповіді:

- а)  $\tilde{A} = A(1+i)^{1/p}$  .....
- б)  $\tilde{A} = A\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m/p}$  .....
- в)  $\tilde{A} = A(1+i)$  .....

г)  $\tilde{A} = R \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$  .....

71 Нарощена сума постійної річної ренти з платежами в середині періодів та нарахуванням один раз на рік обчислюється за формулою ...

Варіанти відповіді:

а)  $S_{1/2} = S(1+i)$  .....

б)  $S_{1/2} = S \left(1 + \frac{j}{m}\right)^m$  .....

в)  $S_{1/2} = S(1+i)^{1/2}$  .....

г)  $S_{1/2} = R \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$  .....

72 Нарощена сума постійної річної ренти з платежами в середині періодів та нарахуванням  $m$  раз на рік обчислюється за формулою ...

Варіанти відповіді:

а)  $S_{1/2} = S(1+i)$  .....

б)  $S_{1/2} = R \frac{1 - \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-nm}}{1 - \left(1 + \frac{j}{m}\right)^m}$  .....

в)  $S_{1/2} = S \left(1 + \frac{j}{m}\right)^m$  .....

г)  $S_{1/2} = S \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m/2}$  .....

73 Нарощена сума постійної  $p$ -термінової ренти з платежами в середині періодів та нарахуванням один раз на рік обчислюється за формулою ...

Варіанти відповіді:

а)  $S_{1/2} = S(1+i)$  .....

б)  $S_{1/2} = S \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m/2}$  .....

в)  $S_{1/2} = S(1+i)^{1/2p}$  .....

г)  $S_{1/2} = S(1+i)^{1/p}$  .....

- 74 Нарощена сума постійної  $p$ -термінової ренти з платежами в середині періодів та нарахуванням  $m$  раз на рік ( $m \neq p$ ) обчислюється за формулою ...

Варіанти відповіді:

а)  $S_{1/2} = S(1+i)^{1/2p}$  .....

б)  $S_{1/2} = S\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m/2p}$  .....

в)  $S_{1/2} = S(1+i)$  .....

г)  $S_{1/2} = S\left(1 + \frac{j}{m}\right)^m$  .....

- 75 Сучасна вартість постійної річної ренти з платежами в середині періодів та нарахуванням один раз на рік обчислюється за формулою ...

Варіанти відповіді:

а)  $A_{1/2} = A(1+i)^{1/2}$  .....

б)  $A_{1/2} = A(1+i)$  .....

в)  $A_{1/2} = A\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m/2}$  .....

г)  $A_{1/2} = A(1-i)^{1/2}$  .....

- 76 Сучасна вартість постійної річної ренти з платежами в середині періодів та нарахуванням  $m$  раз на рік обчислюється за формулою ...

Варіанти відповіді:

а)  $A_{1/2} = A(1+i)^{1/2}$  .....

б)  $A_{1/2} = A(1-i)^{1/2}$  .....

в)  $A_{1/2} = A(1+i)$  .....

г)  $A_{1/2} = A\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m/2}$  .....

- 77 Сучасна вартість постійної  $p$ -термінової ренти з платежами в середині періодів та нарахуванням один раз на рік обчислюється за формулою ...

Варіанти відповіді:

- а)  $A_{1/2} = A(1+i)^{1/2p}$  .....
- б)  $A_{1/2} = A(1+i)^{1/2}$  .....
- в)  $A_{1/2} = A(1+i)$  .....
- г)  $A_{1/2} = A\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m/2}$  .....

78 Сучасна вартість постійної  $p$ -термінової ренти з платежами в середині періодів та нарахуванням  $m$  раз на рік ( $m \neq p$ ) обчислюється за формулою ...

Варіанти відповіді:

- а)  $A_{1/2} = A(1+i)^{1/2}$  .....
- б)  $A_{1/2} = A(1-i)^{1/2}$  .....
- в)  $A_{1/2} = A(1+i)$  .....
- г)  $A_{1/2} = A\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m/2p}$  .....

79 Відкладеною називається рента ...

Варіанти відповіді:

- а) рента виплачується нескінченну кількість років .....
- б) виплата платежів якої здійснюється на початку періоду ренти .....
- в) виплата платежів якої здійснюється в кінці періоду ренти .....
- г) початок виплат у якої зсунутий вперед відносно деякого моменту часу .....

80 Вічною називається рента ...

Варіанти відповіді:

- а) яка виплачується нескінченну кількість років .....
- б) платежі якої виплачуються на початку періоду ренти .....
- в) платежі якої виплачуються в кінці періоду ренти .....
- г) початок виплат у якої зсунутий вперед відносно деякого моменту часу .....

81 Платіж ренти, яка триває скінченну кількість років, відповідає вимозі ...

Варіанти відповіді:

- а)  $R = Ai$  .....

- б)  $R > Ai$  .....
- в)  $R < Ai$  .....
- г)  $R \leq Ai$  .....



### Література

1. Вітлінський В. В., Наконечний С. І. Ризик в менеджменті. – К.: ТОВ „Борисфен-М”, 1996. – 336 с.
2. Долінський Л. Б. Фінансові обчислення та аналіз цінних паперів: Навч. посібник – К.: Майстер-клас, 2005. – 192 с.
3. Економіко-математичне моделювання: Навчальний посібник / За ред. О. Т. Іващука. – Тернопіль: ТНЕУ «Економічна думка», 2008. – 704 с.
4. Івченко І. Ю. Економічні ризики: Навч. посібник. – К.: Центр навчальної літератури, 2004. – 304 с.
5. Ілляшенко С. М. Економічний ризик: Навч. посібник. – 2-е вид., доп., перероб. – К.: Центр навчальної літератури, 2004. – 220 с.
6. Клименко С. М., Дуброва О. С. Обґрунтування господарських рішень та оцінка ризиків: Навч. посібник. – К.: КНЕУ, 2005. – 252 с.
7. Клебанова Т. С., Раевна Е. В. Теория экономического риска: Учеб. пособие. – Харьков: Изд. ХГЭУ, 2001. – 132 с.
8. Кочович Е. Финансовая математика. Теория и практика финансово-банковских расчетов: Пер. с серб. – М.: Финансы и статистика, 1994. – 268 с.
9. Неміш В. М., Процик А. І., Березька К. М. Практикум з вищої математики: Навч. посібник. – Тернопіль: Економічна думка, 2007. – 302 с.
10. Малыхин В. И. Финансовая математика: Учеб. пособие для вузов. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2003. – 237 с.
11. Овчаренко Е. К., Ильина О. П., Балыбердин Е. В. Финансово-экономические расчеты в EXCEL. – М.: Информ.-изд. дом «Филин», 1998. – 184 с.
12. Уланов В. А. Сборник задач по курсу финансовых вычислений. – М.: Финансы и статистика, 2000. – 400 с.
13. Уотшем Т. Дж., Паррамоу К. Количественные методы в финансах: Учеб. пособие для вузов / Пер. с англ. – М.: Финансы, ЮНИТИ, 1999. – 527 с.
14. Христиановский В. В., Полшков Ю. Н., Щербина В. П. Экономический риск и методы его измерения. – Донецк: ДонГУ, 1999. – 250 с.
15. Четыркин Е. М. Финансовая математика: Учебник. – М.: Дело, 2002. – 400 с.
16. Фінансова математика / Укладачі Березька К.М., Руська Р.В. – Тернопіль, 2004. – 120 с.