

ТЕМА 1. Фізичні основи теорії електричних і магнітних кіл.

1.1.1 ЕЛЕКТРИЧНЕ ПОЛЕ

Фізичною основою електротехніки є електричні і магнітні явища. Зміст же електротехніки як галузі науки полягає в технічному використанні цих явищ.

Електропровідність – це властивість речовини проводити під дією незмінного у часі електричного поля незмінний у часі електричний струм.

У сучасній науці утвердилось уявлення про поле як про фізичну реальність, що існує поряд з речовиною.

Електромагнітне поле як вид матерії характеризується тим, що чинить силовий вплив на заряджені частинки, ступінь якого залежить від швидкості руху частинок і їх електричного заряду.

Залежно від умов спостереження електромагнітне поле виявляється в цілому або як одна із двох його сторін: електричне поле або магнітне поле.

У структуру атомів речовини входять елементарні частинки. Деякі з них мають електричний заряд.

Елементарні частинки, які мають електричний заряд (наприклад, електрони і протони), оточені електромагнітним полем. Ці частинки не існують окремо від їхнього електромагнітного поля, тобто між зарядженою частинкою і її електромагнітним полем точної межі немає.

Проте вважають, що електричний заряд зосереджений у досить малій області простору, і тоді говорять про частинку, яка має електричний заряд. Зовні цієї області матерія існує у вигляді електромагнітного поля, а об'ємна густина електричного заряду дорівнює нулю.

Електрон і протон мають однаковий за значенням ($1,6 \cdot 10^6$ Кл), але протилежний за знаком заряд, який вважають елементарним.

Елементарний електричний заряд – це властивість електрона або протона, яка характеризує взаємозв'язок їх з власним електричним полем і їхню взаємодію із зовнішнім електричним полем.

Електромагнітне поле може існувати окремо від електрично-заряджених частинок. Підтвердженням цього є електромагнітні хвилі, що поширюються у просторі (радіохвилі).

Електростатичне поле

Електричне поле характеризується дією на електрично заряджену частинку силою, пропорційною заряду частинки і незалежною від її швидкості.

Звичайним станом тіл, що оточують нас, є стан електрично нейтральний, хоч вони й складаються з частинок, які мають електричний заряд. Це пояснюється тим, що загальний позитивний заряд ядер атомів дорівнює загальному негативному заряду електронів.

Тіло може дістати електричний заряд внаслідок будь-якого процесу, що призведе до нерівності в об'ємі тіла або частини його позитивного і негативного зарядів. В обох випадках заряджені частинки не зникають, а передаються від одного тіла іншому або переміщуються в цьому тілі, тобто відбувається просторовий розподіл позитивно і негативно заряджених частинок.

Тому електричний заряд тіла (системи тіл) завжди дорівнює алгебраїчній сумі елементарних електричних зарядів.

Електризація тіл може бути здійснена тертям, електростатичною індукцією або внаслідок інших фізичних і хімічних процесів.

Нерухоме тіло, що має електричний заряд, так само як і нерухома елементарна заряджена частинка, оточене електричним полем.

Електричне поле нерухомих заряджених тіл при відсутності в них електричних струмів називається електростатичним.

Силову характеристикою електричного поля є його напруженість. За допомогою останньої можна оцінити інтенсивність електричного поля і визначити силу, яка діє від електричного поля на заряджену частинку.

Проте вже тепер можна зазначити, що напруженість електростатичного поля не змінюється з часом.

Закон Кулона

Зазначена раніш властивість електричного поля – силова дія на нерухомі заряджені частинки і тіла – використовується з метою виявлення та вивчення його. Для цього треба помістити у простір, що оточує тіло із зарядом Q_1 , інше тіло із зарядом Q_2 (рис. 1.1). Перше тіло разом з його полем називатимемо досліджуваним, а друге – пробним.

Дослід показує, що на кожне з двох заряджених тіл діють однакові сили F_e , спрямовані так, що тіла із зарядами одного знака відштовхуються, а тіла із зарядами різних знаків притягуються.

Згідно з принципом накладення, можна вважати, що два заряджені тіла оточені загальним електричним полем, яке утворюється внаслідок накладення двох полів, кожне з яких пов'язане із своїм зарядженим тілом, коли останнє відокремлено.

При цьому силу F_e можна розглядати як результат силової дії загального електричного поля на кожне із заряджених тіл. Кількісно цю дію визначають за формулою закону Кулона (1.1), яка справедлива для точкових заряджених тіл.

Заряджене тіло називається точковим, якщо його лінійні розміри малі порівняно з відстанню від нього до точок, в яких розглядається його електричне поле.

Сила, з якою на кожне з двох точкових заряджених тіл, розташованих у вакуумі, діє їхнє загальне електричне поле, пропорційна добутку зарядів цих тіл, і обернено пропорційна квадрату відстані між ними:

$$F_e = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad (1.1)$$

де Q_1 і Q_2 – заряди точкових тіл; r – відстань між їхніми центрами; $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ – коефіцієнт пропорційності, який визначають вибором системи одиниць.

Величина ϵ_0 у знаменнику формули (1.1) називається електричною сталою, яка в Міжнародній системі одиниць (СІ) має числове значення

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{фарад}}{\text{метр}} (\Phi/м).$$

Інші величини, що входять у формулу (1.1), мають такі одиниці: сила $[F_e]$ – ньютон (Н); кількість електрики (електричний заряд) $[Q]$ – кулон (Кл).

Електричні і магнітні одиниці в СІ встановлено для раціоналізованої форми рівнянь, яка передбачає відсутність сталого множника 4π в найбільш

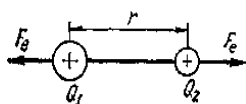


Рисунок 1.1.

важливих і часто використовуваних рівняннях електротехніки. Наявність цього множника в знаменнику формули (1.1), яка теж записана в раціоналізованій формі, зумовлена сферичною симетрією електричного поля точкового зарядженого тіла.

Формула (1.1) і наступні вирази, які стосуються електричного поля у вакуумі, справедливі і для електричного поля в повітрі.

Напруженість електричного поля

Припустімо, що розміри пробного тіла і його заряд настільки малі, що заряд Q_1 досліджуваного тіла і його електричне поле не змінюються, тобто залишаються такими самими, як і у випадку відокремлення. Пробне тіло при цьому можна розглядати лише як «інструмент» для реєстрації електричної сили. Вміщуючи пробне заряджене тіло в різні точки, можна досліджувати інтенсивність електричного поля.

Згідно із законом Кулона, сила пропорційна пробному заряду. У зв'язку з цим інтенсивність електричного поля в заданій точці зручно оцінювати силою, яка припадає на

одиницю позитивного заряду пробного тіла, розташованого в тій самій точці, тобто відношенням F_e/Q_2 .

Напруженість електричного поля – векторна величина, яка характеризує електричне поле й визначає силу, що діє на заряджену частинку (тіло) від електричного поля.

У числовому виразі напруженість електричного поля дорівнює відношенню сили, що діє на заряджену частинку (пробне тіло), до її заряду:

$$\vec{E} = \vec{F}_e / Q. \quad (1.2)$$

Напрямок напруженості електричного поля збігається з напрямком сили, що діє на частинку (пробне тіло) з позитивним зарядом.

Одиниця напруженості електричного поля $[E] = \frac{\text{ньютон}}{\text{кулон}} = \frac{\text{вольт}}{\text{метр}}$ (В/м) спеціальної назви не має.

Лінії напруженості електричного поля

Для наочного зображення електричного поля користуються *лініями напруженості*, або *силовими лініями*. Лінії напруженості електричного поля проводять так, щоб вектор напруженості збігався з дотичною в кожній точці цієї лінії.

Силкові лінії окремого точкового зарядженого тіла – це радіальні прямі, проведені через точку, в якій перебуває це тіло, тому що в будь-якій точці навколишнього простору сила, яка діє на пробне тіло, спрямована по прямій, що з'єднує центри заряджених тіл.

Якщо заряд тіла позитивний, силкові лінії спрямовані від центра тіла (рис. 1.2, а), якщо негативний – то до центра тіла (рис. 1.2, б).

Розглянемо електричне поле групи заряджених точкових тіл. Напруженість результуючого поля в кожній точці дорівнює геометричній сумі напруженостей полів, зумовлених усіма зарядами. На рис. 1.2, в, г подано поле найпростішої групи з двох точкових тіл, які мають однакові за значенням заряди: в – різнойменні; г – однойменні.

Електричне поле називається однорідним (рівномірним), якщо напруженість його у всіх точках однакова за значенням і напрямком.

Рівномірне поле утворюється між двома паралельними пластинками, розміри яких великі порівняно з відстанню між ними (рис. 1.3).

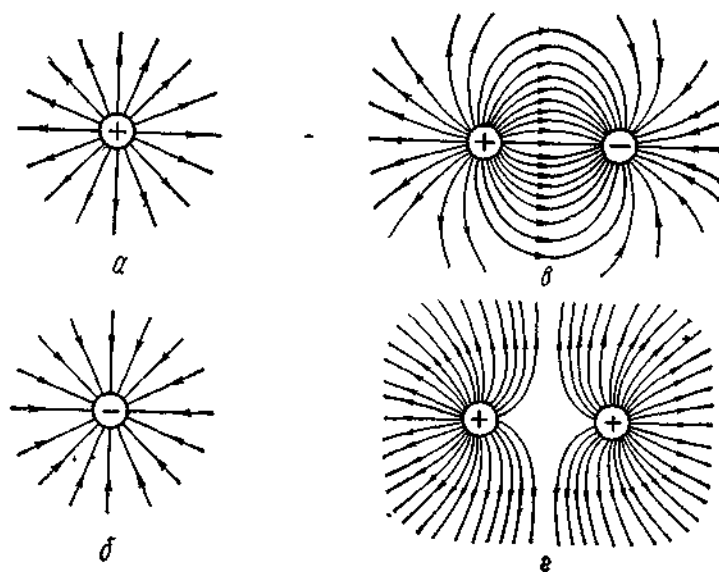


Рисунок 1.2 - Зображення електричного поля відокремлених точкових заряджених тіл (а, б) та лінії напруженості поля групи з двох точкових заряджених тіл (в, г)

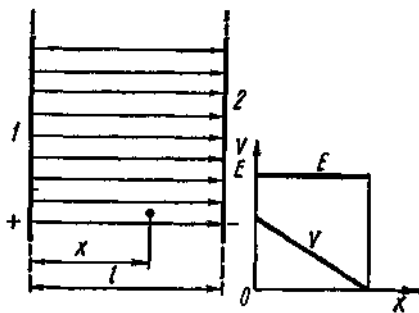


Рисунок 1.3- Лінії напруженості
рівномірного електричного поля

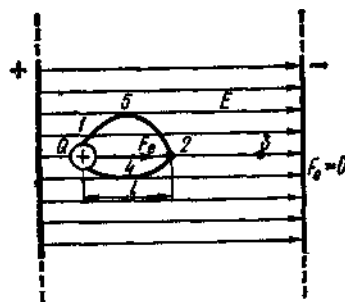


Рисунок 1.4- Вільна заряджена
частинка в рівномірному
електричному полі

1.1.2. РОБОТА ПРИ ПЕРЕМІЩЕННІ ЗАРЯДЖЕНИХ ЧАСТИНОК В ЕЛЕКТРИЧНОМУ ПОЛІ

Розглянемо вільну частинку з позитивним зарядом Q у рівномірному електричному полі (рис. 1.4). Ця частинка переміщуватиметься у напрямі сили F_e , що діє на неї. При переміщенні частинки на шляху l між точками 1 і 2 здійснюється робота $A_{1,2} = F_e l$.

Врахувавши формулу (1.2), подамо роботу через напруженість електричного поля E :

$$A_{1,2} = EQl$$

Робота при переміщенні зарядженої частинки здійснюється внаслідок силової взаємодії частинки із зовнішнім полем. Кількісно вона пропорційна напруженості поля й значенню заряду.

Роботу вважають додатньою, якщо заряджена частинка переміщується у напрямі сил поля, і від'ємною, якщо переміщення спричинене дією сторонніх сил проти напрямку сил електричного поля.

Аналогічні висновки можна зробити і для нерівномірного поля, визначаючи роботу при переміщенні зарядженої частинки між точками 1 і 2 як суму елементарних значень роботи dA , здійснюваної на кожному безмежно малому відрізку шляху dl , в межах якого напруженість поля можна вважати сталою:

$$A_{1,2} = Q \int_1^2 E_n dl \quad (1.3)$$

де E_n – проекція вектора напруженості поля на напрям руху зарядженої частинки.

Припустімо тепер, що заряджена частинка рухається по замкненому шляху 1-4-2-5-1. Якщо частинка рухається по відрізку 1-4-2, то переміщення її у напрямі від точки 1 до точки 2 збігається з напрямом сил поля, тобто здійснюється додатня робота $A_{1,2}$. При русі по ділянці шляху 2-5-1 сили поля спрямовані проти руху і робота $A_{1,2}$ від'ємна.

Загальна робота A на замкненому шляху 1-4-2-5-1 дорівнює нулю:

$$A = Q \oint E_n dl = 0. \quad (1.4)$$

Невиконання цієї умови означало б, що є замкнений шлях, уздовж якого робота додатня.

При цьому виникла б можливість, не поповнюючи енергії електричного поля, дістати необмежену додатну роботу, що суперечило б закону збереження енергії. Звідси випливає рівність $A_{1,4,2} = A_{2,5,1}$.

Проте робота на шляху 2-5-1 кількісно дорівнює й протилежна за знаком роботі, виконаній при русі зарядженої частинки по тому самому шляху, але в зворотний бік, тобто $A_{1,4,2} = A_{1,5,2}$.

Обидва шляхи (1-4-2 і 1-5-2) вибрано довільно. Звідси випливає, що робота,

виконувана силами поля при переміщенні зарядженої частинки між двома точками, не залежить від обраного шляху, а визначається положенням початкової і кінцевої точок шляху (1 і 2), тобто відстанню l .

Електрична напруга. Потенціал

Кількість роботи залежить не тільки від величин, що належать до поля (E, l), а й від заряду частинки Q . Тому з енергетичного погляду поле уздовж розглядуваного шляху характеризується роботою, яка припадає на одиницю заряду.

$$U_{1,2} = A_{1,2}/Q.$$

Це відношення називається *електричною напругою*.

Електрична напруга є енергетичною характеристикою поля уздовж розглядуваного шляху з однієї точки в іншу, якою оцінюється можливість виконання роботи при переміщенні заряджених частинок між цими точками.

Неважко знайти зв'язок напруженості рівномірного поля з напругою між двома будь-якими точками:

$$U = \frac{A}{Q} = \frac{EQl}{Q}; \quad U = El. \quad (1.5)$$

Одиниця електричної напруги

$$[U] = [A/Q] = \frac{\text{джоуль}}{\text{кулон}} = \text{вольт (В)}.$$

Враховуючи, що робота, виконувана при переміщенні зарядженої частинки в електричному полі, залежить від положення початкової і кінцевої точок шляху, для розрахунку можна ввести енергетичну характеристику поля в кожній точці, значення якої є функцією положення точки. Такою характеристикою є *електричний потенціал*.

Припустімо, що пробна частинка, яка має заряд Q , розташована в точці 1 електричного поля (див. рис. 1.4) і, отже, перебуває під дією сили F_e . Електричне поле діє на цю частинку подібно до того, як діє на тіло поле тяжіння, тобто частинка має потенціальну енергію A_1

При переміщенні зарядженої частинки з точки 1 в точку 2 здійснюється робота $A_{1,2}$, пов'язана з дією тої самої сили F_e . Роботу $A_{1,2}$ слід розглядати як зменшення потенціальної енергії зарядженої частинки при переміщенні її між зазначеними точками.

Отже, потенціальна енергія в точці 2 $A_2 = A_1 - A_{1,2}$

Відношення потенціальної енергії зарядженої частинки, вміщеної в задану точку електричного поля, до її заряду називається *електричним потенціалом* поля в цій точці:

$$\phi_1 = A_1/Q; \quad \phi_2 = A_2/Q.$$

Таким чином, напруга між двома точками електричного поля дорівнює різниці потенціалів поля в цих точках:

$$U_{1,2} = \frac{A_{1,2}}{Q} = \frac{A_1 - A_2}{Q} = V_1 - V_2. \quad (1.6)$$

Аналогічні міркування можна навести, розглядаючи заряджену частинку в точках 2, 3 та ін.

Потенціальна енергія зарядженої частинки в електричному полі зменшується при переході від точки до точки у напрямі ліній напруженості. Вона дорівнює нулю за межами електричного поля, де сила $F_e = 0$.

При наявності електричного поля нескінченної довжини сила F_e дорівнює нулю в нескінченності.

При зворотному переміщенні зарядженої частинки проти сили взаємодії її з електричним полем потенціальна енергія зростатиме за рахунок роботи зовнішньої неелектричної сили.

Потенціальну енергію можна визначити відносно будь-якого рівня, прийнятого за початковий. Під час теоретичних досліджень за початковий потенціал беруть потенціал

нескінченно віддаленої точки, де він дорівнює нулю: $\varphi_{\infty} = 0$. При цьому потенціал будь-якої точки поля кількісно дорівнює роботі, яка могла б бути здійснена в електричному полі при переміщенні частинки, що має одиницю заряду, із заданої точки в нескінченність.

При розв'язуванні практичних задач, що стосуються електричних пристроїв, початковим звичайно вважають потенціал землі, який беруть таким, що дорівнює нулю.

Провідники в електричному полі

У металевому тілі (рис. 1.5) під дією зовнішнього електричного поля з напруженістю E_1 вільні електрони переміщуються до однієї поверхні, яка набуває негативного заряду. Протилежна поверхня набуває позитивного заряду.

Явище зміщення вільних заряджених частинок на поверхні провідника, вміщеного в електричне поле, називається *електричною індукцією*.

Внаслідок розділу зарядів у провіднику створюється внутрішнє електричне поле з напруженістю E_2 , спрямоване протилежно зовнішньому. Рух вільних електронів у провіднику при електричній індукції існує недовго, але триває доти, поки напруженості зовнішнього і внутрішнього полів не зрівноважаться.

При рівності $E_1 = E_2$ розділ зарядів у провіднику припиняється, оскільки результуюча напруженість електричного поля дорівнює нулю.

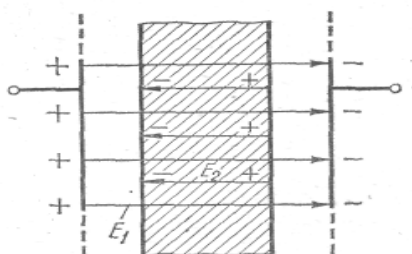


Рисунок 1.5 - Металеве тіло в електричному полі

Завдяки наявності у провіднику вільних заряджених частинок електростатичне поле в ньому існувати не може.

Напруга між двома будь-якими точками провідника дорівнює нулю, отже, потенціал його у всіх точках той самий. Таким чином, провідник є екіпотенціальним об'ємом, а його поверхня—еквіпотенціальною поверхнею результуючого електричного поля.

Якщо в електричне поле вмістити провідник з порожниною усередині, то і в цьому випадку заряджені частинки будуть тільки на поверхні. Усередині металу й порожнині електричного поля немає.

Ця властивість провідників використовується для електростатичного екранування, тобто для захисту будь-якого пристрою від дії зовнішнього електричного поля (об'єкт вміщують у металеву коробку або сітку з малими отворотами).

1.1.3 ЕЛЕКТРИЧНИЙ СТРУМ

Відомо кілька видів явища електричного струму, що відрізняються від типу речовини, в якій воно виникає при відповідних умовах. Поділ речовин за ступенем електропровідності на провідники, напівпровідники та непровідники (діелектрики) пов'язаний з поняттям про електричний струм провідності.

Провідники поділяють на два види залежно від типу носіїв електричного заряду, що створюють електричний струм. У провідниках першого виду (метали) струм створюється вільними електронами, тому електропровідність їх називається електронною. У провідниках другого виду (розплавлені солі, розчини солей, кислот, лугів) носіями електричного заряду є іони – заряджені атоми і молекули.

Електронна теорія будови металів

Уявлення про електронну структуру атомів стало основою для класичної теорії будови металів. У цій теорії враховується, що валентні електрони зовнішнього шару

відокремленого атома слабо зв'язані з ядром. При утворенні кристалів на електрони кожного атома діють ядра інших атомів. За таких умов деякі валентні електрони втрачають постійний зв'язок з одним ядром і переходять від одного атома до іншого. Такі електрони називають вільними. Атоми, які втратили електрони з валентного шару, стають позитивними іонами і розташовуються у вузлах кристалічної решітки, здійснюючи теплові коливання навколо положення рівноваги. Загальний заряд вільних електронів у кристалі дорівнює позитивному зарядові іонів, тому кристал залишається електрично нейтральним.

Вільні електрони теж беруть участь у хаотичному тепловому русі, але переміщуються по всьому кристалу, утворюючи своєрідний електронний газ. Вважають, що вільні електрони мають властивості молекул ідеального газу: вони не взаємодіють на відстані між собою і з іншими частинками металу, але під час свого руху можуть стикатися з іонами кристалічної решітки. Електронна теорія будови металів була розроблена у зв'язку із загальною проблемою електропровідності речовин. Електропровідність, теплопровідність, електричний опір легко пояснити при введенні поняття про вільні електрони. Електронна теорія пояснює погану електропровідність у ряді речовин тим, що немає вільних електронів. Такі речовини називають діелектриками. Проте не всі електричні властивості твердих тіл, у тому числі й металів, можна пояснити за допомогою електронної теорії. Застосування її в ряді випадків суперечить дослідним даним.

Явище електричного струму провідності

На заряджені частинки в електричному полі діють електричні сили F_2 . Якщо електричне поле підтримується у провіднику, то вільні заряджені частинки, які беруть участь у тепловому безладному русі, набувають складових швидкості уздовж ліній напруженості поля. За цієї умови частинки рухаються переважно в одному напрямі: позитивні – у напрямі поля, а негативні – в зворотний бік.

Явище напрямленого руху вільних носіїв електричного заряду в речовині або у вакуумі називається електричним струмом провідності.

Частинки, які утворюють струм у речовині провідників, є структурними елементами самих провідників. Тому електричний струм у провідниках другого виду супроводиться хімічними змінами та перенесенням речовини (наприклад, явище електролізу).

Оскільки всі електрони однакові, у провідниках першого виду електричний струм не супроводиться зміною хімічного складу провідника. Не спостерігається і перенесення речовини, тому що маса електронів дуже мала порівняно з масою ядра.

Електричний струм провідності

Інтенсивність електричного струму оцінюється фізичною величиною, яка називається силою електричного струму. На практиці цю величину називають електричним струмом або просто струмом.

Струм провідності визначається електричним зарядом усіх частинок, які проходять крізь поперечний переріз провідника за одиницю часу. Припустімо, що крізь поперечний переріз провідника S за час t рівномірно проходить n електронів. Заряд кожного електрона e , тому загальний заряд частинок, які пройшли крізь переріз за цей час, $Q = en$.

Відношення

$$Q/t = en/t = I \quad (1.7)$$

виражає заряд, перенесений електронами крізь переріз провідника за 1 с, тобто струм I .

Одиниця електричного струму *ампер* (А) у Міжнародній системі одиниць є однією з основних. На практиці - застосовують також похідні від ампера: 1 кілоампер (кА) = 10^3 А – для вимірювання великих струмів; 1 міліампер (мА) = 10^{-3} А і 1 мікроампер (мкА) = 10^{-6} А – для вимірювання малих струмів.

Додатнім напрямом електричного струму умовно вважають напрям, в якому рухаються позитивно заряджені частинки. В металах додатний напрям струму протилежний напрямові руху електронів.

Електричний струм, який довго не змінюється за величиною і напрямом, називається *постійним* (I на рис. 1.6). Отже, для постійного струму характерна зміна заряду в одному напрямі з однаковою інтенсивністю.

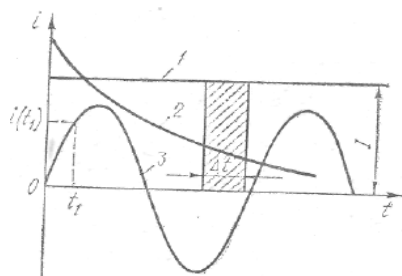


Рисунок 1.6

Якщо струм у часі змінюється, то він називається *змінним* (2, 3 на рис. 1.6).

У цьому випадку по осі ординат на графіках відкладають миттєві значення струму, які визначаються зміною заряду q за нескінченно малий проміжок часу:

$$i = \frac{dq}{dt}. \quad (1.8)$$

На кривій 3 (рис. 1.6) показано миттєвий струм $i(t_1)$ у момент часу t_1 . В практичних розрахунках користуються поняттям густини електричного струму провідності J .

При струмі в провіднику I та поперечному перерізі провідника S кількісно густину струму визначають відношенням

$$\rho = I/S. \quad (1.9)$$

Одиниця густини струму $[\rho] = \text{ампер/метр}^2 \text{ (А/м}^2\text{)}$.

На практиці площу поперечного перерізу проводів частіше виражають в мм^2 і відповідно густину струму – в А/мм^2 .

При постійному струмі, незважаючи на рух заряджених частинок у провіднику, розподіл зарядів у ньому стаціонарний, тому що в будь-якому елементі об'єму за деякий проміжок часу заряд частинок, які надходять і виходять, однаковий.

Електричне поле, пов'язане з рухомими зарядженими частинками у провіднику, називається стаціонарним на відміну від електростатичного, пов'язаного з нерухомими зарядженими частинками.

Електричний струм у провіднику і відповідне йому стаціонарне електричне поле треба підтримувати, безперервно поповнюючи енергію поля, яка витрачається внаслідок руху заряджених частинок, перетворюючись на тепло.

1.1.4 ЕЛЕКТРИЧНИЙ ОПІР. ЗАКОН ОМА

Дослідами встановлено, що інтенсивність електричного струму пропорційна напруженості електричного поля і залежить від властивостей речовини, яка проводить струм.

Електрична провідність

Густина електричного струму в провіднику виражається добутком напруженості електричного поля E і питомої електричної провідності γ :

$$J = \gamma E \quad (1.10)$$

Питома електрична провідність характеризує електропровідність речовини, тобто властивість утворювати усередині речовини електричний струм під дією електричного поля.

Розглянемо відрізок провідника завдовжки l з поперечним перерізом S (рис. 1.7).

Наявність електричного поля в провіднику означає, що потенціал його змінюється при переході від точки до точки, тобто провідник не є екіпотенціальним об'ємом. Якщо поле рівномірне й напрямлене уздовж провідника, то різницю потенціалів між його кінцями можна визначити за формулою (1.5): $U = El$.

Вважаючи електричний струм рівномірно розподіленим по перерізу

($J = const$) і враховуючи формулу (1.10), дістаємо

$$\begin{aligned} I/S &= \gamma U/l, \\ \text{звідки} \quad I &= S \gamma U/l. \\ \text{Відношення} \quad I/U &= \gamma S/l = G \end{aligned} \quad (1.11)$$

називають електричною провідністю провідника і позначають G .

Електрична провідність показує, якої сили струм утворюється в провіднику заданих розмірів при напрузі на його кінцях в 1 В. Одиниця електричної провідності

$[G] = [I/U] = \text{ампер/вольт} = \text{сіменс (См)}$.

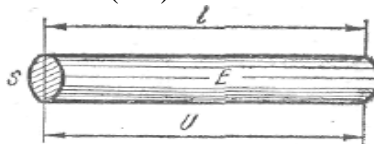


Рисунок 1.7- До визначення електричного опору ділянки проводу

Електричний опір

Залежність (1.11) можна записати в такому вигляді

$$I = U/R, \quad (1.12)$$

де $R = 1/G$ – величина, обернена провідності, яка називається електричним опором провідника.

Електричний опір постійного струму дорівнює відношенню сталої напруги на ділянці кола до постійного струму в ній при умові, що на ділянці е. р. с. немає.

Властивості струмопровідного матеріалу характеризуються також величиною, оберненою питомій провідності γ , яка називається питомим опором:

$$\rho = 1/\gamma \quad (1.13)$$

Враховавши формули (1.11) і (1.13), можна записати вираз для опору провідника через його розміри:

$$R = \rho l/S \quad (1.14)$$

Одиницею електричного опору є опір такого провідника, в якому при різниці потенціалів на кінцях в 1 В встановлюється струм в 1 А:

$$[R] = \text{В/А} = \text{Ом}$$

За формулами (1.11) і (1.14) можна визначити питому провідність γ , питомий опір ρ та одиниці вимірювання їх: $[\gamma] = 1/(\text{Ом} \cdot \text{м})$ і $[\rho] = \text{Ом} \cdot \text{м}$. На практиці прийнято виражати довжину проводів в м, а переріз в мм^2 , тому в довідкових таблицях питому провідність часто подають в $\text{м}/(\text{Ом} \cdot \text{мм}^2)$, а питомий опір – в $\text{Ом} \cdot \text{мм}^2/\text{м}$.

Для напівпровідників і діелектриків величину ρ звичайно подають в $\text{Ом} \cdot \text{см}$.

Струм у провіднику дорівнює відношенню напруги на ділянках провідника до електричного опору цієї ділянки (**закон Ома для ділянки кола**).

Закон Ома для повного кола: струм в колі дорівнює електрорушійній силі, поділеній на опір усього кола

$$I = E/(R+r). \quad (1.15)$$

1.1.5 ЕЛЕКТРИЧНА ЄМНІСТЬ

Електрична ємність провідника величина, що характеризує здатність провідника накопичувати електричний заряд, який чисельно дорівнює відношенню заряду провідника до його потенціалу:

$$C = Q/\phi \quad (1.16)$$

У вакуумі це відношення для заданого провідника не змінюється незалежно від заряду. В багатьох діелектриках, які використовуються на практиці, ємність провідника теж стала в широких межах зміни заряду.

Одиниця ємності

$$[C] = \text{кулон/вольт} = \text{фарад (Ф)}.$$

Фарад — дуже велика одиниця ємності, тому в практичних розрахунках ємність часто виражають у частках фарада — мікрофарадах (мкФ) і пікофарадах (пФ): $1 \text{ Ф} = 10^6 \text{ мкФ} = 10^{12} \text{ пФ}$.

Найбільше значення для практики мають системи з двох провідників, які дістають однакові за значенням, але протилежні за знаком заряди. Пристрої з двох ізольованих один від одного провідників, які дістають однакові за значенням, але протилежні за знаком заряди, називаються **к о н д е н с а т о р а м и**.

Величина, яка характеризує зв'язок заряду конденсатора з напругою між його обкладками і чисельно дорівнює відношенню заряду до напруги, називається ємністю конденсатора:

$$C=Q/U$$

Ємність плоского конденсатора

Конденсатор називається плоским, якщо його обкладками є дві плоскопаралельні металеві пластинки.

Звичайно відстань між пластинками мала порівняно з їхніми лінійними розмірами, тому електричне поле плоского конденсатора можна вважати рівномірним.

$$C=\epsilon_a S/l,$$

де ϵ_a – діелектрична проникність діелектрика; S- площа пластини; l- відстань між пластинами.

Ємність циліндричного конденсатора .

Ємність циліндричного конденсатора визначається за формулою:

$$C=2\pi\epsilon_a l/[l_n (r_2 /r_1) ,$$

де r_2 і r_1 –радіуси зовнішньої та внутрішньої обкладок

Ємність двопровідної лінії.

Ємність двопровідної лінії:

$$C=\pi\epsilon_a l/[l_n(a /r_0) ,$$

де a - відстань між осями дротів; r_0 –радіусдроту.

1.1.6 ІНДУКТИВНІСТЬ

Власна **індуктивність** відокремленого контура (або котушки) є величина, яка характеризує зв'язок поточкозчеплення самоіндукції і струму й чисельно дорівнює відношенню поточкозчеплення самоіндукції контура до струму в ньому:

$$L=\psi/I.$$

Добуток кількості витків і зчепленого з цими витками магнітного потоку називають поточкозчепленням:

$$\psi=N\Phi,$$

де N - кількість витків котушки; Φ - магнітний потік.

Одиниця індуктивності

[L]=вебер/ампер=генрі [Гн].

1.1.7 ДОБУВАННЯ ЕЛЕКТРИЧНОЇ ЕНЕРГІЇ З ІНШИХ ВИДІВ ЕНЕРГІЇ

Фізичні процеси добування електричної енергії розрізняють залежно від виду перетворюваної енергії. Основна відмінність полягає в природі сил, які розділяють позитивний і негативний заряди в речовині.

На електрично заряджені частинки крім сил електричного поля при певних умовах діють сторонні сили, зумовлені неелектромагнітними процесами (хімічні реакції, теплові процеси, контактні явища та ін.).

Внаслідок дії сторонніх сил в джерелі електричної енергії відбувається поділ електричних зарядів і утворюється електрорушійна сила (е. р. с.).

Поділ зарядів в електропровідному середовищі відбувається також під дією електромагнітних сил (наприклад, під час руху заряджених частинок в магнітному полі), внаслідок чого індукується-електричне поле й утворюється е. р. с.

*Величина, яка характеризує здатність стороннього поля й індукованого електричного поля викликати появу електричного струму, називається **е. р. с.***

Виникнення е. р. с. E в усіх випадках пов'язане з роботою сторонніх сил з переміщення заряджених частинок. Кількісно це явище оцінюють роботою, що припадає на одиницю заряду:

$$E = A/Q.$$

Одиницею **е. р. с.**, так само як і напруги, є вольт (В).

Додатний напрям е. р. с. збігається з напрямом, в якому сторонні сили діють на частинки з позитивним зарядом. Це відповідає і додатному напрямку струму в колі. Якщо струм створюється електронами, то е. р. с. спрямована проти руху електронів, тобто усередині джерела від «—» до «+». Отже, в джерелі електричної енергії напрями е. р. с. і струму збігаються.

Потужність джерела електричної енергії

Робота сторонніх сил $A_{ст}$ дорівнює енергії, яку віддає джерело живлення в зовнішнє коло. Ця енергія називається електричною енергією джерела:

$$W_{дж} = A_{ст}=EQ.$$

Переміщений заряд Q можна виразити через струм у джерелі: $Q = It$, тому
 $W_{дж} = E it$.

Певну кількість електричної енергії можна дістати від різних джерел, але за різний час. Працездатність джерел можна оцінити, порівнюючи кількість енергії, що виробляється за той самий час, наприклад за 1 с.

Значення енергії, що виробляється за одиницю часу, тобто швидкість перетворення енергії в джерелі, називається потужністю джерела:

$$P = W/t = EI$$

Одиниця енергії — джоуль (Дж), Одиниця потужності $[P] = [W/t] =$ джоуль/секунда = ват (Вт).

1.1.8 З'єДНАННЯ ЕЛЕМЕНТІВ

1.1.8.1 З'єднання конденсаторів

Паралельне з'єднання. Заряд усіх конденсаторів дорівнює сумі зарядів кожного:

$$Q = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n. \quad (1.17)$$

Напруга групи з'єднаних конденсаторів рівна на конденсаторі:

$$U = U_1 = U_2 = \dots = U_n. \quad (1.18)$$

Ємність паралельно з'єднаних конденсаторів:

$$C = C_1 + C_2 + \dots + C_n. \quad (1.19)$$

Послідовне з'єднання. Заряд усіх конденсаторів і кожного окремо при послідовному з'єднанні той самий:

$$Q = Q_1 = Q_2 = \dots = Q_n. \quad (1.20)$$

Напруга групи послідовно з'єднаних конденсаторів рівна сумі напруг на кожному конденсаторі:

$$U = U_1 + U_2 + \dots + U_n. \quad (1.21)$$

Ємність послідовно з'єднаних конденсаторів:

$$1/C = 1/C_1 + 1/C_2 + \dots + 1/C_n. \quad (1.22)$$

1.1.8.2 З'єднання опорів

Паралельне з'єднання.

$$1/R = 1/R_1 + 1/R_2 + \dots + 1/R_n. \quad (1.23)$$

$$U = U_1 = U_2 = \dots = U_n. \quad (1.24)$$

$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_n. \quad (1.25)$$

Послідовне з'єднання.

$$I = I_1 = I_2 = \dots = I_n. \quad (1.26)$$

$$U = U_1 + U_2 + \dots + U_n. \quad (1.27)$$

$$R = R_1 + R_2 + \dots + R_n. \quad (1.28)$$

1.1.8.3 З'єднання джерел струму

Паралельне з'єднання.

$$E=E_1=E_2=\dots=E_n. \quad (1.29)$$

Послідовне з'єднання.

$$E=E_1+E_2+\dots+E_n. \quad (1.30)$$

1.1.8.4 З'єднання індуктивностей

Паралельне з'єднання.

$$1/L=1/L_1+1/L_2+\dots+1/L_n. \quad (1.31)$$

Послідовне з'єднання.

$$L=L_1+L_2+\dots+L_n. \quad (1.32)$$

1.1.9 Джерела електричної енергії

Джерело електричної енергії — це перетворювач будь-якого виду неелектричної енергії на електричну. Тепер основним видом такого перетворювача є електромеханічний генератор — перетворювач механічної енергії на електричну. На теплових електростанціях працюють турбогенератори — електричні машини, яким надають рух теплові (парові, газові) турбіни, а на гідроелектростанціях є гідрогенератори — електричні машини з приводом від гідравлічних турбін. Турбо- й гідрогенератори — це машини змінного струму.

Для кіл постійного струму застосовуються електромеханічні генератори постійного струму; перетворювачі хімічної енергії на електричну — гальванічні елементи й акумулятори; пристрої для прямого перетворення теплової енергії на електричну — термоелектрогенератори.

Джерелами електричної енергії є електричні трансформатори і випрямлячі. Ці пристрої не виробляють електричну енергію, а дістають її від тих самих генераторів змінного струму, змінюючи її характеристики. Трансформатори змінюють значення напруги, а випрямлячі перетворюють змінну напругу на сталу. Трансформатори і випрямлячі, з одного боку, є приймачами електричної енергії, а з другого — джерелами.

1.1.10 Приймачі електричної енергії

Найбільш численними і різноманітними елементами електричних кіл є приймачі електричної енергії. Вони перетворюють електричну енергію на інші види енергії: механічну (електродвигуни змінного і постійного струму, тягові електромагніти), теплову (електричні промислові печі, побутові нагрівальні прилади, зварювальні апарати), світлову (лампи електричного освітлення, прожектори), хімічну (аккумулятори в процесі зарядження, електролітичні ванни та ін.).

Для передавання й розподілу електричної енергії використовують проводи і кабелі, за допомогою яких з'єднуються в електричні кола джерела, приймачі електричної енергії та проміжні пристрої.

У з'єднувальних проводах і кабелях при наявності в них електричного струму виділяється тепло, тому при розрахунках їх вважають приймачами електричної енергії.

1.2 ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ЕЛЕКТРИЧНОГО КОЛА

Явище електричного струму провідності має величезне практичне значення. З ним пов'язані найважливіші енергетичні перетворення: добування електричної енергії з інших видів енергії й зворотне їй перетворення; передавання електричної енергії на відстань.

Ці енергетичні перетворення здійснюються в електричних колах.

Електричне коло — це сукупність пристроїв і об'єктів, які утворюють шлях електричного струму. Окремий пристрій, що входить до складу електричного кола і виконує в ньому певну функцію, називається **елементом електричного кола**.

Електричні кола класифікують: за *видом струму* — кола постійного й змінного струму; за *складом елементів* — кола активні й пасивні, кола лінійні й нелінійні; за *характером розподілу параметрів* — кола із зосередженими й розподіленими параметрами.

Електричні кола змінного струму, крім того, розрізняють за кількістю фаз — однофазні, багатофазні (в основному трифазні).

1.2.1 ЕЛЕМЕНТИ І СХЕМИ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ

Найпростіше електричне коло (рис.1.8) складається з трьох основних елементів: джерела електричної енергії 1, приймача електричної енергії 2, з'єднувальних дротів 3. Крім основних елементів до складу електричних кіл входять різні допоміжні елементи для керування (рубильники, перемикачі, контактори та ін.), захисту (плавкі запобіжники, реле тощо), регулювання (реостати, стабілізатори струму і напруги, трансформатори), контролю (амперметри, вольтметри та ін.). Допоміжні елементи, так само як і основні, вмикаються в коло за допомогою дротів.

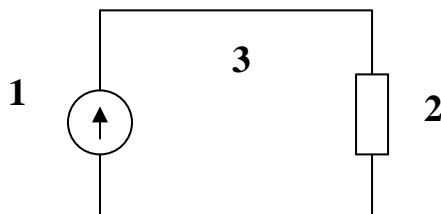


Рисунок 1.8- Найпростіше електричне коло

Схеми електричних кіл

При розробці, конструюванні, монтажі електричних виробів і установок не можна обійтись без електричних схем. Залежно від основного призначення розрізняють кілька типів схем: структурну, функціональну, принципову, монтажну та ін.

На принциповій схемі наводиться повний склад елементів і зазначаються всі зв'язки між ними. Ця схема дає докладне уявлення про принцип роботи виробу (установки).

Електричне коло можна скласти з елементів, які входять у цей виріб або установку. В інших випадках виробу (установки) самі є елементами електричного кола.

Схема електричного кола — це графічне зображення електричного кола, що містить умовні позначення його елементів і показує з'єднання цих елементів.

Умовні позначення в електричних колах встановлено стандартами системи ЄСКД.

В електричних колах та їхніх схемах розрізняють послідовне (рис. 1.9 а) та паралельне (рис. 1.9 б) з'єднання елементів.

Вважатимемо, що кожний елемент для ввімкнення в коло має два затискачі, з яких один умовно назвемо початком, другий — кінцем цього елемента.

При послідовному з'єднанні групи елементів кінець попереднього елемента з'єднаний з початком наступного; початок першого елемента і кінець останнього є затискачами групи елементів, якими її можна під'єднати до інших ділянок кола.

При паралельному з'єднанні групи елементів початки всіх елементів з'єднано в одному затискачі, а кінці — у другому; цими затискачами група приєднується до інших ділянок кола.

Групи елементів між собою можуть бути ввімкнені послідовно або паралельно — так утворюються складні електричні кола.

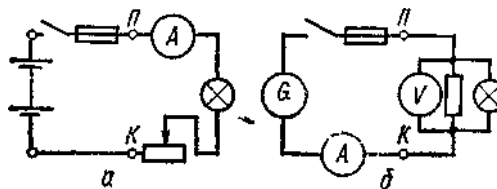


Рисунок 1.9

1.2.2 РЕЖИМИ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ

Режим роботи електричного кола, тобто його електричний опір, визначається значеннями струмів, напруг і потужностей його окремих елементів.

Номінальний режим

Джерела і приймачі електричної енергії, а також допоміжні апарати і прилади характеризуються номінальними значеннями струму I_n , напруги U_n , потужності P_n та ін., на які ці пристрої розраховано заводами-виготовлювачами для нормальної роботи. Номінальні значення звичайно зазначено в паспорті пристрою.

Режим роботи, при якому дійсні струми, напруги, потужності елементів електричного кола відповідають їхнім номінальним значенням, називається **номінальним** (нормальним). Відхилення від номінального режиму небажані, а перевищення номінальних значень здебільшого неприпустимі, оскільки при цьому не можуть бути гарантовані розрахункові тривалість і економічність роботи електричних пристроїв і установок.

Для забезпечення нормальних умов роботи приймачів електричної енергії необхідно дотримуватися відповідності напруг: дійсна напруга на затискачах пристрою повинна

дорівнювати його номінальній напрузі.

Робочий режим

Режими електричних кіл з різних причин можуть відрізнятися від номінального.

Якщо в електричному колі дійсні характеристики режиму відрізняються від номінальних значень його елементів, але відхилення перебувають у допустимих межах, то режим називається робочим.

Напруга U на зовнішніх затискачах джерела, яка дорівнює при цьому напрузі на приймачі, менша від е. р. с. джерела на значення внутрішнього спаду напруги $I r$:

$$U = IR = E - I r.$$

Відношення потужності $P_{\text{пр}}$ приймача до потужності $P_{\text{дж}}$ називається к. к. д. джерела:

$$\eta = P_{\text{пр}}/P_{\text{дж}} = U/E$$

Режими холостого ходу і короткого замикання

При $R = \infty$ струму в колі не буде. Цей випадок відповідає розмиканню кола. Режим електричного кола або окремих джерел, при якому струм у них дорівнює нулю, називається **режимом холостого ходу**. При холостому ході напруга на зовнішніх затискачах джерела дорівнює його е. р. с.: $U = E$.

При $R = 0$, $I = E/r = I_k$, а напруга на затискачах приймача і джерела $U = 0$.

Режим електричного кола, при якому ділянку з одним або кількома елементами замкнено коротко, в зв'язку з чим напруга на цій ділянці дорівнює нулю, називається режимом короткого замикання. Відповідно струм I_k в колі називається струмом **короткого замикання**.

1.2.3 СХЕМИ ЗАМІЩЕННЯ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ

Для того щоб полегшити розрахунок, складають схему заміщення електричного кола, тобто схему, яка відбиває властивості кола при певних умовах.

На схемі заміщення зображують усі елементи, впливом яких на результат розрахунку не можна знехтувати, і зазначають також електричні з'єднання між ними, що є в колі.

Елементи кола, в яких електрична енергія перетворюється на тепло, характеризуються опором R або провідністю G і називаються **пасивними**.

Елементи електричного кола, в яких перетворення енергії здійснюється при наявності е. р. с., характеризуються здебільшого сталими значеннями е. р. с. E і внутрішнього опору r (рис. 3.13, а). Такі елементи кола називаються активними.

На розрахункових схемах джерело енергії можна подати е. р. с. без внутрішнього опору, якщо цей опір малий порівняно з опором приймача (рис. 3.13, б).

При $r=0$ внутрішній спад напруги $U_0=0$, тому напруга на затискачах джерела при будь-якому струмі дорівнює е. р. с.: $U = E = \text{const}$. Таке джерело енергії з незмінною напругою на його затискачах, що не залежить від внутрішнього опору, називається джерелом е. р. с.

У деяких випадках джерело електричної енергії на розрахунковій схемі замінюють іншою (еквівалентною) схемою (рис. 1.13, г), де замість е. р. с. E джерело характеризується його струмом короткого замикання I_k , а замість внутрішнього опору в розрахунок вводять внутрішню провідність $g = 1/r$.

Можливість такої заміни можна довести, поділивши рівність (1.16) на r .

$$U/r = E/r - I,$$

де $U/r = I_0$ — деякий струм, який дорівнює відношенню напруги на затискачах джерела до внутрішнього опору; $E/r = I_k$ — струм короткого замикання джерела; $I = U/R$ — струм приймача.

Ввівши нові позначення, дістанемо рівність $I_k = I_0 + I$, якій задовольняє еквівалентна схема рис. 1.13, в.

Якщо внутрішню провідність віднести до приймача, то можна прийняти $g = 0$ та $I_k = 0$.

У цьому випадку при будь-якому значенні напруги на затискачах джерела його струм дорівнює струмові короткого замикання (рис. 1.13, д): $I = I_k = \text{const}$.

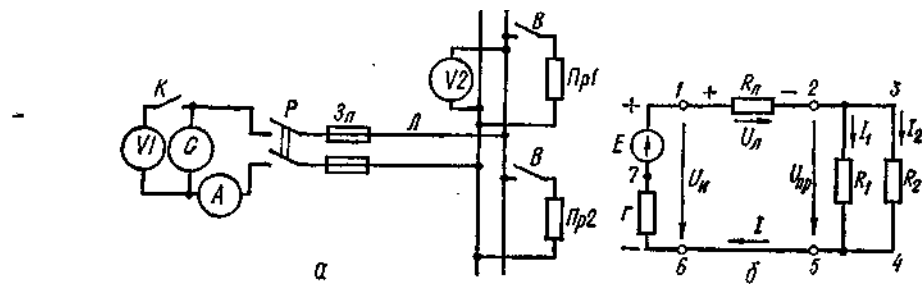


Рис. 3.14. Електричне коло (а) та схема його заміщення (б)

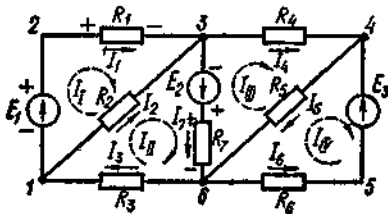


Рис. 3.15. Схема розгалуженого електричного кола

Джерело з незмінним струмом, що не залежить від внутрішнього опору, називають **джерелом струму**.

Те саме джерело електричної енергії можна замінити в розрахунковій схемі джерелом е. р. с. або джерелом струму.

Схема заміщення електричного кола

На рис. 3.14 зображено електричне коло і його схему заміщення; подано додатні напрями струму і напруги.

В цій схемі генератор G електричної енергії подано е. р. с. E і внутрішнім опором r ; два приймачі $Pr 1$ і $Pr 2$ — відлові дно опорамі $R1$ і $R2$, опір проводів лінії L замінено зосередженим опором $Rл$, допоміжних апаратів і приладів в схемі заміщення немає, оскільки при цьому вважають, що на результати розрахунку вони не впливають.

На рис. 3.15 подано схему більш складного електричного кола.

Розглядаючи схеми різних електричних кіл, можна виділити в них характерні ділянки.

Ділянка, уздовж якої струм той самий, називається віткою електричного кола.

Місце з'єднання віток називається вузлом електричного кола.

Вузол утворюється при з'єднанні в одній точці не менш як три віток, наприклад на схемі рис. 3.15 до вузла b під'єднано чотири вітки.

Вітки, які не містять джерел електричної енергії, називаються п а с и в н и м и, а вітки, до яких входять джерела, — активними.

Будь-який замкнений шлях, що проходить по кількох віткам, називається контуром електричного кола.

На рис. 3.14, б таких контурів три: $1-2-5-6-1$; $1-2-3-4-5-6-1$; $1-2-3-4-5-6-1$.

На схемах стрілками позначають додатні напрями е. р. с., напруг струмів. Напряму е. р. с. можна вказати, позначивши полярність затискачів джерела: усередині джерела е. р. с. напрямлена від від'ємного затискача до додатного (так само, як і струм). Додатний напряму напруги на ділянці кола збігається з напрямом струму — від точки з більшим потенціалом до точки з меншим. У приймача напрями напруги і струму збігаються, у джерела вони протилежні.

Розділ 2. Основні поняття електричного кола

2.1 Електричне коло. Класифікація електричних кіл

Явище електричного струму провідності має величезне практичне значення. З ним пов'язані найважливіші енергетичні перетворення: добування електричної енергії з інших видів енергії й зворотне їй перетворення; передавання електричної енергії на відстань.

Ці енергетичні перетворення здійснюються в електричних колах.

Електричне коло — це сукупність пристроїв і об'єктів, які утворюють шлях електричного струму. Окремий пристрій, що входить до складу електричного кола і виконує в ньому певну функцію, називається *елементом електричного кола*.

Електричні кола класифікують: за *видом струму* — кола постійного й змінного струму; за *складом елементів* — кола активні й пасивні, кола лінійні й нелінійні; за *характером розподілу параметрів* — кола із зосередженими й розподіленими параметрами.

Електричні кола змінного струму, крім того, розрізняють за кількістю фаз — *однофазні*, *багатофазні* (в основному трифазні).

Найпростіше електричне коло (рис.2.1) складається з трьох основних елементів: джерела електричної енергії 1, приймача електричної енергії 2, з'єднувальних дротів 3. Крім основних елементів до складу електричних кіл входять різні допоміжні елементи для керування (перемикачі, контактори та ін.), захисту (плавкі запобіжники, реле тощо), регулювання (реостати, стабілізатори струму і напруги, трансформатори), контролю (амперметри, вольтметри та ін.). Допоміжні елементи, так само як і основні, вмикаються в коло за допомогою дротів.

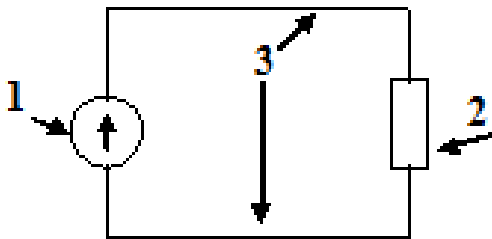


Рис. 2.1- Найпростіше електричне коло

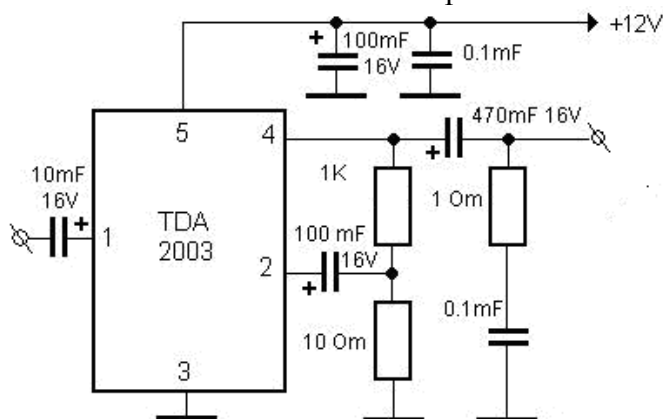
При розробці, конструюванні, монтажі електричних виробів і установок не можна обійтись без електричних схем. Залежно від основного призначення розрізняють кілька типів схем: структурну, функціональну, принципову, монтажну та ін.

На принциповій схемі наводиться повний склад елементів і зазначаються всі зв'язки між ними. Ця схема дає докладне уявлення про принцип роботи виробу (установки). Приклад принципової схеми наводиться на рисунку 2.2,а, а її загальний вигляд на рисунку 2.2,б.

Електричне коло можна скласти з елементів, які входять у цей виріб або установку. В інших випадках вироби (установки) самі є елементами електричного кола.

Схема електричного кола — це графічне зображення електричного кола, що містить умовні позначення його елементів і показує з'єднання цих елементів.

Умовні позначення в електричних колах встановлено стандартами системи ЄСКД.



а) б)
Рис. 2.2 – Електрична принципова схема підсилювача а) та його загальний вигляд б)

Вважатимемо, що кожний елемент для ввімкнення в коло має два затискачі, з яких один умовно назвемо початком, другий — кінцем цього елемента.

При послідовному з'єднанні групи елементів кінець попереднього елемента з'єднаний з початком наступного; початок першого елемента і кінець останнього є затискачами групи елементів, якими її можна під'єднати до інших ділянок кола.

При паралельному з'єднанні групи елементів початки всіх елементів з'єднано в одному затискачі, а кінці — у другому; цими затискачами група приєднується до інших ділянок кола.

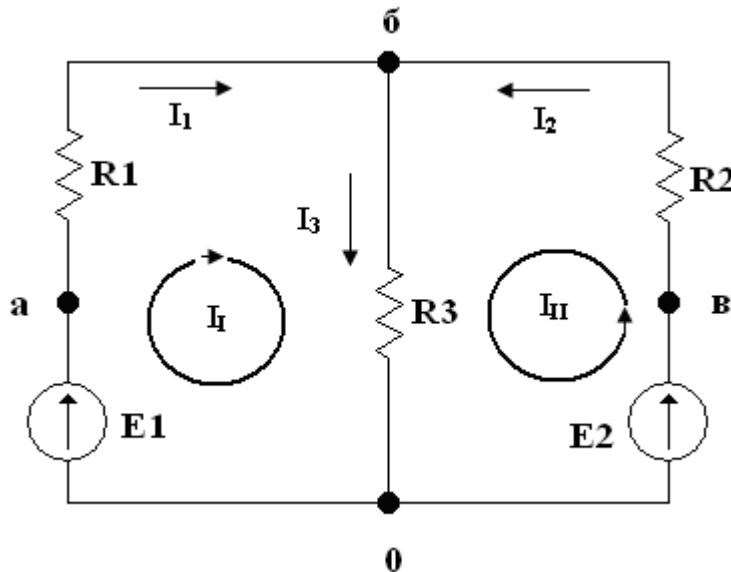


Рис. 2.3 - Розрахункова схема електричного кола

Вітки, які не містять джерел електричної енергії, називаються **пасивними**, а вітки, до яких входять джерела — **активними**.

Будь-яка замкнена ділянка кола, яка містить одну або кілька віток, називається **контуром електричного кола** (о-а-б-о, о-б-в-о).

На схемах заміщення стрілками позначають додатні напрями ЕРС, напруг і струмів. Напрямок ЕРС можна вказати, позначивши полярність затискачів джерела: усередині джерела ЕРС напрямлена від від'ємного затискача до додатного (так само, як і струм). Додатний напрямок напруги на ділянці кола збігається з напрямком струму — від точки з більшим потенціалом до точки з меншим. У приймача напрями напруги і струму збігаються, у джерела вони протилежні.

2.2 Режим роботи електричних кіл

Режим роботи електричного кола, тобто його електричний опір, визначається значеннями струмів, напруг і потужностей його окремих елементів.

Номінальний режим. Джерела і приймачі електричної енергії, а також допоміжні апарати і прилади характеризуються номінальними значеннями струму I_n , напруги U_n , потужності P_n та ін., на які ці пристрої розраховано заводами-виготовлювачами для нормальної роботи. Номінальні значення звичайно зазначено в паспорті пристрою.

Режим роботи, при якому дійсні струми, напруги, потужності елементів електричного кола відповідають їхнім номінальним значенням, називається **номінальним** (нормальним). Відхилення від номінального режиму небажані, а перевищення номінальних значень здебільшого неприпустимі, оскільки при цьому не можуть бути гарантовані розрахункові

Групи елементів між собою можуть бути ввімкнені послідовно або паралельно — так утворюються складні електричні кола.

Розглядаючи розрахункові (заміщення) схеми різних електричних кіл, можна виділити на них характерні ділянки (рис.2.3).

Ділянка, уздовж якої струм той самий, називається **віткою електричного кола** (о-а-б, б-о, б-в-о).

Місце з'єднання трьох і більше віток називається **вузлом електричного кола** (о,б).

тривалість і економічність роботи електричних пристроїв і установок.

Для забезпечення нормальних умов роботи приймачів електричної енергії необхідно дотримуватися відповідності напруг: дійсна напруга на затискачах пристрою повинна дорівнювати його номінальній напрузі.

Робочий режим. Режимми електричних кіл з різних причин можуть відрізнятися від номінального.

Якщо в електричному колі дійсні характеристики режиму відрізняються від номінальних значень його елементів, але відхилення перебувають у допустимих межах, то режим називається *робочим*.

Напруга U на зовнішніх затискачах джерела, яка дорівнює при цьому напрузі на приймачі, менша від ЕРС джерела на значення внутрішнього спаду напруги Ir :

$$U = IR = E - Ir. \quad (2.1)$$

Відношення потужності $P_{пр}$ приймача до потужності $P_{дж}$ називається к. к. д. джерела:

$$\eta = P_{пр}/P_{дж} = U/E. \quad (2.2)$$

Режими холостого ходу і короткого замикання. При $R = \infty$ струму в колі не буде. Цей випадок відповідає розмиканню кола. Режим електричного кола або окремих джерел, при якому струм у них дорівнює нулю, називається **режимом холостого ходу**. При холостому ході напруга на зовнішніх затискачах джерела дорівнює його е. р. с.: $U = E$.

При $R = 0$, $I = E/z = I_k$, а напруга на затискачах приймача і джерела $U = 0$.

Режим електричного кола, при якому ділянку з одним або кількома елементами замкнено накоротко, в зв'язку з чим напруга на цій ділянці дорівнює нулю, називається **режимом короткого замикання**. Відповідно струм I_k в колі називається **струмом короткого замикання**.

2.3 Вибір пасивних елементів для електричних схем

2.3.1 Класифікація, умовне графічне позначення, маркування і основні параметри резисторів та їх вибір

Резистор або опір (англ. resistor, від лат. resisto - впираюся) - пасивний елемент електричного кола.

Резистори є елементами електронної апаратури і можуть застосовуватися як дискретні компоненти або як складові частини інтегральних мікросхем. Дискретні резистори класифікуються за видом і виглядом ВАХ, характером зміни опору, технології виготовлення.

Класифікація резисторів:

а) за призначенням:

- резистори загального призначення;
- резистори спеціального призначення:
 - високоомні (опори від десятка МОм до одиниць ТОм, робочі напруги 100 ..400 В);
 - високовольтні (робоча напруга - десятки кВ);
 - високочастотні (мають малі власні індуктивності і ємності, робочі частоти до сотень МГц);
 - прецизійні і надпрецизійні (підвищена точність, допуск 0,001- 1%).

б) по виду вольт-амперної характеристики:

- лінійні резистори;
- нелінійні резистори:
 - варистори;
 - терморезистори - опір залежить від температури;
 - фоторезистори - опір залежить від освітленості;
 - тензорезистори - опір залежить від деформації резистора;
 - магніторезисторах - опір залежить від величини магнітного поля.

в) за характером зміни опору:

- постійні резистори;
- змінні регульовальні резистори;
- змінні налаштувальні резистори;

г) за технологією виготовлення:

- дровотві резистори (Представляють собою кусок дроту з високим питомим опором намотаний на який-небудь каркас. Можуть мати значну паразитну індуктивність.);
- плівкові металеві резистори (Представляють собою тонку плівку металу з високим питомим опором, напилену на керамічний сердечник, на кінці сердечника надіті металеві ковпачки з дротяними виводами.);
- металофольгові резистори. (Як резистивний матеріал використовується тонка металева стрічка.);
- вугільні резистори. (Бувають плівковими і об'ємними. Використовують високий питомий опір графіту.);
- інтегральний резистор. (Використовується опір слаболегованого напівпровідника. Ці резистори можуть мати велику нелінійність ВАХ. В основному використовуються в складі інтегральних мікросхем, де застосувати інші типи резисторів неможливо або не технологічно.).

Умовне графічне позначення резисторів на електричних схемах представлено в таблиці 2.1.

Таблиця 2.1- Умовні графічні позначення резисторів

№п/п	Назва	Позначення	№ п/п	Назва	Позначення
1	Загальне позначення резистора (Європа)		11	Резистор змінний	
2	Загальне позначення резистора (Америка)		12	Резистор змінний зпарений	
3	Резистор потужністю 0,05 Вт				
4	Резистор потужністю 0,125 Вт		13	Резистор налаштувальний	
5	Резистор потужністю 0,25 Вт		14	Лінійний тензорезистор	
6	Резистор потужністю 0,5 Вт		15	Нелінійний тензорезистор	
7	Резистор потужністю 1 Вт		16	Нагрівний елемент	
8	Резистор потужністю 2 Вт		17	Терморезистор	
9	Резистор потужністю 5 Вт		18	Варистор	
10	Резистор з відводами		19	Шунт	

Маркування резисторів. Відповідно до чинної системи скорочене умовне позначення резисторів складається з таких елементів:

- перший елемент - буква або поєднання букв, що позначають підклас резисторів (Р - резистори постійні; РП - резистори змінні; НР - набір резисторів);
- другий елемент - цифра, що позначає групу резисторів за матеріалом резистивного елемента (1 - недротяні; 2 - дротяні або металофольгові);
- третій елемент - реєстраційний номер конкретного типу резистора.

Між другим і третім елементами ставиться дефіс. Повне умовне позначення складається із скороченого позначення, варіанту конструктивного виконання (при необхідності), значень основних параметрів і характеристик резистора, кліматичного виконання і позначення документа на постачання. Параметри і характеристика для постійних резисторів вказуються в такій послідовності:

- номінальна потужність розсіювання;
- номінальний опір і буквене позначення одиниці вимірювань;
- допустиме відхилення опору у відсотках (допуск);
- група за рівнем шумів (для недротяних резисторів);
- група по температурному коефіцієнту опору (ТКО).

Наприклад, постійний недротяний резистор з реєстраційним номером 4, номінальною потужністю розсіювання 0,5 Вт, номінальним опором 10 кОм, з допуском $\pm 1\%$, групою за рівнем шумів - А, групи ТКО - Б, всекліматичного виконання - В, позначається: Р1-4-0,5-10 кОм $\pm 1\%$ А-Б-В ОЖ0.467.157ТУ.

Кодоване позначення номінальних опорів складається з трьох або чотирьох знаків, що включають дві цифри і букву або три цифри і букву. Буква коду з російської або латинського алфавіту позначає множник і визначає положення коми десяткового знаку. Літери R, K, M, G, T позначають відповідні множники $1, 10^3, 10^6, 10^9, 10^{12}$.

На постійних мініатюрних резисторах, відповідно до ГОСТ 17598-72 та вимогами публікації 62 МЕК, допускається маркування кольоровим кодом. Її наносять знаками у вигляді кіл або смуг. Для маркування кольоровим кодом номінальний опір резисторів в омах виражається двома або трьома цифрами (у випадку трьох цифр - остання цифра не дорівнює нулю) і множником $10n$, де n - будь-яке число від -2 до +9.

Маркувальні знаки зміщують до одного з торців резистора і розташовують зліва направо в наступному порядку: перша смуга - перша цифра, друга смуга - друга цифра, третя смуга - множник, четверта смуга - допуск. Кольори знаків маркування номінального опорів і допусків повинні відповідати зазначеним у табл. 2.2. Приклад кольорового маркування наведено на рис. 2.4.

Основні електричні параметри резисторів:

- *Номінальна потужність* – найбільша потужність, яку резистор може розсіювати в заданих умовах на протязі гарантійного строку служби.
- *Робоча напруга* – при якій резистор може працювати;
- *Номінальний опір* - електричний опір, значення якого приведено на резисторі або вказано в нормативній документації і яке є вихідним для відліку відхилень від цього значення;
- *Температурний коефіцієнт опору* - величина, яка характеризує відносну зміну опору на один градус Кельвіна або Цельсія;
- *Власні шуми* – складаються з теплових і струмових шумів;
- *Коефіцієнт напруги* – використовується для оцінки і ступеня не лінійності. Визначається відносною зміною опору резисторів, який обміряний при випробувальних напругах

Таблиця 2.2 - Кольори знаків маркування номінального опорів і допусків

Колір знака	Номінальний опір, Ом	Допуск, %	ТКО,
-------------	----------------------	-----------	------

	Перша цифра	Друга цифра	Третя цифра	Множник		в ppm/°C
Сріблястий	—	—	—	10^{-2}	± 10	—
Золотистий	—	—	—	10^{-1}	± 5	—
Чорний	—	—	—	1	—	—
Коричневий	1	1	1	10	± 1	100
Червоний	2	2	2	10^2	± 2	50
Помаранчевий	3	3	3	10^3	—	15
Жовтий	4	4	4	10^4	—	25
Зелений	5	5	5	10^5	$\pm 0,5$	—
Синій	6	6	6	10^6	$\pm 0,25$	10
Фіолетовий	7	7	7	10^7	$\pm 0,1$	5
Сірий	8	7	7	10^8	$\pm 0,05$	—
Білий	9	9	9	10^9	—	1

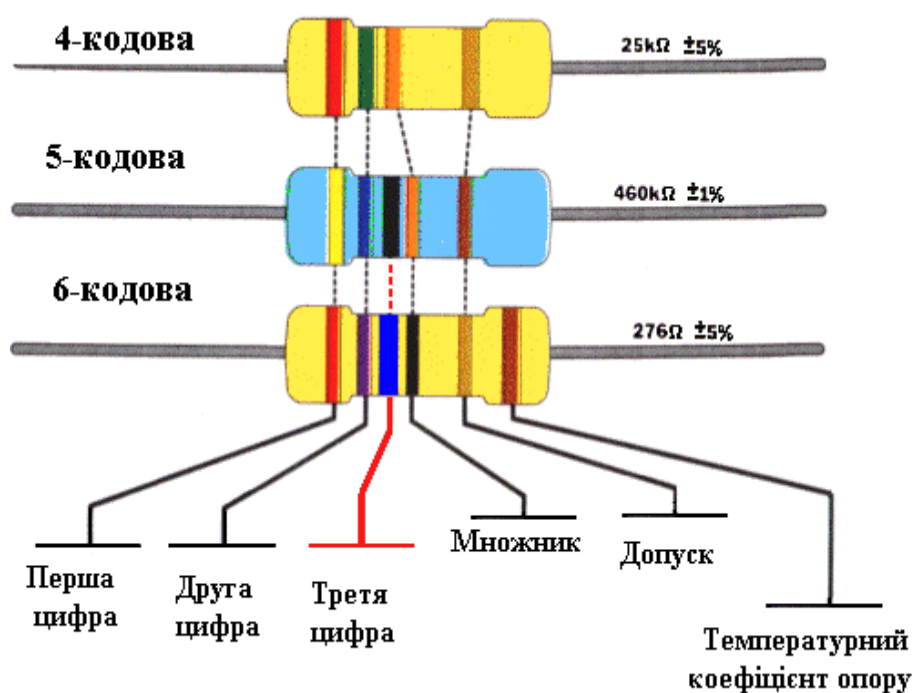


Рис.2.4- Маркування резисторів кольоровим кодом

Вибір резисторів.

Для правильного вибору резистора необхідно на основі вимог до апаратури, в тому числі кліматичних, механічних та інших дій, проаналізувати умови роботи кожного резистора, визначити:

- експлуатаційні дані (опір, потужність);
- значення параметрів і їх допустимі зміни в процесі експлуатації;
- допустимі режими і робочі електричні навантаження;
- показник

надійності, довговічність, зберігання;
- конструкцію резисторів.

2.3.2 Класифікація, умовне графічне позначення, маркування і основні параметри конденсаторів та їх вибір

Найважливіші характеристики, конструкція та область застосування конденсаторів в основному визначається діелектриком, який розділяє їх обкладки. Тому звичайно конденсатори *класифікуються* та отримують свою назву по виду діелектрика:

- конденсатори з оксидним діелектриком: електролітичні та оксидно-напівпровідникові;
- конденсатори з твердим органічним діелектриком: паперові, метало-паперові, плівкові, лакоплівкові, комбіновані (плівка та папір);
- конденсатори з твердим неорганічним діелектриком: керамічні, слюдяні, склоплівкові, склокерамічні.

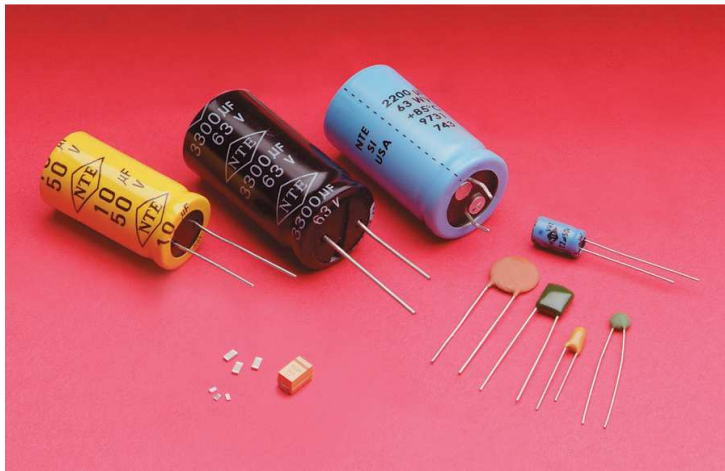


Рис. 2.5 – Загальний вигляд конденсаторів постійної ємності

герметизований; МБМ – металопаперовий малогабаритний; МБГЧ – металопаперовий герметизований частотний; ЕТ – електролітичний танталовий; ЕТО – електролітичний танталовий з об’ємно-пористим анодом; КЕ – конденсатор електролітичний; ЕГЦ – електролітичний герметизований в циліндричному корпусі; ПМ – плівковий малогабаритний; МПО – металізований плівочний одношаровий; КМ – конденсатор монолітний (керамічний); КД, КТ – керамічний дисковий і трубчастий.

З 1968 р. діє система умовних позначень, яка складається із букв і цифр. Букви означають групу виробу: К – конденсатор постійної ємності; КТ, КП, КН – конденсатор відповідно налаштувальний, змінний і нелінійний.

Дві наступні цифри визначають тип діелектрика: 10 – керамічні низьковольтні; 15 – керамічні високовольтні; 21 – скляні.

Наступна буква вказує призначення конденсатора: П – для роботи в колах постійного і змінного струму; Ч – для роботи в колах змінного струму; Н – для роботи в імпульсних режимах; У – для роботи в колах постійного, змінного струму і в імпульсних режимах.

Наступні одна-дві цифри, або букви означають номер розробки, без букви - для роботи в колах постійного або пульсуючого і постійного струму.

Приклад: К10-У-5 – конденсатор постійної ємності, керамічний низьковольтний для роботи в колах постійного, змінного струму і в імпульсних режимах, номер розробки – 5.

Також є конденсатори постійні (рис.2.5), змінні, налаштувальні, нелінійні (варікоди), полярні та неполярні.


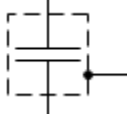
Умовне графічне позначення конденсаторів на електричних схемах представлено в таблиці 2.3.

Маркування конденсаторів.

До 1986р. єдиної системи позначень не було. В основу назв брали різні ознаки: МБГ – металопаперовий

Таблиця 2.3 - Умовні графічні позначення конденсаторів

№ п/п	Назва	Позначення	№ п/п	Назва	Позначення
1	Загальне позначення конденсатора		7	Конденсатор змінної ємності	
2	Загальне позначення поляризованого конденсатора		8	Конденсатор змінної ємності багатосекційний	
3	Конденсатор електролітичний: поляризований				
4	Конденсатор електролітичний: неполяризований		9	Конденсатор налаштувальний	
5	Конденсатор прохідний Дуга позначає зовнішню обкладинку		10	Варіконд	

	конденсатора (корпус)				
6	Конденсатор опорний. Нижня обкладка з'єднана з корпусом.		11	Конденсатор в екранованому корпусі з відводом	

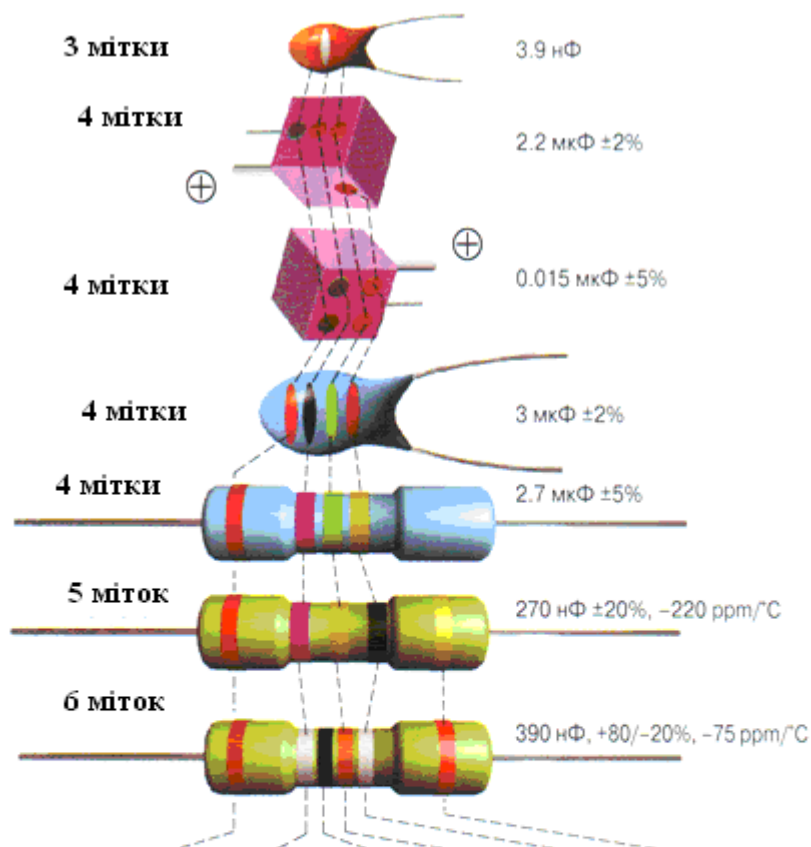
Маркування конденсаторів кольоровим кодом приведено на рис. 2.6.

Електротехнічні параметри конденсаторів.

1) *Номінальна ємність конденсатора* – значення ємності, на яку розрахований конденсатор і яке вказується на самій деталі або супроводжуючій документації.

Ємність (С) вимірюють в фарадах (Ф), мікрофарадах (мкФ), нанофарадах (нФ) і пікофарадах (пФ), причому: $1\text{Ф} = 10^6 \text{мкФ} = 10^9 \text{нФ} = 10^{12} \text{пФ}$.

Існують ряди стандартних номіналів. Найбільш поширені ряди Е6, Е12, Е24 з допустимим відхиленням номіналу 20, 10, 5% відповідно. Допустимі відхилення приймаються із ряду $\pm 0.1; \pm 0.2; \pm 0.5; \pm 1; \pm 2; \pm 5; \pm 10; \pm 20; \pm 30$.



Сріблястий				0,001	10%	VSP
Золотистий				0,1	5%	
Чорний		0	0	1	20%	NPO
Коричневий	1	1	1	10	1%	Y55/N33
Червоний	2	2	2	100	2%	N75
Оранжевий	3	3	3	10 ³		N150
Жовтий	4	4	4	10 ⁴		N220
Зелений	5	5	5	10 ⁵		N330
Синій	6	6	6	10 ⁶		N470
Фіолетовий	7	7	7	10 ⁷		N750
Сірий	8	8	8	10 ⁸	30%	VSR
Білий	9	9	9		+80/-20%	SL
Колір	1 цифра	2 цифра	3 цифра	Множник	Допуск	ТКС

Рис.2.6- Маркування конденсаторів кольоровим кодом

номінальну. Така напруга дозволяє виявляти конденсатори з скритими дефектами.

5) *Пробивна напруга* – це така напруга, при якій конденсатор виходить з ладу через пробій ізоляції.

6) *Робоча напруга* – це напруга, яка прикладена до конденсатора при експлуатації.

7) *Електричний опір ізоляції* – це електричний опір конденсатора постійному струму:

$$R_{із} = U/I_{пр},$$

де U - напруга на конденсаторі; $I_{пр}$ - струм провідності.

8) *Тангенс кута втрат* – це втрати частини енергії в діелектрику та обкладинках конденсатора. При протіканні змінного струму через конденсатор вектори струму та напруги зсунуті один відносно іншого на кут діелектричних втрат δ (кут втрат), що визначається відношенням активної до реактивної потужностей.

10) Індуктивність конденсатора (паразитна).

11) Інтервал робочих температур характеризує межі зміни температури середовища, при яких параметри залишаються в допусках всього терміну служби.

2) *Температурний коефіцієнт ємності* (ТКС) характеризує температурну нестабільність ємності конденсатора. Практично ТКС визначають, як відносну зміну ємності конденсатора при зміні температури на 1°C. Якщо залежність ємності від температури нелінійна, температурну стабільність ємності конденсатора характеризують відносною зміною ємності при переході від нормальної температури (20 ± 5 °C) до граничних значень робочої температури.

3) *Номінальна напруга* – це напруга, при якій конденсатор може працювати на протязі терміну служби. Під номінальною напругою розуміють постійну напругу, вона вказується на деталі.

4) *Випробувальна напруга* прикладена до виводів конденсаторів на певний час (1 хв.) при прийомно-здавальних випробуваннях. Як правило вона в 2-3 рази перевищує

Рекомендації по вибору конденсаторів. Перш за все вибирають тип конденсатора, виходячи із його призначення в апаратурі. Далі визначають конкретний екземпляр по електричним параметрам, як правило по номінальній ємності і робочій напрузі. Потім перевіряють вибраний конденсатор по іншим параметрам.

Електролітичні конденсатори характеризуються найбільшою ємністю, від одиниці до сотень тисяч мікрофарад.

Керамічні конденсатори характеризуються низькою вартістю, малими габаритами, широким набором типів по електричним параметрам. Їх номінальна ємність буває від одиниць до сотень тисяч пікофарад, а в деяких випадках – до десятка мікрофарад.

Для боротьби з завадами по живленню при встановленні в безпосередній близькості від корпусів мікросхем підходять конденсатори типу К10 і КМ. Для організації часозадаючих ланок використовують конденсатори КД і КТ. В колах корекції оперативних підсилювачів добре працюють конденсатори К10п.

Паперові і металопаперові типу К40, К41, К42, МБГ, МБГЦ використовують в мережних фільтрах, в колах пуску двигунів і в інших випадках, коли через конденсатор протікає невеликий струм.

Плівкові конденсатори К70...78 відрізняються високим опором ізоляції і малими втратами. Тому вони використовуються в аналоговій обчислювальній техніці.

Слюдяні конденсатори, наприклад К31, добре працюють в колах з відносно високою напругою.

Конденсатори з газоподібним діелектриком використовуються в техніці високих напруг (сотні і тисячі вольт).

Конденсатори змінної ємності і налаштувальні в апаратурі обчислювальної техніки використовуються рідко.

Нелінійні конденсатори застосовуються в складі вимірювальних перетворювачів.

2.3.3 Класифікація, умовне графічне позначення та маркування індуктивностей та рекомендації з їх вибору

Індуктивність — фізична величина, що характеризує здатність провідника нагромаджувати енергію магнітного поля, коли в ньому протікає електричний струм (рис. 2.7, а).

Котушка індуктивності (рис. 2.7, б)— звернутий у спіраль ізолюваний дріт, що має значну індуктивність при відносно великій електричній провідності та малому активному опорі. Така система здатна запасати енергію при протіканні електричного струму.

Для збільшення індуктивності котушка здебільшого намотується на феромагнітне осердя (рис.2.7, в). Котушку без осердя називають *соленоїдом*. Спеціальні котушки, що використовуються в певних електричних колах, називають *дроселями*.

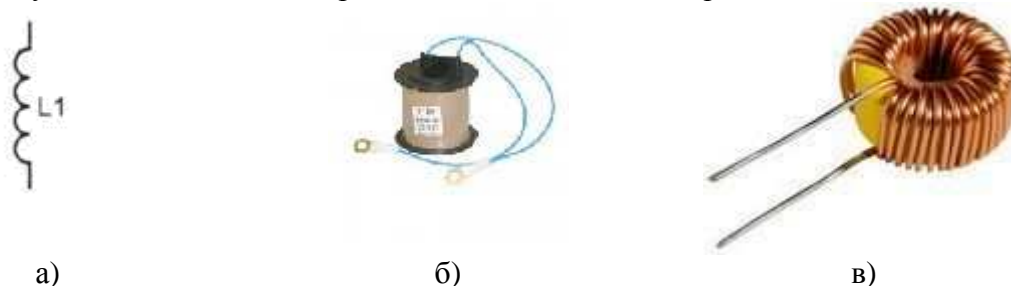


Рис. 2.7 – Котушка індуктивності: а - умовне позначення; б - зовнішній вигляд без сердечника; в - з сердечником

За конструктивним виконанням котушки бувають одношаровими і багатошаровими, з каркасом і без нього, з сердечником і без нього, екрановані і неекрановані, циліндричні, тороїдальні і плоскі, а за технологією виготовлення - намотані, друковані та тонкоплівкові.

Залежно від діапазону частот котушки індуктивності поділяються на довгохвильові, середньохвильові, короткохвильові і ультракороткохвильові.

За призначенням і області застосування котушки індуктивності поділяють на чотири групи: контурні котушки, котушки зв'язку (трансформатори), смугові фільтри і дроселі радіочастоти.

Умовне графічне позначення конденсаторів на електричних схемах представлено в таблиці 2.4.

Таблиця 2.4 - Умовні графічні позначення індуктивностей

№ п/п	Назва	Позначення	№ п/п	Назва	Позначення
1	Загальне позначення індуктивності		7	Котушка індуктивності налаштовувальна немагнітним дротом (мідь)	
2	Реактор		8	Трансформатор багатообмотковий	
3	Котушка індуктивності з відводами				
4	Котушка індуктивності з ковзаючими контактами		9	Дросель з феромагнітним магнітопроводом.	
5	Котушка індуктивності з магніодіелектричним магнітопроводом.		10	Дросель коаксіальний з феромагнітним магнітопроводом.	
6	Котушка індуктивності налаштовувальна магніодіелектриком		11	Трансформатор з вказівником полярності	

Маркування індуктивностей. У відповідності з ІЕС 62 для індуктивностей кодується номінальне значення індуктивності та допуск. Найбільше використовується кодування 4 і 3 кольорними кільцями або точками (рис.2.8, табл.2.5). Перші дві мітки вказують на значення номінальної індуктивності в мікрогенрі (мкГн), третя мітка — множник, четверта — допуск. У випадку кодування 3 мітками - допуск 20%. Кольорове кільце, що позначає першу цифру номіналу, може бути ширше, ніж всі інші.

Таблиця 2.5 - Кольори знаків
маркування номінальної індуктивності
та допусків

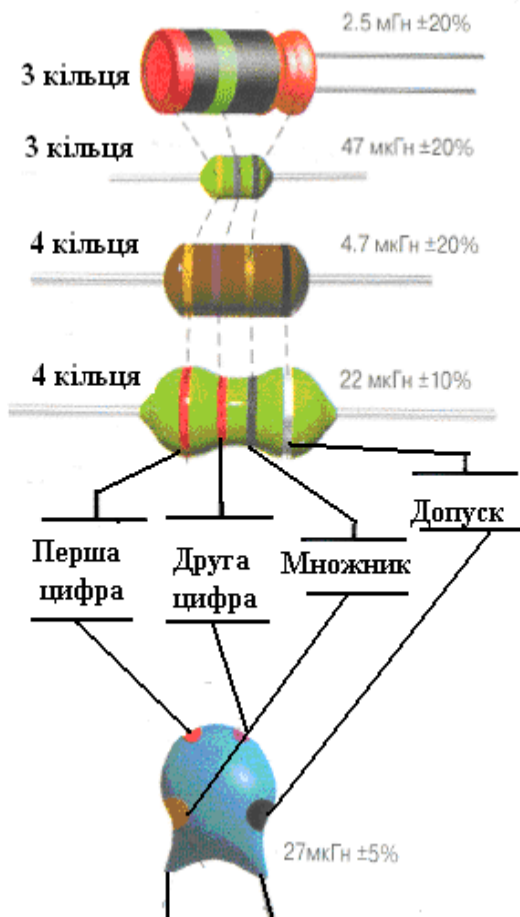


Рис.2.8- Маркування індуктивностей
кольоровим кодом

Колір	1 цифра	2 цифра	Множник	Допуск
Сріблястий			0,01	10%
Золотий			0,1	5%
Черний			0	1
Коричневий	1	1	10	
Червоний	2	2	100	
Оранжевий	3		1000	
Жовтий	4	4		
Зелений	5	5		
Синій				
Фіолетовий	7	7		
Сірий	8	8		
Білий	9	9		

Кодове маркування індуктивностей. Номінальне значення кодується цифрами, а допуск - літерами. Застосовується два види кодування:

- кодоване маркування (рис.2.9). Перші дві цифри вказують значення в мікрогенрі (мкГн), остання — кількість нулів. Наступна за цифрами буква вказує на допуск (D= $\pm 0,3$ нГн; J= $\pm 5\%$; K= $\pm 10\%$; M= $\pm 20\%$). Наприклад, код 101J позначає 100 мкГн $\pm 5\%$. Якщо остання буква не вказана — допуск 20%. Виключення: для індуктивностей менше 10 мкГн роль десяткової коми виконує буква R, а для індуктивностей менше 1 мкГн — буква N. Приклади позначень: 22N - 22 нГн $\pm 20\%$; R22M- 0,22 мкГн $\pm 20\%$; 2R2K - 2,2мкГн $\pm 10\%$; 101K - 100мкГн $\pm 10\%$; 102 - 1000 мкГн $\pm 20\%$.

- безпосереднє маркування (рис.2.10). Індуктивності маркуються безпосередньо в мікрогенрі (мкГн). В таких випадках маркування 680K буде означати не 68 мкГн $\pm 10\%$, як у випадку кодованого маркування, а 680 мкГн $\pm 10\%$.

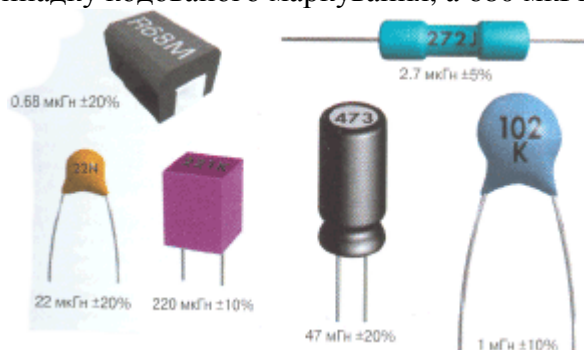


Рис.2.9- Приклади кодованого маркування

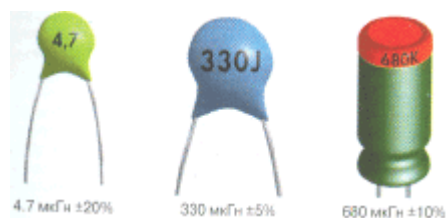


Рис.2.10- Приклади безпосереднього маркування

Рекомендації по виборі індуктивностей. Нижче наведені основні чинники, які слід враховувати при виборі котушки індуктивності:

- необхідне значення індуктивності;
- максимальний струм котушки. Великий струм дуже небезпечний через занадто сильне нагрівання, при якому пошкоджується ізоляція обмоток. Крім того, при дуже великому струмі може відбутися насичення магнітопроводу магнітним потоком, що призведе до значного зменшення індуктивності;
- точність виконання індуктивності;
- температурний коефіцієнт індуктивності;
- стабільність, обумовлена залежністю індуктивності від зовнішніх факторів;
- активний опір дроту обмотки;
- добротність котушки. Вона зазвичай визначається на робочій частоті як відношення індуктивного та активного опорів;
- частотний діапазон котушки.

В даний час випускаються радіочастотні котушки індуктивності на фіксовані значення частоти з індуктивностями від 1 мкГн до 10 мГн. Для налаштування резонансних контурів бажано мати котушки з регульованою індуктивністю.

Одношарові з незамкнутим магнітопроводом котушки індуктивності застосовуються в колах налаштування приладів.

Багатошарові, з незамкнутим магнітопроводом котушки використовуються у фільтрах і височастотних трансформаторах. Багатошарові котушки індуктивності броньового типу з сердечником з фериту застосовуються у фільтрах високих і середніх частот та трансформаторах, а аналогічні котушки, але із сталевим сердечником використовуються в згладжуючих дроселях і низькочастотних фільтрах.

Індуктивність котушок зі сталевим сердечником дуже швидко зменшується з ростом постійної складової струму обмотки. Це потрібно мати на увазі особливо при проектуванні згладжуючих фільтрів джерел електроживлення.

Максимальний струм котушки індуктивності залежить від температури навколишнього середовища, причому він повинен зменшуватися з її збільшенням. Тому для забезпечення надійної роботи пристрою необхідно забезпечити великий запас по струму.

Феритові тороїдальні сердечники ефективні для виготовлення фільтрів і трансформаторів на частотах вище 30 МГц. При цьому обмотки складаються лише з кількох витків.

При використанні будь-яких типів сердечників частина магнітних силових ліній замикається не по магнітопроводі, а через довколишній простір. Особливо сильно цей ефект виявляється у разі незамкнених магнітопроводів. Зауважимо, що ці магнітні поля розсіювання є джерелами шумів, тому в апаратурі сердечники потрібно розміщувати так, щоб по можливості зменшити ці випромінювання.

Котушки індуктивності мають певну паразитну ємність, яка утворює коливальний контур у поєднанні з індуктивністю котушки. Резонансна частота такого контуру для різних типів котушок індуктивності може варіюватися в межах від 20 кГц до 100 МГц.

2.3.4 Загальна класифікація та умовні графічні позначення комутаційних пристроїв та з'єднувачів

Пристрої комутації дозволяють комутувати (вмикати, вимикати) електричні кола в електричній апаратурі в результаті зміни опору виконуючих елементів під дією керуючих сигналів.

В комутуючих пристроях велике значення мають виконуючі елементи, які бувають **контактні і безконтактні**.

Відповідно розрізняють контактні і безконтактні комутаційні пристрої.

В **контактних** використовують електричний контакт - дотик між двома або більше контактами. У таких комутаційних пристроях (реле, кнопки і т.д.) звичайно застосовують стиковий контакт, при якому контакт-деталі притискаються одна до одної.

Контактні виконавчі елементи застосовуються як при ручному, так і при дистанційному й автоматичному керуванні. При ручному керуванні це контакт-деталі кнопок (рис.2.11, а), тумблерів(рис.2.11, б), галетних перемикачів, змішувальних перемикачів (рис.2.11, в) і т.п. При дистанційному й автоматичному керуванні — це контакт-деталі електромагнітних реле і магнітокеруючих герметичних контактів (герконів).

У **безконтактних** виконавчих елементах використовується зміна умов протікання струму в об'ємі кристалу і його поверхневому шарі під впливом електричних напруги, освітлення і т.п. Такі елементи застосовують в основному при дистанційному й автоматичному керуванні апаратури - це оптрони, транзисторні ключі і комутатори. Почали знаходити застосування безконтактні комутаційні пристрої з ручним керуванням, наприклад, кнопки з оптронами і магнеторезисторами, а також сенсорні.

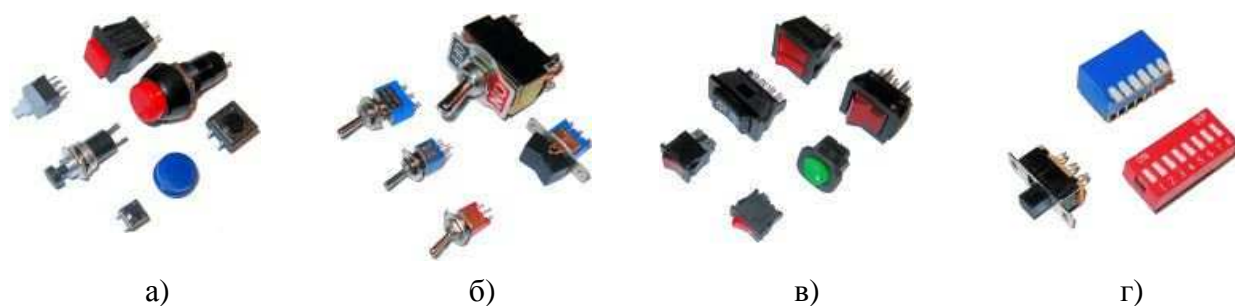


Рис.2.11- Загальний вигляд деяких контактних комутуючих пристроїв

З'єднувачі (контактні з'єднання) призначені тільки для проведення електричного струму і не призначені для комутації електричного кола (рис.2.12). Контактні з'єднання можуть бути *рознімні, розбірні і нерозбірні*.

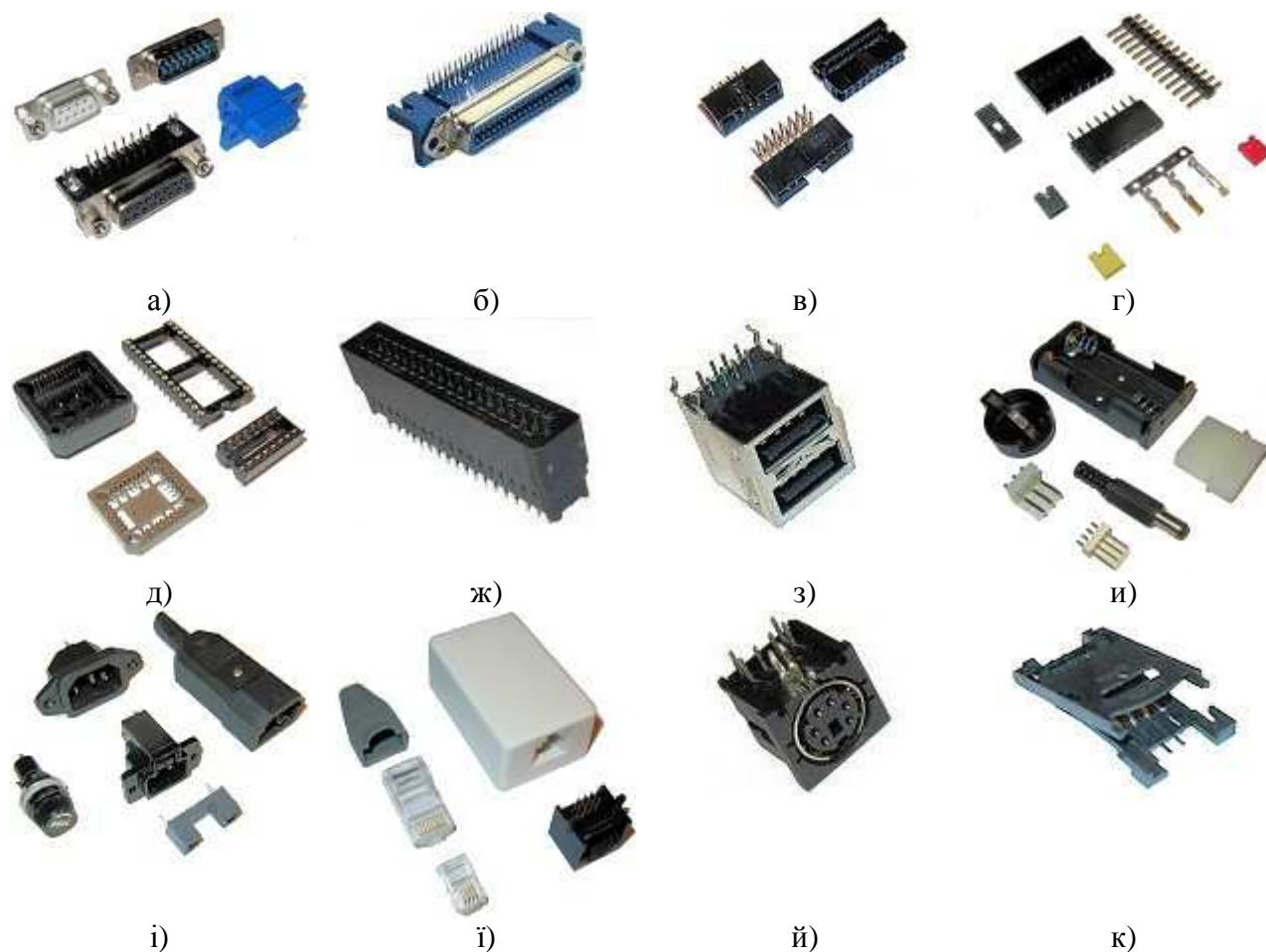
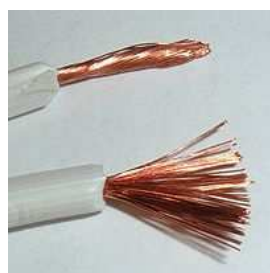


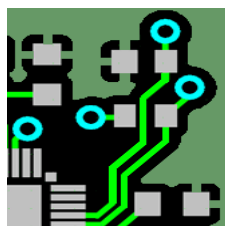
Рис.2.12 - Загальний вигляд деяких з'єднуючих пристроїв:

а - стандартні з'єднувачі серії D-SUB; б - роз'єднувачі серії CENTRONICS; в - роз'єми серії IDC, VH, DIP (обжим на шлейф); г - штиреві з'єднувачі, гнізда для них, джампери; д - панелі під мікросхеми: DIP, PLSS; ж - слоти комп'ютерні SL, гнізда для пам'яті SIMM; з - USB і miniUSB конектори на плату та кабель; и - роз'єми низьковольтного живлення; і) роз'єми живлення, тримачі запобіжників; ї - вижки телефонні (джеки) на кабель, розетки телефонні та комп'ютерні; й - роз'єми круглі DIN; к- контактні пристрої для сім-карт

До *з'єднувальних пристроїв* відносяться дроти, кабелі, шнури та друковані плати. Приклади з'єднувальних пристроїв представлені на рис.2.13.



а)



б)



в)



г)

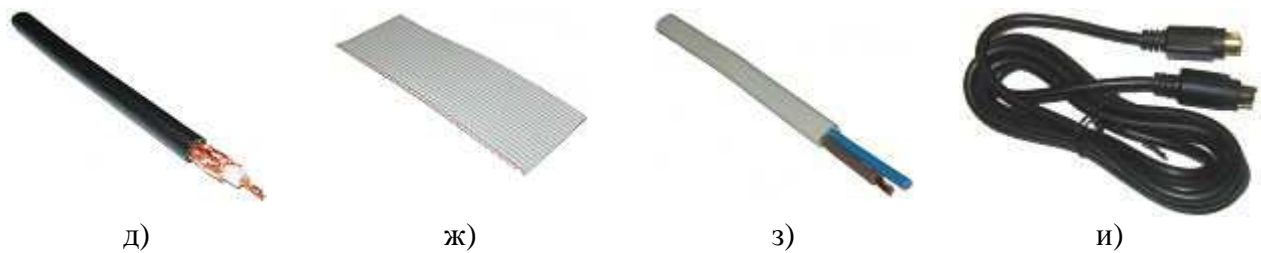


Рис.2.13- Загальний вигляд деяких з'єднувальних пристроїв:
 а - дрiт iзольований; б - друкована плата; в - кабель для телефонних та комп'ютерних мереж; г - кабель комутацiйний екранований багатожильний;
 д - кабель коаксоiдальний; ж - шлейф; з - кабель монтажний, мережевий; и - шнур iнтерфейсний

Для захисту елементiв електричних схем використовуються **запобiжники** та **автоматичнi вимикачi**. Загальний вигляд захисних пристроїв приведено на рис.2.14.

Запобiжник (рис.2.14, а, б) - пристрiй для захисту електричних приладiв вiд надструму та перенапруги. Якщо струм стає надмiрним, дрiт (або пластина) запобiжника розплавляється i розриває електричне коло.

Замiсть запобiжникiв нерiдко застосовуються автоматичнi вимикачi (рис.2.14, в). Вони мiстять електромагнiтний i бiметалiчний розчеплювач. Перший складається з котушки, сердечника i пружини. Струм короткого замикання, проходячи по котушцi, втягує всередину сердечник, який стискає пружину i приводить в дiю розчеплюючий пристрiй. Автомати можуть мати теплової, електромагнiтний або комбiнований розчеплювачi.

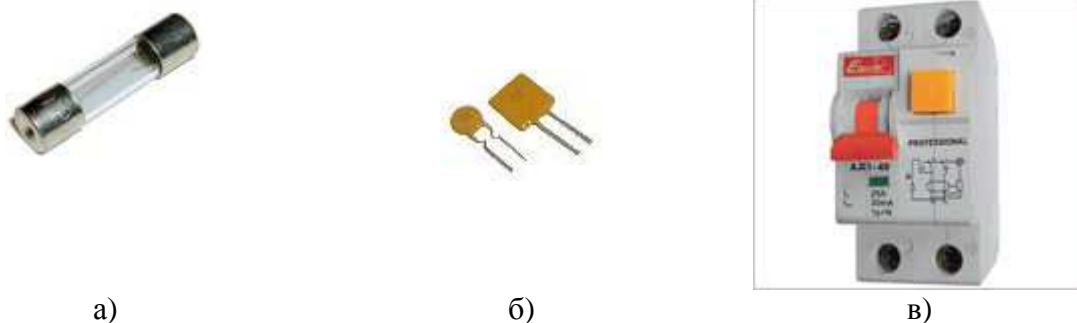


Рис.2.14- Загальний вигляд деяких захисних пристроїв

Розрахунок запобiжника можна проводити за струмом за формулою:

$$I_{nom} = \frac{P_{max}}{U},$$

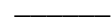



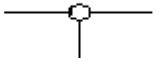


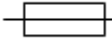
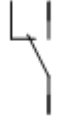
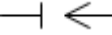
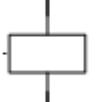
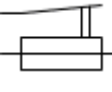
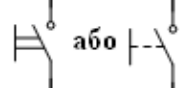
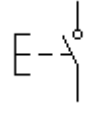
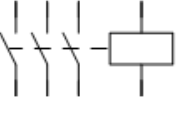
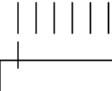
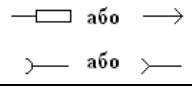
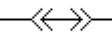
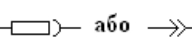
де I_{nom} — номiнальний струм спрацювання, А; P_{max} — максимальна потужнiсть навантаження, Вт (з запасом приблизно 20 %); U — напруга в колi, В.

Запобiжник вибирається iз стандартного ряду, з найблищим номiнальним струмом спрацювання, що перевищує розрахункове значення.

Умовне графiчне позначення контактiв та з'єднань приведене в таблицi 2.6.

Таблиця 2.6 - Умовнi графiчнi позначення захисних i комутуючих пристроїв

№ п/п	Назва	Позначення	№ п/п	Назва	Позначення
-------	-------	------------	-------	-------	------------

1	Загальне позначення з'єднувального дроту		11	Замикаючий пристрій	
2	Загальне позначення нерозбірного з'єднання		12	Перемикаючий пристрій з нейтральним центральним положенням	
3	Загальне позначення розбірного з'єднання				
4	Запобіжник плавкий. (європейське позначення)		13	Розмикаючий пристрій	
5	Запобіжник плавкий. Загальне позначення.		14	Перемикаючий пристрій.	
6	Запобіжник пробивний		15	Котушка електромагнітного реле	
7	Запобіжник з сигналізуючим пристроєм		16	Вимикач ручний	
8	Контакт замикаючий натискного кнопкового вимикача без автоматичного повернення елемента управління		17	Вимикач електромагнітний (реле)	
9	Перемикач однополюсний багатопозиційний		18	Контакт контактного з'єднання: - штир - роз'єм.	
10	Перемичка комутаційна		19	З'єднання контактне роз'ємне	

2.3.4 Загальна характеристика кварцових резонаторів.

Кварцовий резонатор (кварц) — прилад (рис. 2.15), в якому п'єзоелектричний ефект та явище механічного резонансу використовуються для побудови високочастотного резонансного елемента електронної схеми.

На пластину, кільце або брусок, вирізаних з кристалу кварцу певним чином, нанесені два і більше електродів

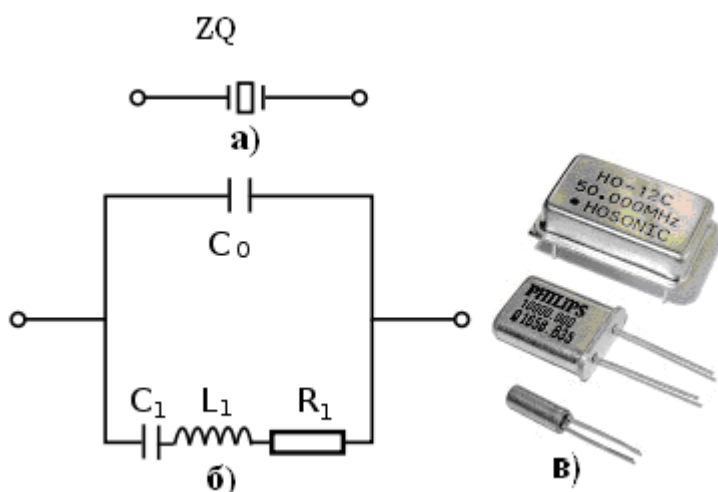


Рис. 2.15 – Кварцовий резонатор: а – позначення на схемах; б- еквівалентна схема; в – загальний вигляд

Пластина закріплена і має власну резонансну частоту механічних коливань.

При подачі напруги на електроди завдяки п'єзоелектричному ефекту відбувається згинання, стиснення або зсув в залежності від того, яким чином виготовлений кристал.

Однак коливальна пластина в результаті того ж п'єзоелектричного ефекту створює в зовнішньому колі проти -ЕРС, що можна розглядати як явище, еквівалентне роботі котушки індуктивності в коливальному контурі. Якщо частота напруги, що

подається дорівнює або близька до частоти власних механічних коливань пластини, витрати енергії на підтримку коливань пластини виявляються набагато нижчі, ніж при великому відхиленні частоти. Це теж відповідає поведінці коливального контуру.

Маркування кварцових резонаторів. Умовне позначення кварцового резонатора включає в себе наступні елементи:

- перший елемент - літери "РК" (резонатор кварцовий);
- другий елемент - двох (трьох) значне число, що означає реєстраційний номер типу резонатора;
- третій елемент - число, що означає клас точності настройки (1-й клас = $\pm 0.5 \times 10^0$, 22-й клас = $\pm 5000 \times 10^6$);
- четвертий елемент - буква, що позначає інтервал робочих температур ($J=0 +45^\circ\text{C}$, $E=-60 +100^\circ\text{C}$);
- п'ятий елемент - буква, що позначає клас максимальної відносної зміни робочої частоти в інтервалі робочих температур ($A = \pm 0.1 \times 10^6$, $E = \pm 1000 \times 10^6$);
- шостий елемент - число, що означає частоту, і буква, що позначає одиницю вимірювання частоти ("К" - кГц, "М" - МГц);
- сьомий елемент - літера "В", що позначає всекліматичне виконання резонатора.

Між 2-м і 3-м, 5-м і 6-м, 6-м і 7-м елементами ставиться дефіс.

У позначенні кварцових резонаторів зарубіжними фірмами єдності немає, проте простежується подібна класифікація. Наприклад позначення кварцових резонаторів фірми "Narva" наступні:

- перший елемент - буква Q- позначає кварц, С-керамічний фільтр;
- другий елемент - буква, що позначає вид коливань приладу (В - згині коливання, L - поздовжні коливання, F - плоскі коливання, D - поперечні коливання);
- третій елемент - буква, що позначає тип підключення: S - штекерне підключення, L - підключення паянням;
- четвертий елемент - цифра, що позначає робочу температуру або діапазон робочих температур ("1" = $-55 \dots +90^\circ\text{C}$, "2" = $-20 \dots +70^\circ\text{C}$, "3" = $0 \dots +60^\circ\text{C}$, "4" = $+75 \pm 3^\circ\text{C}$, "5" = $+70 \pm 3^\circ\text{C}$, "6" = $+60 \pm 3^\circ\text{C}$, "7" = $+50 \pm 3^\circ\text{C}$, "8" = $+2 \dots +25^\circ\text{C}$);
- п'ятий елемент - буква, що позначає допуск на відхилення частоти ($A = \pm 200 \times 10^6$, $B = \pm 100 \times 10^6$, $C = \pm 75 \times 10^6$, $D = \pm 50 \times 10^6$, $E = \pm 30 \times 10^6$, $F = \pm 20 \times 10^6$, $G = \pm 10 \times 10^6$);
- шостий елемент - цифра для позначення ємності навантаження при налаштуванні на паралельний резонанс (3 = 30пФ, 5 = 50пФ, 10 = 100пФ, 15 = 150пФ, 20 = 200пФ, 25 = 250пФ, 30 = 300пФ) і літери для позначення кварців, призначених для налаштування

- на послідовний резонанс (F - кварц, призначений для встановлення в якості фільтра, S - стабілізуючий кварц);
- сьомий елемент - номер стандарту (TGL 11767 - кварц, що здійснює плоскі коливання, 200 ... 400кГц, у металевому корпусі; TGL 11769 - кварц, що здійснює поперечні коливання, 1000 ... 3000кГц, в металевому корпусі; TGL 11770 - кварц, що здійснює поперечні коливання, 8... 20МГц, в металевому корпусі; TGL 11771- кварц, що здійснює поперечні коливання, 20...100МГц, в металевому корпусі);
 - восьмий елемент - чисельне значення частоти резонансу.

3. РОЗРАХУНОК ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ ПОСТІЙНОГО СТРУМУ

3.1 Закони (правила) Кірхгофа

Для формулювання 1-го закону Кірхгофа Виділимо фрагмент кола - рис. 3.1. В кожному дроті довільно задамося позитивним напрямом струму. Умовимося, що струми, направлені до вузла, записуватимемо із знаком “плюс”, а струми, направлені від вузла - із знаком “мінус” (можна б було узяти і навпаки).

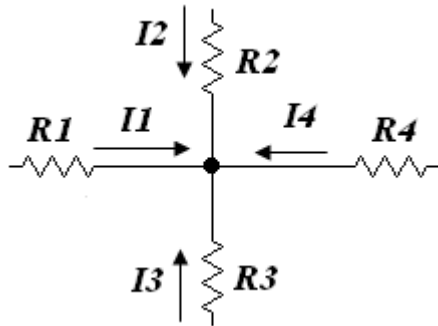


Рис. 3.1.

1-й закон Кірхгофа формулюється таким чином:
алгебраїчна сума струмів у вузлі рівна нулю,

$$\sum I = 0. \quad (3.1)$$

Для кола рис. 3.1: $I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0$

Якщо 1-й закон Кірхгофа відноситься до вузлів кола, то 2-й закон Кірхгофа формулюється для довільного замкнутого контура.

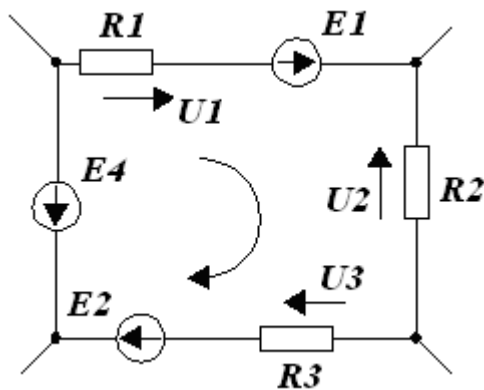


Рис. 3.2.

Розглянемо фрагмент кола - рис. 3.2. Задамося довільно позитивним напрямом струму в кожному резисторі, довільно виберемо напрям обходу контуру, наприклад, за годинниковою стрілкою.

2-й закон Кірхгофа: *алгебраїчна сума падінь напруг на елементах замкнутого контура рівна алгебраїчній сумі ЕРС, що містяться в цьому контурі,*

$$\sum E = \sum IR. \quad (3.2)$$

При аналітичному записі 2-го закону Кірхгофа ті напруги і ЕРС, стрілки яких співпадають з напрямом обходу, записуються із знаком “+”, а які протилежні напрямку обходу - із знаком “-”.

Для контуру рис. 3.2 рівняння по 2-му закону Кірхгофа має вигляд:

$$U_1 - U_2 + U_3 = E_1 + E_2 - E_4.$$

3.2 Види з'єднання елементів електричного кола

Застосовують три види з'єднання: *послідовне, паралельне і мішане.*

3.2.1 Послідовне з'єднання резисторів.

Послідовним з'єднанням резисторів називається таке з'єднання, при якому через усі елементи кола проходить один і той самий струм (рис.3.3). При такому з'єднанні на кожному резисторі відбувається спад напруги, який визначається законом Ома. Загальна напруга складається із сум напруг у колі:

$$U = U_1 + U_2 + \dots + U_i, \text{ або } IR_{екв} = IR_1 + IR_2 + \dots + IR_i.$$

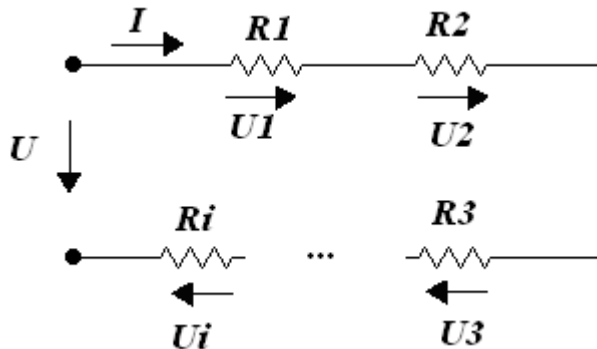


Рис. 3.3.

Скоротивши обидві частини цього рівняння на I , матимемо

$$R_{екв} = R_1 + R_2 + \dots + R_i, \text{ або } R_{екв} = \sum_{i=1}^N R_i, \quad (3.3)$$

де $R_{екв}$ — загальний опір електричного кола.

Для замкненого кола, згідно із

законом Ома:

$$I = E / (r_{01} + R_1 + R_2 + \dots + R_i),$$

де r_{01} — внутрішній опір джерела; R_1, R_2, \dots, R_i — опори послідовно з'єднаних резисторів.

3.2.2 Паралельне з'єднання резисторів

Паралельним з'єднанням резисторів називається таке з'єднання, при якому на усі елементи кола подається одна і та сама напруга (рис.3.4). При такому з'єднанні через кожен резистор проходить струм, який визначається законом Ома. Загальний струм складається із суми струмів у колі:

$$U = U_1 = U_2 = \dots = U_i, \text{ або } U/R_{екв} = U/R_1 + U/R_2 + \dots + U/R_i.$$

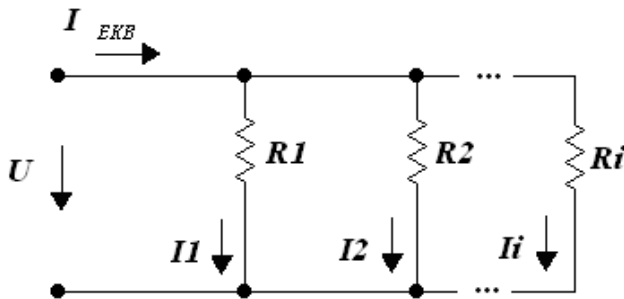


Рис. 3.4.

Скоротивши обидві частини цього рівняння на U , матимемо

$$1/R_{екв} = 1/R_1 + 1/R_2 + \dots + 1/R_i, \text{ або } \frac{1}{R_{екв}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i} = G_{екв}, \quad (3.4)$$

де $G_{екв}$ — загальна провідність електричного кола.

Загальний струм в колі:

$$I_{екв} = I_1 + I_2 + \dots + I_i.$$

3.2.4 Послідовне та паралельне з'єднання конденсаторів

Послідовне з'єднання (3.5). Заряд усіх конденсаторів і кожного окремо при послідовному з'єднанні той самий:

$$Q_{екв} = Q_1 = Q_2 = Q_i. \quad (3.5)$$

Напруга групи послідовно з'єднаних конденсаторів рівна сумі напруг на кожному конденсаторі:

$$U_{екв} = U_1 + U_2 + \dots + U_i. \quad (3.6)$$

Ємність послідовно з'єднаних конденсаторів:

$$1/C_{\text{ЕКВ}}=1/C_1+1/C_2+\dots+1/C_i. \quad (3.7)$$

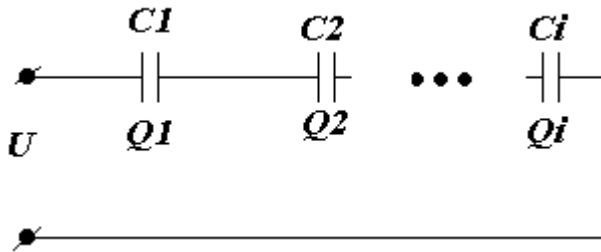


Рис. 3.5.

Паралельне з'єднання (3.6). Заряд усіх конденсаторів дорівнює сумі зарядів кожного елемента:

$$Q_{\text{ЕКВ}}=Q_1+Q_2+\dots+Q_i. \quad (3.8)$$

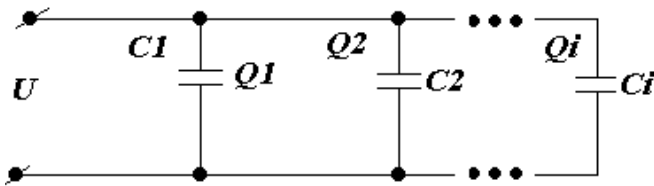


Рис. 3.6.

Напруга групи з'єднаних конденсаторів рівна на конденсаторі:

$$U_{\text{ЕКВ}}=U_1=U_2=U_i. \quad (3.9)$$

Ємність паралельно з'єднаних конденсаторів:

$$C_{\text{ЕКВ}}=C_1+C_2+\dots+C_i. \quad (3.10)$$

3.3 Розрахунок змішаного з'єднання

Еквівалентні перетворення застосовують для зменшення кількості віток або вузлів у схемі, що веде до зменшення числа розрахункових рівнянь і скорочення обчислювальної роботи. Перетворювати можна і пасивні і активні ділянки кола. **Умови еквівалентності перетворення:** напруги і струми в неперетворених частинах схеми повинні залишатися незмінними.

Нижче наведено найбільш поширені методи заміни однієї схеми іншою, еквівалентною.

3.3.1 Розрахунок загального опору кола при змішаному з'єднанні резисторів

Найпростішим випадком складного кола є коло з одним джерелом енергії і

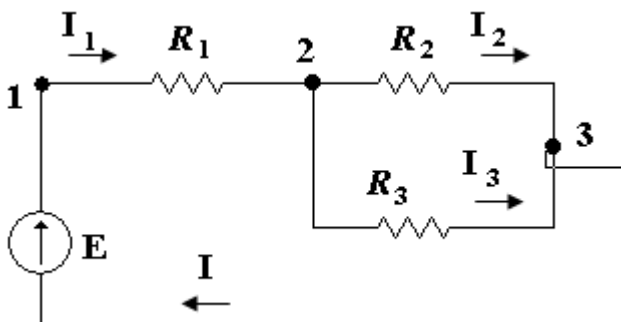


Рис. 3.7- Змішане з'єднання резисторів в колі постійного струму

складене шляхом послідовного, паралельного або змішаного з'єднання окремих опорів і їх груп (рис. 3.7). Опір ділянки 2 — 3 з паралельним з'єднанням резисторів визначиться з виразу (3.4):

$$r_{23} = \frac{1}{1/r_2+1/r_3} = \frac{r_2 r_3}{r_2 + r_3}.$$

Загальний опір кола:

$$r = r_1 + \frac{r_2 r_3}{r_2 + r_3}.$$

З цього прикладу виходить метод визначення еквівалентного опору в загальному випадку при скільки завгодно великому числі ділянок кола.

Спочатку знаходяться еквівалентні опори паралельних ділянок, потім еквівалентний опір кола визначається як сума знайдених еквівалентних опорів та інших опорів одиночних резисторів, включених послідовно.

3.3.2 Перетворення трикутника опорів в еквівалентну зірку і навпаки

Взаємне еквівалентне перетворення з'єднання споживачів енергії "трикутником" і з'єднання "зіркою" представлено на рисунку 3.8.

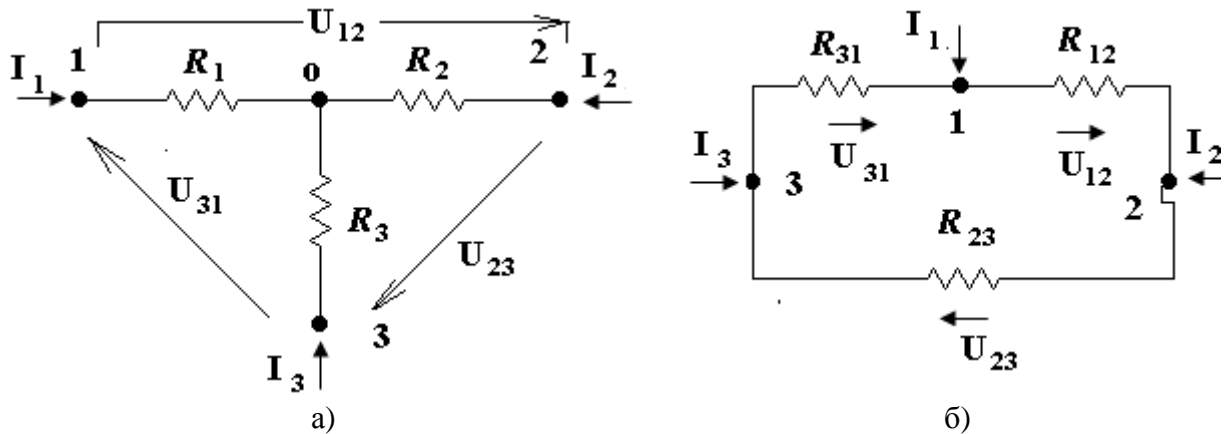


Рис.3.8 - З'єднання навантаження "зіркою" (а) та "трикутником" (б)

Формули перетворення "трикутника" на "зірку" опорів:

$$R_1 = \frac{R_{12} \cdot R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}; \quad R_2 = \frac{R_{12} \cdot R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}; \quad R_3 = \frac{R_{31} \cdot R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}.$$

Формули перетворення "зірки" на "трикутник" опорів:

$$R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_3}; \quad R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1}; \quad R_{31} = R_3 + R_1 + \frac{R_3 \cdot R_1}{R_2}.$$

Приклад. Розрахувати струми у вітках кола, показаного на рис.3.9. Визначити активну потужність кола, якщо $U = 30$ В; $R_1 = 180$ Ом; $R_2 = 60$ Ом; $R_3 = 120$ Ом; $R_4 = 120$ Ом; $R_5 = 80$ Ом.

Розв'язок. Аналізуючи схему, визначаємо, що вона містить два "трикутники" (один утворений опорами R_1, R_2, R_3 ; другий – R_3, R_4, R_5), а також дві "зірки" (одну утворено опорами R_1, R_3, R_5 ; другу – R_2, R_3, R_4). Для розрахунку струмів можна будь-який "трикутник" перетворити на "зірку" або навпаки; трудомісткість обчислень буде однаковою.

1) Вибираємо перетворення "трикутника" R_1 - R_2 - R_3 на еквівалентну "зірку" з опорами R_6, R_7, R_8 (рис.3.10):

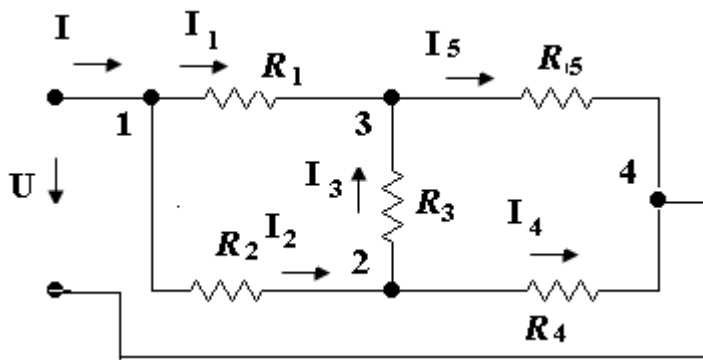


Рис. 3.9 – Вихідна схема кола

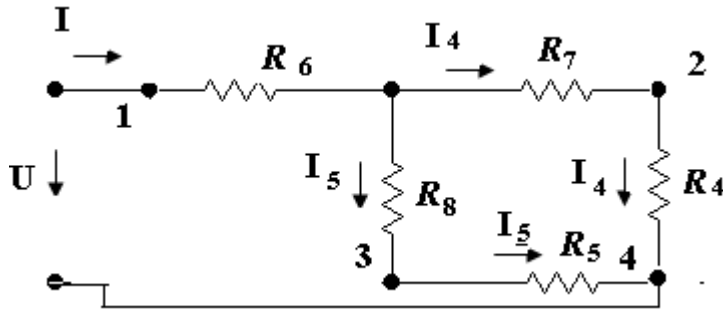


Рис. 3.10 – Схема перетворення “трикутника” на еквівалентну “зірку”

$$R_6 = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{180 \cdot 60}{180 + 60 + 120} = 30 \text{ Ом};$$

$$R_7 = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{60 \cdot 120}{180 + 60 + 120} = 20 \text{ Ом};$$

$$R_8 = \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{180 \cdot 120}{180 + 60 + 120} = 60 \text{ Ом}.$$

2) Поступовим перетворенням зводимо всі опори у схемі (див. рис.3.10) до одного еквівалентного:

$$R_{ек1} = R_7 + R_4 = 20 + 120 = 140 \text{ Ом};$$

$$R_{ек2} = R_8 + R_5 = 60 + 80 = 140 \text{ Ом};$$

$$R_{ек3} = \frac{R_{ек1} \cdot R_{ек2}}{R_{ек1} + R_{ек2}} = \frac{140 \cdot 140}{140 + 140} = 70 \text{ Ом};$$

$$R_{ек4} = R_{ек3} + R_6 = 70 + 30 = 100 \text{ Ом}.$$

3) Обчислюємо струми у вітках:

- за законом Ома

$$I = \frac{U}{R_{ек4}} = \frac{30}{100} = 0,3 \text{ А};$$

- за формулою "чужого опору":

$$I_4 = I \cdot \frac{R_{ек2}}{R_{ек1} + R_{ек2}} = \frac{0,3 \cdot 140}{140 + 140} = 0,15 \text{ А};$$

- за першим законом Кірхгофа: $I_5 = I - I_4 = 0,3 - 0,15 = 0,15 \text{ А}$.

Для визначення струмів в опорах R_1, R_2, R_3 необхідно спочатку розрахувати напруги на цих опорах:

$$U_{12} = R_7 I_4 + R_6 I = 20 \cdot 0,15 + 30 \cdot 0,3 = 12 \text{ В};$$

$$U_{23} = R_8 I_5 - R_7 I_4 = 60 \cdot 0,15 - 20 \cdot 0,15 = 6 \text{ В};$$

$$U_{31} = R_8 I_5 + R_6 I = 60 \cdot 0,15 + 30 \cdot 0,3 = 18 \text{ В}.$$

$$\text{За законом Ома: } I_1 = \frac{U_{13}}{r_1} = \frac{18}{180} = 0,1 \text{ А}; I_2 = \frac{U_{12}}{r_2} = \frac{12}{60} = 0,2 \text{ А}; I_3 = \frac{U_{23}}{r_3} = \frac{6}{120} = 0,05 \text{ А}.$$

4) Знаходимо потужність, яку споживає коло:

$$P = U \cdot I = 30 \cdot 0,3 = 9 \text{ Вт}.$$

3.4 Потенціальні діаграми

Потенціал чисельно дорівнює роботі по перенесенню одиничного додатного заряду із даної точки в точку фіксовану. Поверхня Землі, як провідника, екіпотенціальна, потенціал її зручно прийняти нульовим. Тому й поняття «заземлити» означає прийняти потенціал даної точки за нуль. Потенціал будь-якої точки в електричному колі можна прийняти за нульовий, потенціали всіх інших точок відповідно зміняться, але різниця потенціалів точок залишиться без зміни.

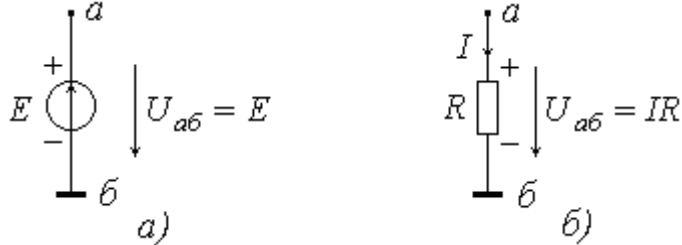


Рис. 3.11

На рис. 3.11, а показана ідеальна ЕРС E і опір R (рис. 3.11, б), по якому протікає струм I . Прийнемо, що потенціал точки b дорівнює нулю, «заземлимо» цю точку, $\varphi_b = 0$. Потенціал точки a вищий потенціалу точки b на значення ЕРС E , $\varphi_a = E$. Напруга U_{ab} між точками a , b :

$$U_{ab} = \varphi_a - \varphi_b = \varphi_a = E.$$

Тобто, якщо проходити через ЕРС від «-» до «+» то потенціал зростає на величину ЕРС, напруга $U_{ab} = E$ буде додатна у випадку проходження через ЕРС у напрямку від «+» до «-» (проти вістря стрілки).

Такі ж міркування застосуємо для опору зі струмом (рис. 3.11, б). Прийнемо потенціал точки b рівним нулю, $\varphi_b = 0$. Очевидно, що струм тече від точки з вищим потенціалом до точки з нижчим потенціалом, аналогічно, як і вода тече від верхнього рівня до нижнього. Тому потенціал точки a вищий від потенціалу точки b на величину падіння напруги IR на опорі R , $\varphi_a = IR$. Напруга між точками a , b : $U_{ab} = \varphi_a - \varphi_b = \varphi_a = IR$.

Висновок: на ділянці з опором R потенціал зростає на IR у напрямку проти струму, а напруга додатна у напрямку, співпадаючому зі струмом.

Очевидно, для розглянутих випадків напруга між точками b , a $U_{ba} = \varphi_b - \varphi_a$ буде від'ємна.

На рис. 3.12 показана частина електричного кола, з ЕРС (джерелами напруги) та опорамі, між точками a , b , по якій протікає струм I .

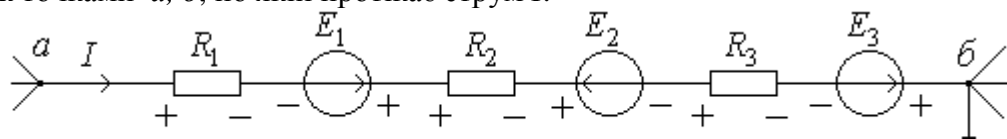


Рис. 3.12

Знайдемо потенціал точки a відносно потенціалу точки b , тобто напругу між точками a і b :

$$\varphi_a = \varphi_b - E_3 + IR_3 + E_2 + IR_2 - E_1 + IR_1 = \varphi_b - E_3 + E_2 - E_1 + I(R_1 + R_2 + R_3),$$

або

$$\varphi_a - \varphi_b = U_{ab} = -E_3 + E_2 - E_1 + I(R_1 + R_2 + R_3);$$

звідки:

$$I = \frac{\varphi_a - \varphi_b + E_3 - E_2 + E_1}{R_1 + R_2 + R_3}; \quad I = \frac{U_{ab} + E_3 - E_2 + E_1}{R_1 + R_2 + R_3}.$$

Це запис закону Ома, де струм вітки між полюсами a , b виражається за напругою між полюсами і параметрами вітки.

Для визначення струму у вітці за законом Ома при відомих параметрах потрібно:

- 1) задатись довільним напрямком струму у вітці, наприклад, від точки a до точки b ;
- 2) в чисельнику записати напругу U_{ab} (а не U_{ba}); ЕРС, напрям яких спів-падає із вибраним напрямом струму, записати зі знаком «+», у протилежному разі - зі знаком «-»;
- 3) в знаменнику записати суму опорів вітки;
- 4) якщо в результаті розрахунків струм буде від'ємним, це означає, що на-прямок руху додатних зарядів протилежний вибраному.

У загальному вигляді закон Ома записується так:

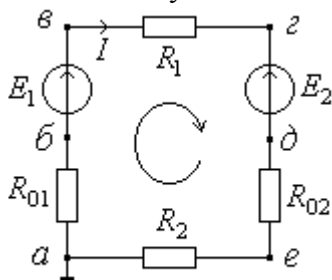


Рис. 3.13

$$I = \frac{U_{ab} + \sum_{k=1}^m E_k}{\sum_{k=1}^n R_k}$$

Закон Ома для замкненого нерозгалуженого кола:

$$I = \frac{\sum_{k=1}^m E_k}{\sum_{k=1}^n R_k}$$

Розглянемо нерозгалужене коло (рис. 3.13), в якому діють дві ЕРС, нехай $E_1 > E_2$. Тоді згідно із законом Ома:

$$I = \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_{01} + R_{02} + R_2}$$

струм буде співпадати з напрямком E_1 . Прийmemo потенціал точки a за нульовий і визначимо потенціали інших точок кола відносно нього.

$$\begin{aligned} \varphi_a &= 0; \varphi_b = \varphi_a - IR_{01}; \varphi_e = \varphi_b + E_1; \varphi_z = \varphi_e - IR_1; \varphi_d = \varphi_z - E_2; \\ \varphi_e &= \varphi_d - IR_{02}; \varphi_a = \varphi_e - IR_2. \end{aligned}$$

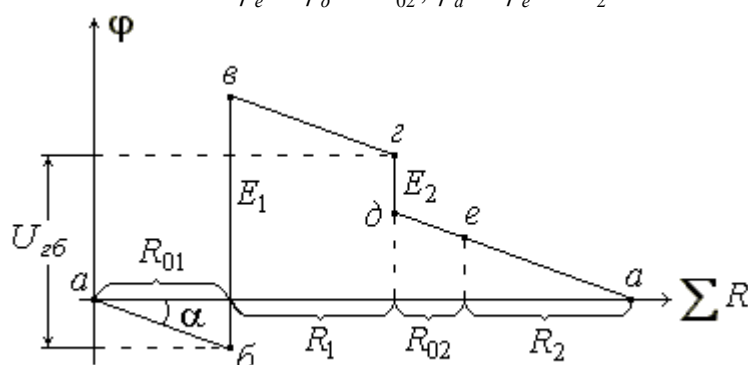


Рис. 3.14.

Розподіл потенціалів вздовж контура зручно зображати потенціальною діаграмою (рис. 3.14). По вертикальній осі відкладаються потенціали точок, по горизонтальній - сума опорів у тому порядку, якому вони розміщені в контурі.

Із діаграми можна визначити:

- 1) напрям і значення струму на резисторі (оскільки в даному контурі протікає один струм, то відрізки IR діаграми мають однаковий кут нахилу, а відповідно, тангенс кута нахилу відрізка, що зображає зміну потенціалу на резисторі, пропорційний струму на резисторі [$i = \frac{m_U}{m_R} \operatorname{tg} \alpha$]);
- 2) напругу між будь-якими точками кола (на діаграмі показана напруга U_{zb} між точками z та b).

3.5 Метод безпосереднього використання законів Кірхгофа

В задачах аналізу потрібно визначити струми і напруги віток за відомими параметрами джерел, резисторів і конфігурації кола.

Алгоритм розрахунку електричного кола методом рівнянь Кірхгофа:

1. Визначаємо кількість вузлів $n_{\text{вз}}$ і віток $n_{\text{в}}$, довільно вибираємо напрями струму у вітках і складаємо $n_{\text{вз}} - 1$ рівнянь за першим законом Кірхгофа.
2. Вибираємо незалежні контури та довільно задаємо напрям їх обходу, бажано однаково, наприклад, (за годинниковою стрілкою). Складаємо для кожного з $n = n_{\text{в}} - n_{\text{вз}} + 1$ незалежних контурів рівняння за другим законом Кірхгофа у

$$\text{вигляді } \sum_{k=1}^n I_k R_k = \sum_{k=1}^m E_k .$$

3. Розв'язок системи рівнянь дає невідомі струми.
4. Перевіряємо правильність розрахунку за балансом потужностей.

Очевидно, що потужності, які генеруються джерелами енергії, повинні повністю споживатися навантаженнями (резисторами). Тобто в електричному колі виконується **баланс потужностей**. Це наслідок закону збереження енергії:

$$\sum P_{\text{дж}} = \sum P_{\text{сп}}$$

або

$$\underbrace{\underbrace{\pm \sum E_k I_k}_{\text{Потужність джерел напруги}} \quad \underbrace{\pm \sum U_k J_k}_{\text{Потужність джерел струму}}}_{\text{Алгебраїчна сума.}} = \underbrace{\sum I_k^2 R_k}_{\text{Потужність споживачів.}}_{\text{Арифметична сума.}}$$

На рис. 3.15 зображена схема розгалуженого електричного кола. Відомі величини опорів та ЕРС, необхідно визначити струми.

У схемі є чотири вузли, можна скласти чотири рівняння за першим законом Кірхгофа. Зазначимо довільно напрямки струмів. Запишемо систему рівняння для вузлів 1, 2, 3 та 4 (3.11).

Якщо в схемі є n вузлів, кількість незалежних рівнянь, які можна скласти за першим законом Кірхгофа, так само $n - 1$. Для схеми на рис. 3.15 кількість незалежних рівнянь дорівнює трьом (3.12).

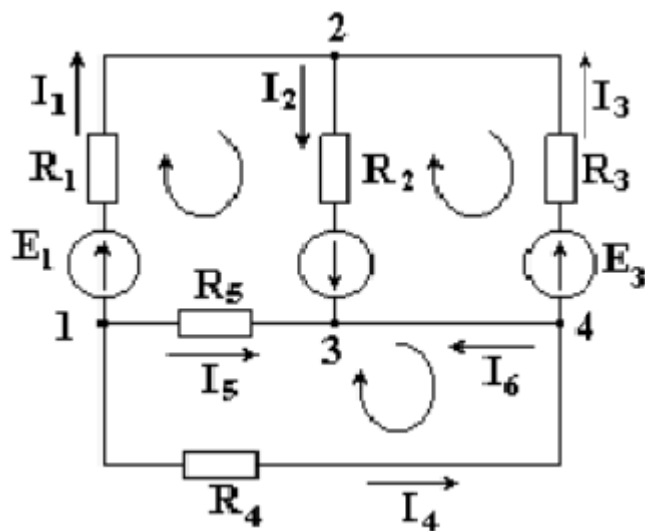


Рис. 3.15

$$\left. \begin{array}{l} \text{для вузла 1} \quad -I_1 - I_5 - I_4 = 0 \\ \text{для вузла 2} \quad I_1 - I_2 + I_3 = 0 \\ \text{для вузла 3} \quad I_2 + I_5 + I_6 = 0 \\ \text{для вузла 4} \quad -I_3 - I_6 + I_4 = 0 \end{array} \right\} (3.11)$$

$$\left. \begin{array}{l} -I_1 - I_5 - I_4 = 0 \\ I_1 - I_2 + I_3 = 0 \\ I_2 + I_5 + I_6 = 0 \end{array} \right\} (3.12)$$

Недостатню кількість рівнянь складають за другим законом Кірхгофа. Рівняння за другим законом складають для незалежних контурів. Незалежним називається контур, в який входить хоча б одна нова вітка, яка не увійшла в інші контури.

Виберемо три незалежні контури і вкажемо напрями обходу контурів. Запишемо три рівняння за другим законом Кірхгофа:

$$\left. \begin{array}{l} E_1 + E_2 = -I_5 \cdot R_5 + I_1 \cdot R_1 + I_2 \cdot R_2 \\ -E_2 - E_3 = -I_2 \cdot R_2 - I_3 \cdot R_3 \\ 0 = I_5 \cdot R_5 - I_4 \cdot R_4 \end{array} \right\} (3.13)$$

Розв'язавши спільно системи рівнянь (3.12) і (3.13), визначимо струми в схемі. Струм у вітці може мати від'ємне значення. Це означає, що дійсний напрямок струму протилежний до обраного.

3.6 Метод контурних струмів

Метод безпосереднього застосування законів Кірхгофа громіздкий. Є можливість зменшити кількість спільно розв'язуваних рівнянь системи. Число рівнянь, складених за методом контурних струмів, дорівнює кількості рівнянь, що складаються за другим законом Кірхгофа. Метод контурних струмів полягає в тому, що замість струмів в вітках визначаються, на підставі другого закону Кірхгофа, контурні струми.

Контурний струм - це деяка розрахункова величина, однакова для всіх віток заданого контура. На рис. 3.16., як приклад зображена двоконтурна схема, в якій I_{11} і I_{22} - контурні струми.

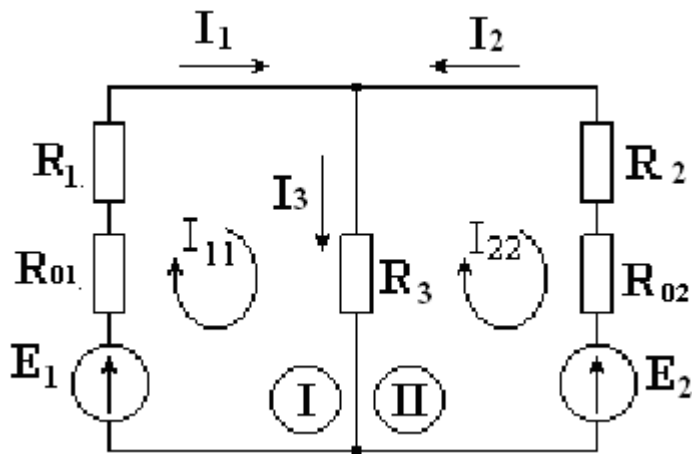


Рис. 3.16.

Дійсний струм вітки визначається накладанням усіх контурних струмів які протікають по даній вітці, тобто він рівний алгебраїчній сумі контурних струмів тих контурів до яких входить дана вітка.

Порядок розрахунку:

1) Вибираємо напрямки струмів у вітках.

2) Вибираєм незалежні контури.

3) Складаємо контурні рівняння. По вітках в яких

протікають кілька контурних струмів враховуються спади напруг від всіх контурних струмів. Причому якщо контурний струм сусіднього контура напрямлений в протилежну сторону ніж контурний струм розглядуваного контура то складова спаду напруги яку він створює береться з протилежним знаком, ніж складова яку створює контурний струм розглядуваного контура.

4) Розраховуємо отриману систему рівнянь і знаходимо контурні струми:

5) Знаходимо струми віток.

Приклад розрахунку електричного кола, зображеного на рис.3.16, методом контурних струмів.

Складаємо систему рівнянь контурів I та II:

$$I_{11} (R_1 + R_{01}) + I_{11} R_3 - I_{22} R_3 = E_1;$$

$$I_{22} (R_{02} + R_2) + I_{22} R_3 - I_{11} R_3 = -E_2.$$

Перегрупуємо рівняння:

$$I_{11} \cdot (R_1 + R_{01} + R_3) - I_{22} \cdot R_3 = E_1 = E_{11}, \quad (3.14)$$

$$-I_{11} \cdot R_3 + I_{22} \cdot (R_{02} + R_2 + R_3) = -E_2 = E_{22}; \quad (3.15)$$

Визначаємо сумарні опори контурів:

$$R_{11} = R_1 + R_{01} + R_3 \text{ та } R_{22} = R_{02} + R_2 + R_3.$$

Опір R_3 , що належить одночасно двом контурам, називається загальним опором цих контурів:

$$R_{12} = R_{21} = R_3,$$

де R_{12} - загальний опір між першим і другим контурами; R_{21} - загальний опір між другим і першим контурами.

$E_{11} = E_1$ і $E_{22} = E_2$ - контурні ЕРС.

У загальному вигляді рівняння (3.14) і (3.15) записуються таким чином:

$$I_{11} \cdot R_{11} + I_{22} \cdot R_{12} = E_{11},$$

$$I_{11} \cdot R_{21} + I_{22} \cdot R_{22} = E_{22}.$$

Сумарні опори контурів завжди мають знак "плюс". Загальний опір має знак "мінус",

якщо в даному опорі контурні струми спрямовані зустрічно один одному, і знак "плюс", якщо контурні струми в загальному опорі збігаються за напрямком.

Розв'язуючи рівняння (3.14) і (3.15) спільно, визначимо контурні струми I_{11} і I_{22} , потім від контурних струмів переходимо до струмів у вітках. Вітки схеми, по яких протікає один контурний струм, називаються зовнішніми, а вітки, по яких протікають кілька контурних струмів, називаються загальними. Струм у зовнішній вітці збігається за величиною і за напрямком з контурним. Струм у спільній вітці дорівнює алгебраїчній сумі контурних струмів, що протікають в цій вітці.

В схемі рис.3.16:

$$I_1 = I_{11}, \quad I_2 = I_{22}, \quad I_3 = I_{11} - I_{22}.$$

3.7 Метод вузлових потенціалів

Метод вузлових потенціалів дозволяє скласти систему рівнянь, за якою можна визначити потенціали всіх вузлів схеми. За відомим різницями вузлових потенціалів можна визначити струми у всіх вітках. У схемі на рис. 3.17 є чотири вузли. Потенціал будь-якої точки схеми можна прийняти рівним нулю. Тоді у нас залишаться невідомими три потенціали.

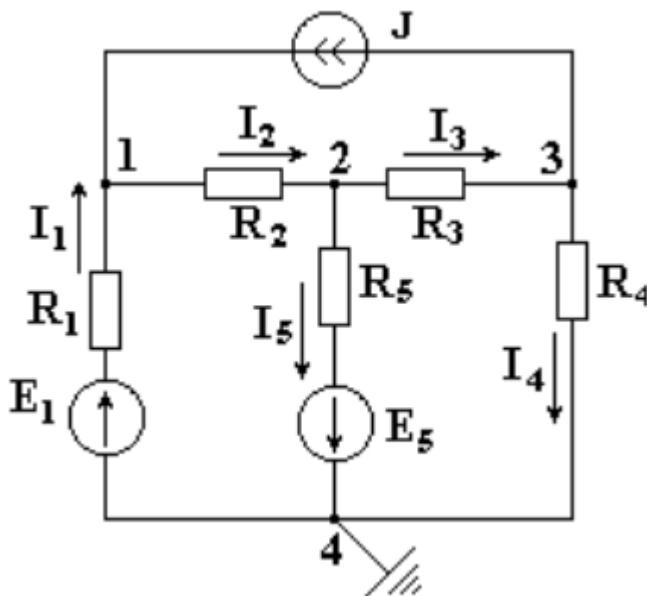


Рис. 3.17

Вузол, величину потенціалу якого вибирають довільно, називають базисним. Вкажемо в схемі довільно напрямки струмів. Прийmemo для схеми рис. 3.17 $\varphi_4 = 0$.

Запишемо рівняння за першим законом Кірхгофа для вузла 1:

$$I_1 + J - I_2 = 0, \quad (3.16)$$

Відповідно до законів Ома для активної і пасивної вітки:

$$I_1 = \frac{\varphi_4 - \varphi_1 + E_1}{R_1} = (-\varphi_1 + E_1) \cdot g_1$$

, де $g_1 = 1/R_1$ - провідність першої вітки;

$$I_2 = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R_2} = (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot g_2$$

де $g_1 = 1/R_1$ - провідність другої вітки;

Підставивши вирази струмів в рівняння (3.16):

$$\begin{aligned} -\varphi_1 g_1 + E_1 g_1 + J - \varphi_1 g_2 + \varphi_2 g_2 &= 0, \\ \varphi_1 (g_1 + g_2) - \varphi_2 g_2 &= E_1 g_1 + J, \\ \varphi_1 g_{11} - \varphi_2 g_{12} &= E_1 g_1 + J, \end{aligned} \quad (3.17)$$

де $g_{11} = g_1 + g_2$ - власна провідність вузла 1 (власною провідністю вузла називається сума провідностей віток, що сходяться в даному вузлі);

$g_{12} = g_2$ - загальна провідність між вузлами 1 і 2 (загальною провідністю називають провідність вітки, що з'єднує вузли 1 і 2);

$(E_1 g_1 + J)$ - сума струмів джерел, що знаходяться в вітках, що сходяться у вузлі 1.

Якщо струм джерела спрямований до вузла, величина його записується в праву частину рівняння зі знаком "плюс", якщо від вузла - зі знаком "мінус".

За аналогією запишемо для вузла 2:

$$\varphi_2 (g_2 + g_3 + g_5) - \varphi_1 g_2 - \varphi_3 g_3 = -E_5 g_5. \quad (3.18)$$

Для вузла 3:

$$\varphi_3 (g_3 + g_4) - \varphi_2 g_3 = -J. \quad (3.19)$$

Розв'язавши спільно рівняння (3.17), (3.18), (3.19), визначимо невідомі потенціали φ_1 , φ_2 , φ_3 , а потім за законом Ома для активної або пасивної вітки знайдемо струми.

Якщо число вузлів схеми - n , кількість рівнянь за методом вузлових потенціалів - $(n - 1)$.

Зауваження. Якщо в будь-якій вітці міститься ідеальне джерело ЕРС, необхідно один з двох вузлів, між якими включена ця вітка, вибрати в якості базисного, тоді потенціал іншого вузла виявиться відомим і рівним величині ЕРС. Кількість необхідних вузлових рівнянь стає на одне менше.

3.7 Метод вузлової напруги

Метод вузлової напруги полягає у визначенні напруг між вузлами складного

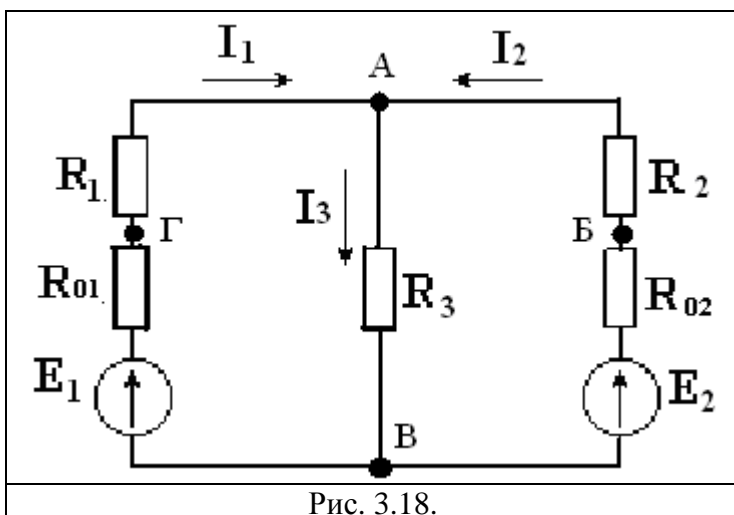


Рис. 3.18.

електричного кола шляхом розв'язку рівнянь, складених за першим законом Кірхгофа, куди в якості невідомих входять напруги між вузлами кола.

Методику розрахунку розглянемо на прикладі схеми рис. 3.18. Вихідні дані: $E_1=24$ В, $E_2=18$ В, $R_{01}=0,1$ Ом, $R_{02}=0,2$ Ом, $R_1=1,9$ Ом, $R_2=1,8$ Ом, $R_3=2$ Ом.

Визначити струми в вітках, визначити потужності джерел і приймачів електричної енергії і потужність втрат усередині джерел; скласти

баланс потужностей.

Алгоритм проведення розрахунку за методом вузлової напруги:

1. Визначаються провідності віток

$$g_1 = 1/(R_1 + R_{01}) = 1/(1,9 + 0,1) = 1/2 = 0,5 \text{ См};$$

$$g_2 = 1/(R_2 + R_{02}) = 1/(1,8 + 0,2) = 1/2 = 0,5 \text{ См}; \quad g_3 = 1/R_3 = 1/2 = 0,5 \text{ См}.$$

2. Визначається вузлова напруга:

$$U = (E_1 g_1 + E_2 g_2) / (g_1 + g_2 + g_3) = (24 \cdot 0,5 + 18 \cdot 0,5) / (0,5 + 0,5 + 0,5) = 21/1,5 = 14 \text{ В}.$$

3. Направимо струми у всіх вітках схеми від вузла В до вузла А. За законом Ома струми в вітках визначаються в такий спосіб:

$$I_1 = \frac{E_1 - U}{R_1 + R_{01}} = (E_1 - U) g_1 = (24 - 14) \cdot 0,5 = 5 \text{ А},$$

$$I_2 = \frac{E_2 - U}{R_2 + R_{02}} = (E_2 - U)g_2 = (18 - 14) \cdot 0.5 = 2A,$$

$$I_3 = (E_3 - U)g_3 = (0 - U)g_3 = -Ug_3 = -14 \cdot 0.5 = -7A.$$

Знак «мінус» у струмі I_3 показує, що напрямок струму не відповідає правильно вибраному. Змінимо в схемі напрямок струму на протилежний. Перевіряємо рішення задачі за першим законом Кірхгофа:

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0; 5 + 2 - 7 = 0.$$

Струми визначені правильно.

3. Визначаються:

- потужності джерел енергії:

$$P_{дж1} = E_1 I_1 = 24 \cdot 5 = 120 \text{ Вт},$$

$$P_{дж2} = E_2 I_2 = 18 \cdot 2 = 36 \text{ Вт};$$

- потужності приймачів електричної енергії:

$$P_1 = I_1^2 R_1 = 5^2 \cdot 1.9 = 47.5 \text{ Вт},$$

$$P_2 = I_2^2 R_2 = 2^2 \cdot 1.8 = 7.2 \text{ Вт},$$

$$P_3 = I_3^2 R_3 = 7^2 \cdot 2 = 98 \text{ Вт};$$

- потужності втрат усередині джерел:

$$P_{01} = I_2^2 R_{01} = 5^2 \cdot 0.1 = 2.5 \text{ Вт},$$

$$P_{02} = I_2^2 R_{02} = 2^2 \cdot 0.2 = 0.8 \text{ Вт}.$$

4. Складається баланс потужностей:

$$P_{дж1} + P_{дж2} = P_1 + P_2 + P_3 + P_{01} + P_{02},$$

$$120 + 36 = 47.5 + 7.2 + 98 + 2.5 + 0.8; 156 = 156.$$

Відповідно до закону збереження енергії сума потужностей джерел дорівнює сумі потужностей приймачів електричної енергії плюс втрати потужності усередині джерел.

3.7 Метод накладання (суперпозиції) струмів

У деяких випадках розрахунків електричних кіл можна виконати досить просто за допомогою принципу накладання.

Цей принцип застосовується тільки до лінійних систем, а в розглядуваному випадку — для розрахунку лінійних електричних кіл.

Розглянемо як приклад схему рис. 3.19, а, а і складемо для неї систему рівнянь за правилами Кірхгофа:

$$\left. \begin{aligned} I_1 R_1 + I_3 R_3 &= E_1; \\ I_2 R_2 + I_3 R_3 &= E_2; \\ I_1 + I_2 &= I_3. \end{aligned} \right\} \quad (3.20)$$

Струм кожної вітки з цієї системи лінійних рівнянь визначають однозначно. Розв'язання системи (3.20) дає вирази для струмів:

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= E_1 \frac{R_2 + R_3}{A} - E_2 \frac{R_3}{A}; \\ I_2 &= E_2 \frac{R_1 + R_3}{A} - E_1 \frac{R_2}{A}; \\ I_3 &= E_1 \frac{R_2}{A} + E_2 \frac{R_1}{A}, \end{aligned} \right\} \quad (3.21)$$

де $A = R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3$.

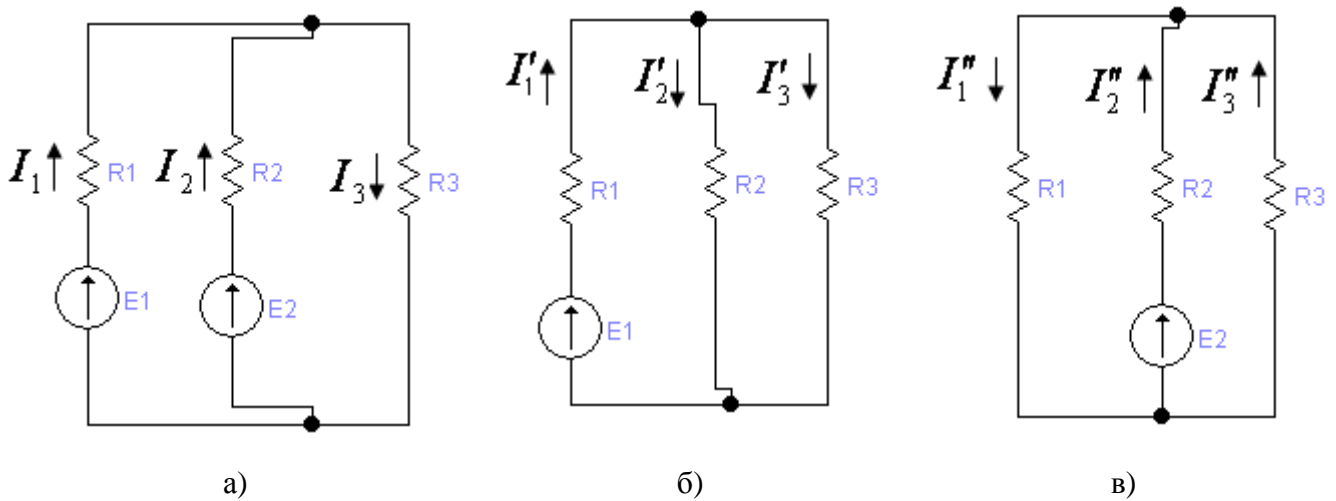


Рис. 3.19 - До методу накладання струмів

Порядок розрахунку методом накладання:

1. На основі початкової схеми складають окремі розрахункові схеми (рис. 3.19,б, в), в кожній з яких тільки одна ЕРС. Усі інші ЕРС вилучають, і від кожного джерела в схемі залишається тільки його внутрішній опір.

2. Будь-яким придатним методом визначають струми в окремих схемах, які найчастіше відносно прості.

Для окремих схем (рис. 3.19,б, в) вирази струмів, знайдені методом згортання, збігаються з (3.21), які було записано раніш із рівнянь Кірхгофа. Наприклад:

$$I'_1 = E_1 \frac{R_2 + R_3}{A}.$$

3. Алгебраїчним додаванням часткових струмів визначають струми в початковій схемі. В розглядуваному прикладі:

$$I_1 = I'_1 - I''_1; I_2 = -I'_2 + I''_2; I_3 = I'_3 + I''_3.$$

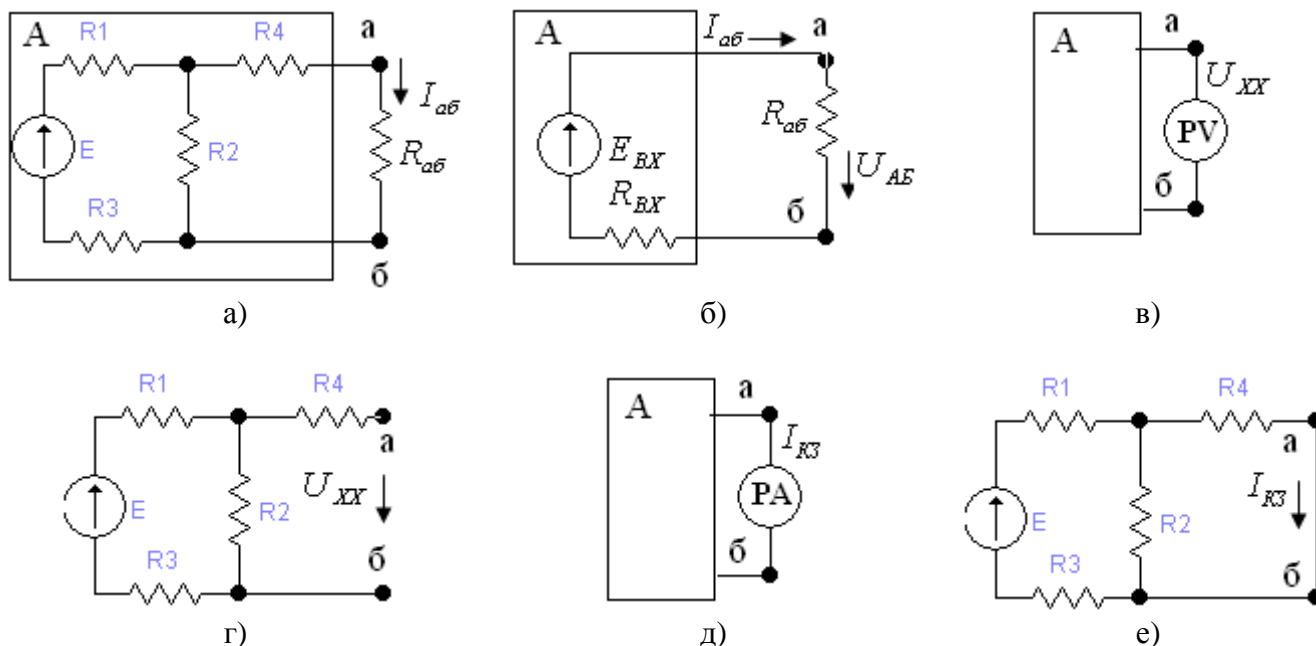
При визначенні загальних струмів необхідно правильно врахувати напрями часткових струмів: у початковій схемі визначають умовно-додатні напрями струмів у вітках. Частковий струм вважають додатним, якщо він має однаковий напрям з додатним струмом у тій самій вітці початкової схеми. Струм протилежного напрямку вважають від'ємним.

При такому підході загальні струми у вітках початкової схеми можуть бути додатними або від'ємними. В останньому випадку треба змінити напрям струму і вважати його додатним при подальших розрахунках.

3.8. Метод еквівалентного генератора

Метод еквівалентного генератора відомий ще під назвою методу активного двополюсника, або заступного двополюсника. Його застосовують у тих випадках, коли треба визначити струм або напругу в одній із віток розгалуженого кола. Оскільки у такому випадку решта струмів і напруг нас не цікавлять, то резонно застосувати специфічний метод.

Виділимо в схемі електричного кола потрібну нам вітку, а решту кола позначимо літерою А, яка означає, що коло є активним, тобто в ньому діють джерела (рис.3.20, а). Розірвемо вітку і визначимо напругу в місці розриву U_{xx} , яку назовемо напругою холостого ходу. Відтак знову замкнемо вітку, але ввімкнемо два джерела напруги $E=U_{xx}$, скеровані в різні боки. Оскільки ці джерела компенсують одне одного, то у вітці знову проходить реальний струм I (рис.3.20, б). Об'єднаємо верхнє джерело з рештою схеми. Воно компенсує дію джерел решти схеми і надасть їй пасивного характеру, у результаті чого у вітці струм буде відсутній (рис.3.20, в). Якщо тепер ввімкнемо нижнє джерело, то воно діятиме немовби в пасивній схемі (рис.3.20,г), на що вказує літера П. За методом перетворення пасивну схему спростимо до еквівалентного опору R_G . При цьому треба враховувати внутрішні опори джерел. Якщо джерела ідеальні, то джерела напруги треба на просто закортити.



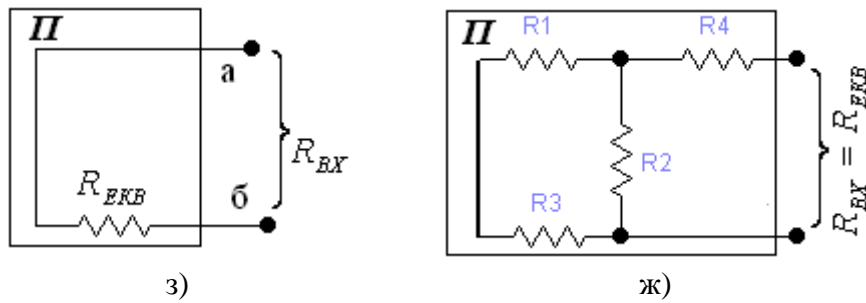


Рис. 3.20. - До методу еквівалентного генератора

Остання схема відтворює метод еквівалентного генератора – генератора з напругою U_{xx} і внутрішнім опором R_G .

З останньої схеми легко визначаємо шуканий струм

$$I = \frac{U_{xx}}{R_G + R}$$

Ця формула – метод еквівалентного генератора. Її зручність у тому, що напругу U_{xx} і опір R_G обчислюємо лише один раз, незалежно від зміни значення опору R . Користуючись будь-яким іншим методом, треба було б кожного разу при зміні R перераховувати усе коло в цілому.

Напругу U_{xx} і опір R_G знаходимо, як правило, розрахунковим шляхом. Якщо ж це неможливо, з успіхом можна скористатися експериментом. Це робиться так:

1. Розриваємо виділену вітку і в місці розриву вимірюємо напругу U_{xx} .
2. Закорочуємо вітку і вимірюємо струм короткого замикання $I_{кз}$.
3. Виходячи з формули визначаємо $R_G = U_{xx}/I_{кз}$.

У дуже складних колах і колах з невідомими структурою або параметрами експериментальне визначення U_{xx} і R_G є єдино можливе.

Приклад. Визначити струм I_5 у колі так званого моста (рис.3.21, а).

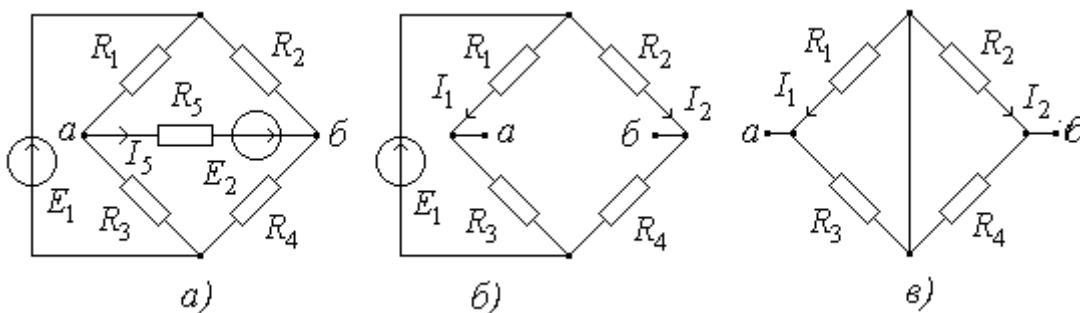


Рис. 3.21.

1. Від'єднуємо вітку зі струмом I_5 (рис.3.21, б).

2. Розраховуємо коло, що залишилося (режим розриву активного двополюсника) і визначаємо напругу $U_{абр}$ між точками $a, б$, до яких була під'єднана вітка.

$$\begin{aligned}
 U_{абр} = E_e &= -I_1 R_1 + I_2 R_2 = -\frac{E_1 R_1}{R_1 + R_3} + \frac{E_1 R_2}{R_2 + R_4} = \\
 &= \frac{E_1 (R_2 (R_1 + R_3) - R_1 (R_2 + R_4))}{(R_1 + R_3)(R_2 + R_4)}.
 \end{aligned}$$

Після спрощення виразу одержуємо: $U_{a\bar{b}p} = E_e = \frac{E_1(R_2R_3 - R_1R_4)}{(R_1 + R_3)(R_2 + R_4)}$.

Очевидно, якщо $R_2R_3 = R_1R_4$ то $U_{a\bar{b}p} = 0$ (мостова схема врівноважена).

3. Видаляємо із схеми E_2 , замінивши її внутрішнім опором (закоротка), визначаємо вхідний опір $R_{a\bar{b}}$ відносно точок a, \bar{b} (рис.3.21, в). Опори R_1 і R_3 , R_2 і R_4 з'єднані паралельно, а між собою - послідовно.

$$R_{a\bar{b}} = R_{ex} = R_e = \frac{R_1R_3}{R_1 + R_3} + \frac{R_2R_4}{R_2 + R_4}$$

4. Струм I_5 визначається за формулою: $I_5 = \frac{U_{a\bar{b}p} + E_2}{R_{ex} + R_5} = \frac{E_e + E_2}{R_e + R_5}$.

3.9 Аналіз електричних кіл матричним методом

Розглянуті методи розрахунку електричних ланцюгів - безпосередньо за законами Кірхгофа, методи контурних струмів і вузлових потенціалів - дозволяють принципово розрахувати будь-яку схему. Використання матричних методів розрахунку дозволяє формалізувати процес складання рівнянь електромагнітного балансу ланцюга, а також порядок введення даних в ЕОМ, що особливо важливо при розрахунку складних розгалужених схем. Переходячи до матричних методів розрахунку ланцюгів, запишемо закон Ома в матричній формі.

Нехай маємо схему рис. 3.22, де J_k - джерело струму. Відповідно до закону Ома для ділянки кола з ЕРС для даної схеми можна записати:

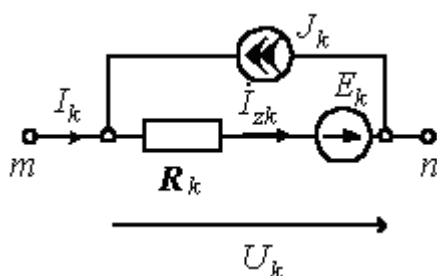


Рис. 3.22.

$$\dot{U}_{zmk} = \dot{U}_k = \dot{I}_{zk} Z_k - \dot{E}_k. \quad (3.22)$$

Однак, для подальших викладок буде зручніше

представити струм \dot{I}_{zk} як суму струмів k -ї вітки та джерела струму, тобто:

$$\dot{I}_{zk} = \dot{I}_k + \dot{J}_k. \quad (3.23)$$

Підставивши (3.23) в (3.22), отримаємо:

$$\dot{U}_k = Z_k (\dot{I}_k + \dot{J}_k) - \dot{E}_k. \quad (3.24)$$

Формула (3.24) представляє собою аналітичний вираз закону Ома для ділянки кола з джерелом ЕРС і струму (узагальненої вітки).

Рівняння (3.24) запишемо для всіх n віток схеми в вигляді матричного рівняння

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \\ \vdots \\ \dot{U}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_1 & & & \\ & \underline{Z}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \underline{Z}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 + \dot{J}_1 \\ \dot{I}_2 + \dot{J}_2 \\ \vdots \\ \dot{I}_n + \dot{J}_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{E}_1 \\ \dot{E}_2 \\ \vdots \\ \dot{E}_n \end{bmatrix},$$

$$\text{або} \quad \dot{U} = \underline{Z}(\dot{I} + \dot{J}) - \dot{E}, \quad (3.25)$$

де \underline{Z} – діагональна квадратна (розмірністю $n \times n$) матриця опорів віток, всі елементи якої (взаємну індуктивність не враховуємо), за виключенням елементів головної діагоналі, рівні нулю.

Відношення (3.25) представляє собою матричний запис закону Ома. Якщо обидві частини рівняння (3.25) помножити зліва на контурну матрицю \mathbf{B} і врахувавши другий закон Кірхгофа, відповідно до якого

$$\mathbf{B}\dot{U} = \mathbf{0}, \quad (5)$$

то

$$\mathbf{B}\underline{Z}(\dot{I} + \dot{J}) = \mathbf{B}\dot{E}, \quad (6)$$

тобто отримали новий запис в матричній формі другого закону Кірхгофа.

Метод контурних струмів в матричній формі

Відповідно до введеного раніше поняття матриці головних контурів \mathbf{B} , записаної для головних контурів, в якості незалежних змінних приймемо струми віток, які й будуть рівні шуканим контурним струмам.

Рівняння з контурними струмами отримуємо на підставі другого закону Кірхгофа; їх число дорівнює числу незалежних рівнянь, складених для контурів, тобто числу віток

$c = n - m + 1$. Вираз (6) запишемо наступним чином:

$$\mathbf{B}\underline{Z}\dot{I} = \mathbf{B}\dot{E} - \mathbf{B}\underline{Z}\dot{J}. \quad (7)$$

В соответствии с методов контурных токов токи всех ветвей могут быть выражены как линейные комбинации контурных токов или в рассматриваемом случае токов ветвей связи. Если элементы j -го столбца матрицы \mathbf{B} умножить соответствующим образом на контурные токи, то сумма таких произведений и будет выражением тока j -й ветви через контурные токи (через токи ветвей связи). Сказанное может быть записано в виде матричного соотношения

Відповідно до методу контурних струмів струми всіх віток можуть бути виражені як лінійні комбінації контурних струмів. Якщо елементи j -го стовпця матриці \mathbf{B} помножити відповідним чином на контурні струми, то сума таких добутків і буде вираженням струму j -ї гілки через контурні струми (через струми віток). Сказане може бути записано у вигляді матричного співвідношення

$$\dot{I} = \mathbf{B}^T \dot{I}_k, \quad (8)$$

Де \dot{I}_k - матриця стовбців контурних струмів; \mathbf{B}^T - транспонована контурна матриця. З урахуванням (8) співвідношення (7) можна записати, як:

$$\underline{BZB}^T \dot{\mathbf{I}}_k = \underline{B}\dot{\mathbf{E}} - \underline{BZJ} \quad (9)$$

Отримане рівняння являє собою контурне рівняння в матричній формі. Якщо позначити

$$\underline{Z}_k = \underline{BZB}^T, \quad (10)$$

$$\dot{\mathbf{E}}_k = \underline{B}\dot{\mathbf{E}} - \underline{BZJ}, \quad (11)$$

то отримаємо матричну форму запису рівнянь, складених за методом контурних струмів

$$\underline{Z}_k \dot{\mathbf{I}}_k = \dot{\mathbf{E}}_k, \quad (12)$$

де \underline{Z}_k - матриця контурних опорів; $\dot{\mathbf{E}}_k$ - матриця контурних ЕРС.

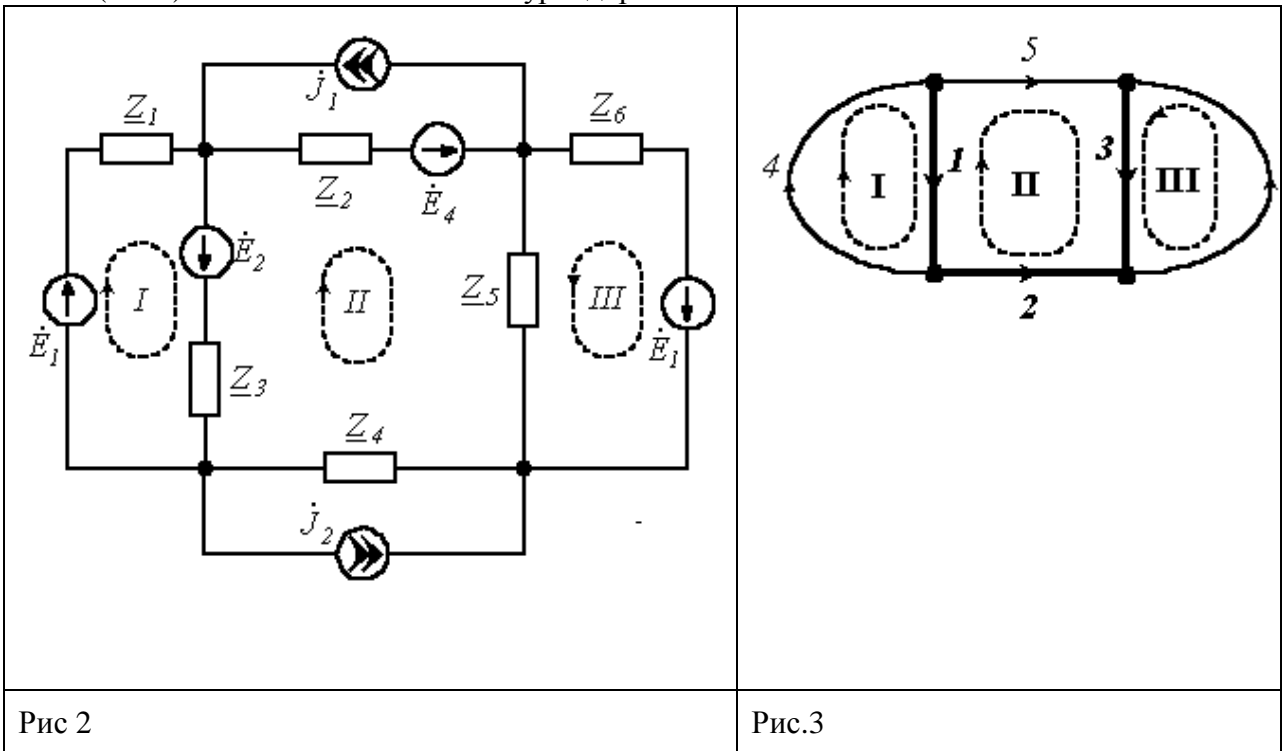
У розгорнутій формі (12) можна записати, як:

$$\begin{bmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} & \cdots & \underline{Z}_{1c} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} & \cdots & \underline{Z}_{2c} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \underline{Z}_{c1} & \underline{Z}_{c2} & \cdots & \underline{Z}_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_{k1} \\ \dot{I}_{k2} \\ \vdots \\ \dot{I}_{kc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{E}_{k1} \\ \dot{E}_{k2} \\ \vdots \\ \dot{E}_{kc} \end{bmatrix}, \quad (13)$$

тобто отримали відомий з методу контурних струмів результат.

Розглянемо приклад складання контурних рівнянь.

Нехай маємо схему за рис. 2. Дана схема має чотири вузли ($m = 4$) і шість узагальнених гілок ($n = 6$). Число незалежних контурів дорівнює $c = n - m + 1 = 6 - 4 + 1 = 3$



Граф схеми з обраним деревом (гілки 1, 2, 3) має вигляд за рис. 3.

Запишемо матрицю контурів, яка є матрицею головних контурів, оскільки кожна гілка зв'язку входить тільки в один контур. Беручи за напрямок обходу контурів напрямки гілок, отримаємо:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Діагональна матриця опорів гілок

$$\underline{Z} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_3 & & & & & \\ & \underline{Z}_4 & & & & \\ & & \underline{Z}_5 & & & \\ & & & \underline{Z}_1 & & \\ & & & & \underline{Z}_2 & \\ & & & & & \underline{Z}_6 \end{bmatrix}$$

Матриця контурних опорів

$$\underline{Z}_k = B \underline{Z} B^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{Z}_3 & & & & & \\ & \underline{Z}_4 & & & & \\ & & \underline{Z}_5 & & & \\ & & & \underline{Z}_1 & & \\ & & & & \underline{Z}_2 & \\ & & & & & \underline{Z}_6 \end{bmatrix} \times$$

$$\begin{aligned} \times \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \underline{Z}_3 & 0 & 0 & \underline{Z}_1 & 0 & 0 \\ -\underline{Z}_3 & -\underline{Z}_4 & \underline{Z}_5 & 0 & \underline{Z}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{Z}_5 & 0 & 0 & \underline{Z}_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} (\underline{Z}_3 + \underline{Z}_1) & -\underline{Z}_3 & 0 \\ -\underline{Z}_3 & (\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4 + \underline{Z}_5 + \underline{Z}_2) & \underline{Z}_5 \\ 0 & \underline{Z}_5 & (\underline{Z}_5 + \underline{Z}_6) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Матриця ЕРС і струмів джерел

$$\dot{\underline{E}} = [\dot{E}_2 \quad 0 \quad 0 \quad \dot{E}_1 \quad \dot{E}_4 \quad -\dot{E}_3]^T$$

$$\dot{\mathbf{J}} = \begin{bmatrix} 0 & -j_2 & 0 & 0 & j_1 & 0 \end{bmatrix}^T$$

Тоді матриця контурних ЕРС

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}_k &= \mathbf{B}\dot{\mathbf{E}} - \mathbf{B}\mathbf{Z}\dot{\mathbf{J}} = \mathbf{B}(\dot{\mathbf{E}} - \mathbf{Z}\dot{\mathbf{J}}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{E}_2 - 0 \\ 0 + j_2 \underline{Z}_4 \\ 0 - 0 \\ \dot{E}_1 - 0 \\ \dot{E}_4 - j_1 \underline{Z}_2 \\ -\dot{E}_3 - 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \dot{E}_2 + \dot{E}_1 \\ -\dot{E}_2 - j_2 \underline{Z}_4 + \dot{E}_4 - j_1 \underline{Z}_2 \\ -\dot{E}_3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Матриця контурних струмів

$$\dot{\mathbf{I}}_k = \begin{bmatrix} \dot{I}_{k1} & \dot{I}_{k2} & \dot{I}_{k3} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \dot{I}_4 & \dot{I}_5 & \dot{I}_6 \end{bmatrix}^T$$

Таким чином, отримуємо:

$$\begin{bmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} & \underline{Z}_{13} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} & \underline{Z}_{23} \\ \underline{Z}_{31} & \underline{Z}_{32} & \underline{Z}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_4 \\ \dot{I}_5 \\ \dot{I}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{E}_{k1} \\ \dot{E}_{k2} \\ \dot{E}_{k3} \end{bmatrix},$$

де $\underline{Z}_{11} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_3$; $\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21} = -\underline{Z}_3$; $\underline{Z}_{13} = \underline{Z}_{31} = 0$; $\underline{Z}_{22} = \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4 + \underline{Z}_5$;
 $\underline{Z}_{23} = \underline{Z}_{32} = \underline{Z}_5$; $\underline{Z}_{33} = \underline{Z}_5 + \underline{Z}_6$; $\dot{E}_{k1} = \dot{E}_1 + \dot{E}_2$; $\dot{E}_{k2} = \dot{E}_4 - \dot{E}_2 - j_2 \underline{Z}_4 - j_1 \underline{Z}_2$;
 $\dot{E}_{k3} = -\dot{E}_3$.

Аналіз результатів показує, що отримані три рівняння ідентичні тим, які можна записати безпосередньо з розгляду схеми по відомим правилам складання рівнянь за методом контурних струмів.

$$\begin{bmatrix} \underline{Z}_1 + \underline{Z}_3 & -\underline{Z}_3 & -\underline{Z}_3 \\ -\underline{Z}_3 & \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4 & \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4 \\ -\underline{Z}_3 & \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4 & \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4 + \underline{Z}_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \dot{I}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{E}_1 - j_3 \underline{Z}_3 \\ j_3 \underline{Z}_3 - j_4 \underline{Z}_4 + \dot{E}_2 \\ j_3 \underline{Z}_3 - j_4 \underline{Z}_4 \end{bmatrix}.$$

4 Кола однофазного гармонійного змінного струму

4.1. Періодичні коливання. Гармонійні коливання

Переходимо до вивчення методів розрахунку лінійних електричних кіл, що знаходяться під впливом змінних струмів і напруг. Змінні в часі величини можуть змінюватися за будь-яким законом.

Значення змінної величини у будь-який момент часу називається її *миттєвим значенням*. На рис. 4.1,а показаний струм, що змінюється в часі по синусоїдальній функції і миттєві значення його в моменти часу t_1, t_2, t_3, t_4 ; на рис. 4.1,б – струм, що має імпульсний характер, і його миттєві значення у момент часу t_1, t_2 .

Електромагнітний процес в електричному колі, при якому миттєві значення повторюються через рівні проміжки часу називається *періодичним*.

Якнайменший інтервал часу, через який миттєве значення періодичної величини повторюється, називається *періодом* T . На рис. 4.1,а показаний графік струму, що змінюється за періодичним законом і його період.

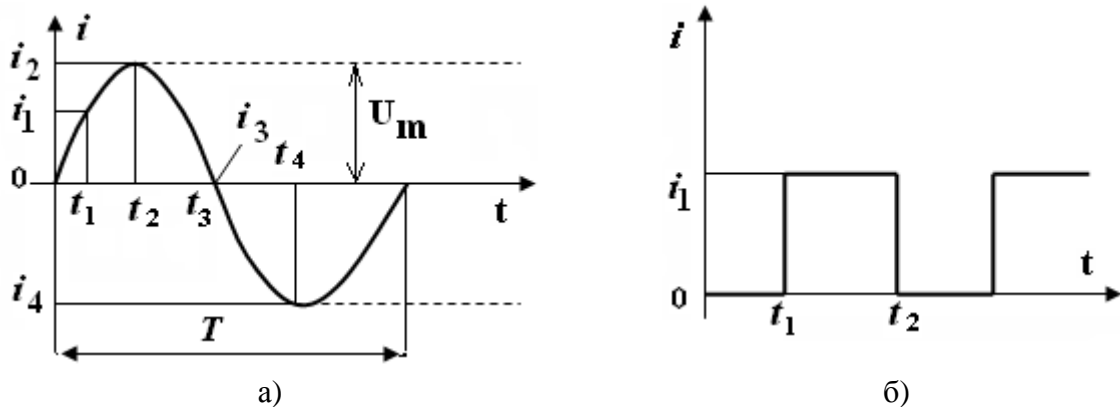


Рис. 4.1.

Період коливання вимірюється в секундах, [с]. Величина обернена періоду, називається *частотою коливання* $f=1/T$. Одиниця частоти – герц [Гц].

Фізично, частота показує скільки періодів коливання укладається на інтервалі t часу за одну секунду.

Змінним електричним струмом називається такий струм, величина і напрям якого змінюється за гармонійним законом.

Такий струм можна отримати, якщо виток дроту рівномірно обертати в однорідному магнітному полі відносно осі, перпендикулярної до напрямку ліній магнітної індукції (рис. 4.2).

Магнітний потік, який пронизує контур рамки, визначається так:

$$\Phi = B \cdot S \cdot \cos \alpha = \Phi_m \cos \omega t, \quad (4.1)$$

де $\alpha = (\vec{n}, \vec{B}) = \omega t$ - кут між напрямом нормалі \vec{n} до площини рамки і

напрямом вектора \vec{B} ; $\omega = 2\pi f$ - кутова швидкість обертання рамки; f - частота обертання; S - площа рамки; Φ_m - максимальне значення магнітного потоку (при $\alpha = 0$).

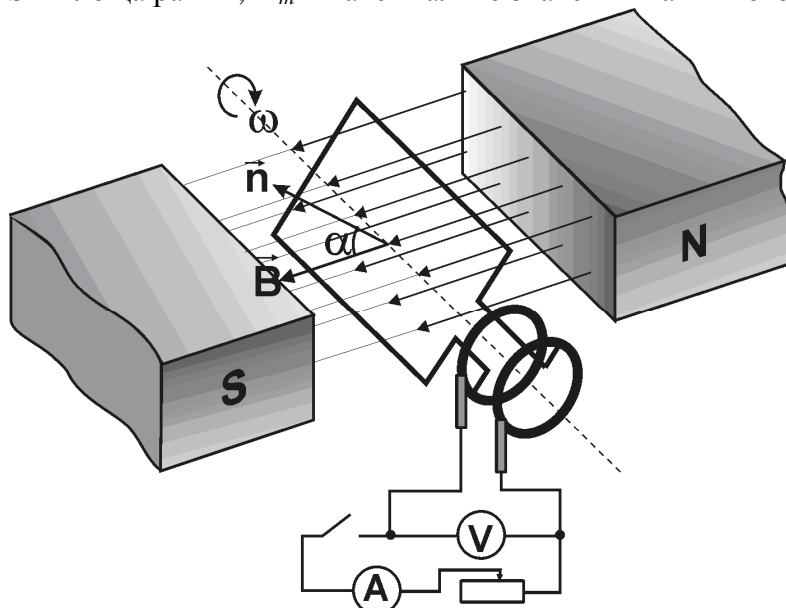


Рис. 4.2

В основі виникнення змінної ЕРС покладене явище електромагнітної індукції. Величина ЕРС, що виникає у рамці дорівнює:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= -\frac{d\Phi}{dt} = \Phi_m \omega \sin \omega t = \\ &= \mathcal{E}_m \sin \omega t, \end{aligned} \quad (4.2)$$

де \mathcal{E}_m - амплітудне значення ЕРС.

З даної формули випливає, що ЕРС, яка виникає у рамці, що обертається з постійною кутовою швидкістю ω в магнітному полі змінюється за синусоїдальним законом з циклічною частотою

$\omega = 2\pi f$. Таким чином кутова швидкість обертання рамки є одночасно циклічною частотою коливання ЕРС і сили змінного струму. З формул (4.1) і (4.2) видно, що коли магнітний потік максимальний, то ЕРС мінімальна і навпаки. Якщо кінці рамки приєднати до мідних кілець, до яких притиснуті вугільні контакти (щітки), а до них - споживач R , то в колі буде протікати змінний струм

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}_m}{R+r} \cdot \sin \omega t = I_m \sin \omega t,$$

де $R+r$ - повний опір кола, $i(t)$ - миттєве, I_m - амплітудне значення сили струму.

Як загальну, використовують формулу запису миттєвого значення безперервного періодичного сигналу синусоїдної форми

$$a = A_m \sin(\omega t + \psi) = A_m \sin \left[\omega \left(t + \frac{\psi}{\omega} \right) \right], \quad (4.3)$$

де A_m - максимальне значення, або амплітуда; $\omega t + \psi$ - фаза (фазовий кут); ψ - початкова фаза (початковий фазовий кут); ω - кутова частота.

Початкову фазу коливання прийнято вимірювати в межах $\pm \pi$ ($\pm 180^\circ$).

4.2 Діючі та середні значення електричних величини

Крім миттєвих та амплітудних величин в колах змінного струму широко використовують діючі значення. Поняття діючого значення визначається з умови рівності теплового ефекту змінного і постійного струмів. Хай через деяку ділянку електричного кола з опором r протікає змінний струм i . Тоді за законом Джоуля-Ленца на цій ділянці за час T , відповідне періоду струму i , буде виділено кількість тепла рівне

$$Q = \int_0^T i^2 r dt$$

Позначимо I деякий постійний струм, при протіканні якого по ділянці кола за час T виділиться така ж кількість тепла. Тоді з врахуванням того, що $i = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$ отримаємо:

$$I^2 r T = \int_0^T i^2 r dt \Rightarrow I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [I_m \sin(\omega t + \psi_i)]^2 dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0,707 I_m \quad (4.4)$$

тобто величина постійного струму еквівалентного змінному струму за кількістю виділеного тепла називається **діючим** або **середньоквадратичним значенням змінного струму**. Діючі значення позначаються прописними буквами без індексу.

За аналогією зі струмом діючі значення вводяться для напруги та ЕРС:

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}; \quad I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}; \quad E = \frac{E_m}{\sqrt{2}}. \quad (4.5)$$

Діючі значення позначаються прописними буквами без індексу.

Під **середнім значенням періодичного коливання** розуміють

$$a_{cp} = \frac{1}{T} \int_0^T a(t) dt.$$

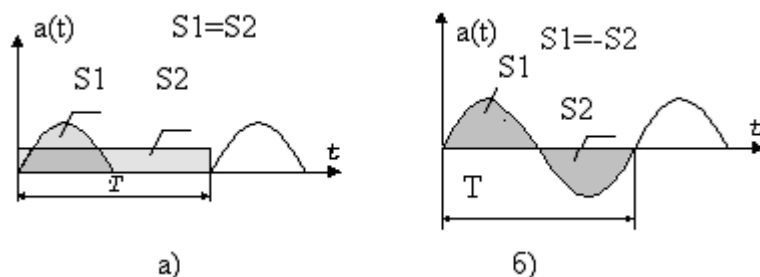


Рис. 4.3.

Геометрично (рис.4.3,а), середнє значення періодичної функції – висота прямокутника з основою T , площа якого рівна площі фігури, обмеженої функцією $a(t)$. Для синусоїдальної функції a_{cp} , визначене за період, буде рівне нулю (рис.4.3,б), тому для синусоїдальної функції середнє

значення визначається за напівперіод.

Знайдемо середнє значення синусоїдальної величини:

$$a_{cp} = \frac{1}{T/2} \int_0^{T/2} a(t) dt = \frac{1}{T/2} \int_0^{T/2} A_m \cdot \sin \omega t dt = \frac{A_m}{\pi/2}$$

$$(U_{CP} = \frac{2U_m}{\pi}; \quad I_{CP} = \frac{2I_m}{\pi}; \quad E_{CP} = \frac{2E_m}{\pi}). \quad (4.6)$$

4.3 Зображення синусоїдальних ЕРС, напруг і струмів за допомогою обертових векторів. Векторні діаграми

Синусоїдальні ЕРС, напруги і струми, що мають кутову частоту ω , можна зображувати векторами, що обертаються з кутовою швидкістю, рівної ω , причому довжина вектора визначається у відповідному масштабі амплітудою ЕРС, напруги чи струму.

На рис.4.5 зображена за допомогою обертового вектора синусоїдальна ЕРС $e = E_m \sin(\omega t + \psi)$. Якщо кут $(\omega t + \psi)$ відраховується від горизонтальної осі, то проекція обертового вектора на вертикальну вісь дорівнює в обраному масштабі миттєвій ЕРС.

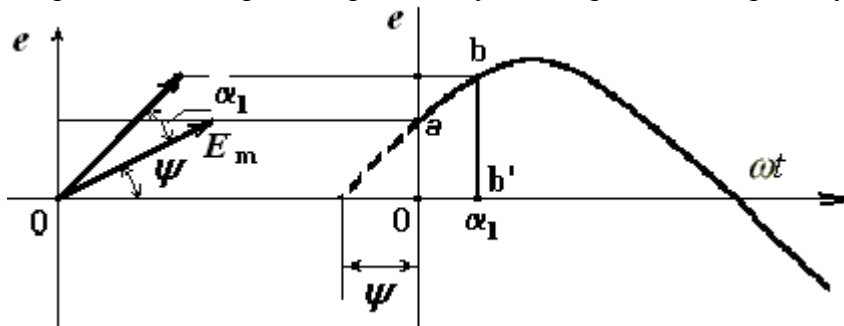


Рис. 4.5.

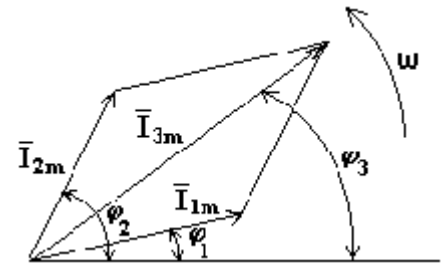


Рис. 4.6.

Нехай маємо струм i , рівний сумі струмів i_1 і i_2 однієї і тієї ж частоти:

$$i = i_1 + i_2 = I_{1m} \sin(\omega t + \psi_1) + I_{2m} \sin(\omega t + \psi_2) = I_m \sin(\omega t + \psi)$$

Зобразимо струми i_1 і i_2 обертовими векторами (рис. 4.6). Тому що проекція на будь-яку вісь геометричної суми двох векторів дорівнює алгебраїчній сумі їхніх проекцій на цю вісь, струм i зображується обертовим вектором, що дорівнює геометричній сумі векторів, що зображують струми i_1 і i_2 .

При розгляді сталих синусоїдальних процесів початкову фазу однієї з величин можна вибрати довільно, наприклад початкову фазу ЕРС чи прикладеної напруги. Відповідно довільно може бути розташований у початковий момент часу вектор, що зображує цю величину. Вектори всіх інших величин при цьому будуть повернені стосовно нього на кути, рівні зміщенням фаз.

Сукупність векторів, що характеризують процеси, що відбуваються в тім чи іншому колі змінного струму, і побудованих з дотриманням правильної орієнтації їх відносно один одного, називають **векторною діаграмою**.

Тому що звичайно ми цікавимося діючими значеннями синусоїдальних функцій, що у $\sqrt{2}$ менше їхніх амплітуд, тому доцільно на векторній діаграмі довжину векторів вибирати рівними в обраному масштабі діючим ЕРС, струмам і напругам. Наприклад, на рис.4.7 зображена векторна діаграма напруги u і струму i , причому струм зміщений стосовно напруги на кут φ .

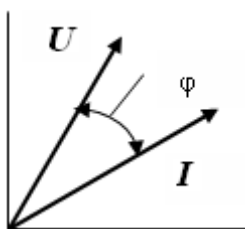


Рис. 4.7.

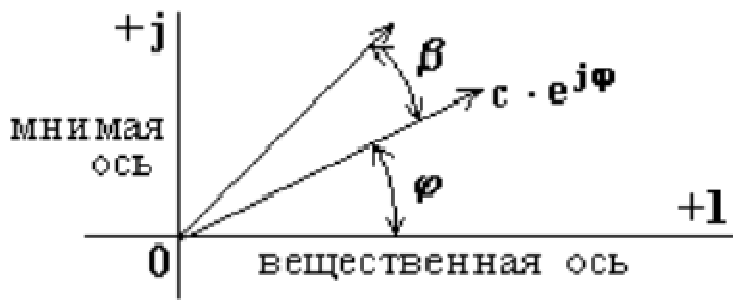
Надалі вектори, що зображують синусоїдальні функції часу, будемо позначати тими ж буквами, що і діючі чи максимальні значення цих функцій, але з ризикою над буквою на відміну від позначення жирним шрифтом векторів, що зображують характеристики фізичних полів.

5.3 Короткі відомості про комплексні числа

6.3. Изображение синусоидальных функций времени в комплексной форме

При расчетах цепей синусоидального тока используют символический метод расчета или метод комплексных амплитуд. В этом методе сложение двух синусоидальных токов заменяют сложением двух комплексных чисел, соответствующих этим токам.

Из курса математики известно, что комплексное число может быть записано в показательной или алгебраической форме:



$$C = c \cdot e^{j\varphi} = a + j \cdot b$$

где c - модуль комплексного числа;
 φ - аргумент;
 a - вещественная часть
 комплексного числа;
 b - мнимая часть;
 j - мнимая единица, $j = \sqrt{-1}$.

С помощью формулы Эйлера можно перейти от показательной формы записи к алгебраической.

$$c \cdot e^{j\varphi} = c \cdot \cos \varphi + j \cdot c \cdot \sin \varphi = a + j \cdot b$$

$$a = c \cdot \cos \varphi \quad b = c \cdot \sin \varphi$$

От алгебраической формы записи переходят к показательной форме с помощью формул:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$$

Комплексное число может быть представлено в виде радиус - вектора в комплексной плоскости. Вектор длиной, равной модулю c , расположен в начальный момент времени под углом φ относительно вещественной оси (рис.6.3).

Умножим комплексное число на множитель $e^{j\beta}$.
 Радиус - вектор на комплексной плоскости повернется на угол β .
 Множитель $e^{j\beta}$ называется поворотным.

Рис.6.3

$$c \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{j\beta} = c \cdot e^{j(\varphi+\beta)}$$

Если $\beta = \omega \cdot t$, то вектор, умноженный на $e^{j\omega t}$, превратится во вращающийся со скоростью ω радиус - вектор.

Выражение $c \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{j\varphi} = c \cdot e^{j(\omega t + \varphi)}$ называется комплексной функцией времени.

Применительно к напряжению, получим $U_m \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{j\varphi} = \dot{U}_m \cdot e^{j\omega t}$ - комплексную функцию времени для напряжения.

$\dot{U}_m = U_m \cdot e^{j\varphi}$ - комплексная амплитуда напряжения (исходное положение вектора в комплексной плоскости). Определим, чему равна мнимая часть комплексной функции времени для напряжения.

$$J_m [\dot{U}_m \cdot e^{j\omega t}] = J_m [U_m \cdot e^{j(\omega t + \varphi)}] = \\ = J_m [U_m \cdot \cos(\omega t + \varphi) + jU_m \cdot \sin(\omega t + \varphi)] = U_m \cdot \sin(\omega t + \varphi) = u$$

Мгновенное синусоидальное напряжение (ток, ЭДС) является мнимой частью соответствующей комплексной функции времени.

Замечание. В электротехнике над символами, изображающими комплексные напряжения, токи, ЭДС, принято ставить точку.

Синусоидальные функции времени могут быть представлены векторами в комплексной плоскости, вращающимися против часовой стрелки с постоянной угловой скоростью ω . Проекция вектора на мнимую ось изменяется по синусоидальному закону.

Пример.

$$i_1 = 3 \cdot \sin(314 \cdot t + 30^\circ) \text{ A}; \quad i_2 = 2 \cdot \sin(314 \cdot t + 45^\circ) \text{ A};$$

$$i_3 = i_1 + i_2 = I_{3m} \cdot \sin(314 \cdot t + \varphi_3)$$

Сложение синусоидальных токов заменим сложением комплексных амплитуд, соответствующих этим токам.

$$\dot{I}_{1m} = 3 \cdot e^{j30^\circ} \quad \dot{I}_{2m} = 2 \cdot e^{j45^\circ}$$

$$\begin{aligned} \dot{I}_{3m} &= \dot{I}_{1m} + \dot{I}_{2m} = 3 \cdot e^{j30^\circ} + 2 \cdot e^{j45^\circ} \\ &= 3 \cdot \cos 30^\circ + j \cdot 3 \cdot \sin 30^\circ + 2 \cdot \cos 45^\circ + j \cdot 2 \cdot \sin 45^\circ = \\ &= 2,6 + j \cdot 1,5 + 1,414 + j \cdot 1,414 = 4,014 + j \cdot 2,914 = \\ &= \sqrt{4,014^2 + 2,914^2} \cdot e^{j \arctg \frac{2,914}{4,014}} = 4,96 \cdot e^{j36,2^\circ}. \end{aligned}$$

Амплитуда результирующего тока $I_{3m} = 4,96 \text{ A}$, начальная фаза - $\varphi_3 = 36,2^\circ$.

Мгновенное значение результирующего тока

$$i_3 = 4,96 \cdot \sin(314 \cdot t + 36,2^\circ) \text{ A}.$$

Законы Ома и Кирхгофа в комплексной форме:

$$\dot{I}_m = \frac{\dot{U}_m}{R} \quad \text{закон Ома;} \quad (6.4)$$

$$\sum \dot{I}_m = 0 \quad \text{- первый закон Кирхгофа;} \quad (6.5)$$

$$\sum \dot{E}_m = \sum \dot{U}_m \quad \text{- второй закон Кирхгофа. (6.6)}$$

Комплексним числом називається число вигляду $A = A' + jA''$,

де A' , A'' – дійсні числа, а $j = \sqrt{-1}$; A' – дійсна частина комплексного числа A ; A'' – уявна частина комплексного числа A .

Геометричне представлення комплексного числа A в площині комплексного змінного показано на рис. 5.8. Запис комплексного числа вигляду $A = A' + jA''$ називається алгебраїчною формою запису. Положення точки на площині цілком визначається радіусом-вектором точки, тому комплексне число можна записати в системі полярних координат через радіус A і кут $\psi = A = Ae^{j\psi}$. Ця форма запису комплексного числа називається показовою (символічною). Довжина радіусу-вектора A – модуль комплексного числа – пов'язана з координатами A' і A'' таким чином

$$A = \sqrt{(A')^2 + (A'')^2}$$

Аргумент комплексного числа

$$\psi = \arctg \frac{A''}{A'}$$

Кут ψ завжди відлічується від позитивного напрямку дійсної осі. Вираз A' і A'' через A і ψ наступний

$$A' = A \cos \psi \quad A'' = A \sin \psi$$

У електротехніці часто використовують запис комплексного числа в показовій формі в рядок $A = Ae^{j\psi} = AA \angle \psi$ (A кут ψ).

Комплексно-зв'язаним числом до числа A називається комплексне число вигляду

$$A^* = A' - jA'' = Ae^{-j\psi}$$

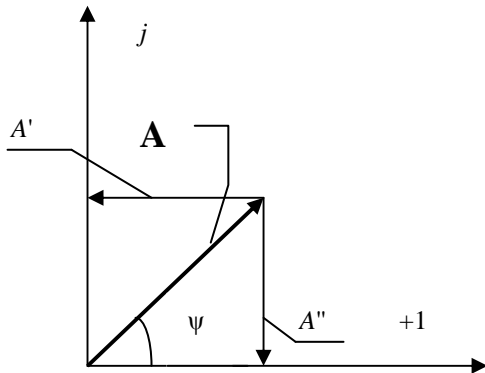


Рисунок 5.8

Складання і віднімання комплексних чисел зручніше проводити у алгебраїчній формі. Якщо $\underline{A}_1 = A_1' + jA_1'' = A_1 e^{j\psi_1}$, $\underline{A}_2 = A_2' + jA_2'' = A_2 e^{j\psi_2}$, то $\underline{A}_1 \pm \underline{A}_2 = (A_1' \pm A_2') + j(A_1'' \pm A_2'')$.

Множення, ділення, добування кореня, зведення в ступінь вимагає менших обчислень при використуванні показової форми запису.

$$\begin{aligned} \underline{A}_1 \underline{A}_2 &= A_1 e^{j\psi_1} \cdot A_2 e^{j\psi_2} = A_1 A_2 e^{j(\psi_1 + \psi_2)}, \\ \frac{\underline{A}_1}{\underline{A}_2} &= \frac{A_1 e^{j\psi_1}}{A_2 e^{j\psi_2}} = \frac{A_1}{A_2} e^{j(\psi_1 - \psi_2)}, \\ \underline{A}_1^n &= (A_1 e^{j\psi_1})^n = A_1^n e^{jn\psi_1}, \\ \sqrt[n]{\underline{A}_1} &= \sqrt[n]{A_1 e^{j\psi_1}} = \sqrt[n]{A_1} e^{j\psi_1/n}. \end{aligned}$$

(5.2.1)

У табл. 5.2.1 приведено зведення різних форм запису комплексного числа.

Можливі помилки у визначенні аргументу комплексного числа, якщо A знаходиться в другій або третій чвертях. Наприклад, число $A = -3 + j2$ перевести з алгебраїчної форми в

показову. **Зобразимо** число A на комплексній площині (рис. 5.2.2). Аргументом комплексного числа буде **кут ψ** , відлічуваний від позитивного **напрямку** дійсної осі.

Кут ψ можна знайти двома шляхами (рис. 5.2.2) $\psi = 180^\circ - \alpha = 90^\circ + \beta$.

Таблиця 5.2.1

Запис комплексного числа	Назва форми запису	Зв'язок форм запису
$A = A' + jA''$	алгебраїчна	
$A = Ae^{j\psi}$	показова	$A = \sqrt{(A')^2 + (A'')^2} \quad \psi = \arctg \frac{A''}{A'}$
$A = A \cos \psi + jA \sin \psi$	тригонометрична	$A \cos \psi = A', A \sin \psi = A''$

Кут α з прямокутного трикутника рамен

$$\alpha = \arctg 2/3, \text{ кут } \beta = \arctg 3/2.$$

Аргумент комплексного числа може бути записаний в двох видах

$$\psi = 180^\circ - \alpha = 180^\circ - \arctg 2/3 = 90^\circ + \beta = 90^\circ + \arctg 3/2.$$

Остаточно, число A у алгебраїчній і показовій формі має **вигляд**:

$$\underline{A} = -3 + j2 = \sqrt{13} e^{j(180^\circ - \arctg \frac{2}{3})} = \sqrt{13} e^{j(90^\circ + \arctg \frac{3}{2})}$$

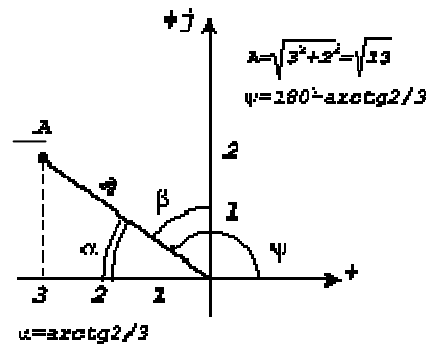


Рис. 5.2.2.

Якщо комплексне число має **негативну** дійсну частину, **потрібно** при **перекладі з** алгебраїчної форми запису, в показову **зобразити** число на комплексній площині і **знаходити** його аргумент через додаткові **кути**. Використовуючи різні форми запису комплексного числа (табл. 5.2.1), **одержимо** декілька корисних співвідношень

$$e^{j\alpha} = 1 \cdot e^{j\alpha} = \cos \alpha + j \sin \alpha = \cos \alpha + j \sin \alpha \quad (5.2.2)$$

Вираз (5.2.2) називається формулою Ейлера. **З** (5.2.2) витікають **наступні** вирази

$$\begin{aligned} e^{\pm j90^\circ} &= \cos 90^\circ \pm j \sin 90^\circ = \pm j \\ e^{\pm j180^\circ} &= \cos 180^\circ \pm j \sin 180^\circ = -1 \end{aligned} \quad (5.2.3)$$

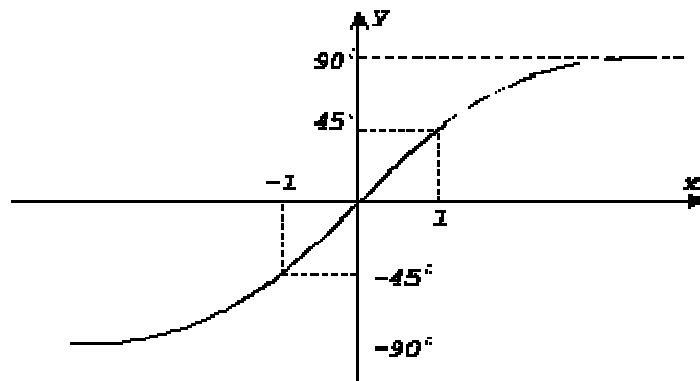


Рис. 5.2.3.

$$j = \sqrt{-1} = 1e^{j90^\circ} = 1\angle 90^\circ ; j^2 = -1 ; -j = \frac{1}{j} = 1e^{-j90^\circ} = 1\angle -90^\circ$$

На рис.5.2.3 для зведення показаний графік функції $\psi = \arctan x$.

5.3. Представлення гармонійних коливань за допомогою комплексних чисел.

Запишемо комплексне число $Ume^{j(\omega\tau + \varphi)}$ в тригонометричній формі, використовуючи формулу Ейлера (5.2.2).

$$Ume^{j(\omega\tau + \varphi)} = U_m[\cos(\omega\tau + \varphi) + j\sin(\omega\tau + \varphi)]$$

тоді гармонійне коливання вигляду

$$u(t) = U_m \sin(\omega\tau + \varphi)$$

можна записати у вигляді

$$u(t) = \text{Im}[Ume^{j(\omega\tau + \varphi)}]. \quad (5.3.1)$$

де знак $\text{Im}(A)$ позначає уявну частину комплексного числа A .

Вираз

$$\dot{u}(t) = U_m e^{j(\omega t + \varphi)} = \dot{u}(t) \quad (5.3.2)$$

називається комплексним миттєвим значенням.

$$\dot{u}(t) = U_m e^{j(\omega t + \varphi)} = U_m e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega t}$$

Вираз

$$U_m e^{j\varphi} = \dot{U}_m \quad (5.3.3)$$

називається комплексною амплітудою.

Таким чином

$$\dot{u}(t) = \dot{U}_m e^{j\omega t} \quad (5.3.4)$$

Комплексне число $e^{j\omega t}$ в геометричній інтерпретації є вектором **одичної** довжини, що обертається з кутовою швидкістю ω **проти** годинникової стрілки, тому він називається оператором повороту.

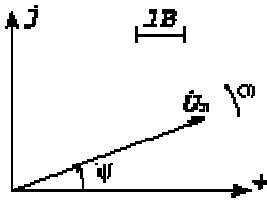


Рис 5.3.1.

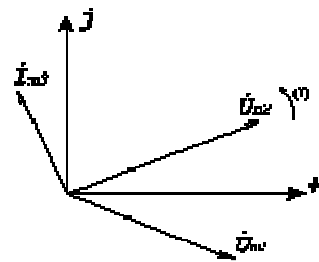


Рис. 5.3.2.

Часто замість комплексної амплітуди розглядається комплексне середньоквадратичне (діюче) значення. Якщо розділити на $\sqrt{2}$ праву і ліву частини (5.3.3) і врахувати (5.1.4), то

$$\dot{U} = U e^{j\psi} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} e^{j\psi} \quad (5.3.5)$$

При геометричній інтерпретації виразу (5.3.4) на площині комплексного змінного (рис. 5.3.1) зображається комплексне число \dot{U}_m у вигляді вектора завдовжки Um і аргументу ψ , а оператор повороту свідчить про те, що вектор обертається проти годинникової стрілки з кутовою швидкістю ω . В полі креслення вказаний масштаб побудови.

Представлення синусоїдальних величин у вигляді комплексних чисел приводить до методу розрахунку лінійних кіл, який називається методом комплексних амплітуд. Суть його полягає в наступному. Якщо в колі діє синусоїдальне джерело ЕДС частотою ω , то всі струми і напруги в колі матимуть ту ж частоту ω . Якщо представити струми і напруги кола у вигляді векторів (рис. 5.3.2), то з часом t вся сукупність векторів обертатиметься проти годинникової стрілки із швидкістю ω , але взаємне розташування векторів мінятися не буде, оскільки швидкість обертання їх однакова (кутова частота коливань в колі однакова). На цій підставі визначення струмів і напруг проводять, оперуючи комплексними амплітудами (комплексними діючими значеннями), тобто для моменту часу $t=0$, а зворотний перехід до функцій часу здійснюється з допомогою (5.3.1).

5.4. Три форми представлення гармонійної напруги.

Будь-яку гармонійну функцію, наприклад, напруга $u(t)$, можна записати у вигляді аналітичного виразу

$$u(t) = U_m \sin(\omega_0 t + \psi) \quad (5.4.1)$$

і зобразити її у вигляді графіка залежно від часу t (рис. 5.4.1). Це уявлення називається тимчасовим. Ця ж функція (5.4.1) може бути записана у вигляді комплексного числа (5.3.1)

$$u(t) = U_m \sin(\omega_0 t + \psi) = \text{Im} [U_m e^{j(\omega_0 t + \psi)}] = \text{Im} [\dot{U}_m e^{j\omega_0 t}], \quad (5.4.2)$$

де $\text{Im}[A]$ – позначає уявну частину комплексного числа.

(5.4.2) – друга форма представлення синусоїдальної функції – у вигляді комплексного числа.

Третя форма – спектральна форма – представлення амплітудного і фазового спектрів напруги $u(t)$.

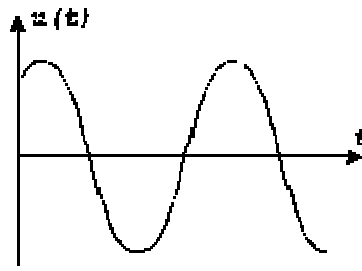


Рис. 5.4.1.

Умовимося синусоїдальну **напругу** (5.4.1) показувати на графіку у вигляді відрізка прямої величиною Um (у вибраному масштабі), **розташованого** на частоті ω_0 (рис. 5.4.2а). Цей графік називатимемо амплітудним спектром **напруги** (5.4.1). Для того, щоб зберегти інформацію про початкову фазу ψ , будується другий графік залежно від частоти ω , на частоті ω_0 показується відрізок, рівний початковій фазі ψ (у вибраному масштабі) (рис. 5.4.2б).

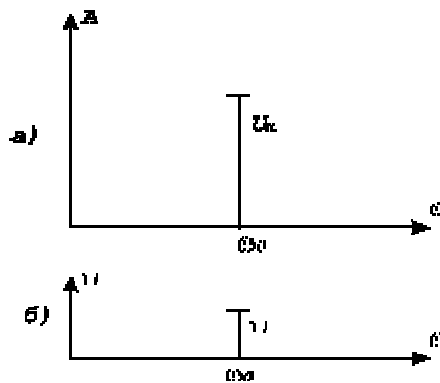


Рис. 5.4.2.

Цей графік називається фазовим спектром **напруги** (5.4.1).
ПОТУЖНІСТЬ

Миттєва потужність. Вираз потужності елемента не залежить від роду струму і напруги. Отже, він придатний і для синусоїдальних залежностей. Таким чином потужність буде

$$p = I_m \sin(\omega t + \psi_i) \cdot U_m \sin(\omega t + \psi_u).$$

Застосувавши теорему: $\sin \alpha \sin \beta = (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))/2$ до даної формули, одержуємо:

$$p = UI \cos \varphi + UI \cos(2\omega t + \psi_i + \psi_u).$$

Як бачимо, потужність у колі синусоїдального струму має два компоненти – постійний у часі та пульсуючий з подвійною частотою. Миттєві потужності окремих елементів показані на рис. Останній компонент створює певні незручності в користуванні миттєвою потужністю. Тому була введена так звана активна потужність.

Активна потужність. Активна потужність – це середнє значення потужності за період

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt.$$

Підставивши значення, одержимо

$$P = UI \cos \varphi.$$

Як бачимо, активна потужність визначається не лише значеннями струму і напруги елемента, але й фазовим зсувом між ними. Множник $\cos \varphi$ називають коефіцієнтом потужності. Оскільки він набуває господарського, а значить і комерційного значення, то він є величиною регламентованою і зниження його карається. Тому на практиці розроблені ефективні засоби, які дають змогу експлуатувати електрообладнання, не порушуючи регламенту. Це господарське завантаження електрообладнання, підмикання додаткових конденсаторів або синхронних компенсаторів тощо. Одиниця вимірювання $[P]=\text{Вт}$.

Реактивна потужність. Для контролю за коефіцієнтом потужності була введена розрахункова величина, позбавлена фізичного змісту, - так звана реактивна потужність Q

$$Q = UI \sin \varphi.$$

Одиниця вимірювання $[Q]=\text{Вар}$ (вольт-ампер реактивний).

Хоча часто зустрічаються спроби надати Q фізичного змісту, але всі вони не витримують критики.

Повна потужність. Повна потужність S була введена вслід за реактивною потужністю

$$S = UI.$$

Вона також позбавлена фізичного змісту, але її можна трактувати як можливу максимальну потужність при заданих струмі та напрузі ($\cos \varphi=1$).

Одиниця вимірювання $[S]=\text{ВА}$ (вольт-ампер).

Згідно з () виразам () і () можна надати вигляду

$$P = S \cos \varphi ; \quad Q = S \sin \varphi .$$

Якщо піднести до квадрата ліву та праві частини і скласти результати, одержимо

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} .$$

Повна комплексна потужність. Помноживши другий вираз на і додавши до нього перший, одержуємо

$$\dot{S} = P + jQ = Se^{j\varphi} ,$$

де \dot{S} - повна комплексна потужність. Її обчислюємо:

$$\dot{S} = UIe^{j(\psi_u - \psi_i)} = Ue^{j\psi_u} \cdot Ie^{-j\psi_i} = \dot{U} \hat{I} ,$$

де \hat{I} - спряжене комплексне діюче значення струму.

Беручи до уваги попередні формули, можна записати:

$$\dot{S} = \dot{U} \hat{I}, \quad P = \text{Re}(\dot{U} \hat{I}), \quad Q = \text{Im}(\dot{U} \hat{I}).$$

Дані формули дають змогу за комплексними діючими значеннями струму та напруги обчислити активну, реактивну і повну потужності елемента.

Потужності окремих елементів. Розглянемо потужність усіх трьох основних елементів – резистора, котушки індуктивності, конденсатора.

1. Резистор. $\varphi_R = \psi_{uR} - \psi_{iR} = 0$ Тому:

$$P_R = UI; \quad Q_R = 0.$$

2. Котушка індуктивності. $\varphi_L = \psi_{uL} - \psi_{iL} = 90^\circ$ Тому:

$$P_L = 0; \quad Q_L = UI.$$

3. Конденсатор. $\varphi_C = \psi_{uC} - \psi_{iC} = -90^\circ$ Тому:

$$P_C = 0; \quad Q_C = -UI.$$

Аналізуючи формули, бачимо, що резистор є споживачем лише активної потужності, а котушка індуктивності є споживачем лише реактивної потужності. Що ж до конденсатора, то він є генератором реактивної потужності. Нагадаємо, що в нормованій системі споживача (а наші елементи саме так застрілковані) знак “+” вказує на режим споживання, а “-” – на режим генерування потужності.

Приклад. Покажемо, як конденсатор покращує коефіцієнт потужності послідовно сполучених резистора та котушки індуктивності. Це найпростіше показати на векторній діаграмі.

У схемі протікає струм $I=I_L$, що відстає на деякий кут φ від напруги, оскільки коло має активно- індуктивний характер. Якщо нашу вітку узбочити конденсатором, то його струм випередить напругу на 90° . Сумарний струм I знаходимо за першим законом Кірхгофа як векторну суму $\dot{I} = \dot{I}_L + \dot{I}_C$. Струм I тепер відстає на кут $\varphi_2 < \varphi_1$ від напруги, а це значить, що $\cos \varphi_2 > \cos \varphi_1$. Зрозуміло, що конденсатор можна підібрати таким, щоб одержати $\varphi=0$ або навіть $\varphi_2 < 0$, тобто схему перевести в режим генератора реактивної потужності.

Зрозуміло, що до цих результатів можна прийти аналітично, записавши повні комплексні опори для обох схем.

Баланс потужності. Баланс потужності в колі синусоїдального струму набуває вигляду:

$$\sum_k \dot{U}_k \hat{I}_k.$$

Цей вираз передбачає стрілкування споживачів у нормованій системі споживача, а джерел – у нормованій системі генератора.

Інакше кажучи, ліворуч фігурує алгебраїчна сума (коли стрілки напруг джерел збігаються за напрямком зі стрілками струму – то зі знаком плюс, інакше – зі знаком мінус), а праворуч – завжди арифметична.

Вираз заздалегідь передбачає баланс активної і реактивної потужності. Це – універсальний засіб перевірки правильності аналізу кола.

5.5. Проходження гармонійного струму через резистор.

Розглянемо резистор R (рис.5.5.1) через який проходить синусоїдальний струм $i(t)=I_m \sin(\omega t + \varphi_i)$. Треба визначити напругу на резисторі. Зв'язок між миттєвими значеннями напруги і струму для лінійного резистора встановлює співвідношення (1.1.5).

$$u(t)=Ri(t)=RI_m \sin(\omega t + \varphi_i) \quad (5.5.1)$$

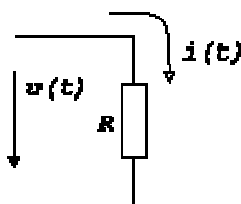


Рис. 5.5.1.

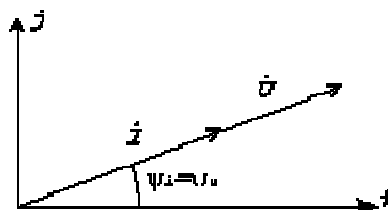


Рис. 5.5.2.

У загальному випадку напруга змінюватиметься за гармонійним законом, тобто у вигляді

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi_u).$$

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi_i).$$

Перейдемо до комплексного миттєвого значення

$$\dot{u}(t) = U_m e^{j(\omega t + \varphi_u)} = R I_m e^{j(\omega t + \varphi_i)}.$$

Скорочуючи обидві частини рівняння на $e^{j\omega t}$ одержимо $U_m e^{j\varphi_u} = R I_m e^{j\varphi_i}$. У лівій частині рівняння стоїть комплексна амплітуда напруги \dot{U}_m , а $I_m e^{j\varphi_i}$ – комплексна амплітуда струму.

Звідси одержуємо

$$\dot{U}_m = R \dot{I}_m. \quad (5.5.2)$$

Співвідношення (5.5.2), що встановлює зв'язок між комплексною амплітудою напруги на резисторі і комплексною амплітудою струму в ньому, є записом закону Ома для резистора в комплексній формі. Якщо розділити праву і ліву частини (5.5.2) на $\sqrt{2}$, одержимо те ж співвідношення для середньоквадратичних (діючих) значень

$$U = R I. \quad (5.5.3)$$

З (5.5.2) і (5.5.3) слідує висновок про те, що на резисторі струм і напруга співпадають по фазі. Векторна діаграма струму і напруги на резисторі показана на рис. 5.5.2. На рис. 5.5.3 показані залежності від часу струму і напруги на резисторі (при $\varphi_i = 0$). Обидві синусоїдальні функції співпадають по фазі.

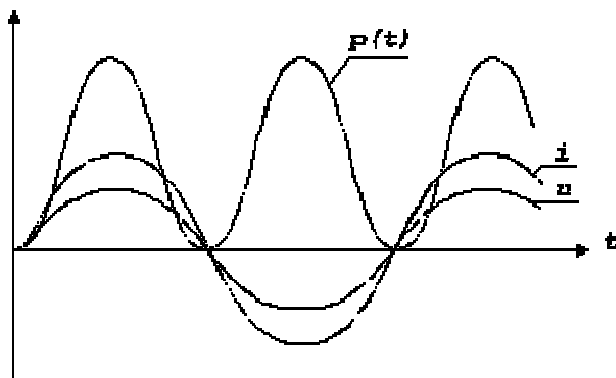


Рис. 5.5.3.

Розрахуємо миттєву потужність (1.3)

$$p(t) = u \cdot i = U_m \sin \omega t \cdot I_m \sin \omega t = U_m I_m \sin^2 \omega t. \quad (5.5.4)$$

За формулами тригонометричних перетворень $\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$ вираз (5.5.4)

$$p(t) = \frac{U_m I_m}{2} (1 - \cos 2\omega t).$$

запишеться у вигляді

Графік миттєвої потужності показаний на рис. 5.5.3. Миттєва потужність змінюється з подвоєною частотою і завжди позитивна, ця потужність витрачається в резисторі – виділяється у вигляді тепла. Розрахуємо середнє за період значення потужності, що виділяється в резисторі

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{U_m I_m}{2} (1 - \cos 2\omega t) dt = \frac{U_m I_m}{2}$$

Враховуючи зв'язок між амплітудним і діючим значеннями синусоїдальних величин (5.1.4)

$$P = U \cdot I. \quad (5.5.5)$$

5.6. Проходження гармонійного струму через котушку індуктивності.

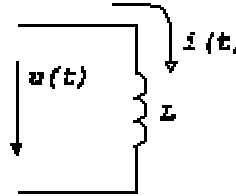


Рис. 5.6.1.

Розглянемо котушку індуктивності (рис. 5.6.1), в якій проходить струм $i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi_i)$. Напруга на лінійній котушці пов'язана із струмом в ній співвідношенням (2.4.9)

$$u = L \frac{di}{dt} = LI_m \omega \cos(\omega t + \varphi_i)$$

Перейдемо від косинусоїдальної функції до синусоїдальної доповненням кута 90°

$$u = I_m \omega L \sin(\omega t + \varphi_i + 90^\circ). \quad (5.6.1)$$

Шукану напругу знаходитимемо також у вигляді синусоїдальної функції $u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$. Тоді (5.6.1) приймає вигляд $U_m \sin(\omega t + \varphi_u) = I_m \omega L \sin(\omega t + \varphi_i + 90^\circ)$.

Перейдемо до комплексного миттєвого значення

$$U_m e^{j(\omega t + \varphi_u)} = I_m \omega L e^{j(\omega t + \varphi_i + \frac{\pi}{2})},$$

або $U_m e^{j\varphi_u} \cdot e^{j\omega t} = I_m \omega L e^{j\varphi_i} \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{j\frac{\pi}{2}}$.

Скорочуючи обидві частини рівності на оператора повороту $e^{j\omega t}$ і враховуючи, що

$$U_m e^{j\varphi_u} = \dot{U}_m; \quad I_m e^{j\varphi_i} = \dot{I}_m; \quad e^{j\frac{\pi}{2}} = j \quad (\text{співвідношення 5.2.3}), \quad \text{одержимо}$$

$$\dot{U}_m = \dot{I}_m j \omega L. \quad (5.6.2)$$

Одиниця вимірювання фізичної величини в лівій частині вольт, в правій – ампер, отже величина $j\omega L$ має одиниці опору – Ом. Тому, $j\omega L$ називається комплексним опором котушки індуктивності

$$\underline{Z}_L = j\omega L. \quad (5.6.3)$$

Вираз закону Ома в комплексній формі для котушки індуктивності

$$\dot{U}_m = \dot{I}_m \underline{Z}_L \quad (5.6.4)$$

або

$$\dot{U} = \dot{I} \underline{Z}_L, \quad (5.6.5)$$

де $\underline{Z}_L = j\omega L$.

Вираз (5.6.2) вказує на те, що вектор напруги на котушці випереджає ($j = e^{j\frac{\pi}{2}}$) вектор струму в котушці на 90° (рис. 5.6.2). Комплексний опір котушки $\underline{Z}_L = j\omega L$, де $\omega L = XL$ –

називається індуктивним опором **катушки**. На рис. 5.6.3 показані залежності індуктивного опору **катушки** від кутової частоти ω для двох значень індуктивності ($L_2 > L_1$). На постійному **струмі** ($\omega = 0$) **катушка** має опір рівний нулю, **тобто виявляється замкнутою накоротко**, як це було вже доведено в розділі 2.4.3.

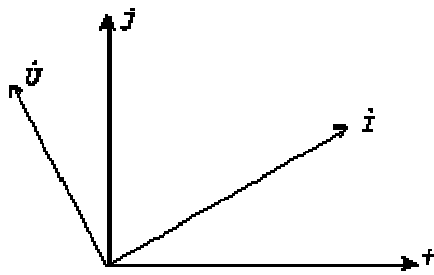


Рис. 5.6.2.

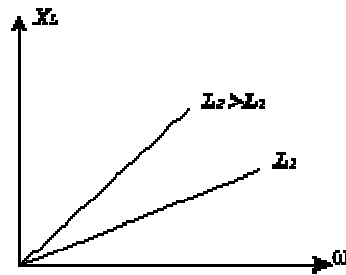


Рис. 5.6.3.

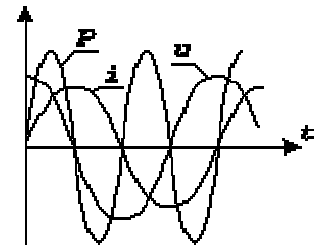


Рис. 5.6.4.

На рис. 5.6.4 показані залежності від часу **струму** $i(t)$ і **напруги** на **катушці** $u(t)$ (при $\varphi = 0$), які **зсунуті** по фазі на 90° . Розрахуємо миттєву потужність (1.1.3)

$$p = u \cdot i = I_m^2 \omega L \sin \omega t \cdot \cos \omega t$$

Враховуючи тригонометричне співвідношення

$$\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha, \text{ одержимо} \quad p = \frac{I_m^2}{2} \omega L \sin 2\omega t$$

Миттєва потужність **змінюється** з подвоєною частотою і може бути позитивною і **негативною** (рис. 5.6.4). При $p > 0$ енергія запасається в магнітному полі **катушки**, а при $p < 0$ **катушка** віддає енергію в зовнішнє **коло**.

5.7. Проходження гармонійного **струму** через конденсатор.

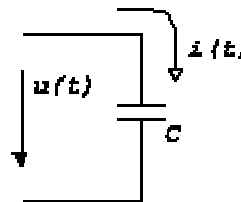


Рис. 5.7.1.

Розглянемо лінійний конденсатор ємністю C (рис. 5.7.1), через який протікає **струм** $i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi_i)$. Визначимо **напругу** на конденсаторі. Зв'язок між миттєвими значеннями **струму** в конденсаторі і **напруги** на ньому визначається співвідношенням (2.4.6). Тоді

$$\begin{aligned} u_C(t) &= \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(t) dt = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t I_m \sin(\omega t + \varphi_i) dt = -\frac{I_m}{\omega C} \cos(\omega t + \varphi_i) = \\ &= -\frac{I_m}{\omega C} \sin(\omega t + \varphi_i + \frac{\pi}{2}). \end{aligned} \quad (5.7.1)$$

Додатковий **кут** $\pi/2$ виник при переході від **косинусоїдальної** функції до синусоїдальної. **Напругу** на конденсаторі визначатимемо у вигляді $u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$. Тоді (5.7.1) **запишеться**

$$U_m \sin(\omega t + \varphi_u) = -\frac{I_m}{\omega C} \sin(\omega t + \varphi_i + \frac{\pi}{2})$$

Перейдемо до комплексних миттєвих значень

$$U_m e^{j(\omega t + \varphi_u)} = -\frac{I_m}{\omega C} e^{j(\omega t + \varphi_i + \frac{\pi}{2})}$$

або

$$U_m e^{j\omega t} \cdot e^{j\varphi_u} = -\frac{I_m}{\omega C} e^{j\omega t} \cdot e^{j\varphi_i} \cdot e^{j\frac{\pi}{2}}$$

Скорочуючи на оператора повороту $e^{j\omega t}$ і враховуючи, що

$$U_m e^{j\varphi_u} = \dot{U}_m; I_m e^{j\varphi_i} = \dot{I}_m; e^{j\frac{\pi}{2}} = j$$

одержимо

$$\dot{U}_m = -j \frac{1}{\omega C} \dot{I}_m \quad (5.7.2)$$

Легко бачити, що величина $-j \frac{1}{\omega C}$ має розмірність опору – Ом, тому називається комплексним опором конденсатора.

$$\underline{Z}_C = -j \frac{1}{\omega C} \quad (5.7.3)$$

Вираз (5.7.3) – закон Ома для конденсатора в комплексній формі – можна записати в узагальненому вигляді

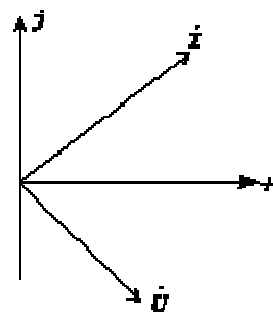


Рис. 5.7.2.

Рис. 5.7.2.

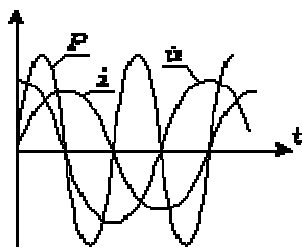


Рис. 5.7.3.

Рис. 5.7.3.

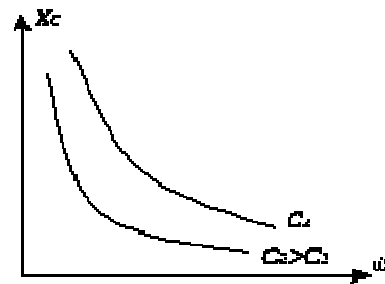


Рис. 5.7.4.

Рис. 5.7.4.

$$\dot{U}_m = \dot{I}_m \underline{Z}_C \quad (5.7.4)$$

або

$$\dot{U} = \dot{I} \underline{Z}_C \quad (5.7.5)$$

Із співвідношення (5.7.2) виходить, що вектор **напруги** на конденсаторі відстає від вектора **струму** в ньому на $\pi/2$, оскільки $-j = e^{-j\frac{\pi}{2}}$ (5.2.3). Векторна діаграма **струму** і **напруги** на конденсаторі показана на рис. 5.7.2. На рис. 5.7.3 показані залежності від часу **струму**, **напруги** і миттєвої потужності (при $\varphi_{i=0}$)

$$p = u \cdot i = -\frac{I_m^2}{\omega C} \sin \omega t \cdot \cos \omega t = -\frac{I_m^2}{2 \omega C} \sin 2 \omega t$$

Порівняння графіків миттєвої потужності для резистора, **катушки** індуктивності і конденсатора показує, що в резисторі миттєва потужність завжди позитивна (рис. 5.5.3), тобто лінійний резистор потужність споживає, а в конденсаторі і **катушці** (рис. 5.6.4, 5.7.3) миттєва потужність може бути позитивною (реактивний елемент запасає енергію) і

негативною (реактивний елемент віддає енергію в зовнішнє коло).

Розглянемо комплексний опір конденсатора (5.7.3).

Величина

$$X_C = \frac{1}{\omega C} \quad (5.7.6)$$

називається опір **місткості** конденсатора. Залежності опору **місткості** від частоти ω для двох значень **місткості** показані на рис. 5.7.4. Опір **місткості** конденсатора на постійному **струмі** ($\omega = 0$) рівний нескінченності і зменшується до нуля **із зростанням** частоти до нескінченності.

5.8. Закон Кірхгофа в комплексній формі.

1-й закон Кірхгофа : алгебраїчна сума **струмів** у вузлі рівна нулю (див. розділ 1.1). Наприклад, для деякого вузла

$$i_1 + i_2 + i_3 = 0, \quad (5.8.1)$$

де i_1, i_2, i_3 – **струми** в вітках.

Хай кожний **струм** змінюється за синусоїдальним законом: $i_1 = I_{m1} \sin(\omega t + \varphi_1)$; $i_2 = I_{m2} \sin(\omega t + \varphi_2)$; $i_3 = I_{m3} \sin(\omega t + \varphi_3)$. Підставляючи в (5.8.1) і переходячи до комплексних миттєвих значень, **одержимо**

$$I_{m1} e^{j(\omega t + \varphi_1)} + I_{m2} e^{j(\omega t + \varphi_2)} + I_{m3} e^{j(\omega t + \varphi_3)} = 0$$

Скорочуючи це рівняння на оператора повороту $e^{j\omega t}$ і враховуючи що амплітуди окремих **струмів** рівні $\dot{I}_{m1} = I_{m1} e^{j\varphi_1}$, $\dot{I}_{m2} = I_{m2} e^{j\varphi_2}$, $\dot{I}_{m3} = I_{m3} e^{j\varphi_3}$, **одержимо** запис (5.8.1) для комплексних амплітуд $\dot{I}_{m1} + \dot{I}_{m2} + \dot{I}_{m3} = 0$.

У **загальному** випадку, 1-й закон Кірхгофа для вузла з n вітками в комплексній формі має вигляд

$$\sum_{k=1}^n \dot{I}_k = 0 \quad (5.8.2)$$

У (5.8.2) **струми**, **направлені** до вузла, слід записати **із** знаком “плюс”, а **направлені** від вузла – **із** знаком “мінус” (або навпаки), а **напрямок струму** в вітці визначається довільно.

Другий закон Кірхгофа в комплексній формі можна **одержати** аналогічно (див. розділ 1.1), записавши всі джерела в вітках у вигляді синусоїдальних функцій, **напруги** на резисторах у **вигляді** (5.5.1), на **котушках** індуктивності – (5.6.1), на конденсаторах – (5.7.1). Перейшовши до комплексних миттєвих значень і скоротивши рівняння на $e^{j\omega t}$, **одержимо**

$$\sum_{k=1}^n \dot{E}_k = \sum_{m=1}^p \dot{I}_m Z_m, \quad (5.8.3)$$

де $\sum_{k=1}^n \dot{E}_k$ – алгебраїчна сума комплексних ЕДС джерел **напруги**. **Із** знаком **плюс** **записуються** ті з них, позитивні **напрями** яких **співпадають** з вибраним **напрямом** обходу контура; ЕДС, що мають **напрями**, протилежні обходу контура, **записуються** **із** знаком мінус;

$\sum_{m=1}^p \dot{I}_m Z_m$ – падіння **напруг** на комплексних опорах Z_m окремих ділянок. **Із** знаком “плюс” беруться ті, для яких **напрямок струму співпадає з напрямом** обходу, а **із** знаком “мінус” – ті, для яких **напрямок струму протилежний напрямку** обходу контура.

При складанні рівнянь за другим законом Кірхгофа слід вибрати незалежні контури, що не містять джерел струму.

5.9. Проходження гармонійного струму через резистор, котушку індуктивності і конденсатор, сполучені послідовно.

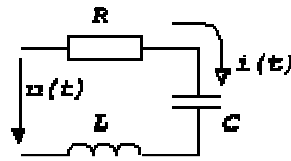


Рис. 5.9.1.

Розглянемо електричне коло, що складається з послідовно сполучених резистора, котушки індуктивності і конденсатора (рис. 5.9.1). В колі проходить струм $i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi_i)$, вимагається знайти напругу $u(t)$. Відповідно до 2-го закону Кірхгофа для будь-якого моменту часу

$$u(t) = u_{R(t)} + u_{L(t)} + u_{C(t)},$$

де $u_R(t)$, $u_L(t)$, $u_C(t)$ – напруги на відповідних елементах.

З розрахунку (2.4.1), (2.4.6) і (2.4.9)

$$u(t) = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i dt$$

При зміні струму за гармонійним законом доданки правої частини останнього рівняння розраховані згідно (5.5.1), (5.6.1), (5.7.1)

$$u(t) = RI_m \sin(\omega t + \varphi_i) + I_m \omega L \sin(\omega t + \varphi_i + \frac{\pi}{2}) - I_m \frac{1}{\omega C} \sin(\omega t + \varphi_i + \frac{\pi}{2})$$

Знаходитимемо напругу $u(t)$ у вигляді $u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$. Переходячи до комплексних миттєвих значень одержимо

$$U_m e^{j(\omega t + \varphi_u)} = I_m R e^{j(\omega t + \varphi_i)} + I_m \omega L e^{j(\omega t + \varphi_i + \frac{\pi}{2})} - I_m \frac{1}{\omega C} e^{j(\omega t + \varphi_i + \frac{\pi}{2})}$$

Скорочуючи обидві частини рівняння на оператора повороту $e^{j\omega t}$ і враховуючи, що $e^{j\frac{\pi}{2}} = j$, одержимо

$$U_m e^{j\varphi_u} = I_m R e^{j\varphi_i} + I_m j \omega L e^{j\varphi_i} - I_m \frac{j}{\omega C} e^{j\varphi_i}$$

З урахуванням того, що $U_m e^{j\varphi_u} = \dot{U}_m$, $I_m e^{j\varphi_i} = \dot{I}_m$, остаточний вираз прийме вигляд

$$\begin{aligned} \dot{U}_m &= \dot{I}_m R + \dot{I}_m j \omega L - \dot{I}_m \frac{j}{\omega C} \\ \dot{U}_m &= \dot{I}_m \left(R + j \omega L - \frac{j}{\omega C} \right) \end{aligned}$$

або

Вираз в дужках – комплексний опір послідовного з'єднання резистора, котушки індуктивності, конденсатора

$$\underline{Z} = R + j\omega L - j\frac{1}{\omega C} = R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C = R + jX_L - jX_C = R + j(X_L - X_C) \quad (5.9.1)$$

Закон Ома в комплексній формі для кола виду рис. 5.9.1 записується

$$\dot{U}_m = \dot{I}_m \underline{Z} \quad (5.9.2)$$

або для діючих значень

$$U = \dot{I} \underline{Z} \quad (5.9.3)$$

Комплексний опір кола рівний $\underline{Z} = R + jX$,

де R – резистивний опір кола; $X = X_L - X_C = \omega L - \frac{1}{\omega C}$ – реактивний опір кола.

З (5.9.1) витікає, що при послідовному з'єднанні ділянок кола комплексний опір $\underline{Z}_{\Sigma K}$ рівний сумі комплексних опорів окремих ділянок \underline{Z}_k .

$$\underline{Z}_{\Sigma K} = \sum_{k=1}^n \underline{Z}_k$$

5.10. Паралельне з'єднання резистора, котушки індуктивності, конденсатора в колі гармонійної напруги.

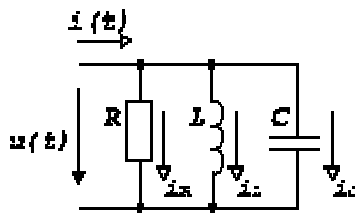


Рис. 5.10.1.

Розглянемо схему, рис. 5.10.1. Всі її елементи сполучені паралельно і знаходяться під однією і тією ж напругою $u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$. Необхідно визначити струм в колі $i(t)$. На підставі 1-го закону Кірхгофа у будь-який момент часу справедливе співвідношення

$$i(t) = i_R(t) + i_L(t) + i_C(t).$$

Окремі складові струмів визначаються виразами (2.4.1), (2.4.5) і (2.4.10)

$$i(t) = \frac{u(t)}{R} + \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u(t) dt + C \frac{du(t)}{dt}.$$

Підставивши замість $u(t)$ гармонійну функцію часу і провівши необхідні математичні операції, одержимо

$$i(t) = \frac{U_m}{R} \sin(\omega t + \psi_u) - \frac{U_m}{\omega L} \sin(\omega t + \psi_u + \frac{\pi}{2}) + U_m \omega C \sin(\omega t + \psi_u + \frac{\pi}{2}).$$

Визначатимемо шуканий струм у вигляді $i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$.

Перейдемо до комплексних миттєвих значень.

$$I_m e^{j(\omega t + \psi_i)} = \frac{U_m}{R} e^{j(\omega t + \psi_u)} - \frac{U_m}{\omega L} e^{j(\omega t + \psi_u + \frac{\pi}{2})} + U_m \omega C e^{j(\omega t + \psi_u + \frac{\pi}{2})}.$$

Скорочуючи на $e^{j\omega t}$ і врахувавши, що $I_m e^{j\psi_i} = \dot{I}_m$, $U_m e^{j\psi_u} = \dot{U}_m$, одержимо

$$i_m = \frac{\dot{U}_m}{R} - j \frac{\dot{U}_m}{aL} + j \dot{U}_m aC$$

$$\text{або } i_m = \dot{U}_m \left[\frac{1}{R} - j \left(\frac{1}{aL} - aC \right) \right]$$

Вираз в дужках – комплексна провідність кола \underline{Y}

$$\underline{Y} = \frac{1}{R} - j \left(\frac{1}{aL} - aC \right) = G - jB, \quad (5.10.1)$$

$G = \frac{1}{R}$ – резистивна складова провідності, $B = \frac{1}{aL} - aC$ – реактивна складова провідності.

Закон Ома в комплексній формі для кола виду рис. 5.10.1 записується

$$i_m = \dot{U}_m \underline{Y} \quad (5.10.2)$$

або

$$i = \dot{U} \underline{Y} \quad (5.10.3)$$

З (5.10.1) витікає, що при паралельному з'єднанні віток кола комплексна еквівалентна провідність рівна сумі комплексних провідностей віток:

$$\underline{Y} = \sum_{k=1}^n \underline{Y}_k \quad (5.10.4)$$

5.11. Проходження гармонійного сигналу через нелінійне коло.

При дії гармонійного сигналу частотою ω на лінійне коло її реакція (струм, напруга на виході) матиме коливання тільки тієї ж частоти ω . Інший результат буде одержаний у разі дії гармонійної напруги частотою ω на нелінійне коло. Як буде показано нижче, в цьому випадку відгук кола міститиме періодичні коливання, в яких крім підведеної частоти ω є ще ряд гармонік з частотами $n\omega$, кратними підведеною (n – ціле число).

Розглянемо випадок дії на вхід нелінійного кола гармонійної напруги

$$u = U_m \cos(\omega \tau + \psi). \quad (5.11.1)$$

Для розрахунку відгуку скористаємося апроксимацією вольтамперної характеристики нелінійного елемента у вигляді полінома з $(n+1)$ членами (2.4.2)

$$i = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + a_3 u^3 + \dots + a_n u^n. \quad (5.11.2)$$

Підставляючи (5.11.1) в (5.11.2), одержимо:

$$i = a_0 + a_1 U_m \cos(at + \psi) + a_2 U_m^2 \cos^2(at + \psi) + \dots + a_n U_m^n \cos^n(at + \psi) \quad (5.11.3)$$

Виконавши нескладні тригонометричні перетворення з використанням формул кратних дуг

$$\left. \begin{aligned} \cos^2 x &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x, \quad \cos^4 x = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x, \\ \cos^3 x &= \frac{3}{4} \cos x + \frac{1}{4} \cos 3x, \quad \cos^5 x = \frac{5}{8} \cos x + \frac{5}{16} \cos 3x + \frac{1}{16} \cos 5x \end{aligned} \right\} \begin{aligned} (5.11.4) \\ (5.11.5) \end{aligned}$$

і, вважаючи

$$x = at + \varphi, \quad (5.11.6)$$

після підстановок (5.11.4) і (5.11.6) в (5.11.3) одержимо:

$$i = I_0 + I_{1m} \cos(at + \varphi) + I_{2m} \cos 2(at + \varphi) + I_{3m} \cos 3(at + \varphi) + \dots + I_{nm} \cos n(at + \varphi), \quad (5.11.7)$$

де

$$\left. \begin{aligned} I_0 &= a_0 + \frac{1}{2} a_2 U_{2m}^2 + \frac{3}{8} a_4 U_{4m}^4 + \dots; \quad I_{2m} = \frac{1}{2} U_{2m}^2 + \frac{1}{2} a_4 U_{4m}^4 + \dots \\ I_{1m} &= a_1 U_{1m} + \frac{3}{4} a_3 U_{3m}^3 + \frac{5}{8} a_5 U_{5m}^5 + \dots; \quad I_{3m} = \frac{1}{4} a_3 U_{3m}^3 + \frac{5}{16} a_5 U_{5m}^5 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (5.11.8)$$

З одержаних виразів видно, що при дії гармонійного коливання на нелінійне коло вихідний струм є функцією з рядом гармонік, причому номер найвищої гармоніки співпадає з найбільшим показником ступеня полінома (5.11.2).

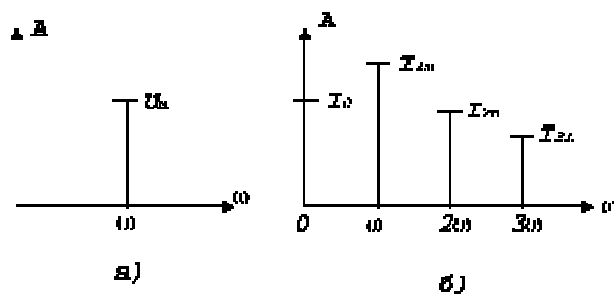


Рис. 5.11.1.

На рис. 5.11.1а побудований спектр вхідної напруги, а на рис 5.11.1б – спектр струму, на якому помічені амплітуди спектральних складових. Таким чином нелінійний резистор збагатить спектр струму: при напрузі, що складається з однієї косинусоїдальної функції (5.11.1), струм нелінійного резистора (5.11.7) містить косинусоїдальні складові з частотами ω , 2ω , 3ω і т.д.

На цьому явищі засновано багато процесів, що протікають в пристроях зв'язку: посилення, множення частоти і т.д. Наприклад, якщо з вихідного спектру струму (5.11.7) виділити гармоніку з частотою ω , то на виході пристрою буде одержано гармонійне коливання з тією ж частотою ω і амплітудою I_{1m} . В цьому випадку має місце лінійне посилення.

Як правило, параметри пристрою підбираються так, щоб напруга на виході перевищувала вхідну.

Пристрій, що служить для посилення за допомогою електронних ламп або напівпровідникових приладів, називається підсилювачем.

Якщо із спектру вихідного сигналу (5.11.7) виділити коливання з частотою $n\omega$, де n – ціле число, більше одиниці, то на виході пристрою буде одержана синусоїдальна напруга з частотою $n\omega$. В цьому випадку має місце множення частоти. Пристрої, що забезпечують перетворення синусоїдального сигналу з частотою ω в синусоїдальну напругу з частотою $n\omega$, називаються помножувачами частоти. При $n=2$ одержуємо подвоювач частоти, при $n=3$ – утроювач частоти.

5.12. Методи розрахунку кіл змінного струму.

При розрахунку кіл змінного струму за допомогою комплексних чисел залишаються справедливими всі методи розрахунку вживані для розрахунку кіл постійного струму: метод струмів віток, контурних струмів, вузлових напруг, еквівалентного генератора і т.д. (розділи 3.5; 3.6; 3.7; 3.10). При цьому в рівняннях все ЕДС, напруги, потенціали, струми, опору і провідності повинні бути записані в комплексній формі.

Як і для кіл постійного струму, джерело електричної енергії змінного струму (з внутрішнім опором \underline{Z}_r) може бути зображено або у вигляді генератора ЕДС, параметри якого \dot{E}_r і \underline{Z}_r , або у вигляді генератора струму з параметром \dot{J} і \underline{Z}_r (див. Роздязгнув 2.4). Перехід від генератора ЕДС до еквівалентного генератора струму і назад здійснюється за формулами:

$$\dot{J} = \frac{\dot{E}_r}{\underline{Z}_r} ; \dot{E}_r = \dot{J} \underline{Z}_r$$

Розділ 20 ТРИФАЗНІ СИМЕТРИЧНІ КОЛА

Основними приймачами електричної енергії як за кількістю, так і за встановленою потужністю є електродвигуни, які застосовуються для надання руху робочим машинам. Трифазні асинхронні двигуни — найбільш прості, надійні й дешеві. Повсюдне застосування їх зумовило бурхливий розвиток трифазних систем — виробництва, передавання і розподілу електричної енергії. Для цієї мети застосовуються трифазні генератори, трансформатори, лінії передачі, розподільні мережі.

§ 20.1. ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ ПРО ТРИФАЗНІ СИСТЕМИ

Багатофазна система електричних кіл являє собою сукупність електричних кіл, в яких діють синусоїдні е.р.с. однакової частоти, зсунуті відносно одна одної за фазою і створювані одним джерелом енергії. Відповідно до цього означення система з трьох кіл називається трифазною.

Трифазна система е.р.с.

У трифазному генераторі, в якому є три самостійні обмотки, зсунуті відносно одна одної в просторі на 120° , утворюється трифазна симетрична система е. р. с. Схематично це показано на рис. 20.1 стосовно генератора з однією парою полюсів на статорі й обмотками на роторі. Проте слід зазначити, що в реальних генераторах обмотка змінного струму нерухома (розташована на статорі), а магнітні полюси обертаються (розташовані на роторі). Така конструкція генератора краща, а принцип його роботи не змінюється. Якщо кількість витків в обмотках однакова, то при обертанні ротора в усіх обмотках наводяться е.р.с. однакового значення. Початкові фази цих е.р.с. зсунуті відносно одна одної на 120° відповідно до просторового розташування обмоток.

Трифазна симетрична система е.р.с. — це сукупність трьох е.р.с., які мають однакову частоту й амплітуду, зсунутих за фазою відносно одна одної на кути 120° .

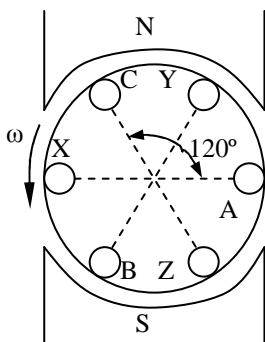


Рис.20.1. Схема трифазного генератора

Ознакою несиметрії трифазної системи, е.р.с. є нерівність амплітуд або нерівність кутів зсуву фаз між кожною парою е.р.с.

На рис. 20.1 обмотки показано в початковому положенні ($t=0$). При обертанні ротора проти годинникової стрілки рівняння е.р.с. можна записати в такому вигляді:

$$\left. \begin{aligned} e_A &= E_m \sin \omega t; \\ e_B &= E_m \sin(\omega t - 120^\circ); \\ e_C &= E_m \sin(\omega t - 240^\circ). \end{aligned} \right\} \quad (20.1)$$

Цим рівнянням відповідають графіки е.р.с. і векторна діаграма, зображені на рис. 20.2. Комплекси діючих значень цих е.р.с.

$$E_A = E; \quad E_B = Ee^{-j120^\circ}; \quad E_C = Ee^{-j240^\circ}. \quad (20.2)$$

Якщо прийняти за вихідний вектор е.р.с. E_A , то е.р.с. E_B відстає від E_A , а е.р.с. E_C — від E_B . Отже, максимальних значень е.р.с. в фазах досягають в такому порядку: спочатку в фазі А, потім в В і далі в С.

Вектори е.р.с. обертаються проти годинникової стрілки, і повз нерухому вісь $+j$ вони проходять у такому порядку: $E_A - E_B - E_C$. Такий порядок чергування називається прямою послідовністю фаз. При зворотному обертанні ротора матимемо зворотну послідовність фаз. Далі при розгляді трифазних систем взято пряму послідовність фаз, яку вважають нормальною.

Незв'язана трифазна система електричних кіл

На схемах заміщення обмотки трифазного генератора позначають, як показано на рис. 20.3, а; при цьому напрям е.р.с. від кінця до початку обмотки умовно вважають додатним.

Якщо кожен обмотку трифазного генератора з'єднати із своїм приймачем, утворяться три незалежних кола, кожне із своїм струмом. Одне таке коло з його елементами (обмотка генератора, приймач, з'єднувальні проводи) в практиці називається фазою. Термін «фаза» в § 12.2 використано в дійсному значенні, яке залишається в силі й для трифазних кіл.

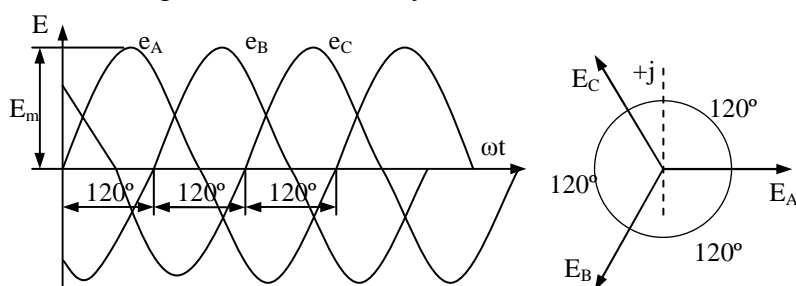


Рис. 20.2. Графіки (а) та векторна діаграма (б) симетричної системи е.р.с.

У незв'язаній трифазній системі генератор з приймачем енергії з'єднується шістьма проводами. Велика кількість з'єднувальних проводів — основний недолік незв'язаних систем, які через це не застосовуються. Зменшення кількості з'єднувальних проводів досягають у зв'язаних системах, де обмотки генератора, як і окремі фази приймача, електрично зв'язані між собою й утворюють трифазні кола.

Видатний російський учений М. О. Доливо-Добровольський (1862...1919) для цієї мети запропонував дві схеми з'єднання: зіркою і трикутником, які застосовуються і тепер.

Трифазне коло називається симетричним, якщо комплекси опорів усіх його фаз однакові.

Якщо в такому колі діє симетрична система е.р.с., то струми в фазах однакові за значенням й зсунуті за фазою на кут 120° , тобто утворюється симетрична трифазна система струмів (рис. 20.3, б).

Слід зазначити, що приймачі електричної енергії (електродвигуни, електролампи тощо) з генераторами, встановленими на електростанціях, звичайно безпосередньо не зв'язані.

На шляху електроенергії від генератора до приймачів встановлено трансформатори, за

допомогою яких в електричній мережі не раз змінюється напруга. Для зазначених приймачів джерелом електричної енергії найчастіше є трифазні трансформатори, які щодо генераторів самі є приймачами енергії. Тому далі всі міркування відноситимемо до трифазного джерела, маючи на увазі при цьому генератор або трансформатор.

ЗАДАЧІ

Задача 20.1. Довести, що три вектори, кожний з яких є різницею двох суміжних е.р.с. в системі (20.2), взятих в порядку прямого й зворотного проходження фаз, являють собою симетричну систему.

Задача 20.2. Користуючись системою е.р.с. (20.2), порівняти модулі комплексів E_A - E_G і E_B (або довжини відповідних векторів). Який з них більший і в скільки разів?

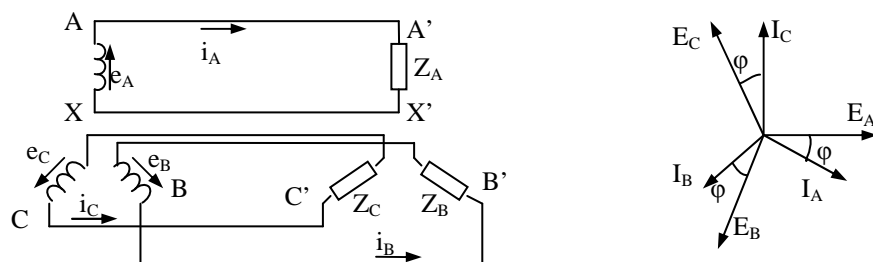


Рис. 20.3. Незв'язана трифазна система електричних кіл при з'єднанні зіркою (а) та її векторна діаграма (б)

§ 20.2. З'ЄДНАННЯ ЗІРКОЮ ПРИ СИМЕТРИЧНОМУ НАВАНТАЖЕННІ

На рис. 20.4 показано зв'язану систему при з'єднанні фаз джерела енергії і приймача зіркою. Таку систему легко дістати з незв'язаної системи.

Кінці обмоток джерела X, Y, Z з'єднують у загальну точку N, яка називається нульовою точкою, або нейтраллю. Проводи, які з'єднують початки A, B і C обмоток джерела з приймачем (лінійні проводи), зберігають; три проводи, приєднані до кінців обмоток, замінюють одним. Завдяки цьому в приймачі також утворюється нульова точка N' (нейтраль). Нульові точки джерела енергії і приймача можуть бути зв'язані проводом, який називається нульовим, або нейтральним (рис. 20.4, а). При цьому матимемо зв'язану чотирипровідну трифазну систему електричних кіл.

Далі буде показано, що в симетричних трифазних колах можна відмовитись від нульового проводу, оскільки струм у ньому дорівнює нулю. В цьому випадку зв'язок між джерелом і приймачем, з'єднаними зіркою, можна здійснювати за трипровідною схемою (рис. 20.4, б).

Фазні напруги

Різниця потенціалів між лінійними затискачами і нейтраллю називається фазною напругою (U_A, U_B, U_C).

Фазні напруги джерела — це напруги між початками й кінцями фаз, вони відрізняються від е.р.с. на спад напруги в обмотках. Якщо опором обмоток можна знехтувати, то фазні напруги джерела дорівнюють відповідним е.р.с. У симетричній системі вони зображуються, так само як і е.р.с., трьома однаковими за значенням векторами, зсунутими за фазою на 120° (рис. 20.5, а).

У чотирипровідному і симетричному трипровідному колах фазні напруги в приймачі менші, ніж у джерелі, на спад напруги у з'єднувальних проводах. Якщо опором проводів можна знехтувати, то фазні напруги в приймачі вважають такими ж, як у джерелі.

Лінійні напруги

Різниця потенціалів між кожною парою лінійних проводів називається лінійною напругою (U_{AB}, U_{BC}, U_{CA}).

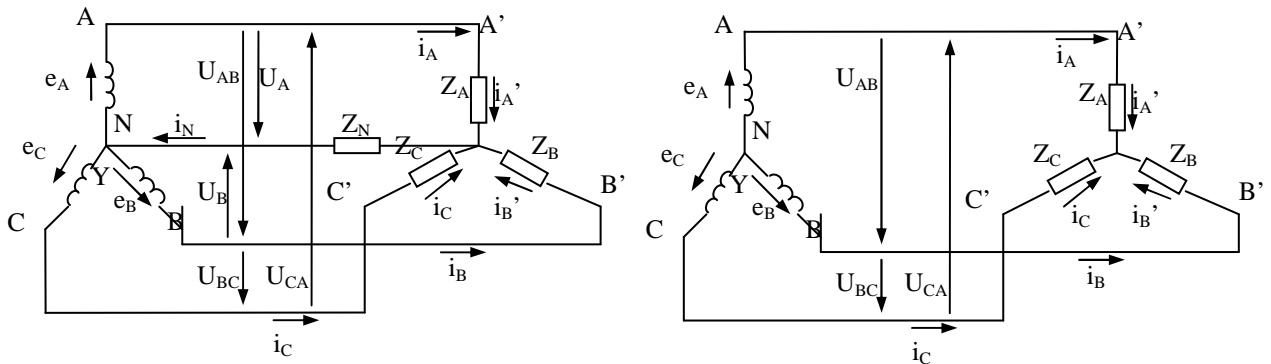


Рис. 20.4. Зв'язані трифазні системи електричних кіл при з'єднанні зіркою

Якщо прийняти потенціал нульової точки N джерела енергії таким, що дорівнює нулю, то потенціали його лінійних затискачів:

$$V_A = u_A; \quad V_B = u_B; \quad V_C = u_C.$$

Лінійні напруги:

$$u_{AB} = V_A - V_B = u_A - u_B;$$

$$u_{BC} = V_B - V_C = u_B - u_C;$$

$$u_{CA} = V_C - V_A = u_C - u_A.$$

Перейшовши до діючих значень, запишемо вирази в комплексній формі:

$$\left. \begin{aligned} U_{AB} &= U_A - U_B; \\ U_{BC} &= U_B - U_C; \\ U_{CA} &= U_C - U_A. \end{aligned} \right\} \quad (20.3)$$

Потенціали лінійних затискачів (або лінійних проводів) у кожному мить відрізняються один від одного через наявність зсуву фаз між фазними напругами. Отже, лінійні напруги не дорівнюють нулю, їх можна визначити аналітично за рівняннями (20.3) або графічно за допомогою векторної діаграми рис. 20.5.

З векторної діаграми видно, що при симетричній системі фазних напруг система лінійних напруг також симетрична: U_{AB}, U_{BC}, U_{CA} однакові за значенням і зсунуті відносно одна одної на 120° . Разом з тим при прямій послідовності фаз зірка векторів лінійних напруг випереджає на 30° зірку векторів фазних напруг.

Векторну діаграму зручно виконати топографічною, тоді кожній точці кола відповідає певна точка на діаграмі (рис. 20.5, б). Вектор, проведений між двома точками топографічної діаграми, виражає за значенням і фазою напругу між однойменними точками кола.

Діюче значення лінійних напруг легко визначити за векторною діаграмою з трикутника, утвореного векторами двох фазних і однієї лінійної напруг, наприклад ANB:

$$U_{AB} = 2U_A \cos 30^\circ = U_A \sqrt{3}.$$

Позначивши всі фазні напруги U_ϕ , а лінійні напруги U_λ , дістанемо загальне співвідношення між лінійними та фазними напругами в симетричній системі:

$$U_\lambda = \sqrt{3}U_\phi. \quad (20.4)$$

Фазні та лінійні струми

У зв'язаній системі (див. рис. 20.4, а), так само як і в незв'язаній, кожна фаза є замкненим колом. Згідно з додатним напрямом е. р. с., в обмотках джерела додатний напрям струмів у лінійних проводах — від джерела до приймача, а в нульовому проводі — від приймача до джерела.

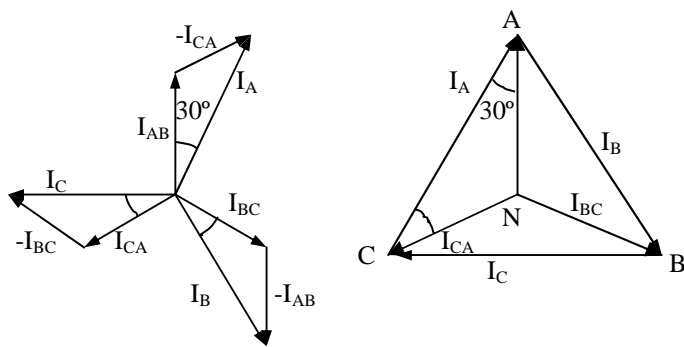


Рис. 20.5. Векторні діаграми напруг при з'єднанні обмоток джерела зіркою

В трифазних колах розрізняють фазні та лінійні струми.

Струми в фазах джерела і приймача називають фазними (на рис. 20.4 це i_A, i_B, i_C ; загальне позначення i_ϕ). Струми в лінійних проводах називають лінійними (i_A, i_B, i_C , загальне позначення i_L).

При з'єднанні зіркою в точках переходу із джерела в лінію й з лінії в приймач немає розгалужень, тому фазні та лінійні струми однакові між собою в кожній фазі:

$$I_L = I_\phi \quad (20.5)$$

ЗАДАЧІ

Задача 20.3. В кожній фазі трифазного генератора наводиться е. р. с. $E=127$ В. Накреслити схему, побудувати векторну діаграму і визначити лінійні напруги при холостому ході, якщо в загальну точку з'єднано затискачі: а) X, Y, Z; б) X, Y, C; в) X, B, Z; г) X, B, C; д) A, B, C. Буквами A, B, C позначено початки, а X, Y, Z — кінці обмоток.

Розв'язання. Схему генератора і векторну діаграму при з'єднанні в загальну точку затискачів X, Y, Z показано на рис. 20.6; а. З векторної діаграми видно що лінійні напруги однакові:

$$U_L = \sqrt{3}U_\phi = 1.73 \cdot 127 = 220 \text{ В.}$$

При з'єднанні в загальну точку затискачів X, Y, C (рис. 20.6, б) фазу C ввімкнено початком у нульовій точці; тому вектор фазної напруги цієї фази зображено на векторній діаграмі в положенні, повернутому на 180° до нормального, і позначено U_Z . З векторної діаграми випливає: $U_{AB} = 220$ В; $U_{BZ} = 127$ В; $U_{ZA} = 127$ В.

Задачу для випадків «в», ..., «д» розв'яжіть самостійно.

Задача 20.4 Побудувати в прямокутній системі координат графіки миттєвих значень трьох фазних і однієї лінійної напруг для випадків «а», «г» попередньої задачі.

Вказівка. Графіки фазних напруг побудувати методом обертання векторів на рисунку. Для випадку «а» побудувати графік лінійної напруги U_{AB} , для випадку «г» — лінійної напруги U_{AY} , використавши побудовані раніш графіки фазних напруг.

Задача 20.5. Написати в тригонометричній формі комплекси фазних і лінійних напруг симетричної трифазної системи. Визначити: а) суму трьох фазних напруг; б) суму трьох лінійних напруг.

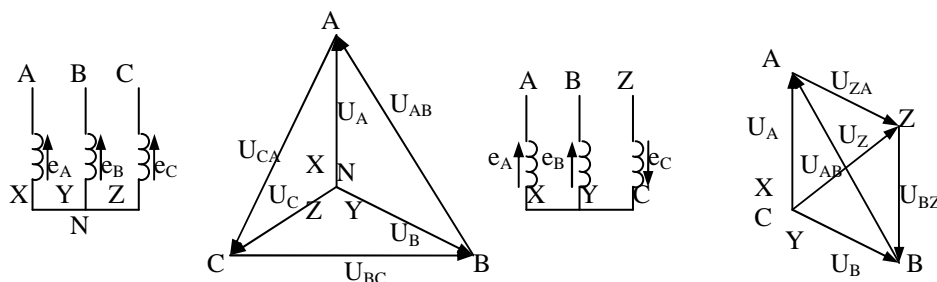


Рис. 20.6. До задачі 20.3

§ 20.3. З'ЄДНАННЯ ТРИКУТНИКОМ ПРИ СИМЕТРИЧНОМУ НАВАНТАЖЕННІ

При з'єднанні трикутником з трьох обмоток джерела утворюється замкнений на себе контур (рис. 20.7, а). Точно так само замкнений контур можна утворити з трьох фаз приймача. Загальні точки двох фаз джерела й двох фаз приймача з'єднано лінійними проводами. Так утворюється зв'язана трифазна трипровідна система, в якій кожному обмотку джерела з'єднано з відповідною фазою приймача парою лінійних проводів. Кожний з них забезпечує такий зв'язок у двох суміжних фазах.

Фазні та лінійні напруги

З'єднання кількох обмоток джерела в замкнений контур можливе лише тоді, коли сума всіх е.р.с. цього контура дорівнює нулю.

Ця вимога виконується при такому порядку з'єднання, коли кінець попередньої обмотки з'єднується з початком наступної. Наприклад, кінець X фази A з'єднано з початком фази B у загальній точці XB, кінець Y фази B — з початком фази C в загальній точці YC й кінець Z фази C — з початком фази A в загальній точці ZA.

Симетрична система е.р.с., які діють у контурі, має суму, що дорівнює нулю (рис. 20.7, б): $E_A + E_B + E_C = 0$.

В цьому випадку при холостому ході джерела струму в його обмотках немає.

При несиметрії системи е.р.с. їх сума не дорівнює нулю; тому вже при холостому ході в обмотках джерела утворюється струм, який може бути великим навіть при малій несиметрії, оскільки опір обмоток незначний.

При неправильному вмиканні обмоток, коли дві сусідні фази з'єднано печатками або кінцями (рис. 20.8), сума е.р.с. в контурі дорівнює подвоєному значенню е.р.с. фази,

Із схеми з'єднання трикутником видно, що фазні та лінійні напруги збігаються, оскільки кінець однієї фази з'єднано з початком іншої:

$$U_{л} = U_{ф} \quad (20.6)$$

Векторну діаграму напруг можна побудувати у вигляді зірки або замкненого трикутника векторів (рис. 20.9). В останньому випадку діаграма є топографічною.

Фазні та лінійні струми

Кожна фаза приймача при з'єднанні трикутником перебуває під лінійною напру-

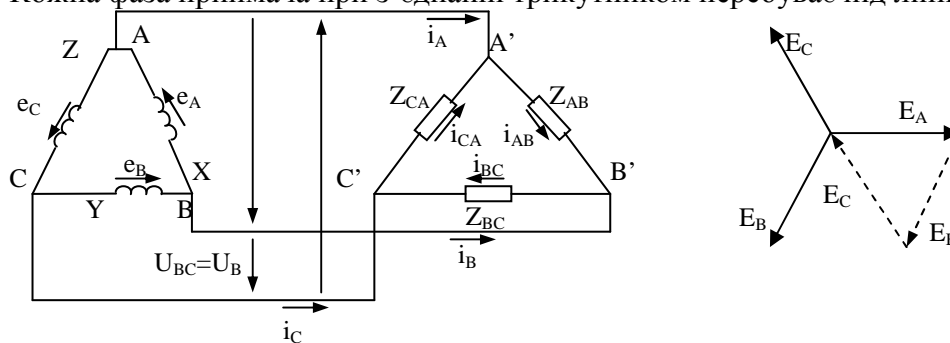


Рис. 20.7. Зв'язана трифазна система електричних кіл при з'єднанні трикутником (а) та її векторна діаграма (б)

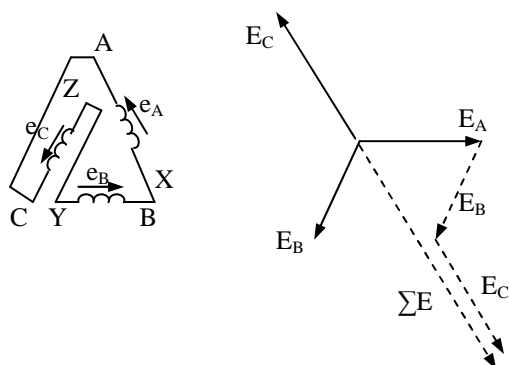


Рис. 20.8. Неправильне з'єднання трикутником обмоток джерела

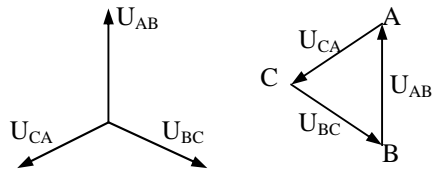


Рис. 20.9. Векторні діаграми напруг при з'єднанні обмоток джерела трикутником

гою. Цим зумовлено наявність у приймачі фазних струмів i_{AB} , i_{BC} , i_{CA} , додатний напрям яких на схемі рис. 20.7 вибрано відповідно до додатного напрямку е.р.с. у фазах джерела. Точки А', В', С' приймача, так само як і точки А, В, С джерела, є електричними вузлами; тому фазні струми відрізняються від лінійних i_A , i_B , i_C . Для вузлових точок А, В, С можна записати рівняння в комплексній формі за першим правилом Кірхгофа:

$$\left. \begin{aligned} I_A &= I_{AB} - I_{CA}; \\ I_B &= I_{BC} - I_{AB}; \\ I_C &= I_{CA} - I_{BC}; \end{aligned} \right\} \quad (20.7)$$

При симетричному навантаженні струми у всіх фазах однакові. Зірка векторів лінійних струмів зсунута відносно зірки фазних струмів на 30° проти обертання векторів, якщо послідовність фаз — пряма (рис. 20.10, а).

Діюче значення лінійних струмів визначають за векторною діаграмою з рівнобедреного трикутника, утвореного векторами двох фазних і одного лінійного струмів, наприклад із трикутника ANC (рис. 20.10, б):

$$I_A = 2I_{AB} \cos 30^\circ = I_{AB} \sqrt{3} .$$

Позначивши всі фазні струми I_ϕ , а лінійні струми I_L , дістанемо загальне співвідношення між лінійними та фазними струмами в симетричному колі:

$$I_L = \sqrt{3}I_\phi . \quad (20.8)$$

ЗАДАЧІ

Задача 20.6. У кожній фазі трифазного трансформатора наводиться е.р.с. $E = 220$ В.

Накреслити схему, побудувати векторну діаграму і визначити суму е.р.с. у контурі з трьох обмоток, якщо між собою з'єднати затискачі: а) А, Z; В, X; С, Y; б) А, Z; В, C; X, Y; в) А, C; В, X; Z, Y; г) А, Y; В, Z; C, X.

Задача 20.7. Записати в тригонометричній формі комплекси фазних струмів симетричної трифазної системи. Визначити суму трьох фазних струмів.

Задача 20.8. Записати в алгебраїчній формі комплекси лінійних струмів симетричної трифазної системи. Визначити суму трьох лінійних струмів.

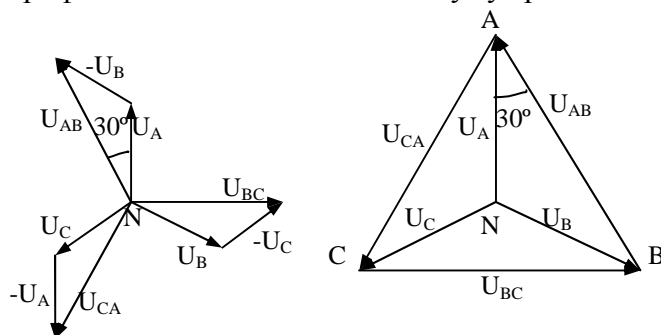


Рис. 20.10. Векторні діаграми струмів при з'єднанні приймачів трикутником

§ 20.4. РОЗРАХУНОК СИМЕТРИЧНИХ ТРИФАЗНИХ КІЛ

Формули (20.4) і (20.8), як уже було зазначено, справедливі тільки для симетричних систем

напруг і струмів.

Трифазні двигуни мають три однакові фази обмотки, і створюване ними електричне навантаження симетричне. Несиметрію створюють однофазні приймачі, наприклад лампи електричного освітлення та інші побутові електроприймачі. Якщо при проектуванні освітлювальне навантаження поділити між фазами порівну, то в процесі експлуатації навантаження, як правило, буде несиметричним через неодноразність вмикання ламп. При великій кількості однофазних приймачів несиметрія навантаження, пов'язана з неоднозначністю вмикання їх, невелика; тому лінії напругою 3; 6 кВ і вище, призначені для електропостачання промислових підприємств або певного району (фідерні лінії), виконують трипровідними незалежно від схеми з'єднання груп приймачів (зіркою або трикутником). Мета розрахунку полягає у визначенні струмів у фазах приймача та проводах лінії, а також потужності приймача в цілому й у кожній фазі. Може бути поставлена й зворотна задача.

З'єднання зіркою

У симетричному колі комплекси опорів фаз приймача однакові ($Z_A = Z_B = Z_C = Z$), і між затискачами приймача діє симетрична система лінійних напруг при будь-якій схемі з'єднання джерела (зіркою або трикутником).

Тому на розрахунковій схемі джерело (генератор або трансформатор) не показують і вважають, що приймач ввімкнено в трифазну мережу (див. рис. 21.3, а).

У симетричному колі досить виконати розрахунок однієї фази, оскільки струми й потужності в усіх фазах однакові.

При відомій лінійній напрузі U_L фазна напруга

$$U_\phi = U_L / \sqrt{3} .$$

Фазний струм, що дорівнює лінійному,

$$I_\phi = I_L = U_\phi / Z .$$

З'єднання трикутником

При з'єднанні трикутником фазна напруга $U_\phi = U_L$. Струм у фазі

$$I_\phi = U_\phi / Z .$$

Лінійний струм

$$I_L = \sqrt{3} I_\phi .$$

Визначення потужності

Потужність у кожній фазі трифазного кола визначають за тими самими формулами, які застосовувались при розрахунку однофазних кіл.

При симетричному навантаженні фазні напруги, струми й кути зсуву фаз між ними в кожній фазі однакові; тому при визначенні потужності кола можна записати загальні вирази:

$$\left. \begin{aligned} P &= 3U_\phi I_\phi \cos \varphi; \\ Q &= 3U_\phi I_\phi \sin \varphi; \\ S &= 3U_\phi I_\phi. \end{aligned} \right\} \quad (20.9)$$

Враховавши, що при з'єднанні зіркою

$$U_\phi = U_L / \sqrt{3}; \quad I_\phi = I_L,$$

а при з'єднанні трикутником

$$I_\phi = I_L / \sqrt{3}; \quad U_\phi = U_L,$$

потужності можна визначати через лінійні значення напруг і струмів:

$$\left. \begin{aligned} P &= \sqrt{3}U_{\text{л}}I_{\text{л}} \cos \varphi; \\ U &= \sqrt{3}U_{\text{л}}I_{\text{л}} \sin \varphi; \\ S &= \sqrt{3}U_{\text{л}}I_{\text{л}}. \end{aligned} \right\} \quad (20.10)$$

При розв'язуванні задач символічним методом потужність визначають, так само як і в однофазних колах, добутком відповідних комплексу напруги й спряженого комплексу струму.

ЗАДАЧІ

Задача 20.9. До трифазного трансформатора з лінійною напругою на вторинній обмотці 380 В ввімкнено зіркою електричні лампи потужністю 40 Вт кожна (по 100 шт. у фазі) та трифазний двигун потужністю 10 кВт, який має к.к.д. 85% $\cos \varphi = 0,8$.

Нехтуючи опором проводів, визначити струми в лінії.

Розв'язання. Задане навантаження симетричне, оскільки в кожній фазі ввімкнено однакові за значенням і характером приймачі: освітлювальне навантаження $P = 40 \cdot 100 = 4000$ Вт й одну фазу двигуна (рис. 20.11). Розрахунок можна вести на одну фазу:

$$U_{\phi} = U_{\text{л}} / \sqrt{3} = 380 / 1,73 = 220 \text{ В}$$

Струм освітлювального навантаження

$$I_0 = P_{\phi} / U_{\phi} = 4000 / 220 = 18,2 \text{ А}.$$

Струм у фазі двигуна

$$I_{\phi} = \frac{P_{\phi}}{3U_{\phi}\eta \cos \varphi} = \frac{10000}{3 \cdot 220 \cdot 0,85 \cdot 0,8} = 22,3 \text{ А}.$$

Для того щоб визначити струм в лінії, треба додати струми ламп і двигуна. Ці струми за фазою не збігаються, тому розкладемо їх на активні та реактивні складові й додамо однойменні складові.

Струм у лампах збігається за фазою з напругою, тому реактивний струм ламп $I_{0,p} = 0$, активний струм $I_{0,a} = I_0 = 18,2 \text{ А}$.

Активний струм у фазі двигуна

$$I_{\phi,a} = I_{\phi} \cos \varphi = 22,3 \cdot 0,8 = 17,8 \text{ А}.$$

Реактивний струм у фазі двигуна

$$I_{\phi,p} = I_{\phi} \sin \varphi = 22,3 \cdot 0,6 = 13,4 \text{ А}.$$

Загальний активний струм у лінії

$$I_a = I_{0,a} + I_{\phi,a} = 18,2 + 17,8 = 36 \text{ А}.$$

Загальний реактивний струм у лінії

$$I_p = I_{\phi,p} = 13,4 \text{ А}.$$

Струм у лінії

$$I = \sqrt{I_a^2 + I_p^2} = \sqrt{36^2 + 13,4^2} = 38,5 \text{ А}.$$

Задача 20.10. Розв'язати попередню задачу символічним методом. Вказівка. За заданими значеннями потужностей освітлювального навантаження і двигуна визначити розрахункову провідність однієї фази двигуна та групи ламп, ввімкнених у фазу, а потім провідності фази. При визначенні провідності фази двигуна врахувати, що його номінальну потужність $P_H = 10$ кВт задано на валу. Електрична потужність на затискачах двигуна $P = P_H / \eta$.

Задача 20.11. Приймач електричної енергії, з'єднаний зіркою, має опори

$$Z_A = Z_B = Z_C = (29 + j18) \text{ Ом}.$$

Визначити струми в проводах лінії, за допомогою якої приймач приєднано до генератора з лінійною напругою 380 В, якщо кожний провід лінії має опір

$$Z_{\text{л}} = (1 + j2) \text{ Ом}.$$

Визначити також активну, реактивну і повну потужності приймача.

Задача 20.12. Приймач електричної енергії, з'єднаний трикутником, має активний опір $R = 12 \text{ Ом}$ і ємність $C = 199 \text{ мкФ}$. Визначити: струми у фазах приймача і в лінії, за допомогою якої приймач приєднано до мережі з лінійною напругою $U = 220 \text{ В}$ та частотою $f = 50 \text{ Гц}$; активну, реактивну і повну потужності приймача.

Розв'язання. Ємнісний опір фази приймача

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{10^6}{2 \cdot 3.14 \cdot 50 \cdot 199} = 16 \text{ Ом}.$$

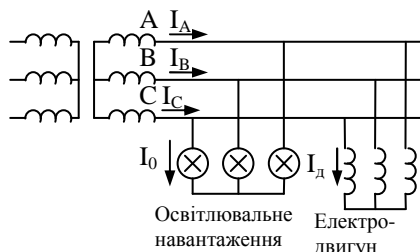


Рис. 20.11. До задачі 20.9

Повний опір фази приймача

$$Z = \sqrt{R^2 + X_G^2} = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20 \text{ Ом}.$$

Фазна напруга приймача

$$U_\phi = U_n = 220 \text{ В}.$$

Фазний струм

$$I_\phi = U_\phi / Z = 220 / 20 = 11 \text{ А}.$$

Лінійний струм

$$I_n = \sqrt{3} I_\phi = \sqrt{3} \cdot 11 = 19 \text{ А}.$$

Потужності приймача:

активна

$$P = 3U_\phi I_\phi \cos \varphi = 3 \cdot 220 \cdot 11 \cdot \frac{12}{20} = 4356 \text{ Вт};$$

реактивна

$$Q = 3U_\phi I_\phi \sin \varphi = 3 \cdot 220 \cdot 11 \cdot \frac{16}{20} = 5808 \text{ вар};$$

повна

$$S = 3U_\phi I_\phi = 3 \cdot 220 \cdot 11 = 7260 \text{ ВА}.$$

Задача 20.13. Трифазний асинхронний двигун, з'єднаний трикутником, при номінальній напрузі $U_H = 380 \text{ В}$ і номінальному навантаженні на валу має струм у фазі 22 А , $\cos \varphi = 0,8$.

Визначити активну і реактивну потужності двигуна на його затискачах та механічну потужність на валу, якщо його к.к.д. $\eta = 0,88$. Яку потужність розвиватиме цей двигун, якщо його ввімкнути в ту саму мережу, з'єднавши зіркою, а $\cos \varphi$ і η вважати незмінними?

Задача 20.14. Шість резисторів, які мають однакові опори по 12 Ом , з'єднано по три трикутником і зіркою і ввімкнено в трифазну мережу трьома проводами, опір кожного з яких 1 Ом (див. рис. 21.6).

Визначити фазні струми і напруги приймачів, якщо лінійна напруга в мережі 208 В .

Побудувати векторну діаграму.

ЧОТИРИПОЛЮСНИКИ ПРИ ЗМІННИХ СТРУМАХ І НАПРУГАХ

Нерідко треба дослідити зміну режиму енергії однієї вітки складного електричного кола при зміні електричних характеристик в іншій вітці.

Розв'язування такої задачі полегшується за допомогою поняття про чотириполіусник, оскільки під час аналізу розглядаються тільки дві вітки, а режим іншої частини кола може бути невідомим.

Такий метод застосовується при дослідженні ліній електропередачі трансформаторів, електричних машин, підсилювачів та ін.

§ 18.1. РІВНЯННЯ ЧОТИРИПОЛЮСНИКА

Кожну з двох будь-яких віток електричного кола, які припускається розглянути у взаємозв'язку, приєднано до іншої частини кола двома затискачами або, як ще говорять, в двох полюсах (рис. 18.1, а).

Частина електричного кола, що має дві пари затискачів, одна з яких є вхідною, а інша — вихідною, називається чотириполіусником.

Внутрішній зміст і схеми чотириполіусників можуть біти різними. Завдання полягає в тому, щоб написати загальні вирази, придатні для будь-якого чотириполіусника.

Постановка задачі

Чотириполіусник, який має у своїх вітках джерела електричної енергії, називається активним, а чотириполіусник, який не має у своїх вітках джерел енергії, — пасивним.

Режим роботи чотириполіусника відносно двох віток, які приєднуються до його затискачів, цілком визначений, якщо відомі напруги і струми на вході та виході: u_1, u_2, i_1, i_2 .

Задача ставиться так: з чотирьох величин, які визначають режим чотириполіусника, дві величини задано; їх можна розглядати як задані дії на коло. Необхідно знайти дві інші величини, які є відгуками на ці дії.

На практиці частіше доводиться розглядати схеми, в яких одна з віток, приєднаних до чотириполіусника, має джерело енергії, а інша — приймач.

Затискачі, до яких приєднується вітка з джерелом, вважатимемо вхідними, а затискачі, до яких приєднується приймач, — вихідними.

Вхідними затискачами може бути будь-яка пара затискачів — первинна 1-1 або вторинна 2-2 (рис. 18.1, б).

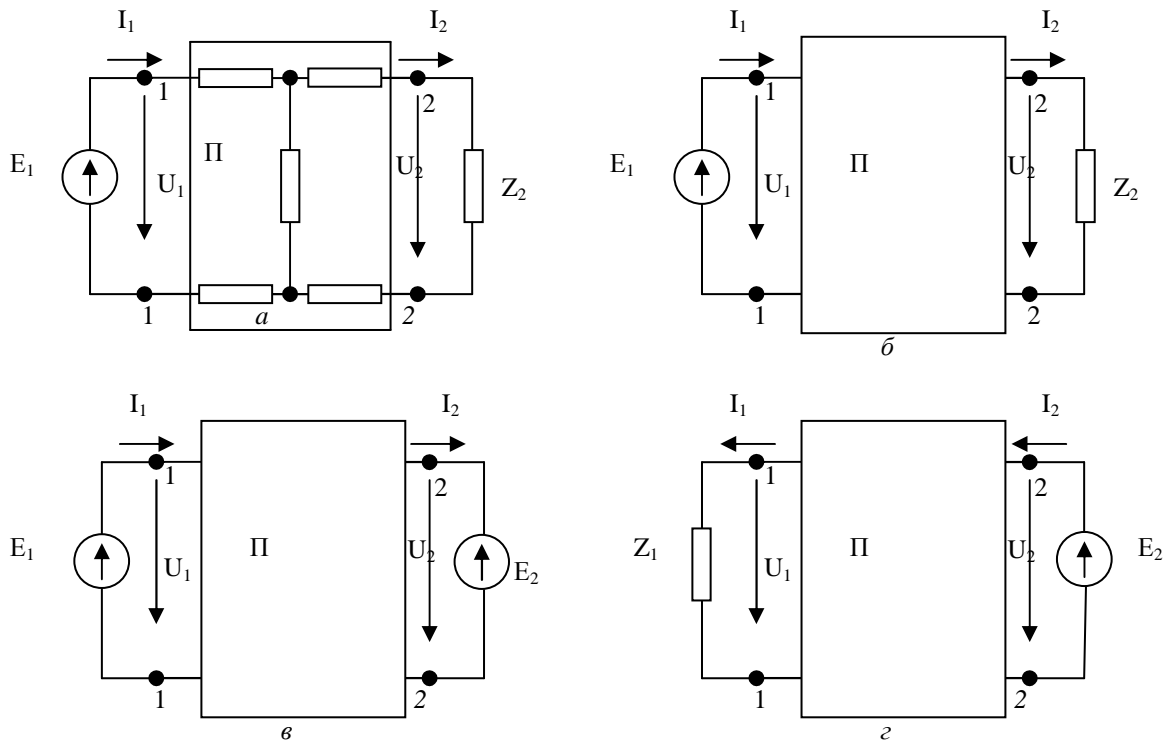


Рис.18.1. До питання про чотириполюсник

Основні рівняння чотириполюсника

Позначимо комплекси напруги і струму від первинних затискачів U_1, I_1 , від вторинних затискачів — U_2, I_2 ; $U_1 = E_1, U_2 = I_2 Z_2$. У режимі чотириполюсника нічого не зміниться, якщо замість приймача Z_2 до вторинних затискачів приєднати джерело, е. р. с. якого

$$E_2 = -U_2 \text{ (рис. 18.1,в).}$$

Після такої заміни можна застосувати метод накладання, щоб знайти залежність між вхідними напругами і струмами.

При короткому замиканні затискачів 2-2 (джерело E_2 вилучено) часткові струми в схемі викликає е. р. с. E_1 . Значення їх пропорційні напрузі U_1 :

$$I_1^1 = Y_{1,1} U_1; I_2^1 = Y_{2,1} U_1$$

При наявності джерела E_2 й короткому замиканні затискачів 1-1 значення струмів пропорційні U_2 :

$$I_1^{11} = -Y_{1,2} U_2; I_2^{11} = -Y_{2,2} U_2$$

Коефіцієнти пропорційності мають розмірність провідності: $Y_{1,1}, Y_{2,2}$ — вхідні провідності; $Y_{2,1}, Y_{1,2}$ — взаємні провідності.

Відповідно до принципу взаємності взаємні провідності дорівнюють одна одній: $Y_{2,1} = Y_{1,2}$.

Застосовуючи принцип накладання струмів, знаходимо:

$$I_1 = I_1^1 + I_1^{11}; I_2 = I_2^1 + I_2^{11},$$

або

$$I_1 = Y_{1,1} U_1 - Y_{1,2} U_2$$

$$I_2 = Y_{2,1} U_1 - Y_{2,2} U_2 \quad (18.1)$$

З цих рівнянь можна дістати інші рівняння, в яких заданими є напруга і струм на

$$U_1 = \underline{A} U_2 + \underline{B} I_2;$$

$$I_1 = \underline{C} U_2 + \underline{D} I_2$$

виході чотириполосника, а шуканими — напруга і струм на вході. Для цього систему (18.1) треба розв'язати відносно U_1, I_1 :

(18.2)

У цих рівняннях комплекси A, B, C, D називаються коефіцієнтами, або параметрами, чотириполосника:

$$\begin{aligned} \underline{A} &= \underline{Y}_{2,2} / \underline{Y}_{2,1}; & \underline{B} &= 1 / \underline{Y}_{2,1}; \\ \underline{C} &= (\underline{Y}_{1,1} \underline{Y}_{2,2} - \underline{Y}_{1,2} \underline{Y}_{2,1}) / \underline{Y}_{2,1}; & \underline{D} &= \underline{Y}_{1,1} / \underline{Y}_{2,1}. \end{aligned}$$

(18.3)

Рівняння в формі (18.2) зручно застосовувати тоді, коли чотириполосник виконує роль передавальної ланки між джерелом і приймачем енергії.

Властивості чотириполосників

Між коефіцієнтами чотириполосника є такий зв'язок:

$$\underline{A} \underline{D} - \underline{B} \underline{C} = 1.$$

(18.4)

Це неважко довести, якщо в формулу (18.4) підставити вирази (18.3).

Якщо поміняти місцями вхідні й вихідні затискачі (рис. 18.1, г), то рівняння (18.1) можна записати, помінявши індекси при всіх величинах:

$$\begin{aligned} I_2 &= \underline{Y}_{2,2} U_2 - \underline{Y}_{1,2} U_1; \\ I_1 &= \underline{Y}_{1,2} U_2 - \underline{Y}_{1,1} U_1. \end{aligned}$$

Розв'язання цих рівнянь відносно U_2 та I_2 дає:

$$\begin{aligned} U_2 &= \underline{D} U_1 + \underline{B} I_1; \\ I_2 &= \underline{C} U_1 + \underline{A} I_1. \end{aligned}$$

(18.5)

Зіставлення (18.5) і (18.2) показує, що при зміні місцями вхідних і вихідних затискачів у рівняннях чотириполосника міняються місцями коефіцієнти A і D .

Звідси випливає, що при рівності коефіцієнтів A і D чотириполосник має однакове коло від тієї та другої пари затискачів. Такий чотириполосник називається симетричним.

ЗАДАЧІ

Задача 18.1. Визначити коефіцієнти А, В, С, D чотириполосника, схему якого показано на рис. 18.2, а. Параметри схеми: $R_1 = 20 \text{ Ом}$; $X_1 = 30 \text{ Ом}$; $R_2 = 5 \text{ Ом}$; $X_2 = 15 \text{ Ом}$.

Розв'язання. Для розв'язування задачі скористаємося методом накладання, щоб визначити входні і взаємні провідності від первинних затискачів при короткому замиканні на виході та від вторинних затискачів при короткому

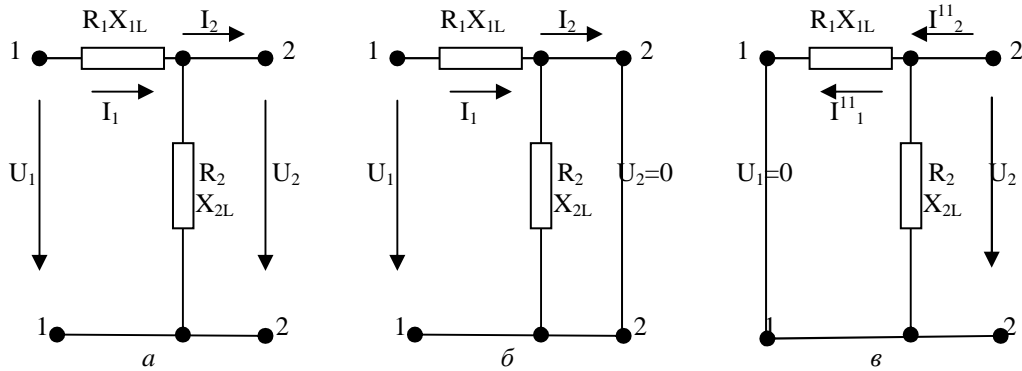


Рис. 18.2. До задачі 18.1.

замиканні на вході (рис. 18.2, в):

$$Y_{1,1} = I_1 / U_1 = 1 / (R_1 + jX_{1L}) = 1 / (20 + j30);$$

$$Y_{2,1} = I_2^1 / U_1 = i_1 / U_1$$

Оскільки $I_2 = I_1$, що видно із схеми рис. 18.2, б,

$$Y_{2,1} = Y_{1,2} = 1 / (R_1 + jX_{1L}) = 1 / (20 + j30);$$

$$Y_{2,2} = I_2^1 / U_2 = [1 / (R_1 + jX_{1L})] + [1 / (R_2 + jX_{2L})];$$

$$Y_{2,2} = [1 / (20 + j30)] + [1 / (5 + j15)];$$

$$A = Y_{2,2} / Y_{2,1} = [(5 + j9) / (-70 + j90)] [(20 + j30)] = 3.2 - j0.6 = 3.26e^{-j10^\circ 37'}$$

Інші коефіцієнти чотириполосника за формулами (18.3) визначте самі.

Задача 18.2. Обчислити коефіцієнти А, В, С, D чотириполосника, схему якого показано на рис. 18.3. Задано: $R_1 = 1000 \text{ Ом}$; $X_1 = 2000 \text{ Ом}$; $R_2 = 1000 \text{ Ом}$; $X_2 = 2500 \text{ Ом}$.

§ 18.2. РЕЖИМИ ЧОТИРИПОЛЮСНИКА

Для практики найбільший інтерес становить навантажувальний режим чотириполосника. Проте спочатку розглянемо режими холостого ходу й короткого замикання на виході чотириполосника, які використовуються, зокрема, для визначення його параметрів.

Холостий хід і коротке замикання

У режимі холостого ходу на виході чотириполосника (рис. 18.4, а) $I_2 = 0$, $U_2 = U_{2x}$. При короткому замиканні вторинних затискачів (рис. 18.4, б) $U_2 = 0$, $I_2 = I_{2к}$

З рівнянь (18.2) випливає:

$$\begin{aligned}
 U_{1x} &= \underline{A}U_{2x}; \quad I_{1x} = \underline{C}U_{2x}; \\
 U_{1k} &= \underline{B}I_{2k}; \quad I_{1k} = \underline{D}I_{2k}
 \end{aligned}$$

(18.6)

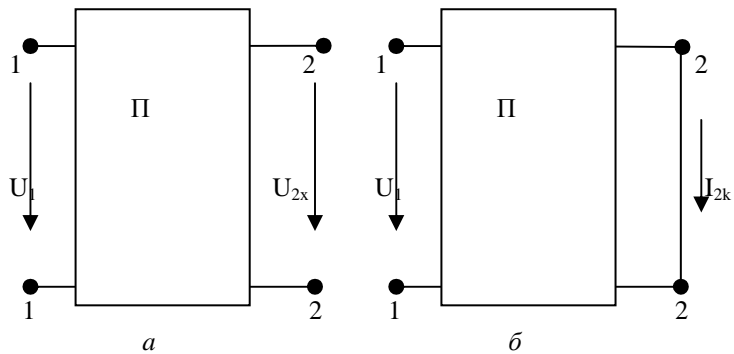
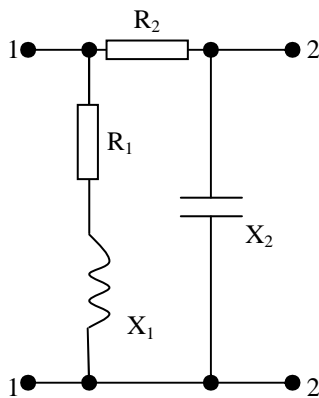


Рис.18.3. До задачі 18.2. Рис.18.4. До питання про режими чотириполюсника

З цих виразів можна визначити параметри чотириполюсника:

$$A = U_{1x}/U_{2x}; \quad B = U_{1k} / I_{2k}; \quad C = I_{1x} / U_{2x}; \quad D = I_{1k} / I_{2k}. \quad (18.7)$$

Якщо провести досліди холостого ходу й короткого замикання, виміряти напруги і струми (модулі та фази) на вході й виході чотириполюсника, то параметри його легко визначити за формулами (18.7).

З досліду холостого ходу також знайти вхідний опір при розімкнених вторинних затискачах [див. (18.6)]:

$$U_{1x} / I_{1x} = Z_{1x} = A/C. \quad (18.8)$$

З досліду короткого замикання [див. (18.6)] знаходять вхідний опір при замкнених накоротко вторинних затискачах:

$$U_{1k} / I_{1k} = Z_{1k} = B/D. \quad (18.9)$$

Якщо відомо внутрішню схему й опори всіх віток пасивного чотириполюсника, то параметри його можна знайти розрахунком, застосувавши відомі методи перетворення схем. Спочатку визначають вхідні опори Z_{1x} та Z_{1k} і додатково — вхідний опір від вторинних затискачів при розімкнених первинних затискачах ($I_1 = 0$). З рівнянь (18.5)

$$Z_{2x} = U_{2x} / I_{2x} = D/C. \quad (18.10)$$

Сумісним розв'язанням чотирьох рівнянь (18.4), (18.8), ..., (18.10) визначають

коефіцієнти чотиріполюсника.

Як контрольне можна використати рівняння, добуте на основі режиму короткого замикання на первинному боці.

Вхідний опір від вторинних затискачів при короткому замиканні на первинному боці з (18.5) при $U_1 = 0$

$$Z_{2k} = U_{2k} / I_{2k} = B / A.$$

Режим при навантаженні

Напруга і струм на вході чотиріполюсника (18.2) складаються з двох доданків.

Врахувавши вирази (18.7), основні рівняння чотиріполюсника можна записати так:

$$\begin{aligned} U_1 &= \underline{A} U_2 + \underline{B} I_2 = U_{1x} + U_{1k}; \\ I_1 &= \underline{C} U_2 + \underline{D} I_2 = I_{1x} + I_{1k}. \end{aligned}$$

(18.11)

З рівнянь видно, що напругу і струм на вході чотиріполюсника в режимі при навантаженні визначають накладанням відповідних величин, відомих за режимами холостого ходу й короткого замикання.

Робочий режим чотиріполюсника в деяких випадках характеризується вхідним опором від первинних затискачів (Z_{1BX}) і від вторинних затискачів (Z_{2BX}).

Поділимо перше рівняння (18.2) на друге:

$$Z_{1BX} = U_1 / I_1 = (A U_2 + B I_2) / (C U_2 + D I_2).$$

Проте $U_2 = I_2 Z_2$, ТОМУ

$$Z_{1BX} = (A Z_2 + B) / (C Z_2 + D). \quad (18.12)$$

де Z_2 — опір навантаження на вторинному боці.

Вхідний опір від вторинних затискачів знайдемо з рівнянь (18.5):

$$Z_{2BX} = U_2 / I_2 = (D U_1 + B I_1) / (C U_1 + A I_1).$$

Врахувавши, що $U_1 = I_1 Z_1$, де Z_1 — опір навантаження на первинному боці, знайдемо:

$$Z_{2BX} = (D Z_1 + B) / (C Z_1 + A). \quad (18.13)$$

ЗАДАЧІ

Задача 18.3. Визначити коефіцієнти A , B , C , D чотиріполюсника, схему якого показано на рис. 18.2, а. Параметри схеми — за умовою задачі 18.1: $R_1 = 20 \text{ Ом}$; $X_1 = 30 \text{ Ом}$; $R_2 = 5 \text{ Ом}$; $X_2 = 15 \text{ Ом}$.

Розв'язання. В цьому випадку визначимо коефіцієнти чотиріполюсника на підставі дослідів холостого ходу й короткого замикання. Сумісне розв'язання рівнянь (18.4), (18.8), ... (18.10) дає:

$$A = \sqrt{Z_{1BX}^2 / (Z_{1x} Z_{2x} - Z_{1k} Z_{2k})};$$

$$Z_{1x} = R_1 + jX_{1L} + R_2 + jX_{2L} = 20 + j30 + 5 + j15 = 25 + j45;$$

$$Z_{1k} = R_1 + jX_{1L} = 20 + j30;$$

$$Z_{2x} = R_2 + jX_{2L} = 5 + j15;$$

$$A = \sqrt{[(25 + j45)^2] / [(25 + j45)(5 + j15) - (20 + j30)(5 + j15)]} = 3.26e^{-j10^\circ 37'}$$

Інші коефіцієнти чотиріполюсника визначте самостійно.

Задача 18.4. Визначити коефіцієнти чотиріполюсника, еквівалентного повітряному трансформатору рис. 16.7, а. Задано: $R_1 = 2 \text{ Ом}$; $L_1 = 0.5 \text{ мГн}$; $R_2 = 3 \text{ Ом}$; $L_2 = 0.72 \text{ мГн}$. Коефіцієнт зв'язку між обмотками $k = 0,5$.

Вказівка. Схему рис. 18.4 слід попередньо замінити еквівалентною схемою заміщення (див. § 16.3).

§ 18.3. СХЕМИ ЗАМІЩЕННЯ ПАСИВНОГО ЧОТИРИПОЛЮСНИКА

Пасивний чотиріполюсник, у якого опори елементів схеми стали, можна звести до однієї з еквівалентних схем заміщення з трьома вітками, з'єднаними зіркою або трикутником.

Т-подібна схема заміщення

Три вітки пасивного чотиріполюсника, з'єднані зіркою, утворюють Т-подібну схему заміщення (рис. 18.5, а).

Для цієї схеми струм на вході:

$$I_1 = I_2 + I_c = I_2 + (U_2 + I_2 Z_b / Z_c);$$

$$I_1 = U_2 / Z_c + I_2 (1 + Z_b / Z_c). \quad (18.14)$$

Напруга на вході

$$U_1 = I_1 Z_a + I_2 Z_b + U_2.$$

Підставивши I_1 з (18.14), дістанемо:

$$U_1 = [U_2 / Z_c + I_2 (1 + Z_b / Z_c)] Z_a + I_2 Z_b + U_2,$$

або

$$U_1 = U_2 (1 + Z_a / Z_c) + I_2 [(Z_a Z_b + Z_b Z_c + Z_c Z_a) / Z_c]. \quad (18.15)$$

Зіставивши добуті рівняння вхідних значень струму (18.14) і напруги (18.15) з рівняннями чотиріполюсника (18.2), знайдемо вирази коефіцієнтів Т-подібної схеми заміщення пасивного чотиріполюсника:

$\underline{A} = 1 + \underline{Z}_a / \underline{Z}_c; \quad \underline{B} = (\underline{Z}_a \underline{Z}_b + \underline{Z}_b \underline{Z}_c + \underline{Z}_c \underline{Z}_a) / \underline{Z}_c,$ $\underline{C} = 1 / \underline{Z}_c; \quad \underline{D} = 1 + \underline{Z}_b / \underline{Z}_c.$

(18.16)

П-подібна схема заміщення

В схемі рис. 18.5, а зірку опорів Z_a , Z_b , Z_c можна замінити еквівалентним трикутником опорів Z_{ab} , Z_{bc} , Z_{ca} .

Після такої заміни дістанемо еквівалентну П-подібну схему заміщення пасивного чотиріполюсника (рис. 18.5, б).

Виразимо вхідні величини цієї схеми:

$$U_1 = (I_2 + U / Z_{bc}) Z_{ab} + U_2,$$

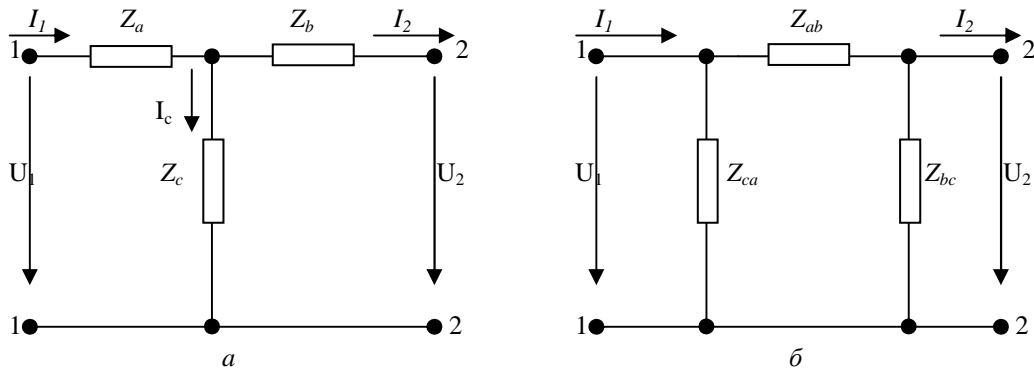


Рис. 18.5. Еквівалентні схеми чотириполіусників

або

$$U_1 = U_2(1 + Z_{ab} / Z_{bc}) + I_2 Z_{ab}; \quad (18.17)$$

$$I_1 = U_1 / Z_{ca} + I_2 + U_2 / Z_{bc} = [U_2(1 + Z_{ab} / Z_{bc}) / Z_{ca}] + [I_2 (Z_{ab} / Z_{ca})] + I_2 + U_2 / Z_{bc},$$

або

$$I_1 = [U_2(Z_{ab} + Z_{bc} + Z_{ca}) / (Z_{bc} Z_{ca})] + [I_2 (1 + Z_{ab} / Z_{ca})]. \quad (18.18)$$

Зіставивши добуті рівняння напруги (18.17) і струму (18.18) з основними рівняннями чотириполіусника (18.2), знайдемо вирази коефіцієнтів для П-подібної схеми заміщення пасивного чотириполіусника:

(18.19)

$$\begin{aligned} \underline{A} &= 1 + \underline{Z}_{ab} / \underline{Z}_{bc}; \quad \underline{B} = \underline{Z}_{ab}, \\ \underline{C} &= (\underline{Z}_{ab} + \underline{Z}_{bc} + \underline{Z}_{ca}) / (\underline{Z}_{bc} \underline{Z}_{ca}); \quad \underline{D} = 1 + \underline{Z}_{ab} / \underline{Z}_{ca}. \end{aligned}$$

Зведення будь-якої схеми чотириполіусника до однієї з еквівалентних схем

Параметри схем заміщення й сталі пасивного чотириполіусника пов'язані формулами (18.16) і (18.19). З них неважко виразити опори Т- і П-подібних схем.

Параметри:

Т-подібної схеми з (18.16)

$$Z_a = (A - 1) / C; \quad Z_b = (D - 1) / C; \quad Z_c = 1 / C; \quad (18.20)$$

П-подібної схеми з (18.19)

$$Z_{ab} = B; \quad Z_{bc} = B / (A - 1); \quad Z_{ca} = B / (D - 1). \quad (18.21)$$

Звідси випливає спосіб зведення будь-якої заданої схеми пасивного чотириполіусника до однієї з еквівалентних схем:

1. Визначити розрахунок або на підставі досліду коефіцієнти А, В, С, D заданого чотириполіусника.

2. За формулами (18.20) або (18.21) знайти параметри еквівалентної схеми заміщення.

Далі еквівалентну схему можна використати для аналізу заданого чотириполіусника

поряд з вихідною схемою.

ЗАДАЧІ

Задача 18.5. Визначити параметри Т-подібної схеми заміщення чотириполіусника (див. рис. 18.3). При розв'язуванні задачі використати результати розв'язання задачі 18.2.

Задача 18.6. Визначити параметри П-подібної схеми заміщення чотириполіусника (див. рис. 18.2, а), використавши результати розв'язання задачі 18.1.

РОЗДІЛ 7 ПЕРЕХІДНІ ПРОЦЕСИ У ЛІНІЙНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КОЛАХ

7.1 Основні поняття

Перехідний процес – процес, що виникає у електричному колі при переході від одного сталого режиму до іншого.

Сталий режим – режим, що встановлюється у електричному колі у результаті тривалого впливу на це коло постійних або періодичних ЕРС.

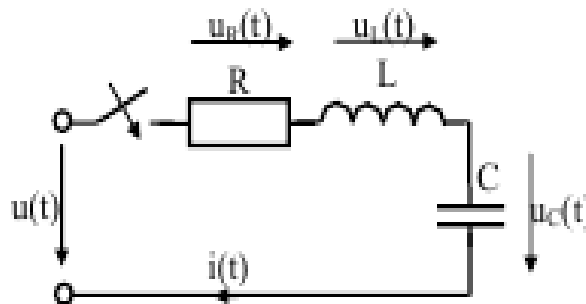
Перехідний процес виникає в електричному колі в результаті комутацій.

Комутації – дії, що викликають перехідний процес в електричному колі відключення або включення джерел, окремих гілок, зміна параметрів кола, зміна фази, частоти, амплітуди напруги і струму та ін.

Завдання аналізу перехідних процесів полягає у визначенні характеру зміни $u(t)$ і $i(t)$ на елементах електричного кола під час перехідного процесу та тривалості проходження цього перехідного процесу.

Аналіз перехідних процесів ґрунтується на описі стану електричного кола за допомогою законів Кірхгофа для миттєвих значень. У результаті одержуємо систему інтегрально-диференціальних рівнянь. Завдання аналізу перехідних процесів зводиться до відшукування розв'язання (інтеграла, інтегрування) вихідної системи рівнянь.

Запишемо систему рівнянь для схеми, що подана на рис. 7.1.



$$u_R(t) + u_L(t) + u_C(t) = u(t);$$

$$i(t)R + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t) dt = u(t);$$

$$L \frac{d^2 i(t)}{dt^2} + R \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} i(t) = \frac{du(t)}{dt};$$

$$\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{LC} i(t) = \frac{1}{L} \frac{du(t)}{dt}.$$

Залежно від використовуваного методу інтегрування розрізняють:

- 1) класичний метод аналізу перехідних процесів;
- 2) операторний метод аналізу перехідних процесів;
- 3) частотний метод аналізу перехідних процесів;
- 4) метод із використанням інтеграла Дюамеля;
- 5) метод змінних стану.

7.2 Закони комутації

Будемо вважати, що процес комутації відбувається миттєво (хоча реально - це мікросекунди для тиристорів, транзисторів).

Умовно позначати через $t=0$ момент комутації

$t = 0_-$ – момент часу безпосередньо до комутації;

$t = 0_+$ – момент часу безпосередньо після комутації.

У реальних електричних колах не може бути миттєвої зміни накопиченої в електричних і магнітних полях енергії.

Дійсно, у реальних електричних колах миттєва потужність p завжди кінцева (тому що u та i кінцеві). Отже, приріст енергії ΔW за час комутації $\Delta t \Rightarrow 0$ дорівнює 0:

$\Delta W = p\Delta t \Rightarrow 0$, при $\Delta t \Rightarrow 0$, тобто $W(0_-) = W(0_+)$.

У такий спосіб:

1-й закон комутації. Струм у гілці з котушкою індуктивності не може змінюватися стрибком:

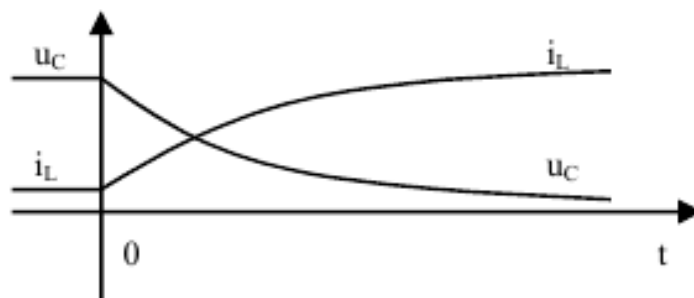
$$\frac{Li_L^2(0_-)}{2} = \frac{Li_L^2(0_+)}{2} \Rightarrow i_L(0_-) = i_L(0_+).$$

2-й закон комутації. Напруга на конденсаторі не може змінюватися стрибком:

$$\frac{Cu_C^2(0_-)}{2} = \frac{Cu_C^2(0_+)}{2} \Rightarrow u_C(0_-) = u_C(0_+).$$

Або:

У момент комутації напруги на конденсаторах струми в котушках індуктивності залишаються незмінними (рис. 7.2).



7.3 Загальна методика класичного методу

Відповідно до класичного методу: повне розв'язання (інтеграл) лінійного неоднорідного диференціального рівняння дорівнює сумі власного розв'язання вихідного диференціального рівняння та загального розв'язання цього рівняння при рівності нулю

правої частини (однорідного диференціального рівняння):

$$a_n \frac{d^n i}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} i}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{di}{dt} + a_0 i = f(0) \Rightarrow i = i_{\text{вум}} + i_{\text{с}}.$$

Власне розв'язання (одне із розв'язків, що задовольняє вихідне неоднорідне диференціальне рівняння) визначають шляхом розрахунку сталого режиму у схемі після комутації. Ця складова перехідного струму (напруги) називається вимушеною:

$$i_{np} = i_{\text{уст}}.$$

Загальне розв'язання диференціального рівняння без правої частини (без джерел ЕРС, струму) визначає вільну складову перехідного струму (напруги).

З курсу математики відомо, що розв'язання однорідного лінійного диференціального рівняння має вигляд

$$a_n \frac{di_{\text{с}}^n}{dt^n} + a_{n-1} \frac{di_{\text{с}}^{n-1}}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{di_{\text{с}}}{dt} + a_0 i_{\text{с}} = 0,$$

і являє собою суму експонент

$$i_{\text{св}} = \sum_{k=1}^n A_k e^{p_k t}$$

де p_k – показники загасання, обумовлені коренями характеристичного рівняння, отриманого з вихідного шляхом заміни

$$\frac{d}{dt} \Rightarrow p; \frac{d^2}{dt^2} \Rightarrow p^2; \dots; \frac{d^n}{dt^n} \Rightarrow p^n; \int dt \Rightarrow \frac{1}{p}$$

і одержання лінійного алгебраїчного рівняння n -го порядку

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 = 0,$$

де A_k – постійні інтегрування, обумовлені за значеннями шуканої функції і її похідних у момент комутації (початкові умови).

Початкові умови визначаємо за допомогою законів комутації.

$$\text{Дійсно, } i = i_{\text{dbv}} + \sum_{k=1}^n A_k e^{p_k t},$$

При $t = 0_+$:

$$i(0_+) = i_{\text{dbv}} + \sum_{k=1}^n A_k \Rightarrow \sum_{k=1}^n A_k = i(0_+) - i_{\text{вум}},$$

$$i_{\text{вум}}(0_+) = \sum_{k=1}^n A_k; i'_{\text{вум}}(0_+) = \sum_{k=1}^n p_k A_k.$$

Тоді складаємо систему з n алгебраїчних рівнянь і знаходимо A_k :

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n A_k = i(0_+) - i_{\text{вум}}, \\ \sum_{k=1}^n A_k p_k = i'_{\text{вум}}(0_+) - i'_{\text{вум}}. \end{cases}$$

7.4 Підключення котушки індуктивності до джерела постійної напруги

Проаналізуємо перехідні процеси у колі, що зображене на рис. 7.3.

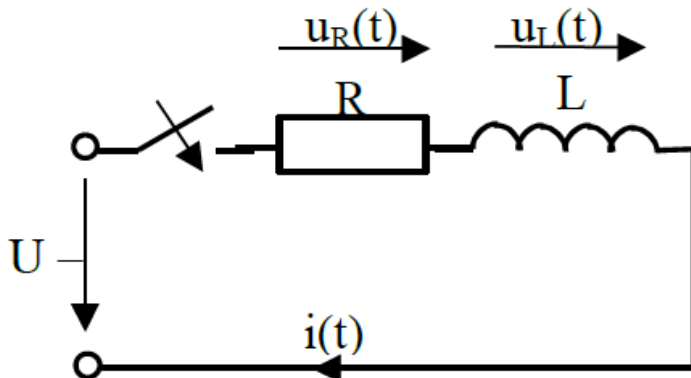


Рисунок 7.3

- 1) На підставі законів Кірхгофа для миттєвих значень з урахуванням того, що

$$u_L = L \frac{di_L}{dt} \quad u_C = \frac{1}{C} \int i_C dt \quad \text{або} \quad u_g = \frac{1}{C} \int i_C dt \quad \text{або} \quad (i_C = C \frac{du_C}{dt})$$

складаємо диференціальне рівняння для схеми після комутації:

$$u_R + u_L = U \Rightarrow iR + L \frac{di}{dt} = U.$$

- 2) Записуємо шукане розв'язання: $i = i_{\text{вим}} + I_g$.

- 3) Знаходимо $i_{\text{вим}} = i_{\text{уст}}$ (при $e \Rightarrow \infty$; $\frac{di}{dt} = 0$ – підставляємо у вихідне диференціальне рівняння та одержуємо $i_{\text{вим}} = i_{\text{уст}}$):

$$i_{\text{вим}} = \frac{U}{R}$$

- 4) Знаходимо показники загасання p_k . Характеристичне рівняння

$$Lp + R = 0 \Rightarrow p = -\frac{R}{L}.$$

- 5) $i_g = Ae^{pt}$,

де p – показник загасання, c^{-1} ;
 A – постійна інтегрування, A .

У такий спосіб $i_g = Ae^{-\frac{R}{L}t}$.

Характеристичне рівняння для визначення p часто складають більш простим шляхом. Із цією метою складають вирази для вхідного опору кола на змінному струмі $[Z(j\omega)]$, а потім замінюють у ньому $j\omega$ на p і прирівнюють $Z(p)$ до нуля:

$$Z(j\omega) = R + j\omega L;$$

$$j\omega \Rightarrow p.$$

$$\text{Тоді } p = -\frac{R}{L}, c^{-1}.$$

Найважливіша характеристика перехідного процесу τ – стала часу:

$$\tau = \left| \frac{1}{p} \right| = \frac{L}{R}, c.$$

б) Визначаємо сталу інтегрування.

Запишемо загальне розв'язання диференціального рівняння i

$$i = i_{\text{вим}} + i_c = \frac{U}{R} + Ae^{-\frac{R}{L}t}.$$

При $t = 0_+$;

$$i(0_+) = \frac{U}{R} + A \Rightarrow A = i(0_+) - \frac{U}{R}.$$

Запишемо значення струму до комутації $i(0_-) = 0$.

На підставі 1-го закону (правила) комутації:

$$i_L(0_-) = i_L(0_+) = 0.$$

$$\text{Отже, } A = 0 - \frac{U}{R} = -\frac{U}{R}.$$

7) Визначаємо шукану функцію:

$$i = \frac{U}{R} - \frac{U}{R}e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{U}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right).$$

Визначаємо $u_L = L \frac{di}{dt}$; $u_R = iR$:

$$u_L = L \frac{d}{dt} \left(\frac{U}{R} - \frac{U}{R}e^{-\frac{R}{L}t} \right) = -L \cdot \frac{U}{R}e^{-\frac{R}{L}t} \cdot \left[-\frac{R}{L} \right] = Ue^{-\frac{R}{L}t};$$

$$u_L = Ue^{-\frac{R}{L}t};$$

$$u_R = U \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right).$$

Графіки перехідного струму (рис. 7.4) та перехідної напруги (рис. 7.5) подані нижче.

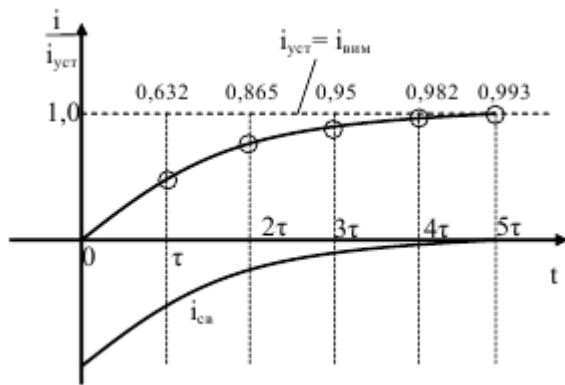


Рисунок 7.4

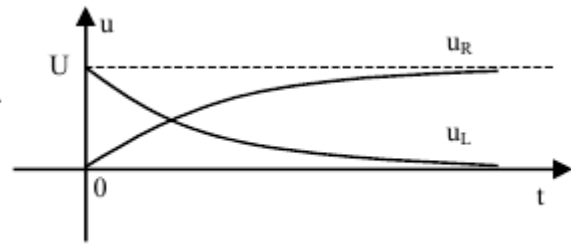


Рисунок 7.5

За час τ величина i зменшиться у e раз. Значення i подане у таблиці 7.1

Таблиця 7.1

e	0	τ	2τ	3τ	4τ	5τ
$1 - \exp(-t/\tau)$	0	0,632	0,865	0,95	0,982	0,993
$\exp(-t/\tau)$	1	0,308	0,135	0,05	0,018	0,007

Для інженерних розрахунків беруть час перехідного процесу $(3-5)\tau$.

Тривалість перехідного процесу визначається тільки параметрами кола (R , L , C).

7.5 Відключення котушки індуктивності від джерела постійної напруги

Розглянемо коло, що зображене на рис. 7.6.

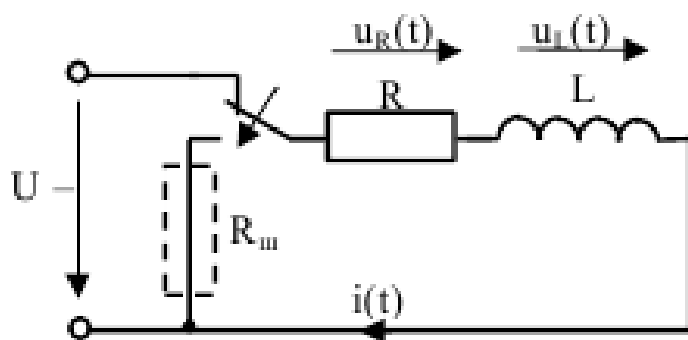


Рисунок 7.6

- 1) Диференціальне рівняння $u_R + u_L = 0 \Rightarrow iR + L \frac{di}{dt} = 0$
- 2) Шукана величина $i = i_{вим} + i_с$.
- 3) Вимушена складова $i_{вим} = 0$, тому що $\frac{di}{dt} = 0$
- 4) Характеристичне рівняння $R + Lp = 0$, звідки $p = -\frac{R}{L} \Rightarrow$ стала часу $\tau = \frac{L}{R}$.

5) Вільна складова $i_B R + L \frac{di_b}{dt} = 0; i_b = Ae^{pt}; .$

6) Вираз для вільної складової $i = Ae^{\frac{R}{L}t} \Rightarrow i(0_+) = A.$

За 1-м законом комутації

$$i(0_-) = \frac{U}{R} \Rightarrow A = \frac{U}{R}.$$

7) Шукані функції:

$$i = \frac{U}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}; u_R = U e^{-\frac{t}{\tau}};$$

$$u_L = L \frac{d}{dt} \frac{U}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} = L \frac{U}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot \left(-\frac{1}{\tau}\right) = \frac{-LUR}{RL} e^{-\frac{t}{\tau}} = -U e^{-\frac{t}{\tau}} /$$

Графік перехідного струму поданий на рис. 7.7.

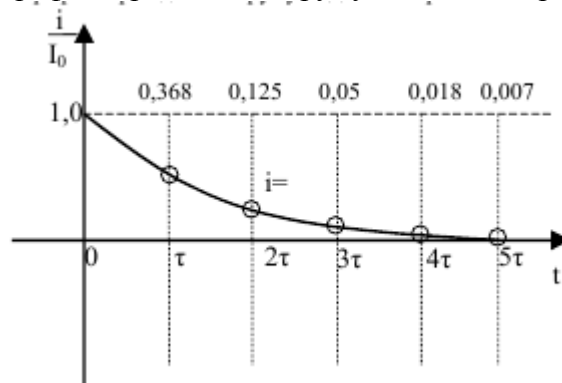


Рисунок 7.7

При відключенні котушки індуктивності від джерела живлення на її затискачах виникає напруга, обумовлена співвідношенням:

$$u_R(0_+) = I_0 R_{ш} = \frac{U}{R} R_{ш}.$$

Зокрема, при відключенні котушок індуктивності без шунтуючого опору $R_{ш} = \infty$ перенапруги на затискачах котушок можуть досягти небезпечних величин:

$$u_k = i R_{ш} = U \frac{R_{ш}}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} = I_0 R_{ш} e^{-\frac{t}{\tau}};$$

$$u_k + u_L + u_R = 0 \Rightarrow u_k = u_{ш} = -u_L + u_R.$$

7.6 Включення котушки індуктивності до джерела синусоїдальної ЕДС

Розглянемо коло, зображене на рис. 7.8.

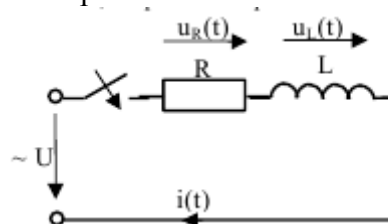


Рисунок 7.8

1) Складемо диференціальне рівняння щодо струму:

$$u_R + u_L = u, iR + L \frac{di}{dt} = U_m \sin(t + \psi_u)$$

2) Запишемо загальний розв'язок для диференціального рівняння $i = i_{\text{вум}} + u_{\text{в}} \dots$

3) Вираз для вимушеної складової $i_{\text{вум}} = I_m \sin(t + \psi_u - \varphi)$,

$$\text{де } I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \omega L^2}}.$$

4 Складемо характеристичне рівняння $R + Lp = 0, p = -\frac{R}{L}, \tau = \frac{L}{R}$.

5 Знайдемо вільну складову

$$i_{\text{в}} R + L \frac{di_{\text{в}}}{dt} = 0; i_{\text{в}} = Ae^{pt}.$$

6 Запишемо вираз для струму

$$i = i_{\text{вум}} + i_{\text{в}} = I_m \sin(t + \psi_u - \varphi) + Ae^{-\frac{R}{L}t}.$$

Запишемо на підставі 1-го закону комутації

$$i(0_-) = i(0_+) = 0$$

Запишемо вираз для струму після комутації

$$i(0_+) = I_m \sin(\psi_u - \varphi) + A = 0 \Rightarrow A = -I_m \sin(\psi_u - \varphi)$$

7. Запишемо загальний вираз для струму

$$i = I_m \sin(t + \psi_u - \varphi) - I_m \sin(\psi_u - \varphi)e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Графік функції поданий на рис. 7.9.

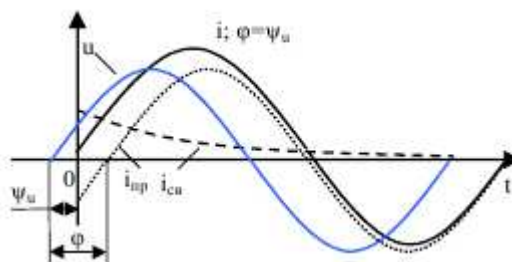


Рисунок 7.9

1) Початкове значення вільного струму (і характер перехідних процесів) залежить від моменту включення (початкової фази ψ_u).

Якщо $\psi_u - \varphi = 0$, тобто $\psi_u = \varphi$, то $i_{\text{в}} = 0$, тобто комутація не спричинить перехідний процес.

Якщо $\psi_u - \varphi = \pm \frac{\pi}{2}$, тобто $\psi_u = \varphi \pm \frac{\pi}{2}$, то $i_{\text{в}}$ максимально дорівнює I_m .

2) При несприятливих умовах комутації $\left(\psi_u - \varphi = \pm \frac{\pi}{2}\right)$ та сталої часу кола $\frac{R}{L}$

максимальне значення перехідного струму може досягти майже подвійної амплітуди сталого струму (через час π після комутації).

7.7 Заряд конденсатора від джерела постійної напруги

Розглянемо коло, що зображене на рис. 7.10.

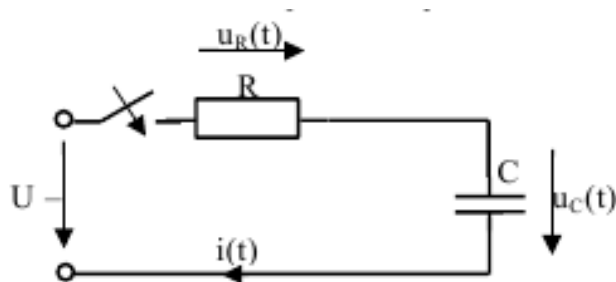


Рисунок 7.10

- 1) Для схеми, що зображена на рис. 7.10, складемо диференціальне рівняння

$$u_R + u_C = U; iR + \frac{1}{C} \int idt = U \Rightarrow C \frac{du_C}{dt} R + u_C = U; R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0$$

- 2) Запишемо загальний вираз для струму $i = i_{вум} + i_s$.
 3) Визначимо вимушену складову $i_{вум} = 0$.
 4) Запишемо загальний вхідний опір

$$Z_{вх}(\omega) = R + \frac{1}{j\omega C}.$$

Тепер складемо характеристичне рівняння

$$R + \frac{1}{pC} = 0.$$

Знайдемо корінь характеристичного рівняння

$$p = -\frac{1}{RC}; \tau = RC.$$

- 5) Запишемо вирази для вільної складової струму та напруги

$$i_s = A_1 y^{pt}; u_{C_D} = A_2 e^{pt} \dots$$

- 6) Визначимо сталі інтегрування:

$$i = A_1 e^{-\frac{t}{RC}}; i(0_+) = A_1; u_c = U + A e^{-\frac{t}{RC}};$$

$$u_c(0_+) = U + A_2; u_c(0_-) = u_c(0_+) = 0 \Rightarrow A_2 = -U.$$

Початкові умови – значення струмів через котушки індуктивності та напруг на конденсаторах відомі з режиму до комутації.

Значення u та i на всіх елементах схеми при $t = 0_+$ – залежні початкові умови. Вони визначаються з незалежних за допомогою вихідного диференціального рівняння

$$i(0_+)R + u_c(0_+) = U \Rightarrow i(0_+)R + 0 = U \Rightarrow i(0_+) = \frac{U}{R} = A_1.$$

7) Запишемо загальні вирази для струму та напруги: $i = \frac{U}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$; $u_c = U - U e^{-\frac{t}{RC}}$.

На основі цих виразів побудуємо графіки (рис. 7.11).

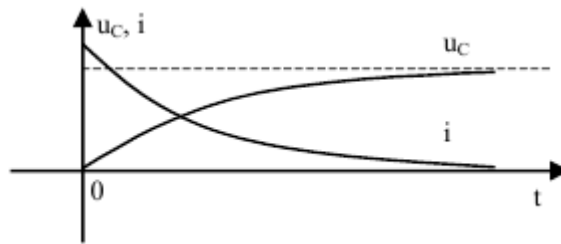


Рисунок 7.11

При включенні струм змінюється стрибком від 0 до $i(0) = \frac{U}{R}$ і при невеликому активному опорі кола може досягти більших значень, що значно перевищують номінальне (наприклад, при підключенні навантаження через кабель, розподілена ємність якого велика, а опір проводів низький).

7.8 Розряд конденсатора на резистор

Розглянемо схему, зображену на рис. 7.12.

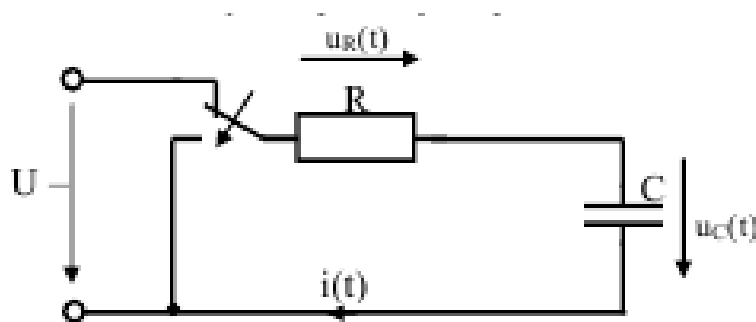


Рисунок 7.12

1. Складемо диференціальне рівняння для кола, зображеного на рис. 7.12, для напруги на ємності:

$$u_c + u_R = 0; u_c + iR = 0;$$

$$u_c + C \frac{du_c}{dt} R = 0; RC \frac{du_c}{dt} + u_c = 0.$$

2. Запишемо вираз для розв'язку $u_c = u_{C_{вим}} + u_{C_s}$.

3. Визначимо вираз для вимушеного значення $u_{C_{вим}} = 0$.

4. Складемо характеристичне рівняння $RCp + 1 = 0$, визначимо корені цього рівняння

$$p = -\frac{1}{RC}; \tau = RC.$$

5. Запишемо вираз вільної складової $u_C = u_{C_e} = Ae^{pt}$.

6. Визначимо сталу інтегрування $u_C = Ae^{\frac{t}{\tau}}$,
 $u_C(0_-) = u_C(0_+) = U_0 \Rightarrow u_C(0_+) = A = U_0$.

7. Запишемо загальні вирази для напруги та струму $u_C = U_0 e^{-\frac{t}{RC}}; u_R = -U_0 e^{-\frac{t}{RC}};$

$$i = C \frac{du_C}{dt} = C \frac{d}{dt} U_0 e^{-\frac{t}{RC}} = C \frac{-U_0}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} \Rightarrow i = \frac{-U_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Побудуємо графіки цих величин (рис. 7.13).

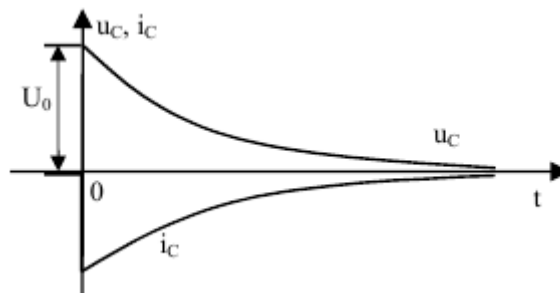


Рисунок 7.13

7.9 Підключення конденсатора до джерела синусоїдальної напруги

Розглянемо схему, зображену на рис. 7.14.

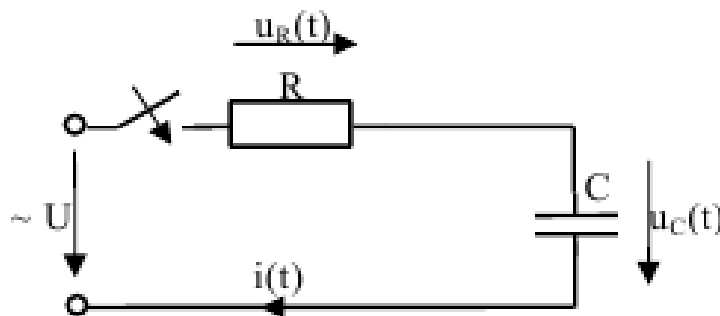


Рисунок 7.14

1) Складемо диференціальне рівняння для кола

$$u_R + u_C = u,$$

$$C \frac{du_C}{dt} R + u_C = U_m \sin(t + \psi_u).$$

- 2) Запишемо розв'язок цього рівняння $u_C = u_{c_{np}} + u_{c_{св}}$
- 3) Запишемо вираз для вимушеної складової $u_{C_{вм}} = \frac{U_m}{z} X_C \sin(\omega t + \psi_u + \varphi - 90^\circ)$
- 4) Запишемо вираз для кореня характеристичного рівняння:
 $p = -\frac{RC}{4}; \tau = RC..$
- 5) Запишемо вираз для вільної складової $u_{C_d} = Ae^{pt}$.
- 6) Знайдемо сталу інтегрування:

7) Запишемо вирази для напруги та струму

$$u_C = \frac{I_m}{\omega C} \sin\left(\omega t + \psi_u + \varphi - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{I_m}{\omega C} \sin\left(\psi_u + \varphi - \frac{\pi}{2}\right) e^{-\frac{t}{RC}};$$

$$A = -\frac{I_m}{\omega C} \sin\left(\psi_u + \varphi - \frac{\pi}{2}\right)..$$

Побудуємо на основі цих виразів графіки функцій (рис. 7.15).

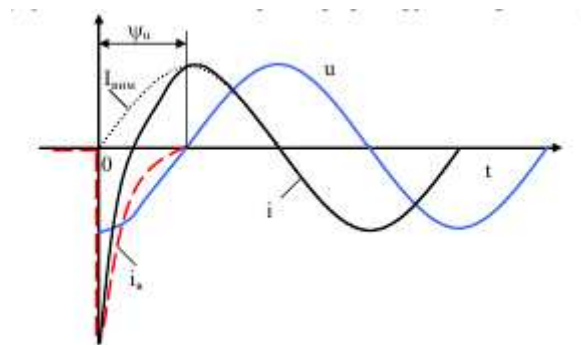


Рисунок 7.15

1. Якщо $\psi_u + \varphi = \frac{\pi}{2}$, то перехідний процес не виникає, і відразу ж настає сталий режим.
2. Якщо включення відбувається при $\psi_u + \varphi = 0$, то вільна складова напруги $u_{c_{св}}$ найбільша. Якщо $R \ll \frac{1}{\omega C}$, то в початковий момент відбувається великий сплеск струму, що набагато перевищує амплітуду струму $\left(\frac{I_m}{\omega CR}\right)$. Однак такий великий струм проходить незначну частину періоду, тому $\tau \ll T$.

7.10 Розряд конденсатора на RL-коло

Розглянемо схему, зображену на рис. 7.16.

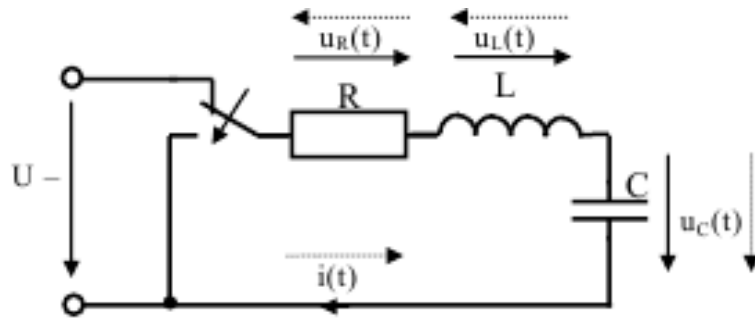


Рисунок 7.16

1. Складемо диференціальне рівняння:

$$\begin{aligned}
 u_R + u_L + u_C &= 0, \\
 iR + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt &= 0 \\
 L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i &= 0, \\
 \frac{d^2 i}{dt^2} + 2 \frac{R}{2L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i &= 0, \\
 \frac{d^2 i}{dt^2} + 2\delta \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i &= 0,
 \end{aligned}$$

де $\frac{R}{2L} = \delta$ – коефіцієнт загасання; $\frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0$ – власна частота контуру (резонансна).

2. Запишемо загальний розв'язок диференціального рівняння $i = i_{вм} + i_{в}$.
3. Визначимо вимушену складову $i_{вп} = 0$.
4. Складемо характеристичне рівняння $p^2 + 2\delta p + \omega_0^2 = 0$.
5. Запишемо вираз для вільної складової

$$i = i_{CB} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}.$$

Знайдемо корені характеристичного рівняння

$$p_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

6. Запишемо вираз для вільної складової

$$i = i_{CB} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}.$$

За першим законом комутації

$$i(0_-) = i(0_+) = 0; i(0_+) = A_1 + A_2 \Rightarrow A_1 + A_2 = 0.$$

Запишемо вхідний опір кола $Z_{вх}(j\omega) = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$.

На основі виразу для вхідного опору складемо характеристичне рівняння

$$R + pL + \frac{1}{pC} = 0 \Rightarrow \frac{Rp}{L} + p^2 + \frac{1}{LC} = 0.$$

У результаті одержали таке ж саме характеристичне рівняння, що і у пункті 4

$$p^2 + 2\delta p + \omega_0^2 = 0$$

Для визначення сталі інтегрування в рівняннях n-го порядку знаходять початкові значення шуканого струму (напруги) і всіх їхніх похідних до (n-1) включно, використовуючи рівняння кола й початкові значення струмів у котушках і напруг на конденсаторах, обумовлених за законами комутації.

Оскільки n=2, то необхідна перша похідна виразу з пункту б:

$$\frac{di}{dt} = p_1 A_1 e^{p_1 t} + p_2 A_2 e^{p_2 t},$$

Запишемо похідну в нульовий момент часу:

$$\left(\frac{di}{dt}\right)_{(0_-)} = p_1 A_1 + p_2 A_2$$

З рівняння кола пункту 1 знайдемо вираз для похідної у нульовий момент часу:

$$i(0_+)R + L\left(\frac{di}{dt}\right)_{(0_+)} + u_C(0_+) = 0/$$

$$0 + L\frac{di}{dt(0_+)} + U_0 = 0 \Rightarrow \frac{di}{dt(0_+)} = -\frac{U_0}{L}.$$

Оскільки $\frac{U_0}{L} = p_1 A_1 + p_2 A_2$, то запишемо систему рівнянь для визначення констант інтегрування:

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 0, \\ A_1 p_1 + A_2 p_2 = -\frac{U_0}{L}. \end{cases}$$

Визначимо константи інтегрування з записаної системи рівнянь:

$$A_2 p_1 - A_2 p_2 = -\frac{U_0}{L} \Rightarrow A_2 = \frac{U_0}{L(p_2 - p_1)} = \frac{-U}{L(p_2 - p_1)};$$

$$A_1 p_2 - A_1 p_1 = \frac{U_0}{L} \Rightarrow A_1 = \frac{U_0}{L(p_2 - p_1)} = \frac{U_0}{L(-p_1 + p_2)}.$$

7. Запишемо вирази для напруг на індуктивності та ємності

$$u_L = L\frac{di}{dt} = \frac{U_0}{-p_1 + p_2}(p_1 e^{p_1 t} - p_2 e^{p_2 t});$$

$$u_C = \frac{1}{C} \int idt + U_0 = \frac{U_0}{-p_1 + p_2}(p_2 e^{p_2 t} - p_1 e^{p_1 t}).$$

Характер процесів при розряді конденсатора виявляється істотно різним залежно від того, будуть корені характеристичного рівняння дійсними або комплексними, що визначається співвідношеннями між параметрами R, L і C.

Випадок 1:

$$\delta > \omega_0 \text{ тобто } \frac{R}{2L} > \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ або } \left(R > 2\sqrt{\frac{L}{C}} \right).$$

Обидва корені p_1 та p_2 негативні, дійсні й відмінні одне від одного $p_1 \neq p_2$; $p_1 < 0$; $p_2 < 0$ і $|p_2| > |p_1|$, то вигляд вільної складової буде таким:

$$i = A_1 p e^{\frac{-t}{\tau_1}} + A_2 e^{\frac{-t}{\tau_2}}.$$

При зміні t від 0 до ∞ величини $e^{p_1 t}$ та $e^{p_2 t}$ убувають від 1 до 0, причому тому що $|p_2| > |p_1|$ (тобто $\tau_2 < \tau_1$), а $(e^{p_1 t} - e^{p_2 t})$ завжди позитивні.

Отже, струм не змінює свого напрямку, а конденсатор увесь час розряджається.

Такий однобічний розряд конденсатора називають аперіодичним розрядом.

Струм досягає максимуму $\left(\frac{di}{dt} = 0\right)$ при $t_m = \frac{\ln \frac{p_2}{p_1}}{p_1 - p_2}$, а потім убуває.

Напруга на ємності монотонно убуває, прямуючи до нуля. При розрахунку використані умовно додатні напрямки струму та напруги. Дійсні напрямки показані на схемі пунктиром і зображені на малюнку (див. вище).

З рівняння випливає, що $u_C = -(u_L + u_R)$.

При $t = 0$ $u_R = iR = 0, u_L = u_C$.

При $t = t_m$ $u_L = L \frac{di}{dt} = 0, u_C = u_R$.

При $t > t_m$ струм зменшується, $u_L = L \frac{di}{dt}$ змінює знак.

З енергетичної точки зору при $t < t_m$ котушка індуктивності запасає енергію від конденсатора, а при $t > t_m$ – віддає. Побудуємо графіки струмів та напруг (рис. 7.17 та рис. 7.18).

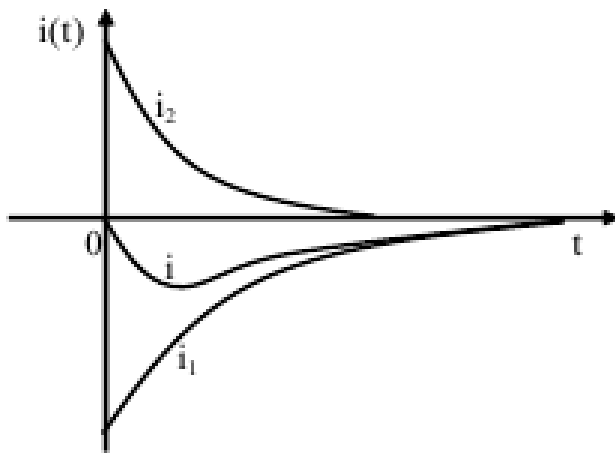


Рисунок 7.17

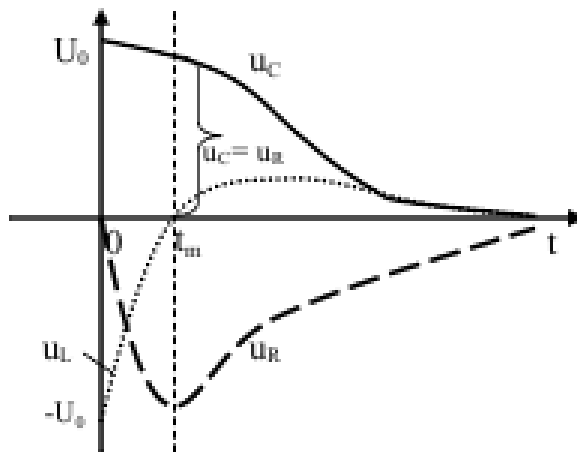


Рисунок 7.18

Випадок 2:

$$\delta = \omega_0, \text{ тобто } \frac{R}{2L} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ або } \left(R = 2\sqrt{\frac{L}{C}} \right)$$

Тоді корені характеристичного рівняння дійсні та рівні

$$p_1 = p_2 = -\delta$$

Тоді $i = \frac{U_0}{L} \frac{e^{p_1 t} - e^{p_2 t}}{p_2 - p_1} = \frac{0}{0}$ – невизначеність. Розкривши одержаний вираз за

правилом Лопітала одержимо:

$$i = \frac{-U_0}{L} t e^{-\delta t}; u_L = U_0 (pt - 1) e^{-\delta t}; u_C = U_0 (pt + 1) e^{-\delta t}.$$

Процес – аперіодичний $\left(t_m = \frac{1}{\delta} \right)$.

Даний випадок при $\delta = \omega_0$ є граничним випадком аперіодичного розряду, тому що при подальшому зменшенні $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ розряд стає коливальним.

Випадок 3:

$$\delta = \omega_0, \text{ тобто } \frac{R}{2L} < \frac{1}{\sqrt{LC}}, \text{ або } R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Корені комплексно спряжені:

$$p_{1,2} = -\delta \pm j\omega_R,$$

$$p_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} = -\delta \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = -\delta \pm j\omega_R$$

де $\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ – кутова частота загасаючих коливань.

$$\text{Тоді } p_{1,2} = -\delta \pm j\omega_R = \omega_0 e^{\pm j\nu},$$

де

$$\omega_0 = \sqrt{\delta^2 + \omega_R^2}; \nu = \arctg \frac{\omega_R}{-\delta} \left(\frac{\pi}{2} < \nu < \pi \right);$$

$$p_1 = -\delta + j\omega_R = \omega_0 e^{-j\nu}; p_2 = -\delta - j\omega_R = \omega_0 e^{+j\nu}.$$

Для струму:

$$i = \frac{U_0}{L(p_2 - p_1)} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}) = \frac{-U_0}{2j\omega_R L} (e^{-\delta} e^{j\omega_R t} - e^{-\delta} e^{-j\omega_R t}) = -\frac{U_0}{\omega_R L} e^{-\delta} \sin \omega_R t \Rightarrow i = -I_m e^{-\delta} \sin \omega_R t;$$

$$u_L = -U_0 \frac{\omega_0}{\omega_R} e^{-\delta} \sin(\omega_R t + \nu)$$

$$u_C = -U_0 \frac{\omega_0}{\omega_R} e^{-\delta} \sin(\omega_R t + \nu)$$

$$u_{t_m} = I_m \omega_0 L; u_{C_m} = I_m \frac{1}{\omega \alpha}$$

Процес коливальний. Струм і напруги на всіх ділянках періодично змінюють знак. Амплітуда коливань убуває за показовим законом – загасаючі коливання з кутовою частотою

$$\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \text{ та періодом } T_R = \frac{2\pi}{\omega_R}$$

При $R = 0 \Rightarrow \delta = 0; \omega_R = \omega_0; T_R = T_0 - 2\pi\sqrt{LC}$ – формула Томпсона – незатухаючі коливання з періодом T_0 ; ω_0 – резонансна (власна) частота контуру. При цьому $\nu = \frac{\pi}{2}$ й у колі встановлюється режим, що повністю відповідає сталому процесу в ньому при резонансі.

Розглянемо енергетичні процеси (рис. 7.19).

Від 0 до $t_1 = t_m$ струм зростає та режим відповідає аперіодичному, тобто L накопичує енергію, R розсіює, C віддає.

Від t_1 до t_2 :

$p_C < 0$ – C віддає;

$p_L < 0$ – L віддає;

$p_R > 0$ – R розсіює.

Від t_2 до t_3 конденсатор C повністю розрядився, струм, підтримуваний ЕРС самоіндукції, продовжує проходити у тому ж напрямку та заряджає конденсатор ($p_L < 0, p_C > 0, p_R > 0$). Енергія магнітного поля частково переходить в енергію електричного поля конденсатора та частково перетворюється в теплоту на опорі R . До часу t_3 конденсатор C_3 заряджається максимально. У цей момент $i = 0$.

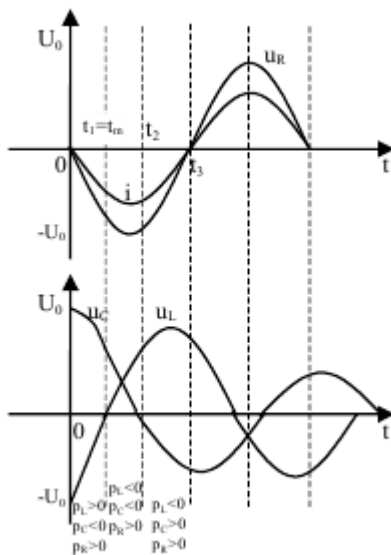


Рисунок 7.19

У наступну половину періоду процеси повторюються, але знаки напруг і струми зміняться на протилежні. Таким чином, залежно від співвідношення параметрів можливі такі режими розряду конденсатора (рис. 7.20).

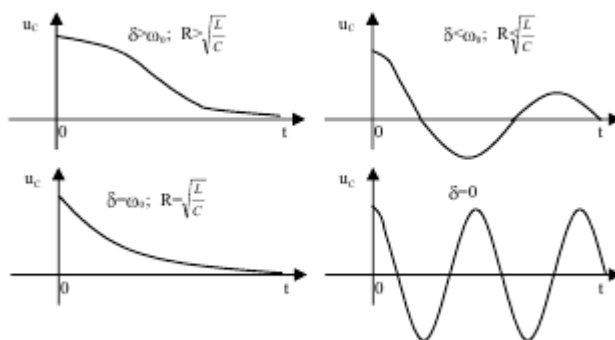


Рисунок 7.20

7.11 Підключення RLC-кола до джерела постійної напруги

Розглянемо коло, зображене на рис. 7.21.

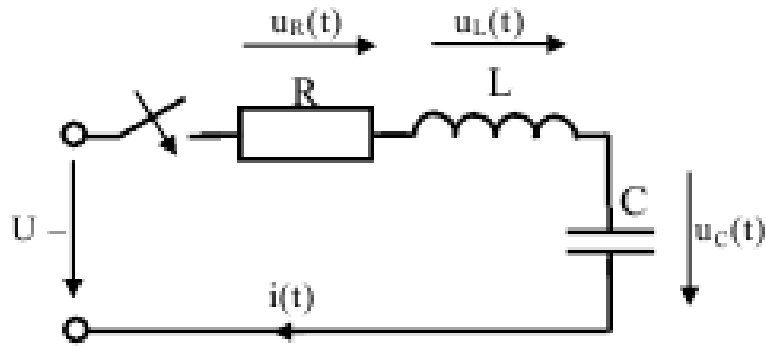


Рисунок 7.21

1. Складемо диференціальне рівняння для схеми

$$u_R + u_L + u_C = U,$$

$$iR + L \frac{di}{dt} + u_C = U,$$

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + 2\delta \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = 0$$

2. Запишемо загальний розв'язок диференціального рівняння $i = i_{\text{вм}} + i_{\text{в}}$

3. Запишемо вираз для вимушеної складової $I_{\text{вм}} = 0$

4. Складемо характеристичне рівняння $p^2 + 2\delta p + \omega_0^2 = 0$.

Запишемо корені характеристичного рівняння

$$p_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}; p_1 = -\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}; p_2 = -\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}.$$

5. Запишемо загальний вираз для вільної складової

$$i = i_{\text{в}} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}.$$

6. На основі першого закону комутації $i(0_-) = i(0_+) = 0$

Запишемо рівняння для пошуку констант інтегрування

$$i(0_+) = A_1 + A_2 = 0;$$

$$i(0_+)R + L \frac{di}{dt}(0_+) + u_C(0_+) = U \Rightarrow \frac{di}{dt}(0_+) = \frac{U}{L};$$

$$\frac{di}{dt} = p_1 A_1 e^{p_1 t} + p_2 A_2 e^{p_2 t} \Rightarrow \frac{di}{dt}(0_+) = A_1 p_1 + A_2 p_2 = \frac{U}{L}$$

Одержали ту ж систему рівнянь для визначення констант інтегрування, що й у попередньому підрозділі. Змінився тільки знак (-) на (+) перед $\frac{U}{L}$. Причина - замість розряду конденсатора має місце його заряд від джерела постійної напруги.

Запишемо вирази для констант інтегрування:

$$A_1 = L \frac{-U}{L(-p_1 - p_2)}; A_2 = \frac{+U}{L(-p_1 + p_2)}$$

7. Запишемо загальні вирази для шуканих величин:

$$i = \frac{U}{L(p_1 - p_2)}(e^{p_1 t} - e^{p_2 t});$$

$$u_C = \frac{1}{C} \int i dt = \frac{U}{(p_1 - p_2)}(p_2 e^{p_1 t} - p_1 e^{p_2 t}) + U;$$

$$u_L = \frac{U}{(p_1 - p_2)}(p_1 e^{p_1 t} - p_2 e^{p_2 t})$$

Порівнюючи отримані вирази для i , u_C з аналогічними виразами для цих величин, отриманими в попередньому розділі для випадку розрядження конденсатора, бачимо, що закон зміни струму в обох випадках той самий і струми відрізняються тільки знаками, тому що тепер розглядається процес заряджання конденсатора. Напряга ж на конденсаторі при розряджанні змінюється від початкового значення до 0, а при заряджанні - від 0 до напруги живлення.

Характер перехідного процесу, які при розряджанні конденсатора, залежить від параметрів кола, від співвідношення коефіцієнта загасання δ і власної частоти контуру ω_0 , від того, будуть корені характеристичного рівняння дійсними (аперіодичний процес) чи комплексними (коливальний процес).

7.12 Розрахунок перехідних процесів у складному колі

Алгоритм розрахунку звичайний, особливість - складання характеристичного рівняння.

1. Для визначення коренів:

а) знайти головний визначник системи диференціальних рівнянь, складеної:

- 1) за законами Кірхгофа;
- 2) за методом контурних струмів;
- 3) за методом вузлових напруг;

та прирівняти його нулю;

б) скласти комплексний вхідний опір кола для джерела синусоїдальної ЕРС, включене в будь-якій гілці кола, замінити $j\omega$ на p та прирівняти до нуля.

Приклад 7.2. Розглянемо схему, зображену на рис. 7.22. Одержати характеристичні рівняння.

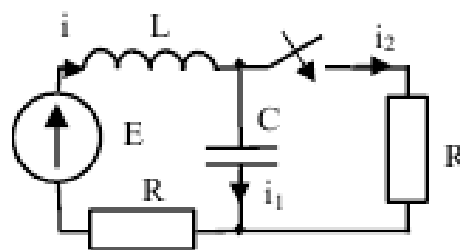


Рисунок 7.22

Запишемо визначники:

$$\Delta(p) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ Rp + Lp^2 & 1/C & 0 \\ 0 & -1/C & Rp \end{vmatrix} = 0;$$

$$\Delta^{(K)}(p) = \begin{vmatrix} R + Lp + \frac{1}{pC} & -\frac{1}{pC} \\ -\frac{1}{pC} & R + \frac{1}{pC} \end{vmatrix} = 0;$$

$$\Delta^{(y)}(p) = \frac{1}{R + Lp} + pC + \frac{1}{R} = 0.$$

Запишемо вирази для вхідних опорів:

$$Z_{ex}(z) = K + Dz + \frac{\frac{K}{1/pC}}{R + pC} = 0;$$

$$Z_{1ex}(p) = \frac{1}{pC} + \frac{(R + pL)R}{R + pL + R} = 0;$$

$$Z_{2ex}(p) = R + \frac{(R + pL)\frac{1}{pC}}{R + pL + \frac{1}{pC}} = 0$$

Корені характеристичного рівняння визначаються тільки топологією кола після комутації та значенням її параметрів.

Число коренів характеристичного рівняння дорівнює числу накопичувачів енергії.

1. Наявність особливого контуру, що складається тільки з ємнісних елементів і джерел ЕРС, зменшує число коренів на 1 порівняно із числом ємнісних накопичувачів (рис. 7.23).

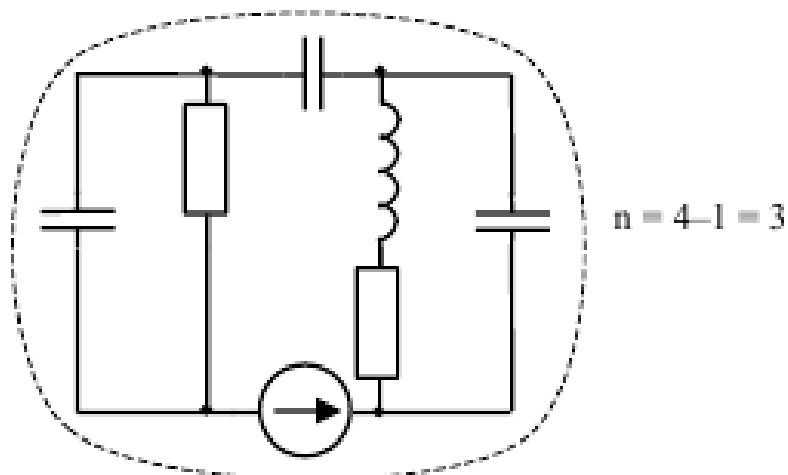


Рисунок 7.23

2. Наявність особливого перетину, в якому в кожній гілці є індуктивний елемент або джерело струму зменшує число коренів на 1 порівняно із числом індуктивних накопичувачів (рис. 7.24).

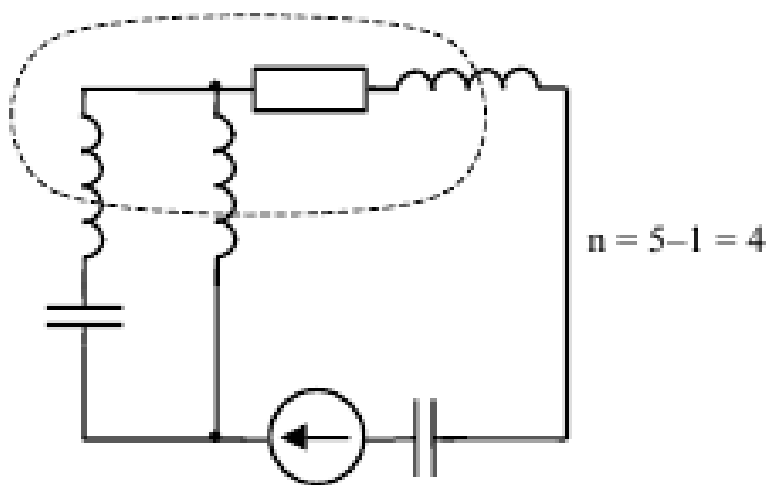


Рисунок 7.24

3. В особливих випадках, коли коло після комутації розпадається на окремі гілки, загальне правило не виконується (рис. 7.25).

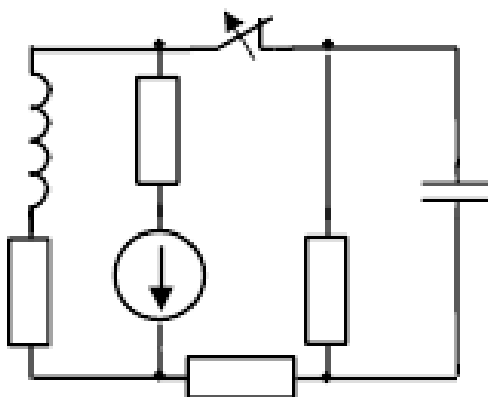


Рисунок 7.25

Розрахунок перехідного процесу в колах із взаємною індуктивністю здійснюється звичайним шляхом.

Урахування індуктивних зв'язків не збільшує числа коренів характеристичного рівняння.

7.13 Метод змінних стану

Ідея методу полягає у виділенні таких шуканих величин, які визначають енергетичний стан електричного кола, тому що перехідний процес є процесом переходу від одного сталого енергетичного стану до іншого. А оскільки що енергетичний стан у лінійних електричних колах повністю визначається струмами індуктивних котушок і напругами конденсаторів, то, мабуть, що як шукані величини, що визначають стан кола, вибирають саме

їх.

Отже, ідея методу полягає у виділенні як шуканих величини струмів індуктивних котушок і напруг конденсаторів.

Струми індуктивних котушок і напруги конденсаторів називають змінними стану.

Струми та напруги резистивних елементів схеми, що називаються *вихідними величинами*, завжди можуть бути виражені через змінні стани за допомогою законів Кірхгофа.

Очевидно, що у систему диференціальних рівнянь для електричного кола будь-якої конфігурації, складеної за законами Кірхгофа, входять тільки перші похідні змінних станів.

Це дозволяє для схеми після комутації замість одного неоднорідного диференціального рівняння n -го порядку одержати n диференціальних рівнянь першого порядку щодо обраних змінних стану (рівняння стану). Метод найбільш універсальний для аналізу електричних кіл і може бути легко пристосований для розрахунку на ЕОМ.

Тому, склавши вихідну систему диференціальних рівнянь, складену за законами Кірхгофа, щодо змінних стану, одержують систему диференціальних рівнянь 1-го порядку щодо змінних стану, для числового розв'язання якої можна використати стандартне математичне забезпечення ЕЦОМ (або аналогових обчислювальних машин.)

Під числовим методами розв'язання диференціальних рівнянь розуміють методи, що дають наближене розв'язання у вигляді дискретного набору значень функції при деяких значеннях аргумента (Метод Рунге-Куты, метод Пікара, метод Мілна, екстраполяційний метод Адамса, метод із використанням ряду Тейлора).

З теорії диференціальних рівнянь відомо, що всяке рівняння або система рівнянь, одержана щодо старших похідних всіх шуканих функцій, може бути наведена шляхом введення нових невідомих функцій до нормальної

форми Коші:

$$y_1'(x) = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$$

$$y_2'(x) = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$$

$$y_n'(x) = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$$

Завдання знаходження розв'язання рівнянь при заданих початкових даних називається завданням Коші.

Алгоритм розрахунку

1. Складаємо диференціальні рівняння для похідних від змінних стану (рівняння стану).

Для цього складаємо рівняння за законами Кірхгофа для схеми після комутації та розв'язуємо їх відносно похідних змінних станів залежно від самих змінних стану u_C та i_L , джерел ЕРС і струмів.

Одержуємо систему диференціальних рівнянь першого порядку щодо змінних станів.

2. Рівняння стану записуємо у матричній формі та розв'язуємо аналітично або числовими методами з використанням стандартного математичного забезпечення ЕЦВМ (Метод Рунге-Куты, Ейлера, трапеції, Пікара, Мілна, екстраполяційний метод Адамса, метод з використанням ряду Тейлора).

$$\begin{pmatrix} i_{L_1} \\ i_{L_2} \\ \vdots \\ u_{CK} \\ \vdots \\ u_{CK+1} \\ \vdots \\ u_{Cn} \end{pmatrix} = \|A_1\| \times \begin{pmatrix} i_{L_1} \\ i_{L_2} \\ \vdots \\ u_{Ck} \\ \vdots \\ u_{Ck+1} \\ \vdots \\ u_{Cn} \end{pmatrix} + \|B_1\| \times \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ J_K \\ \vdots \\ J_q \end{pmatrix}$$

де A_1 – квадратна матриця порядку n ; B_1 – матриця розміру $n \times q$, де q - загальне число джерел ЕРС і струму; X – стовпцеві матриці розміру $n \times l$ змінних стану і їх похідних $\|x\| = \|A_1\| \times \|x\| + \|B_1\| \times \|V\|$; V – стовпцева матриця розміру $q \times 1$ напруг джерел ЕРС і струмів джерел струму.

Елементи A_1 та B_1 визначаються тільки параметрами схеми і її топологією.

3. Струми та напруги резистивних елементів схеми, називані вихідними параметрами, завжди можуть бути виражені та розраховані через змінні стани за допомогою законів Кірхгофа.

У результаті одержимо систему алгебраїчних рівнянь, що встановлює зв'язок між шуканими вихідними параметрами, змінних стану та джерелами енергії (рівняння вихідних параметрів).

4. Записуємо рівняння для вихідних параметрів у матричній формі та розв'язуємо їх аналітично або за допомогою ЕЦОМ:

$$\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ u_k \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} = \|A_2\| \times \begin{pmatrix} i_L \\ \vdots \\ u_{Ck} \\ \vdots \\ u_{Ck} \end{pmatrix} + \|B_2\| \times \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ J_k \\ \vdots \\ J_q \end{pmatrix} \quad \text{або} \quad \|Y\| = \|A_2\| \times \|x\| + \|B_2\| \times \|V\|$$

де Y – стовпцева матриця розміру $m \times 1$ вихідних параметрів; m - число вихідних параметрів; A_2, B_2 – матриці розміру $m \times n$ та $m \times q$, елементи яких визначаються параметрами та топологією схеми.

Приклад 7.3. Для схеми, що зображена на рис. 7.26, одержати рівняння змінних стану.

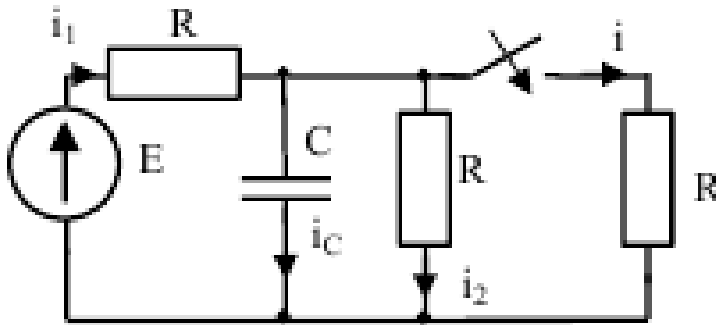


Рисунок 7.26

Розв'язання

Складемо систему рівнянь для схеми після комутації на основі законів Кірхгофа:

$$\begin{cases} -i_1 + i_c + i_2 + i = 0 \\ Ri + u_c = E \\ u_c - Ri_2 = 0 \\ u_c - Ri = 0 \end{cases}$$

Урахуємо, що $u_L = L \frac{di_L}{dt}$; $i_c = C \frac{du_c}{dt}$

Тоді одержимо $\frac{du_c}{dt} = -\frac{3}{RC}u_c + \frac{1}{RC}E$

.

Приклад 7.4. Для схеми, зображеної на рис. 7.27, одержати рівняння змінних стану

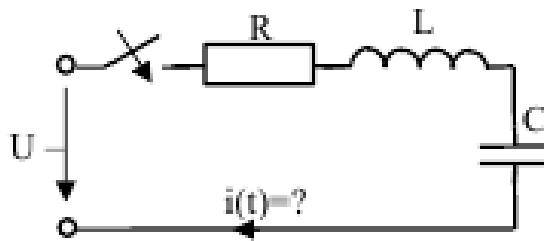


Рисунок 7.27

Розв'язання

Складемо рівняння на основі другого закону Кірхгофа:

$$iR + L \frac{di}{dt} + u_c = U$$

Урахуємо, що $u_L = L \frac{di_L}{dt}$; $i_c = C \frac{du_c}{dt}$

Тоді одержимо рівняння змінних стану

$$\begin{cases} \frac{du_c}{dt} = 0 \cdot u_c + \frac{1}{C} i + 0 \cdot U \\ \frac{di}{dt} = -\frac{1}{L} u_c - \frac{R}{L} i + \frac{1}{L} \cdot U \end{cases}$$

Приклад 7.5. Для схеми, зображеної на рис. 7.28, одержати рівняння змінних стану.

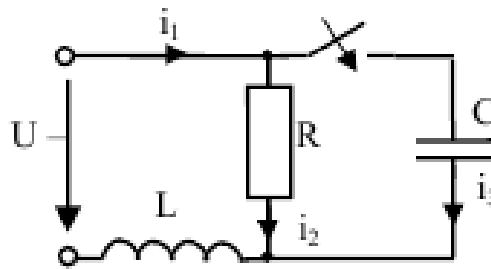


Рисунок 7.28

Розв'язання

Складемо систему рівнянь на основі другого закону Кірхгофа

$$\begin{cases} i_1 = i_2 + i_3 \\ Ri_2 + L \frac{di_1}{dt} = U \\ Ri_2 - u_c = 0 \end{cases}$$

Урахуємо, що $u_L = L \frac{di_L}{dt}$; $i_C = C \frac{du_C}{dt}$

Тоді

$$\begin{cases} \frac{du_c}{dt} = -\frac{1}{RC} \cdot u_c + \frac{1}{C} i_L + 0 \cdot U \\ \frac{di}{dt} = -\frac{1}{L} u_c + 0 \cdot i_L + \frac{1}{L} \cdot U \end{cases}$$

7.14 Розрахунок кола при впливі ЕРС довільної форми. Інтеграл Дюамеля

Аналіз перехідних процесів у колах (рис. 7.29) показав, що струм на вході кола $i(t)$ пропорційний вхідній напрузі, що викликала цей струм:

$$i(t) = \frac{U}{R} \left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}} \right)$$

Оскільки $Y(t) = \frac{1}{R} \left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}} \right)$ – перехідна провідність кола.

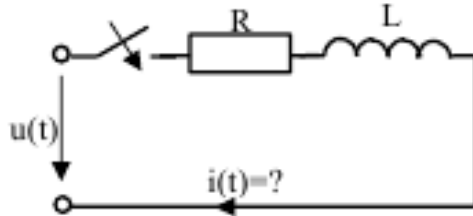


Рисунок 7.29

Таким чином, коло у загальному випадку може розглядатися як пасивний двополюсник з перехідною провідністю $Y(t)$. Замінімо дійсну криву $u(t)$ наближено східчастою з інтервалами за віссю t , що дорівнюють Δx . Тоді струм у будь-який момент часу t можна розглядати як результат впливу серії стрибкоподібних постійних напруг, що йдуть один за одним через проміжки Δx в інтервалі від 0 до t .

Зміна напруги: $\Delta u = \frac{du}{dx} \Delta x; du = u'(t) dx$

Складова струму, викликана окремим стрибком напруги, що діє в момент x , дорівнює $\Delta i = \Delta u \cdot Y(-x - \Delta x)$

де $Y(-x - \Delta x)$ – перехідна провідність від моменту $(x + \Delta x)$ виникнення даного стрибка напруги до моменту t відліку значення струму (рис. 7.30).

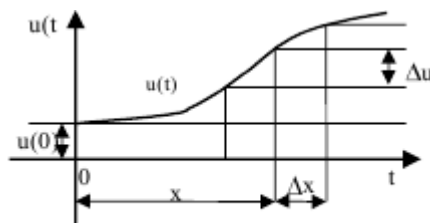


Рисунок 7.30

Весь струм $i(t)$ є сумою складових струмів, викликаних окремими стрибками напруг:

$$i(t) \approx u(t) \cdot Y(t) + \sum_{x=0}^{x=t} Y(-x - \Delta x) u(t) \Delta x \text{ або } i(t) = u(t) \cdot Y(t) + \int_0^t Y(t-x) u(t) dx - \text{інтеграл}$$

Дюамеля,

де $u(t) = \left(\frac{du}{dt} \right)_{t=x}$

Інтеграл Дюамеля дозволяє розв'язати завдання про включення кола під дією напруги $u(t)$ довільної форми, причому $Y(t)$ визначається в результаті розв'язання більш простого завдання - включення того ж кола під дією постійної напруги.

Приклад 7.6. На коло, зображене на рис. 7.31, діє напруга, що зображена на рис.

7.32. Коло має такі параметри R, C . Аналітичний вираз напруги $u(t) = U(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$. Знайти струм $i(t)$ у колі.

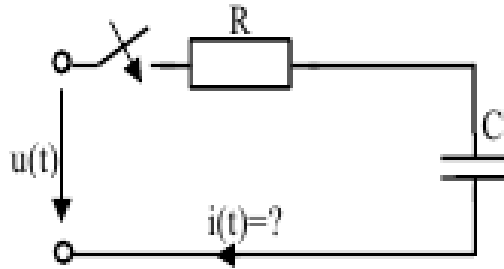


Рисунок 7.31

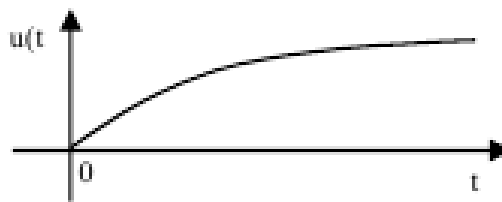


Рисунок 7.32

1. Визначаємо $Y(t)$ при включенні кола на постійну напругу. Тоді

$$Y(t) = \frac{i(t)}{U}$$

$$i(t) = \frac{U}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{1}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

2. Запишемо вираз для провідності

$$Y(t-x) = \frac{1}{R} e^{-\frac{-(t-x)}{\tau}} = \frac{1}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} e^{\frac{x}{\tau}}$$

3. Знайдемо значення струму:

$$u(t) = 0; u'(t) = \frac{U}{T} e^{-\frac{t}{T}}; u(t) = \frac{U}{T} e^{-\frac{x}{T}}$$

4. Запишемо вираз для струму

$$i(t) = u(t \cdot Y)(t) + \int_0^t Y(t-xu)(x dx)$$

5. Запишемо повний вираз для струму

$$\int_0^t Y(t-xu)(x dx) = \int_0^t \frac{1}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} e^{\frac{x}{\tau}} dx = \frac{U}{RT} e^{-\frac{t}{\tau}} \int_0^t e^{\frac{x}{\tau}} e^{-\frac{x}{T}} dx = \frac{U}{R} \frac{\tau}{T-\tau} \left(e^{-\frac{t}{T}} - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

7.15 Основні положення операторного методу аналізу перехідних процесів

Операторний метод як математичний метод інтегрування лінійних диференціальних рівнянь створений у 1862 р. М. Вашенко-Захарченко. Хевісайд наприкінці XIX століття застосував для розрахунку перехідних процесів перетворення Лапласа

$$F(p) = Z$$

При використанні операторного методу дійсні функції часу, названі оригіналами, замінюють їх операторними зображеннями. Відповідність між оригіналом і зображенням устанавлюється за допомогою інтеграла Лапласа (перетворення Лапласа)

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt$$

де $p=a+jb$ комплексне число, тобто операторне зображення дійсної функції, є функцією комплексного числа p .

У результаті операції диференціювання та інтегрування оригіналів замінюються алгебраїчними операціями над їх зображеннями - відбувається алгебризація диференціальних рівнянь, тобто диференціальні рівняння для оригіналів переходять в алгебраїчні рівняння для їх зображень. Розв'язавши отримані алгебраїчні рівняння у операторній формі щодо шуканих величин і зробивши зворотне перетворення операторного зображення в оригінал, одержуємо розв'язання (інтеграл) вихідних диференціальних рівнянь.

Відповідність між оригіналом і зображенням записують так

$$f(t) \Leftrightarrow F(p)$$

Розмірність зображення дорівнює розмірності оригіналу, помноженої на розмірність часу.

За визначенням перетворення Лапласа застосовується, починаючи з моменту часу $t = 0_+$. Тому під $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$ і т.д. будемо розуміти початкові значення функції і її похідних при $t = 0_+$.

Зворотне перетворення Лапласа

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{a-j\infty}^{a+j\infty} F(p) e^{pt} dp = f(t),$$

$$f(t) = Z^{-1} F(z)$$

Подано зображення деяких функцій:

$$\int_0^{\infty} A e^{-pt} dt = -\frac{A}{p}, A \Leftrightarrow \frac{A}{p}, e^{\alpha t} \Leftrightarrow \frac{1}{p-\alpha}$$

Диференціювання функції

$$f'(t) \Leftrightarrow pF(p) - f(0)$$

Інтегрування функції

$$\int_0^t f(t) dt \Leftrightarrow \frac{F(p)}{p}$$

Зображення похідної другого порядку

$$f''(p) \Leftrightarrow p^2 \left[F(p) - \frac{f(0)}{p} - \frac{f'(0)}{p^2} \right]$$

Зображення похідної n-го порядку

$$f^{(n)}(p) \Leftrightarrow p^n \left[F(p) - \frac{f(0)}{p} - \frac{f'(0)}{p^2} - \dots - \frac{f^{(n-1)}(0)}{p^n} \right]$$

Для електричних кіл:

а) зображення напруги на котушці індуктивності

$$u_L = L \frac{di_L}{dt} = LpI(p) - Li(p) = U_L(p)$$

б) зображення напруги на резисторі

$$u_R = iR = I(p)R = U_R(p)$$

в) зображення напруги на конденсаторі

г) зображення змінної напруги

$$E_m e^{j\omega t} = E_m \frac{1}{p - j\omega t}$$

При нульових початкових умовах

$$f^n(p) = p^n F(p)$$

7.16 Закони Ома та Кірхгофа у операторній формі

Отже, з урахуванням вище викладеного коло, що зображене на рис. 7.33 у операторній формі, має вигляд, що зображений на рис. 7.34.

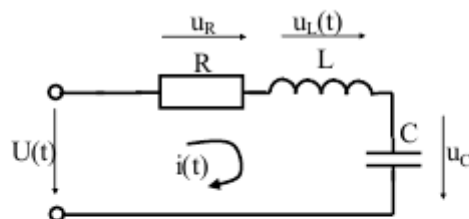


Рисунок 7.33

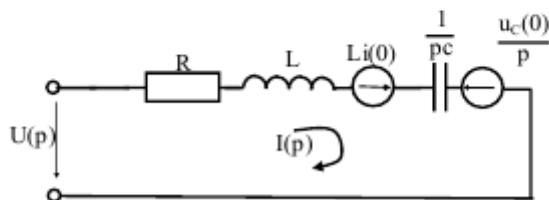


Рисунок 7.34

Запишемо систему рівнянь на основі другого закону Кірхгофа для кола, що зображене на рис. 7.33:

$$u_R + u_L + u_C = iR + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{c} \int idt = u(p)$$

Запишемо рівняння на основі другого закону Кірхгофа для кола, що зображене на рис. 7.34:

З одержаного рівняння виразимо струм:

$$I(p) = \frac{U(p) + Li(0_+) - \frac{u_C(0_+)}{p}}{R + Lp + \frac{1}{pc}} = \frac{U(p) + Li(0_+) - \frac{u_C(0_+)}{p}}{Z(p)}$$

де

$$Z(p) = R + pL + \frac{1}{pc} - \text{операторний опір кола, } Li(0) \text{ і } \frac{u_c(0)}{p} - \text{внутрішні ЕРС,}$$

обумовлені законом енергії в магнітному полі котушки та електричному полі конденсатора.
Закон Ома при ненульових початкових умовах

$$I(p) = \frac{U(p) + Li(0_+) - \frac{u_c(0_+)}{p}}{Z(p)}$$

Запишемо другий закон Кірхгофа у операторній формі

$$\sum I_k(p)Z_k(p) = \sum E_k(p) + \sum L_k i_k(0_+) = \sum \frac{u_{c_k}(0_+)}{p}$$

При нульових початкових умовах

$$I(p) = \frac{U(p)}{Z(p)}$$

Очевидно, що отримані вирази тотожні за структурою виразам, написаним для тих самих електричних кіл при їх розрахунку символічним методом. А це означає, що всі відомі методи розрахунку, що ґрунтуються на законах Кірхгофа (метод контурних струмів, вузлових потенціалів і т.п.), можуть бути використані для розрахунку перехідних процесів операторним методом. Необхідно тільки враховувати початкові умови $u_c(0_+)$ і $i(0_+)$.

Для цього досить розглядати члени як ЕРС додаткових джерел енергії в контурах.

7.17 Алгоритм розрахунку перехідних процесів операторним методом

У загальному випадку розрахунку перехідних процесів операторним методом алгоритм розрахунку струмів:

1. Записуються інтегрально-диференціальні рівняння для схеми після комутації на підставі законів Кірхгофа для миттєвих значень. Залежно від конфігурації схеми можна застосувати один з відомих методів розрахунку кіл (контурних струмів, вузлових потенціалів і т.д.).

1.1. Визначають внутрішні ЕРС $Li(0)$ та $\frac{u_c(0)}{p}$ розраховують кола до комутації,

визначають незалежні початкові умови $u_c(0_+)$ і $i(0_+)$, при цьому напрямок внутрішньої ЕРС індуктивності $Li(0)$ збігається зі струмом, а напрямок внутрішньої ЕРС ємності протилежний напрямку струму гілки з конденсатором.

1.2. Користуючись перетвореннями Лапласа або готовими таблицями перетворення, знаходять зображення заданих вхідних напруг, ЕРС, струмів джерел струму.

2. В отриманих рівняннях роблять заміну оригіналів функцій часу на їх операторне зображення з урахуванням незалежних початкових умов - струмів через індуктивні елементи та напруг на ємнісних елементах, розрахованих для схеми до комутації.

3. Отримані алгебраїчні рівняння для операторних зображень розв'язують щодо зображення шуканої функції.

4. На основі отриманого зображення знаходять оригінал шуканої функції.

Практично при розрахунку перехідних процесів операторним методом можна обійтися без запису інтегрально-диференціальних рівнянь.

Алгоритм розрахунку в такому випадку такий:

1. Заміняють вихідну схему після комутації на операторну схему (або схему для зображень). При цьому варто керуватися положеннями, поданими на рис. 7.35.

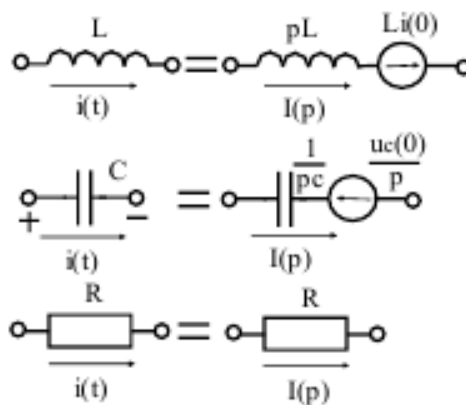


Рисунок 7.35

Тут так називані внутрішні ЕДС ураховують незалежні початкові умови - струми через індуктивні котушки та напругу на конденсаторах, розраховані для схеми після комутації.

1. Завжди $Li(0)$ збігається з $I(p)$, а $\frac{u_c(0)}{p}$ – протилежно до напрямку $I(p)$.

Схеми, зображені на рис. 7.36, подамо у операторній формі (рис. 7.37).

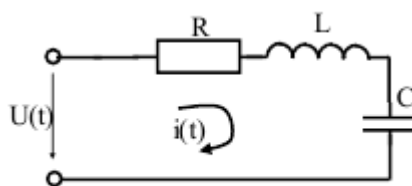


Рисунок 7.36

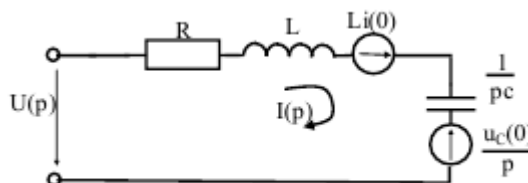


Рисунок 7.37

2. Очевидно, що операторна схема може бути отримана з вихідної, призначеної для сталого гармонічного режиму шляхом заміни $j\omega$ на p і з урахуванням ненульових початкових умов.
3. Для отриманої операторної схеми розраховуємо зображення шуканих струмів і напруг одним із відомих методів (безпосереднього застосування законів Кірхгофа, контурних струмів і т.д.).
4. На основі отриманих зображень знаходимо оригінал шуканої функції.

7.18 Знаходження оригіналу за зображенням

1. Табличний метод

Існують таблиці, що містять зображення різних функцій та їх оригінали (наприклад, Діткін В.А. і Кузнецов П.И. Довідник по операційному численню містить приблизно 1518 зображень та їх оригіналів).

2. Теорема розкладання.

З курсу математики відомо, що дріб вигляду

$$\frac{M(p)}{N(p)} = \frac{a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \dots + a_1 p + a_0}{b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_1 p + b_0}$$

, де $m < n$, може бути розкладена на суму простих дробів

$$\frac{M(p)}{N(p)} = \frac{A_1}{p - p_1} + \frac{A_2}{p - p_2} + \dots + \frac{A_k}{p - p_k} + \frac{A_m}{p - p_n} = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{p - p_k}$$

де p_k – корінь рівняння $N(p)=0$,

$$A_k = \frac{M(p_k)}{N'(p_k)} - \text{коефіцієнти розкладання.}$$

Цю рівність і називають теоремою розкладання. Порівняння операторного та класичного методів показує, що коефіцієнти розкладання являють собою сталі інтегрування.

1. Якщо серед коренів рівняння $N(p)=0$ є $p=0$, то одержимо вираз, що являє собою сталий струм або напругу у колі від джерела постійної ЕРС.

2. Якщо корені комплексно спряжені, то

$$f(0) = \sum_{k=1}^n 2 \operatorname{Re} \left[\frac{M(p_k)}{N(p_k)} \right]$$

Приклад 7.7. Для кола, що зображене на рис. 7.38, знайти вираз для струму, якщо на вхід діє постійна напруга, номінали елементів кола відомі та позначити через R та L .

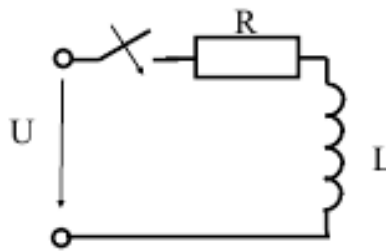


Рисунок 7.38

Подамо схему у операторній формі (рис. 7.39).

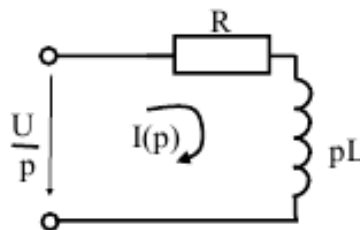


Рисунок 7.39

Нехай $L(i) = 0$.

Запишемо зображення вхідної напруги

$$U = \frac{U}{p}$$

Знайдемо операторний струм

$$I(p) = \frac{U}{p(R + pL)} = \frac{U}{pL(\frac{R}{L} + p)} = \frac{U/L}{p(p + \frac{R}{L})} = \frac{U}{R} \frac{\frac{R}{L}}{p(p + \frac{R}{L})}$$

За допомогою таблиць перетворення Лапласа перейдемо від зображення до оригіналу

$$i(t) = \frac{U}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t})$$

Фільтри електричних сигналів

Електричні фільтри застосовуються для виділення і пропускання необхідного сигналу з суміші корисних і небажаних сигналів. Вони характеризуються смугою пропускання і смугою затримання певних частот сигналів.

Область частот, де фільтр мало **ослабляє** сигнал, називається смугою пропускання, а область частот, де **ослаблення** електричного сигналу велике, називається смугою затримання. Чим більше різниця між посиленням і **ослабленням** фільтру, тим сильніше **виражаються** його фільтруючі властивості. Залежно від взаємного розташування смуги пропускання і затримання розрізняють:

1. Фільтри верхніх частот (ФВЧ) – смуга пропускання тягнеться від деякої частоти ω_1 до безкінечності і смуга затримання – від 0 до $\omega_{31} < \omega_1$.
2. Фільтри нижніх частот (ФНЧ) – смуга пропускання тягнеться від 0 до деякої частоти ω_2 і смуга затримання – від деякої частоти ω_{32} до безкінечності.
3. Смугові фільтри (СФ) – фільтри із смугою пропускання від деякої частоти ω_1 до іншої частоти $\omega_2 > \omega_1$ і смугами затримання від 0 до $\omega_{31} < \omega_1$ і від $\omega_{32} > \omega_2$ до безкінечності.
4. Режекторний (загороджуючий) фільтр (РФ) – із смугами пропускання від 0 до ω_1 і від $\omega_2 > \omega_1$ до безкінечності і смугою затримання від ω_{31} до $\omega_{32} > \omega_{31}$.

Окрім цих чотирьох основних типів фільтрів в коректуючих **колах** систем управління використовуються амплітудні коректори (АК), **здатні** в деякій смузі частот здійснювати як посилення, так і **ослаблення** сигналів, і фазові коректори (ФК), у яких коефіцієнт передачі не залежить від частоти, а фазовий **зсув** сигналу звичайно **росте із зростанням** його частоти.

На практиці застосовуються фільтри з самими різними характеристиками. **Проте** в їх основі завжди лежить обмежений набір типових фільтрів, на підставі якого **конструюються** складніші схеми.

Розглянемо найпоширеніші пасивні фільтри, що використовуються в **пристроях** автоматики і управління.

Фільтр нижніх частот. Призначений для передачі без зміни сигналів нижніх частот, а на високих частотах забезпечує **загасання** сигналів і запізнювання їх по фазі **щодо** вхідних сигналів. Такі властивості забезпечує просте **РС-коло**, **зображене** на малюнку. Амплітудно-частотна характеристика такого **кола** має **вигляд**

$$K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}},$$

а **фазочастотна**

$$\varphi(\omega) = -\arctg \omega RC.$$

АЧХ і ФЧХ найбільш зручно **представляти** в логарифмічному масштабі. Ці залежності, звані діаграмами Боді, **представлені** на малюнку, де f_{cp} – гранична частота (частота зрізу), при якій $K(\omega) = 1/\sqrt{2}$, **тобто змінюється** на 3 дБ.

Прийнявши $K(\omega) = 1/\sqrt{2} = 1/\sqrt{1 + \omega_{cp}^2 R^2 C^2}$, **одержимо вираз** для частоти зрізу $f_{cp} = (1/2\pi)\omega_{cp} = 1/2\pi RC$.

Фазовий **зсув** φ на цій частоті складає - 45°.

З малюнка видно, що АЧХ $K(\omega)$ найбільш просто скласти з двох асимптот:

1. $K(\omega)=1$, що відповідає відсутності загасання на нижніх частотах $f \ll f_{\text{ср}}$ ($K(\omega)=0$ дБ).
2. На високих частотах при $f \gg f_{\text{ср}}$ $K(\omega) \approx 1/(\omega RC)$, тобто коефіцієнт посилення обернено пропорційний частоті, і при збільшенні частоти в 10 разів $K(\omega)$ також зменшується в 10 разів, тобто він зменшується на 20 дБ на декаду або на 6 дБ на октаву.
3. $K(\omega) = 1/\sqrt{2}$, що відповідає загасанню на 3 дБ при $f=f_{\text{ср}}$.

Фільтр верхніх частот. Призначений для передачі без зміни сигналів високих частот, а на нижніх частотах забезпечує загасання сигналів і випередження їх по фазі щодо вхідних сигналів. Такі властивості забезпечує просте коло, зображене на мал. 1.14, б. АЧХ і ФЧХ такого фільтру мають вигляд

$$K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + 1/\omega^2 R^2 C^2}},$$

$$\varphi(\omega) = \text{arctg} \frac{1}{\omega RC}.$$

Обидві ці залежності в логарифмічному масштабі представлено на мал. 2.15.

Вираз для частоти зрізу співпадає з відповідним виразом для фільтру нижніх частот:

$$f_{\text{ср}} = 1/2\pi RC$$

Фазовий зсув на цій частоті складає $+45^\circ$.

Як і для фільтру нижніх частот, АЧХ фільтру верхніх частот найбільш просто скласти з двох асимптот:

1. $K(\omega)=1$ на високих частотах при $f \gg f_{\text{ср}}$ (загасання рівне нулю).
2. $K(\omega) \approx \omega RC$ на низьких частотах при $f \ll f_{\text{ср}}$, тобто коефіцієнт посилення схеми пропорційний частоті, причому нахил асимптоти дорівнює $+20$ дБ на декаду або $+6$ дБ на октаву.
3. При $f=f_{\text{ср}}$, як і для фільтру нижніх частот, $K(\omega) = 1/\sqrt{2}$, тобто загасання амплітуди складає -3 дБ.

Смуговий RC- фільтр. Складається з послідовно сполучених фільтрів верхніх і нижніх частот (мал. 2.16. а). АЧХ і ФЧХ цього фільтру відповідно мають вигляд (мал. 2.16. б):

$$K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{\omega RC} - \omega RC\right)^2 + 9}},$$

$$\varphi(\omega) = \text{arctg} \frac{1 - \omega RC}{3\omega RC}.$$

Максимальний коефіцієнт посилення $K(\omega)$ має місце при $\omega RC=1$, отже, резонансна частота

$$f_p = \frac{1}{2\pi RC}.$$

Фазовий зсув на резонансній частоті рівний нулю, а коефіцієнт посилення $K_p=1/3$.

Міст Віна. Застосовується для придушення сигналів в певній частотній області і є смуговим RC- фільтром, доповненим ділянкою резистора, який забезпечує частотно-незалежну напругу, рівну $1/3 U_{\text{вх}}$ (мал. 2.17, а). При цьому на резонансній частоті вихідна напруга рівна нулю, а АЧХ має мінімум.

Залежності K і φ від частоти мають вигляд (мал. 2.17, б):

$$K(\omega) = \frac{1 - (\omega RC)^2}{3\sqrt{[1 - (\omega RC)^2]^2 + (3\omega RC)^2}};$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{3\omega RC}{(\omega RC)^2 - 1} \quad \text{при } \omega RC \neq 1.$$

Подвійний Т- подібний фільтр. Має частотні характеристики, ідентичні характеристикам моста Віна, проте вихідна напруга в ньому знімається щодо спільної точки, що дає йому переваги в електронних схемах. В подвійному Т- подібному фільтрі для високих і низьких частот, істотно відмінних від резонансної, $u_{\text{вих}} = u_{\text{вх}}$. При цьому сигнали високих частот повністю передаватимуться через два конденсатори С, а сигнали низьких частот – через резистори R.

Амплітудно- і фазочастотні характеристики подвійного Т- подібного моста описуються залежностями (мал. 2.18, б):

$$K(\omega) = \frac{1 - (\omega RC)^2}{\sqrt{[1 - (\omega RC)^2]^2 + (4\omega RC)^2}};$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{4\omega RC}{(\omega RC)^2 - 1}.$$

Багатоланкові фільтри. Застосовуються в тому випадку, якщо необхідно одержати кращі характеристики фільтрів в порівнянні з одноланковими, наприклад, швидше зменшення коефіцієнта передачі фільтру. Для цього можна ввімкнути n фільтрів нижніх частот послідовно.

Передавальна функція такої системи

$$W(S) = \frac{1}{(1 + a_1 S)(1 + a_2 S) \cdots (1 + a_n S)},$$

де a_1, a_2, \dots, a_n – дійсні позитивні коефіцієнти,

$S = s/\omega_{\text{ср}}$ – нормована комплексна змінна. Зменшення коефіцієнта передачі такого фільтру характеризується величиною $20n$ дБ на кожну декаду.

Корені передавальної функції (2.47) є негативними і дійсними, що відповідає характеристикам RC- фільтрів n -го порядку.

Передавальна функція фільтру нижніх частот в загальному вигляді може бути записана так:

$$W(S) = \frac{K_0}{1 + C_1 S + C_2 S^2 + \dots + C_n S^n},$$

де C_1, C_2, \dots, C_n – позитивні дійсні коефіцієнти.

Порядок фільтру визначається максимальним степенем змінної S . Для реалізації фільтру необхідно розкласти поліном знаменника на множники. Якщо серед коренів полінома є комплексні, то вираз (2.47) не може бути використано, а його слід записати у вигляді добутку співмножників другого порядку:

$$W(S) = \frac{K_0}{(1 + a_1 S + b_1 S^2)(1 + a_2 S + b_2 S^2) \cdots (1 + a_n S + b_n S^2)} = \frac{K_0}{\prod (1 + a_i S + b_i S^2)},$$

де a_i, b_i – позитивні дійсні коефіцієнти, причому для непарних порядків b_i рівний нулю.

Такі багатоланкові фільтри мають достатньо складні поліноміальні характеристики, для апроксимації яких використовують декілька типових поліномів: Баттерворта, Чебишева, Бесселя. Відповідно до цих поліномів фільтри, що апроксимуються ними, називаються фільтрами Баттерворта, Чебишева, Бесселя.

Фільтри Баттерворта забезпечують довгу горизонтальну ділянку АЧХ в смузі пропускання і різкий спад її за частотою зрізу. Перехідна характеристика такого фільтру при східчастому вхідному сигналі має коливальний характер, причому із збільшенням порядку фільтру (числа ланок) коливання посилюються. Фільтри Чебишева мають крутіше спадаючу характеристику за частотою зрізу, проте в смузі пропускання вона не монотонна, а має хвилеподібний характер з постійною амплітудою коливань. При заданому порядку

фільтру різкішому спаду АЧХ за частотою зрізу відповідає більша нерівномірність в смузі пропускання. Перехідна характеристика $h(t)$ є коливальною, причому із зростанням порядку фільтру коливання збільшуються. Коливальна $h(t)$ фільтру Чебишева більше, ніж фільтру Баттерворта. Фільтри Бесселя мають пологіший спад АЧХ в порівнянні з фільтрами Баттерворта і Чебишева, проте володіють оптимальною перехідною характеристикою. Перехідний процес на виході цього фільтру при східчастому обуренні практично не має коливань. Фазовий зсув вихідного сигналу пропорційний частоті вхідного сигналу.

Час наростання сигналів у фільтрів з різною апроксимацією АЧХ трохи збільшується із зростанням порядку поліномів, а час затримки і перерегулювання зростають від фільтрів Бесселя до фільтрів Баттерворта і Чебишева. Слід зазначити, що час затримки у фільтрів різного типу відрізняється на 20...40%, а перерегулювання у фільтрів Баттерворта приблизно на порядок більше, ніж у фільтрів Бесселя, а у фільтрів Чебишева в 4...5 разів більше, ніж у фільтрів Баттерворта.

АЧХ трьох розглянутих фільтрів нижніх частот четвертого і десятого порядків показані на мал. 2.19, а перехідні характеристики – на мал. 2.20. Можна помітити, що характеристика фільтру Чебишева має крутіший спад для частот вхідного сигналу, що перевищують частоту зрізу, але помітну нерівномірність в смузі пропускання. Перехідні процеси цих фільтрів мають велику амплітуду коливань при східчастому вхідному сигналі. Перехідний процес для фільтру Бесселя практично не має коливань.

За допомогою однієї і тієї ж схеми можна одержати характеристики фільтру будь-якого типу певного порядку, змінюючи лише номінали відповідних резисторів і конденсаторів. Щоб розрахувати схему конкретного фільтру, слід знати його частотні характеристики при заданому його порядку. Параметри елементів фільтру безпосередньо пов'язані з коефіцієнтами a_i і b_i апроксимуючої його поліноміальної функції, які повинні мати строго певні значення. Корені цих поліномів можуть мати зв'язані комплексні значення, що приводить до неможливості реалізації такого фільтру за допомогою пасивних RC- кіл. Для реалізації фільтрів із зв'язаними комплексними коренями можуть бути використані LRC- фільтри. Проте для низьких частот потрібні великі індуктивності, які складні у виготовленні і володіють поганими електричними характеристиками.

Вживання індуктивностей можна уникнути, використовуючи RC- схеми з активними елементами (наприклад, операційними підсилювачами). Такі схеми називаються активними фільтрами.

Використовуючи логарифмічне уявлення, можна перейти від нижніх частот до верхніх, дзеркально відобразити АЧХ щодо частоти зрізу, тобто замінивши ωRC на $1/\omega RC$. При цьому частота зрізу залишається без змін, а K_0 переходить в K_∞ . При цьому одержуємо

$$W(S) = \frac{K_\infty}{\prod_i \left(1 + \frac{a_i}{S_i} + \frac{b_i}{S_i^2} \right)}.$$

АКТИВНІ ФІЛЬТРИ

Параметри пасивних фільтрів можуть бути істотно поліпшені при вживанні їх в поєднанні з операційними підсилювачами. Такі фільтри називаються активними.

Фільтри верхніх і нижніх частот першого порядку. Їх передавальна характеристика може бути записана у вигляді:

$$K(S) = \frac{K_0}{1 + a_1 S}.$$

Ці фільтри реалізуються на основі простих RC- кіл першого порядку з ввімкненням на їх виході операційного підсилювача (ОП), який здійснює перетворення повного опору фільтру і забезпечує тим самим незалежність його характеристик від зміни навантаження. Схема такого фільтру приведена на рисунку. Для отримання фільтру верхніх частот достатньо в рівнянні замінити величину S на $1/S$, а в схемі поміняти місцями елементи R_1 і

C₁.

Оскільки вхідний опір ОП дуже великий ($R_{вх} \approx \infty$), то незалежно від зміни опору навантаження на виході ОП навантаження RC- фільтру залишається постійним. Крім того, задаючи коефіцієнт підсилення ОП, ми одночасно дістаємо можливість вільно задавати значення коефіцієнта передачі.

Частотно-залежні RC- кола можна вмикати і в ланцюг зворотного зв'язку ОП. Це дозволяє дещо спростити схему фільтрів. Така схема фільтру нижніх частот першого порядку з інвертуючим підсилювачем приведена на мал. 6.19, б. Він має передавальну характеристику:

$$K(S) = \frac{R_1 / R_2}{1 + \omega_{cp}^2 R_2 C_1 S}$$

Для розрахунку схеми необхідно задати частоту зрізу, коефіцієнт передачі постійного сигналу K_0 (для цієї схеми він повинен бути заданий із знаком мінус) і ємність конденсатора C_1 .

Прирівнявши коефіцієнти передавальної функції цієї схеми коефіцієнтам першої функції, одержимо

$$R_2 = a_1 / 2\pi f_{cp} C_1, \quad R_1 = -R_2 / K_0.$$

Фільтр верхніх частот такого ж типу приведений на рис. 6.19, в. Його передавальна функція має вигляд:

$$K(S) = \frac{R_2 / R_1}{1 + \frac{1}{\omega_{cp} R_1 C_1} S}$$

Аналогічно попередньому, одержимо

$$R_1 = 1 / 2\pi f_{cp} a_1 C_1, \quad R_2 = -R_1 K_\infty.$$

З урахуванням реальних характеристик ОП і, перш за все, його частотних характеристик параметри розглянутих активних фільтрів дещо спотворюються.

Фільтри нижніх і верхніх частот другого порядку. Передавальні функції цього типу фільтрів записуються у вигляді:

$$K(S) = \frac{K_0}{1 + a_1 S + b_1 S^2}.$$

Такі фільтри не можуть бути реалізовані за допомогою пасивних RC- кіл. Для їх побудови необхідне додавання до RC- фільтру індуктивності або активного елементу – підсилювача. Схема фільтру другого порядку на LRC- елементах показана на рис. 6.20, а. Його передавальна характеристика

$$K(S) = \frac{1}{1 + \omega_{cp} RCS + \omega_{cp}^2 LCS^2}.$$

Для розрахунку значень R і C одержимо наступні формули:

$$R = \frac{a_1}{2\pi f_{cp} C}; \quad L = \frac{b_1}{4\pi^2 f_{cp}^2 C}.$$

LRC- фільтри нижніх частот практично не використовуються через великі значення індуктивностей. Так, при $f_{cp}=10$ Гц і місткості конденсатора $C=10$ мкФ при значеннях коефіцієнтів (для фільтру Баттерворта) $a_1=1,414$ і $b_1=1,00$ необхідне значення індуктивності $L=25,3$ Гн.

Активний RC- фільтр нижніх частот на такі ж параметри реалізувати достатньо просто. Фільтр (рис. 6.20, б) є схемою зі складним негативним зворотним зв'язком. Його передавальна характеристика має вигляд:

$$K(S) = \frac{R_2 / R_1}{1 + \omega_{cp} C_1 \left(R_2 + R_3 + \frac{R_2 R_3}{R_1} \right) S + \omega_{cp}^2 C_1 C_2 R_2 R_3 S^2}.$$

Прирівнявши коефіцієнти, одержимо рівняння для визначення основних параметрів фільтру:

$$K_0 = -\frac{R_2}{R_1};$$

$$a_1 = \omega_{cp} C_1 \left(R_2 + R_3 + \frac{R_2 R_3}{R_1} \right);$$

$$b_1 = \omega_{cp}^2 C_1 C_2 R_2 R_3.$$

Для розрахунку фільтру можна або задаватися значеннями опорів R_1 і R_3 і, виходячи з них, обчислити параметри R_2 , C_1 і C_2 , або, що більш зручне, вибрати **ємності** конденсаторів C_1 і C_2 і визначити значення опорів:

$$R_1 = -\frac{R_2}{K_0};$$

$$R_2 = \frac{a_1 C_2 - \sqrt{a_1^2 C_2^2 - 4 C_1 C_2 b_1 (1 - K_0)}}{4 \pi f_{cp} C_1 C_2};$$

$$R_3 = \frac{b_1}{4 \pi^2 f_{cp}^2 C_1 C_2 R_2}.$$

Коефіцієнти a_1 і b_1 вибираються із спеціальних таблиць залежно від виду полінома, що апроксимує фільтр: Баттерворта, Чебишева, Бесселя і т.д. Мінус при коефіцієнті K_0 показує, що сигнал на виході фільтру буде інвертований.

Для того, щоб значення опору резистора R_2 не одержати **негативним**, необхідно **ємності** конденсаторів C_1 і C_2 вибрати з умови

$$\frac{C_2}{C_1} \geq \frac{4 b_1 (1 - K_0)}{a_1^2},$$

причому величина нерівності не повинна бути дуже великою.

Розглянута схема не критична до розкиду параметрів елементів і може бути рекомендована для реалізації фільтрів з великою добротністю.

Фільтр (рис. 6.20, в) є схемою з позитивним частотно-залежним зворотним зв'язком. Значення коефіцієнта підсилення K_y в цьому фільтрі повинне бути **строго** визначеним, що забезпечується **негативним** зворотним зв'язком через дільники R_3 , R_4 , де $R_4 = (K_y - 1) R_3$. Позитивний зворотний зв'язок зумовлений наявністю конденсатора C_2 .

Передавальна функція цього фільтру має **вигляд**:

$$K(S) = \frac{K_y}{1 + \omega_{cp} [C(R_1 + R_2) + (1 - K_y) R_1 C_2] S + \omega_{cp}^2 R_1 R_2 C_1 C_2 S^2}.$$

Як правило, значеннями **ємностей** конденсаторів C_1 і C_2 задаються, а значення опорів резисторів R_1 і R_2 визначаються за формулою:

$$R_1 = R_2 = \frac{a_1 C_2 \pm \sqrt{a_1^2 C_2^2 - 4 b_1 C_1 C_2}}{4 \pi f_{cp} C_1 C_2},$$

причому, як і в попередній схемі, **ємності** конденсаторів C_1 і C_2 повинні задовольняти нерівність

$$\frac{C_2}{C_1} \geq \frac{4 b_1}{a_1^2},$$

яка не повинна бути дуже великою.

Якщо опори резисторів R_1 і R_2 і ємність конденсаторів C_1 і C_2 вибирати з умов $R_1=R_2=R$, $C_1=C_2=C$, то передавальна функція фільтру має вигляд:

$$K(P) = \frac{K_y}{1 + \omega_{cp} RC(3 - K_y)S + (\omega_{cp} RC)^2 S^2},$$

звідки одержимо спрощені рівняння для визначення параметрів елементів фільтрів

$$RC = \sqrt{b_1} / 2\pi f_{cp};$$

$$K_y = K_0 = 3 - (a_1 / \sqrt{b_1}) = 3 - (1/Q),$$

де Q – добротність фільтру.

Для отримання фільтру верхніх частот в схемі на рис. 6.20, в достатньо поміняти місцями резистори і конденсатори (рис. 6.20, з). Його передавальна функція:

$$K(S) = \frac{K_y}{1 + \frac{R_2(C_1 + C_2) + R_2 C_2(1 - K_y)}{R_1 R_2 C_1 C_2 \omega_{cp}} \cdot \frac{1}{S} + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2 \omega_{cp}^2} \cdot \frac{1}{S^2}}.$$

При $C_1=C_2=C$, $K_y=1$ співвідношення для визначення параметрів елементів мають вигляд

$$K_\infty = 1; \quad R_1 = 1/\pi f_{cp} C a_1; \quad R_2 = a_1 / 4\pi f_{cp} C b_1.$$

Якщо АЧХ фільтру другого порядку виявляється недостатньо крутою, застосовують фільтри вищого порядку, для чого послідовно сполучають ланки, що є фільтрами першого і другого порядків. В цьому випадку характеристики ланок фільтрів перемножуються. Порядок ввімкнення ланок може бути довільним, оскільки частотні характеристики повної схеми фільтру будуть одні і ті ж.

Смугові фільтри. Їх можна одержати послідовним ввімкненням фільтрів нижніх і верхніх частот першого порядку (рис. 6.21, а). Передавальна характеристика смугового фільтру, побудованого таким чином, має вигляд

$$K(S) = \frac{1}{1 + (1/K_y SRC)} \cdot \frac{1}{1 + (SRC/K_y)} = \frac{K_y SRC}{1 + [(1 + K_y^2)/K_y] SRC + (SRC)^2}.$$

Проте для великих значень добротності такі схеми не використовуються, а застосовуються активні фільтри зі складним негативним або позитивним зворотним зв'язком.

Схема фільтру із складним негативним зворотнім зв'язком приведена на рис. 6.21, б. Її передавальна функція має вигляд:

$$K(S) = \frac{-\frac{R_2 R_3}{R_1 + R_3} C \omega_p S}{1 + \frac{2R_1 R_3}{R_1 + R_2} C \omega_p S + \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 + R_3} C^2 \omega_p^2 S^2},$$

де ω_p – резонансна кругова частота.

У цій схемі резонансна частота $f_p = \frac{1}{2\pi C} \sqrt{\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 R_3}}$, коефіцієнт передачі на цій

частоті $K_p = R_2 / 2R_1$, добротність $Q = \pi R_2 C f_p$, ширина смуги пропускання $B = 1/\pi R_2 C$. Ця схема має перевагу – вона не схильна до генерації на резонансній частоті при недостатньо точно розрахованих значеннях елементів.

Схема фільтру з позитивним зворотним зв'язком показана на рис. 6.21, в. За допомогою дільника напруги R_1 і $(K_y - 1) R_1$ негативного зворотного зв'язку задається коефіцієнт посилення підсилювача, рівний K_y . Передавальна функція цього фільтру має вигляд:

$$K(S) = \frac{KRC\omega_p S}{1 + RC\omega_p(3 - K_y)S + R^2 C^2 \omega_p^2 S^2}.$$

У цій схемі резонансна частота $f_p = 1/2\pi RC$, коефіцієнт передачі на резонансній частоті $K_p = K_y / (3 - K_y)$, добротність $Q = 1 / (3 - K_y)$.

Перевагою схеми є те, що її добротність **змінюється** залежно від K_y , тоді як резонансна частота від K_y не залежить.

Загороджуючі фільтри. Їх передавальні характеристики визначаються пасивними мостовими фільтрами, ввімкненими в **коло** зворотного зв'язку операційного підсилювача (рис. 6.22).

Активний загороджуючий фільтр з подвійним Т-подібним мостом показаний на рис. 6.22, а. Сигнали високих і низьких частот проходять через подвійний Т-подібний міст без змін. На резонансній же частоті вихідна **напруга** рівна нулю. В цьому випадку подвійний Т-подібний міст еквівалентний заземленому резистору $R/2$. При цьому резонансна частота $f_{cp} = 1/2\pi RC$ не **змінюється**.

Передавальна функція схеми:

$$K(s) = \frac{K_y(1 + S^2)}{1 + 2(2 - K_y)S + S^2},$$

$$\text{а добротність } Q = \frac{1}{2(2 - K_y)}.$$

За цим виразом можна визначити необхідні параметри фільтру. Задавши коефіцієнт посилення **повторювача напруги** $K_y=1$, **одержимо** добротність $Q=0,5$. При збільшенні K_y добротність зростає, стаючи $Q = \infty$ при $K=2$.

Умовою правильної роботи схеми є оптимальне встановлення резонансної частоти і коефіцієнта передачі подвійного Т-подібного фільтру. Налаштування схеми, особливо при великих значеннях добротності, **достатньо** складна. Це пов'язано з тим, що зміна опорного одночасно впливає на обидва параметри. В цьому **випадку** краще використовувати активний загороджуючий фільтр з мостом Віна (рис. 6.22, б).

Передавальна функція такої схеми:

$$K(S) = - \frac{[\beta / (1 + \alpha)](1 + S^2)}{1 + [3 / (\alpha + 1)]S + S^2},$$

$$\text{де } \alpha = K_y = 3Q - 1; \beta = -3K_0Q.$$

Резонансна частота $f_p = 1/2\pi R_2 C$, коефіцієнт передачі $K_0 = -\beta / (1 + \alpha)$, а добротність $Q = (1 + \alpha) / 3$.

Резонансну частоту можна встановлювати, переналаштовуючи обидва резистори R_2 і поступово **перемикаючи** конденсатори C . Точне підстроювання здійснюється за допомогою незначних змін опорного $2R_3$.

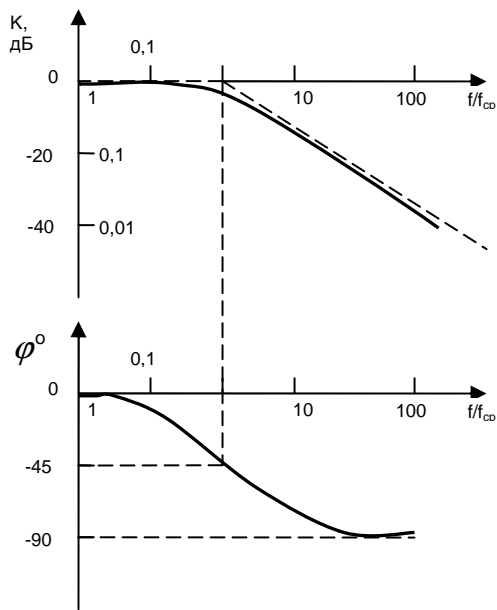


Рис. 2.14

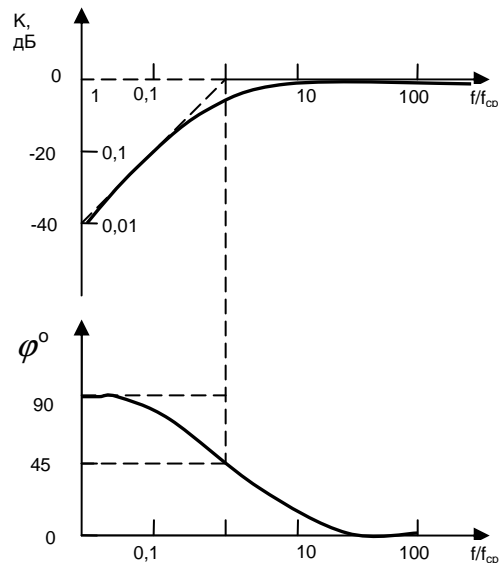


Рис. 2.15

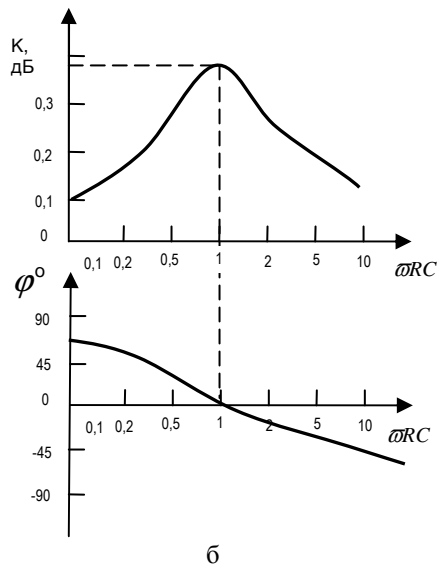
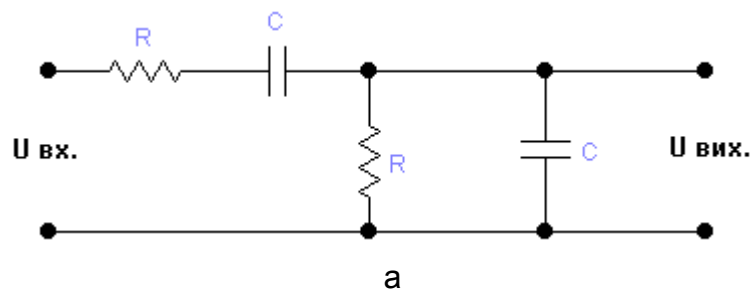


Рис. 2.16

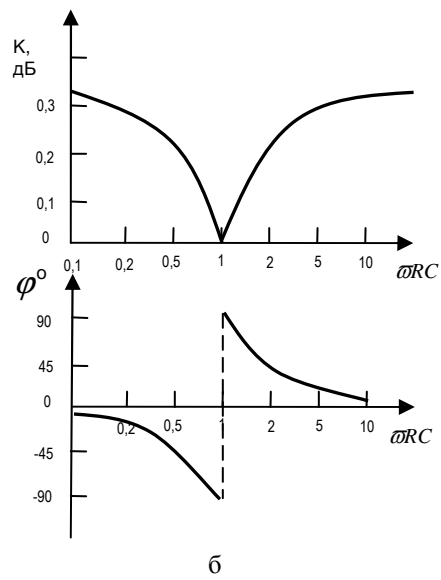
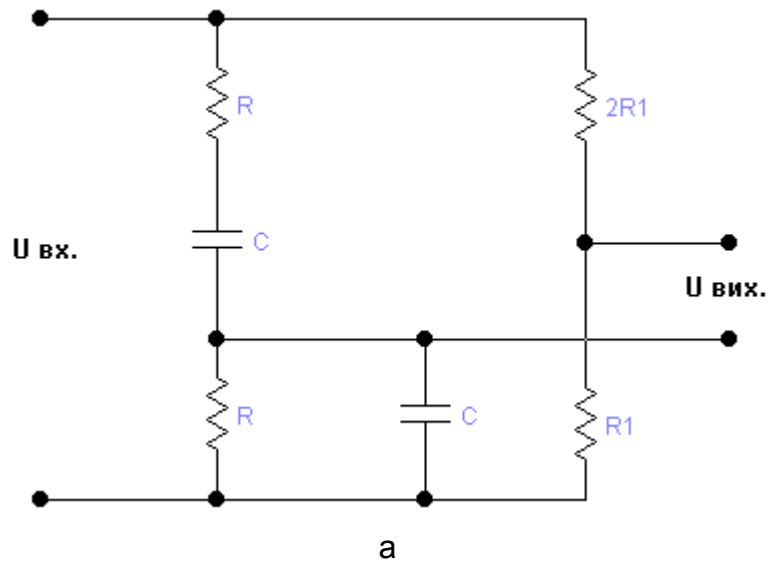
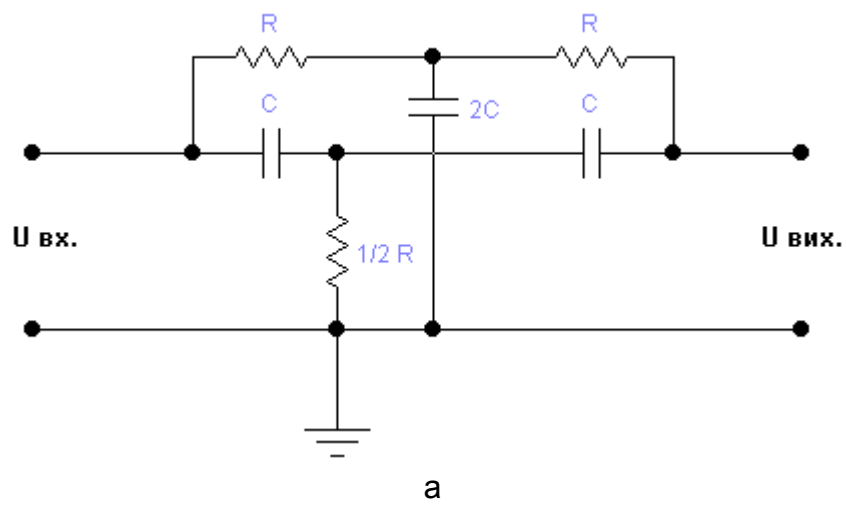


Рис. 2.17



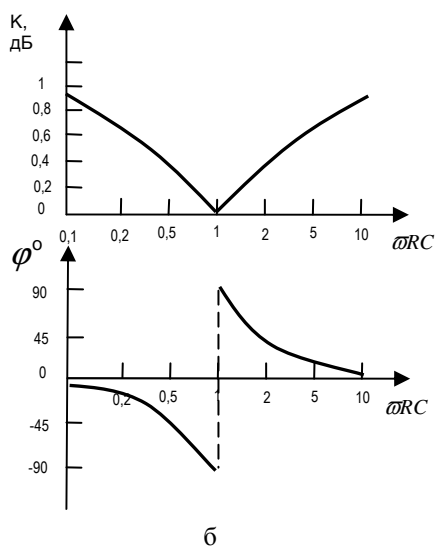
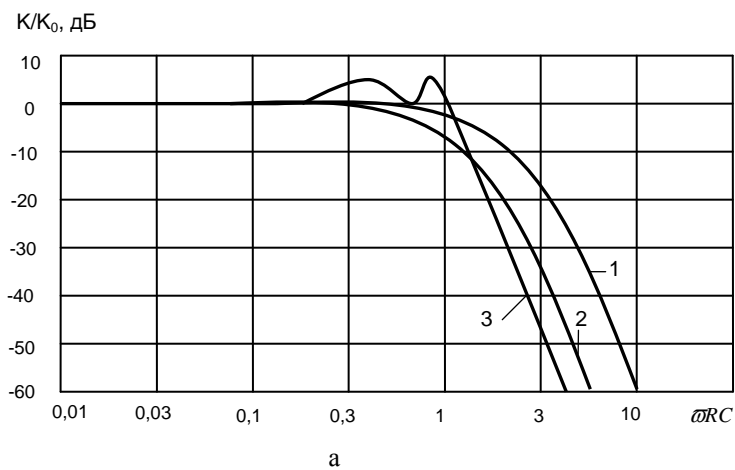
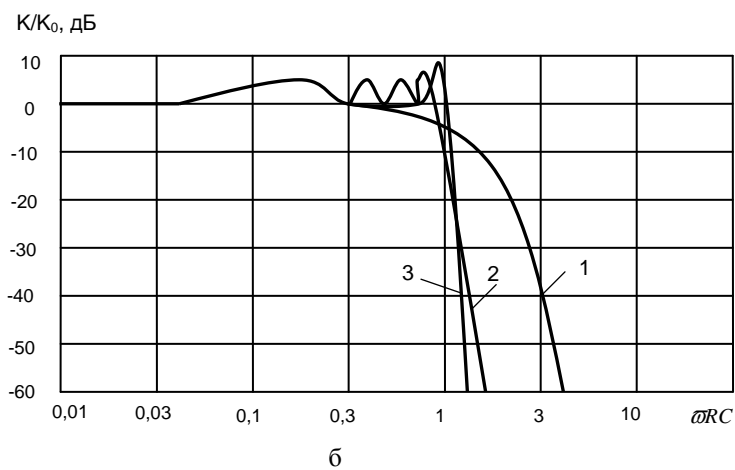


Рис. 2.18



а



б

Рис. 2.19

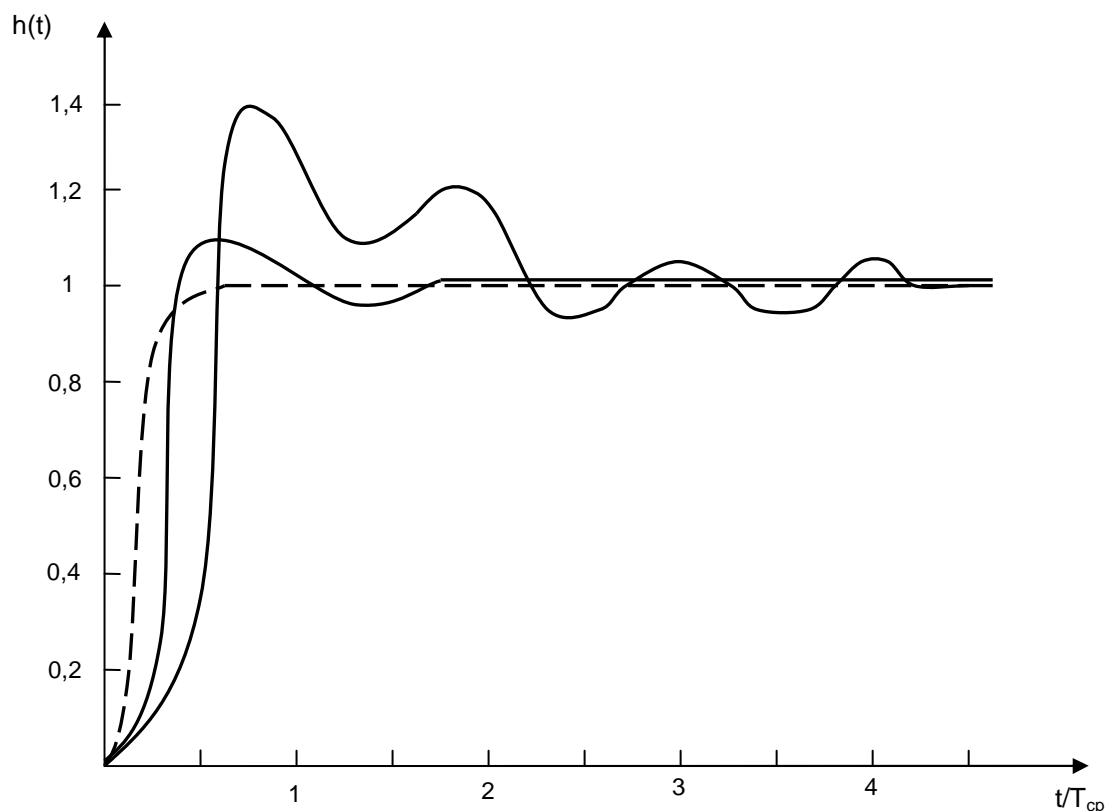


Рис. 2.20

РОЗДІЛ 9 НЕЛІНІЙНІ КОЛА

9.1 Основні поняття

Нелінійні електричні кола – кола, що містять хоча б один нелінійний елемент, тобто елемент, параметри якого (R , L або C) залежать від значень або від напрямку струму та напруги цього елемента кола.

Залежно від здатності розсіювати електричну енергію у вигляді тепла (необхідно перетворювати в інші види енергії) або накопичувати магнітну або електричну енергію (або накопичувати у вигляді енергії магнітного або електричного полів) розрізняють: РНЕ – резистивний нелінійний елемент (рис. 9.1).

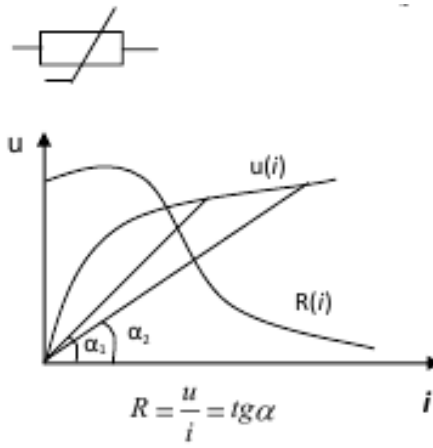


Рисунок 9.1

ІНЕ– індуктивний нелінійний елемент (рис. 9.2).

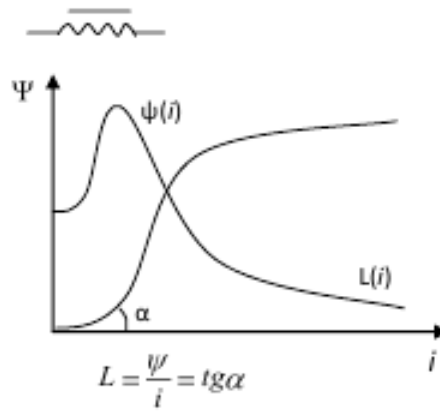


Рисунок 9.2

ЕНЕ – емнісний нелінійний елемент.

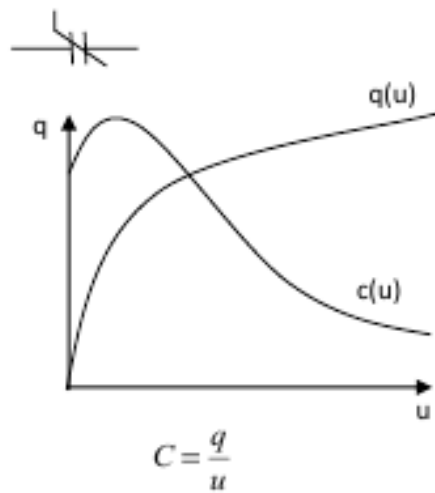


Рисунок 9.3

РНЕ, ІНЕ, ЕНЕ – нелінійні накопичувачі енергії.

Характеристиками цих елементів, одержуваними експериментальними й заданими графіками, таблицями або наближеними аналітичними виразами, є:

- вольт-амперна характеристика (ВАХ) РНЕ – $u(i)$;
- вебер-амперна характеристика ІНЕ – $i(\psi)$ – магнітна характеристика нелінійних індуктивних елементів;
- кулон-вольтна характеристика ЕНЕ – $q(u)$ електрична характеристика ємнісних нелінійних елементів.

Причиною нелінійності характеристик елементів є нелінійність параметрів цих елементів - R, L, C .

Параметри цих нелінійних елементів (НЕ) - опір, індуктивність, ємність - залежать від величин і напрямків струму та напруги цих елементів. Причиною цього є залежність: -- питомої провідності питомого опору від режиму кола

$$R = \rho \frac{l}{S} = \frac{l}{\gamma \delta}, R(i) = \rho(i) \frac{l}{S} \text{ або } R(i) = \rho(i) \frac{l}{S};$$

- магнітної проникності середовища, у якому замикаються силові лінії магнітного поля від струму, що збудив це поле (від напруженості поля)

$$L = \omega^2 \frac{\mu_a S}{\alpha}, \quad C(i) = \epsilon_a \frac{S}{\alpha}$$

- діелектричної проникності речовини, що заповнює простір між обкладинками конденсатора, від напруги між обкладинками (від напруги електричного поля):

$$C = \frac{\epsilon_a S}{\alpha}, \quad C(i) = \epsilon_a \frac{S}{\alpha}$$

Для оцінки характеру зміни НЕ вводять поняття статичного та диференціального опорів.

Статичний опір $R_{ст}$ характеризує поведінку НРЕ при незмінному режимі. У розглянутій точці ВАХ чисельно дорівнює тангенсу кута нахилу між віссю ординат (віссю струмів) і прямою, що з'єднує початок координат і розглянуту точку ВАХ, помножених на масштаб (рис. 9.4):

$$R_{ст} = \frac{U_A}{I_A} = \operatorname{tg} \alpha \frac{m_u}{m_i}$$

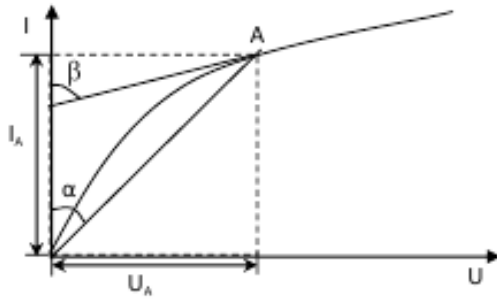


Рисунок 9.4

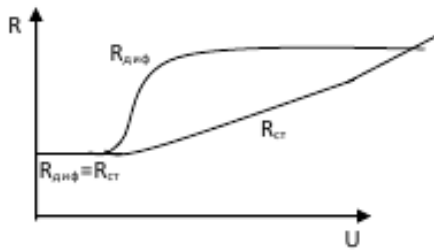


Рисунок 9.5

Диференціальний опір $R_{диф}$ визначає крутість ВАХ у розглянутій точці та характеризує поведінку НРЕ при малих відхиленнях від режиму в розглянутій точці ВАХ. $R_{диф}$ чисельно дорівнює тангенсу кута нахилу між віссю ординат та дотичної до ВАХ у розглянутій точці, помноженому на масштаб:

$$R_{диф} = \lim_{\Delta I \rightarrow 0} \frac{\Delta U_A}{\Delta I_A} = \frac{dU}{dI} = \operatorname{tg} \beta \frac{m_u}{m_I}$$

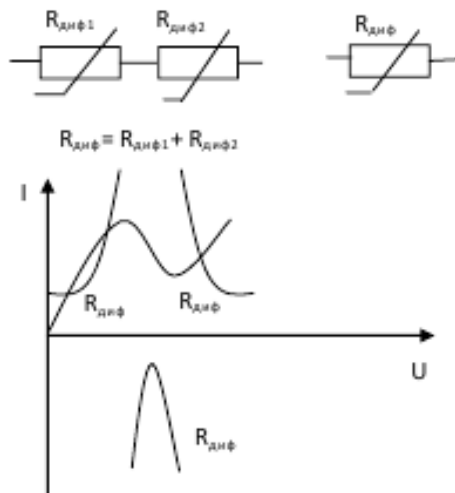


Рисунок 9.6

а) при послідовному сполученні декількох НРЕ $R_{диф}$ результуюча характеристика при будь-якому струмі дорівнює сумі $R_{диф}$ цих НРЕ при цьому ж струмі (тому що похідна суми дорівнює сумі похідних, рис. 9.6)

б) якщо ВАХ НРЕ має падаючу ділянку, то $R_{диф}$ на цій ділянці негативне.

Приклади нелінійних елементів та їх характеристик

Некеровані

До некерованих РНЕ належать

– лампа накаливання - з підвищенням температури зростає росте, характеристика симетрична (рис. 9.7);

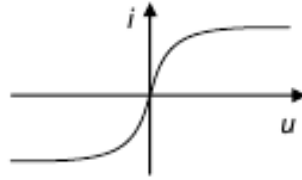


Рисунок 9.7

- тиритові опори (з керамічного матеріалу - тириту) - тиритові руйнуються від високої напруги;

- терфериристи - для компенсації зміни опору приладів від температури (рис. 9.8);

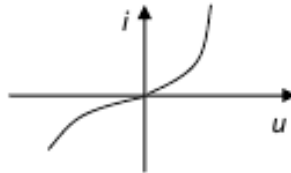


Рисунок 9.8

- баретер - сталевий дріт у водні (80мм рт. ст.) - для стабілізації струму (рис. 9.9);

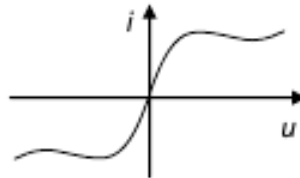


Рисунок 9.9

- діод (несиметрична характеристика, рис. 9.10), стабілітрон.



Рисунок 9.10

Керовані

- транзистор - характеризується сімейством характеристик;

- ІНЕ - дросель - котушка індуктивності з обмоткою, намотаною на замкнуте осердя із феромагнітного матеріалу;
- ЕНЕ - конденсатор, між обкладинками якого сегнетодіелектрик (уперше ці властивості виявлені у сегнетовій солі).

Особливості аналізу кіл з НЕ

1. Електричний стан кіл із НЕ описується системою нелінійних алгебраїчних рівнянь для кіл постійного струму і нелінійних диференціальних рівнянь для кіл змінного струму, і рівняння що не мають точного аналітичного розв'язання.

2. До кіл з НЕ не застосуємо принцип накладення (при накладенні процесів режим у колі змінюється, а отже, змінюються параметри кола).

3. Для аналізу нелінійних кіл використовуються власні методи розв'язання нелінійних рівнянь, які діляться на графічні та аналітичні.

Графічні методи ґрунтуються на графічних побудовах із використанням ВАХ НЕ, поданого у вигляді графіка або таблиці, і найпростіших розрахунках (рис. 9.11).

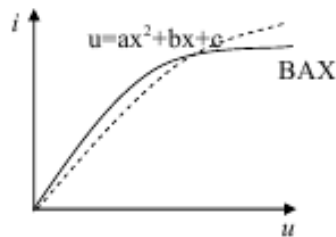


Рисунок 9.11

Аналітичні методи ґрунтуються:

- на наближеній заміні (апроксимації) ВАХ НЕ в межах робочої ділянки аналітичним вираженням із подальшими аналітичним розрахунком шуканих величин; зокрема заміна прямою лінією - лінеаризація;
- чисельні методи розв'язання нелінійних рівнянь (наприклад, ітерація);
- кусково-лінійній апроксимації - заміні ВАХ НЕ на ряд прямолінійних ділянок із «дотинанням» розв'язань на межі ділянки.

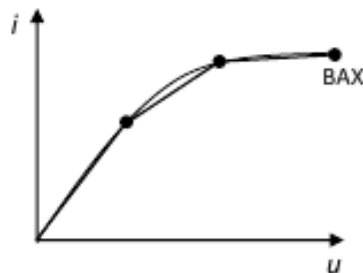


Рисунок 9.12

Переваги графічних методів - простота, наочність, легкість врахування особливостей ВАХ (наприклад гістерезисних явищ).

Недолік - дає власне розв'язання завдання при певних параметрах кола.

Переваги аналітичних методів - можливість одержання розв'язання в загальному вигляді, що дозволяє досліджувати отримане розв'язання при зміні кожного з параметрів кола.

Недолік - аналітична апроксимація ВАХ пов'язана з деякою похибкою, що виникає

в результаті розв'язання з відомим ступенем наближення.

Описаний підхід до аналізу нелінійних кіл однаковою мірою справедливий як для кіл постійного, так і для кіл змінного струму.

9.2 Нелінійні електричні кола постійного струму

Очевидно, що в цьому випадку мова йде про кола постійного струму з нелінійними резистивними елементами (НРЕ).

При аналізі режимів нелінійних кіл із НРЕ варто врахувати:

1. Електричний стан нелінійного електричного кола постійного струму описується системою нелінійних алгебраїчних рівнянь, що не мають загального аналітичного розв'язання. Для аналізу нелінійних електричних кіл використовуються власні методи розв'язання - графічний та аналітичний з апроксимацією ВАХ НРЕ.

2. До нелінійних кіл не застосуємо принцип накладення, тому що при накладенні процесів режим у колі змінюється, а, отже, змінюються параметри кола.

У колах постійного струму ємнісний НЕ являє собою обрив кола, а індуктивний НЕ - коротке замикання, а тому мова йде тільки про резистивні нелінійні елементи.

Графічний метод

Графічний метод ґрунтується на графічних побудовах із використанням ВАХ НЕ, поданих у вигляді графіка або таблиці, а також пов'язаних із цими побудовами розрахунках з використанням законів Кірхгофа.

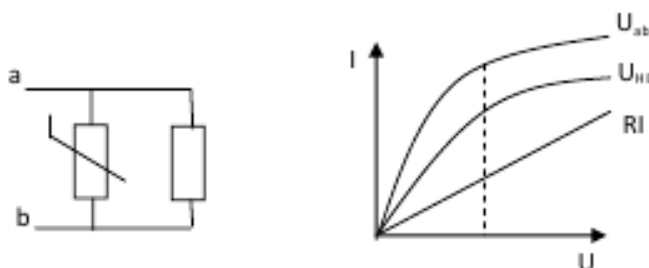


Рисунок 9.13

1. ВАХ двополюсника

Важливе місце при цьому займає побудова ВАХ пасивних та активних двополюсників, що містять лінійні та нелінійні елементи.

ВАХ двополюсників будують відповідно до рівнянь, складених за законами Кірхгофа, шляхом графічного додавання ВАХ елементів, що входять у двополюсник. Це графічний аналог методу еквівалентних перетворень (рис. 9.13 та 9.14).

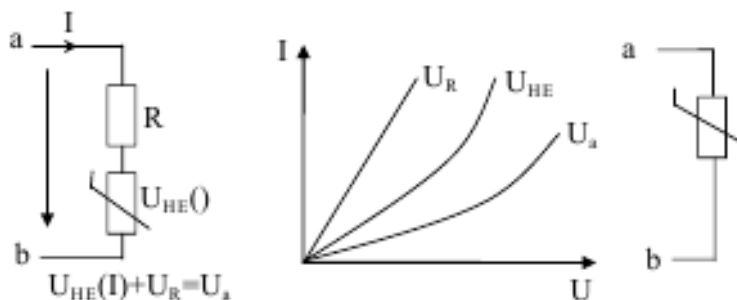


Рисунок 9.14

2. Схеми зі змішаним з'єднанням

Знаючи ВАХ активних і пасивних двополюсників, будь-яке коло можна звести до одноконтурної схеми або схеми із двома вузлами.

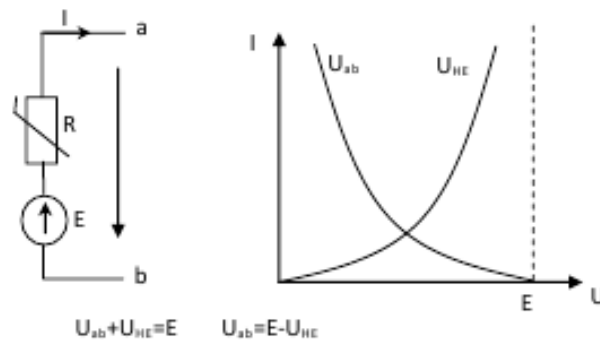


Рисунок 9.15

Для цього, записавши рівняння на підставі I закону Кірхгофа для схеми із двома вузлами, та II закону Кірхгофа для одноконтурного кола, розв'язавши його графічним шляхом знаходження точки перетинання еквівалентних ВАХ, що відповідають лівій і правій частинам рівняння (рис. 9.15 та рис. 9.16).

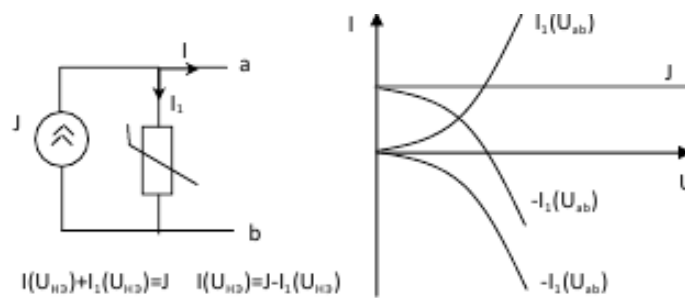


Рисунок 9.16

3. Складнорозгалужені кола

Метод еквівалентного генератора ефективний при розгалуженому колі будь-якої складності, що містить один НРЕ. У цьому випадку лінійну частину заміщують еквівалентним генератором, а потім визначають режим у НЕ шляхом графічного розв'язання рівняння, складеного за II законом Кірхгофа.

Метод активного чотирьополюсника

Метод активного чотирьополюсника ефективний при 2-х НРЕ. Тоді лінійну частину подаємо як Т-подібну еквівалентну схему, а на вході та виході ЕРС з нелінійними елементами. Розраховуємо як коло із двома вузлами шляхом графічного розв'язання рівняння, складеного за I законом Кірхгофа.

Алгоритм

- 1) Розглядати схему як лінійний активний чотирьополюсник з підключенням до його затискачів НЕ.

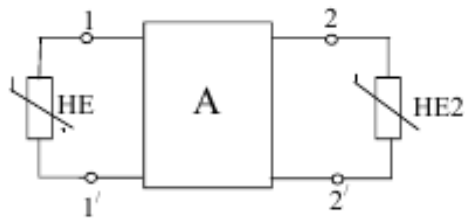


Рисунок 9.17

2) Відключити HE (рис. 9.18) та розрахувати напруги холостого ходу на затискачах чотириполосника одним із відомих методів (МВН).

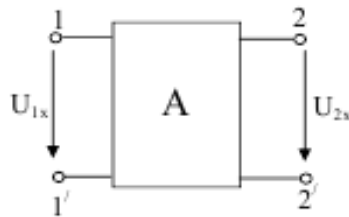


Рисунок 9.18

3) У теорії кіл доведене, що якщо у дві гілки одночасно ввести дві ЕРС, рівні і протилежно спрямовані напругам холостого ходу на цих гілках ($E_1 = U_{1x}$; $E_2 = U_{2x}$), то струми в цих гілках знаходяться зі схеми, тобто заданий активний чотириполосник замінюється пасивним і двома ЕРС, рівними і протилежно спрямованими напругами холостого ходу на затискачах цього чотириполосника (рис. 9.19).

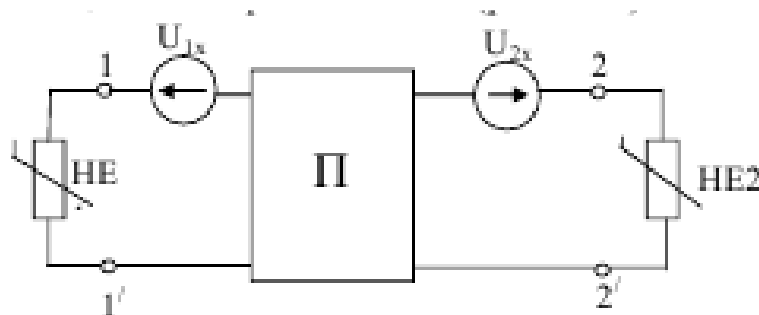


Рисунок 9.19

4) Замінивши пасивний чотириполосник Т-подібною схемою заміщення, одержуємо нелінійне коло із двома вузлами, розв'язання якої можна здійснити (рис. 9.20):

а) графічним методом;

б) методом аналітичної апроксимації:

- складання рівнянь, підстановка апроксимуючої функції, розв'язання трансцендентного або алгебраїчного рівняння;

- складання рівнянь, розв'язання числовими (ітераційним) методом.

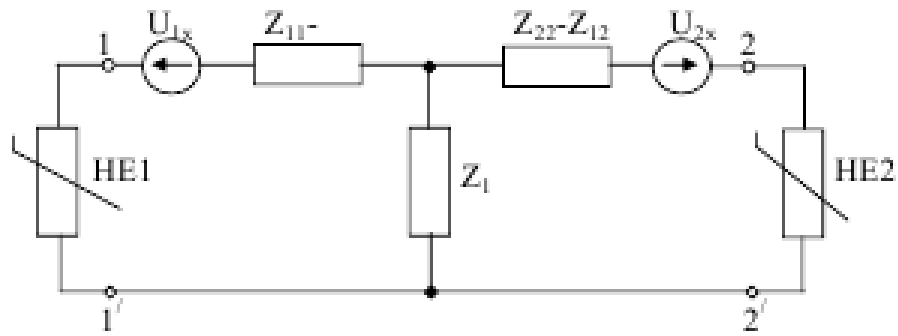


Рисунок 9.20

Аналітичний метод

1. Метод аналітичної апроксимації.

ВАХ НРЕ заміняють аналітичною функцією, що приблизно описує ВАХ (поліном, тригонометричний вираз і т.д.). Потім застосовують один з відомих методів розрахунку з теорії лінійних кіл. У результаті одержують алгебраїчні або трансцендентні рівняння, які розв'язують аналітично щодо шуканої величини.

2. Методи лінеаризації.

При малих відхиленнях режиму від вихідного невелику ділянку ВАХ приблизно можна замінити відрізком прямої, дотичної до характеристики. При цьому ВАХ заміняється на ламану, яку можна подати як ЕРС і лінійний опір, що дорівнює диференціальному (рис. 9.21).

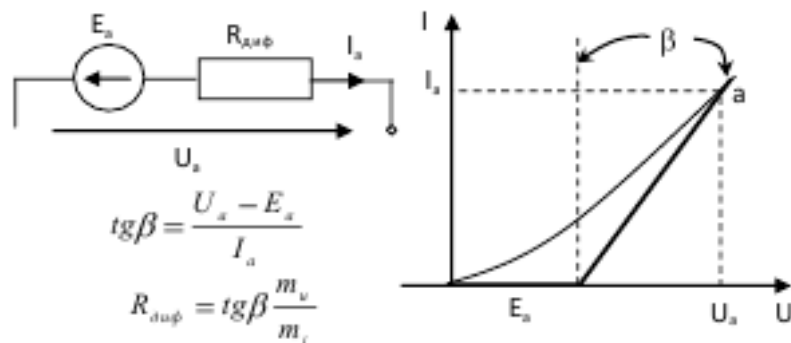


Рисунок 9.21

3. Кусково-лінійна апроксимація (рис. 9.22):

- джерело струму, шунтоване діодом;
- напруга на діоді U_d ;
- діод відкритий постійно.

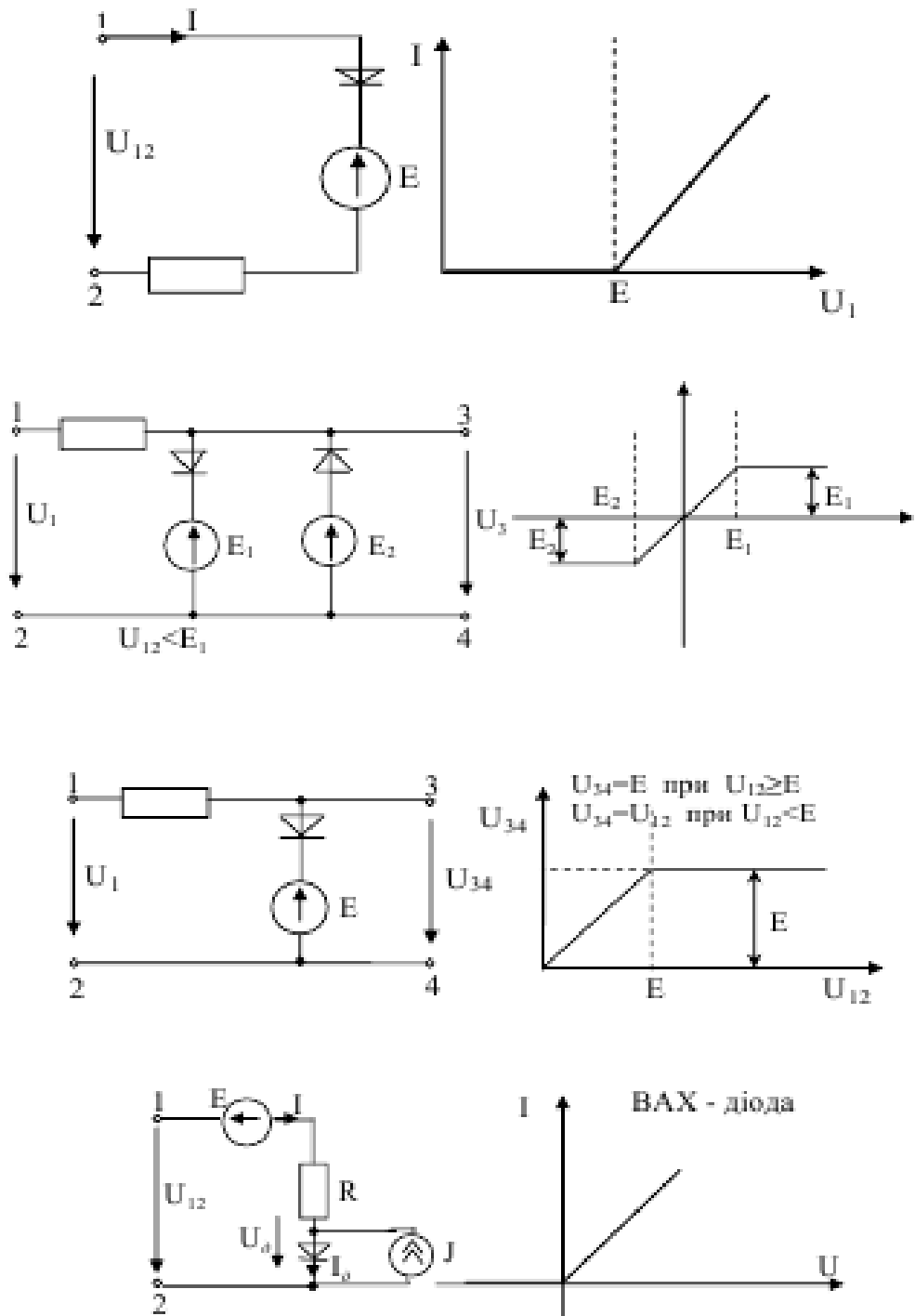


Рисунок 9.22

4. Числові методи (ітерації).

Розрахунок ведеться в табличній формі.

$$U_1(I_1) = Uab - E_1, I_1(\text{заBAX}),$$

Задаємося $U_2(I_2) = Uab - E_2, I_2(\text{заBAX}), \sum 1$

$$U_3(I_3) = Uab - E_3, I_3(\text{заBAX})$$

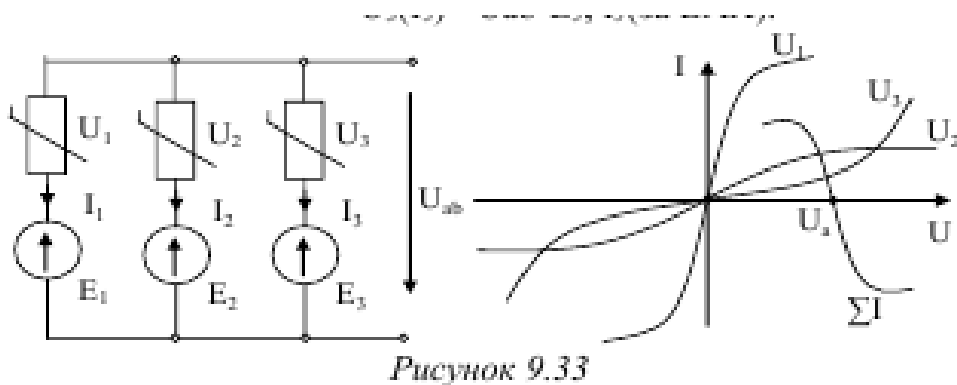


Рисунок 9.33

Задаючись іншими значеннями U_{ab} , продовжують цю операцію доти, поки ΣI не змінить знак. Потім у великому масштабі будують ділянку $\Sigma I = f(U_{ab})$ поблизу нуля. Шукане значення U_{ab} відповідає $\Sigma I = 0$.

Звести до рівнянь із невідомими струмами через НЕ (рис. 9.34). Для цього:

- 1) 2-ге рівняння за участю нелінійних елементів (I_{11}, I_{22});
- 2) 1-ше рівняння лінійне (I_{33});
- 3) виразити за допомогою лінійного рівняння через I_{33}

$I_1 = I_{11}$ та $I_2 = I_{22}$ і підставити в рівняння.

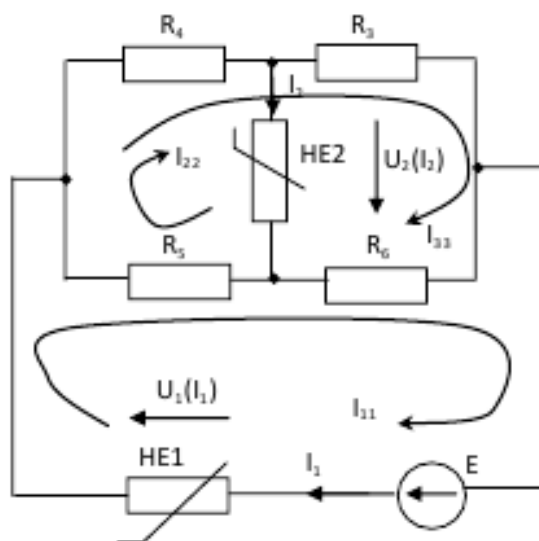


Рисунок 9.34

Розв'язання

1. Метод контурних струмів. Контурні струми вибрати так, щоб хоча б частина з них була шуканими струмами через нелінійні елементи.

2. За другим законом Кірхгофа

$$\begin{cases} (R_5 + R_6)I_1 - R_5I_2 - (R_5 + R_6)I_{33} = E - U_1(I_1); (1) \\ -R_5I_1 + (R_5 + R_4)I_2 + (R_5 + R_4)I_{33} = -U_2(I_2); (2) \\ -(R_5 + R_6)I_1 + (R_4 + R_5)I_2 + (R_3 + R_4 + R_5 + R_6)I_{33} = 0; (3) \end{cases}$$

3. Одне з рівнянь (3) лінійне, й отриманий з нього вираз для I_{33} підставляється в рівняння (1) і (2):

$$\begin{cases} AI_1 - BI_2 = E - U_1(I_1) \\ -CI_1 + DI_2 = -U_2(I_2) \end{cases}$$

4. Ітерація:

- задаємося I_1 і I_2 ;
- визначаємо U_1 і U_2 за ВАХ НЕ1 і НЕ2;
- одержуємо перше наближення I_1^1 і I_2^1 з рівнянь;
- визначаємо U_1^1 і U_2^1 за ВАХ НЕ1 і НЕ2;
- одержуємо друге наближення I_1^2 і I_2^2 .

Закінчення $I_1^{K+1} = I_1^K; I_2^{K+1} = I_2^K$.

9.3 Магнітні кола при постійних магнітних потоках

Магнітні кола – частина електротехнічного пристрою, що складається із джерел, які збуджують магнітне поле (постійні магніти, котушки), і магнітопроводів, що використовуються для концентрації (зосередження) магнітного поля у певній частині простору та надання йому бажаної конфігурації.

Магнітопроводи виробляють з феромагнітних матеріалів із високою магнітною проникністю. Оскільки $\mu=f(H)$, то магнітні кола нелінійні.

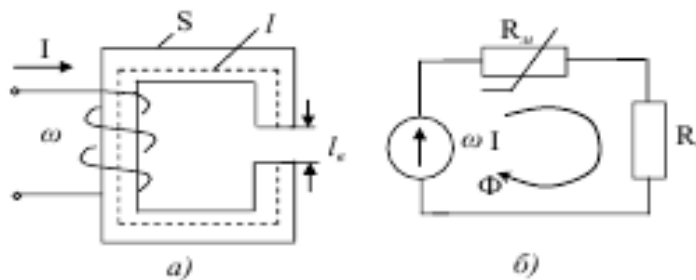


Рисунок 9.34

На рис. 9.34 а зображене магнітне коло, а на рис. 9.34 б – еквівалентне коло. Характеристики котушки з феромагнітного матеріалу подані на рис. 9.35.

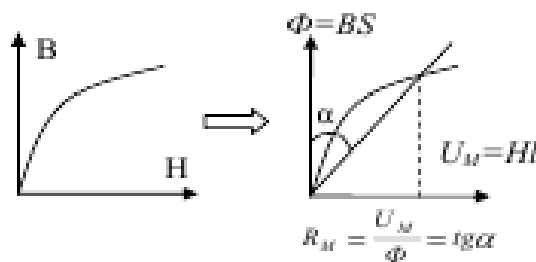


Рисунок 9.35

За аналогією з електричними колами наведемо вирази для законів Кірхгофа та закону Ома для магнітних кіл:

$$\sum_{i=1}^n \Phi_i = 0 \quad \text{- I закон Кірхгофа для магнітних кіл;}$$

$$U_M + U_{Mb} = I_\omega \quad \text{- II закон Кірхгофа для магнітних кіл;}$$

$$\Phi = \frac{I\omega}{R_M + R_{Mb}} - \text{закон Ома для магнітних кіл.}$$

$$R_M = \frac{R}{\mu\mu_0 S} \left[\frac{1}{\text{Om} \cdot \text{c}} \right].$$

Отже, існує аналогія між електричними та магнітними величинами:

$$I, \text{ A} - \Phi, \text{ Вб}; E, \text{ В} - \omega I, \text{ А}; R, \text{ Ом} - R_M \frac{1}{\text{Om} \cdot \text{c}}; U=RI, \text{ В} - U_M=R_M \Phi, \text{ А.}$$

Вольт-амперними характеристикам НРЕ є аналогічні вебер-амперні характеристики ділянок феромагнітних магнітопроводів. ВАХ будується на підставі кривої намагнічування матеріалу магнітопровода. Якщо дано криву намагнічування матеріалу, то для одержання вебер-амперної характеристики множать

$B * S$ та $H * l$.

Аналогія між електричними та магнітними колами при постійних струмах і потоках дозволяє поширити всі методи й техніку розрахунку нелінійних електричних кіл із НРЕ на магнітні кола.

Розглянемо розгалужене магнітне коло (рис. 9.36).

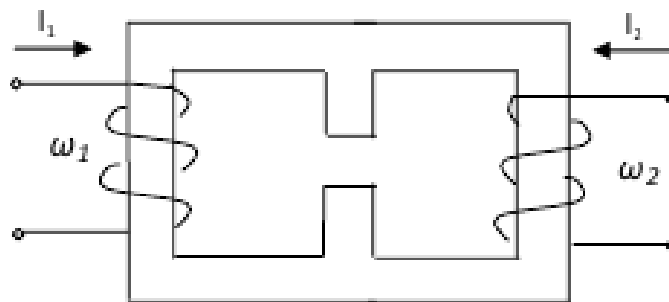


Рисунок 9.36

На рис. 9.37 наведемо еквівалентну схему магнітного кола, що зображене на рис. 9.37.

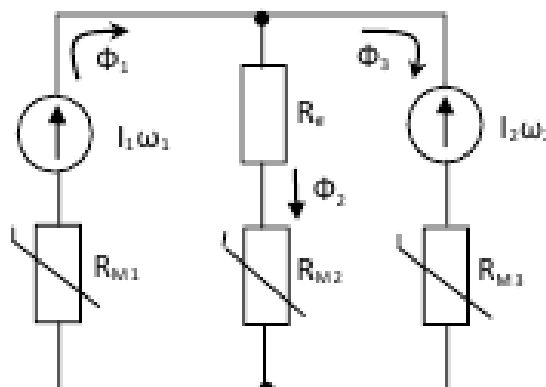


Рисунок 9.37

Запишемо для кола, що зображене на рис. 9.37, закони Кірхгофа:

$$\Phi_1 = \Phi_2 + \Phi_3$$

$$R_{M1}\Phi_1 + R_{M2}\Phi_2 + R_a\Phi_2 = I_1\omega_1$$

$$R_{M3}\Phi_3 - R_{M2}\Phi_2 - R_a\Phi_2 = -I_2\omega_2$$

Для розрахунку розгалужених магнітних кіл використовують такі ж самі методи, як і для електричних кіл.

9.4 Нелінійні кола змінного струму

9.4.1 Основні поняття

Особливістю нелінійних кіл змінного струму є залежність параметрів нелінійного елемента від частоти прикладеної напруги та струму, що проходить (на додаток до залежності від їх величини та напрямку).

Приклад:

- крива перемагнічування дроселя (рис. 9.38);
- поверхневий ефект у резистивних колах.

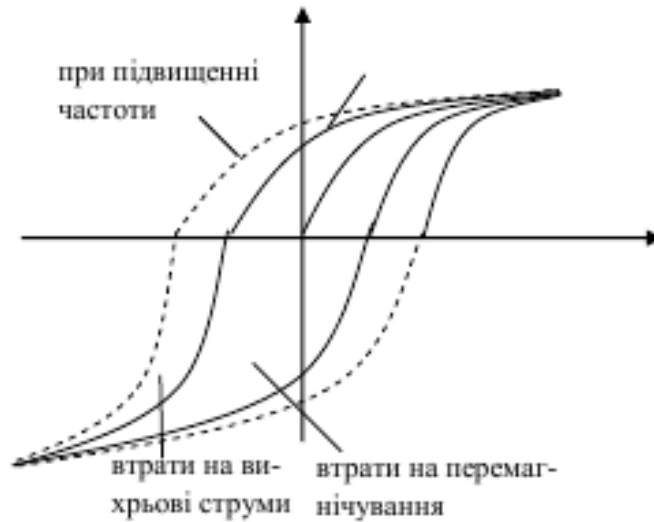


Рисунок 9.38

Однак у колах змінного струму, на відміну від кіл постійного струму, нелінійний елемент може бути описаний трьома видами характеристик:

- вольт - амперні характеристики для миттєвих значень;
- вебер - амперні характеристики за першими гармоніками;
- кулон - вольтні характеристики для діючих значень.

Якщо напруга, що впливає на нелінійний елемент (струм), містить постійну складову, то вольт - амперні, вебер- амперні при підвищенні частоти втрати на вихрові струми втрати на перемагнічування або кулон - вольтні характеристики зображують сімействами кривих, на яких постійна складова величини, що впливає, є параметром (рис. 9.39).

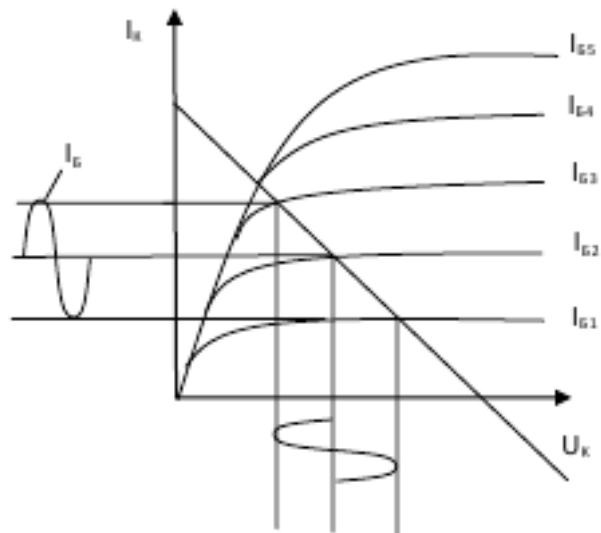


Рисунок 9.39

Характеристики для миттєвих значень зв'язують миттєві значення основних визначальних величин – U й i , Ψ й i , q й U . ВАХ за першими гармоніками - зв'язок між амплітудними (діючими) значеннями перших гармонік струму і напруга на нелінійному елементі.

ВАХ для діючих значень - залежність між діючими значеннями струму та напруги на нелінійному елементі.

ВАХ за першими гармоніками і діючими значеннями одержують графічним або аналітичним шляхом з характеристик для миттєвих значень або знімають досвідченим шляхом, експериментально.

9.4.2 Кола з інерційними нелінійними елементами

Будемо вважати інерційними нелінійними елементи, сталі часу яких, що характеризує їх інерційні властивості, набагато більші від періоду напруги та струму джерела живлення.

Наприклад, нелінійність характеристик деяких нелінійних опорів обумовлена зміною температури в результаті нагрівання їхнім струмом (електричні лампи накалювання, баретери, напівпровідникові термоопори – термістори й ін.)

Оскільки теплові процеси (нагрівання, охолодження) є інерційними процесами, то навіть при порівняно низькій частоті (наприклад, 50 Гц.) температура таких НЕ та відповідно їх опір протягом періоду практично не змінюються.

Це означає, що при сталому періодичному режимі параметри інерційного елемента залишаються незмінними протягом періоду зміни струмів і напруг, тобто інерційний нелінійний елемент діє як лінійний.

Аналіз кіл із інерційним нелінійним елементом

Отже, при сталих періодичних режимах інерційні нелінійні елементи діють як лінійні.

Отже, при синусоїдальній напрузі струми та напруги у всіх галузях також синусоїдальні та для опису сталого режиму можна скористатися комплексною формою запису і векторних діаграм.

Однак при різних діючих значеннях струму (напруги) сталого режиму параметри НЕ різні, тобто залежність між діючими значеннями струму та напруги буде лінійною.

Таким чином, для кіл з інерційними НЕ не можна користуватися методом

накладення та всіма методами розрахунку кіл, що ґрунтуються на принципі накладання.

Розрахунок однорідних нелінійних кіл з інерційними елементами одного типу (L, R, C) за діючим значенням синусоїдальних струмів і напруг нічим не відрізняється від розрахунку нелінійних кіл при постійних струмах (магнітних потоках, зарядах).

У загальному випадку неоднорідних кіл доводиться враховувати нелінійність активної та реактивної частин опору елемента, а також складати струми та напруги, що перебувають у квадратурі.

9.4.3 Кола з безінерційними елементами

Елементи, у яких залежність між миттєвими значеннями напруги та струму (Ψ і i , q і U) нелінійна, називаються безінерційними. Практично ця переважна більшість всіх НЕ (діодів, тріоди, дроселі і т.д.), за винятком НЕ. Завдяки нелінійності характеристик безінерційні нелінійні елементи здатні перетворювати спектр коливань, що впливають на них. У результаті в струмі з'являються гармонічні складові, які в прикладеній напрузі відсутні.

Наприклад, при подачі синусоїдальної напруги струм через НЕ буде несинусоїдальним.

Аналіз кіл із безінерційними НЕ

Для аналізу нелінійних електричних кіл змінного струму з безінерційними елементами застосовують:

1. Графоаналітичний (графічний) метод.
2. Аналітичний.

Графічний метод

Графоаналітичний метод ґрунтується на використанні характеристик нелінійних елементів для миттєвих значень і рівнянь Кірхгофа.

1. Записують рівняння Кірхгофа для миттєвих значень.
2. Користуючись вольт-амперною характеристикою (вебер-амперною, кулон-вольтною), НЕ будують графічні залежності $u(t)$ і $i(t)$, тобто графічні залежності зміни шуканих величин у часі.

Розглянемо практично НЕ - дросель (котушка з феромагнітним осердям), що живить від мережі синусоїдальної напруги (рис. 9.40).

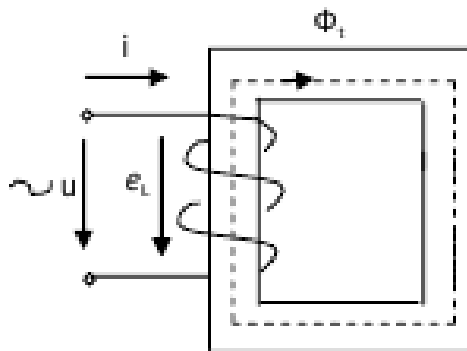


Рисунок 9.40

Вважатимемо для полегшення аналізу, що:

- опір обмотки дорівнює нулю;
- потік розсіювання дорівнює нулю.

Згідно з II законом Кірхгофа

$$u + \ell_L = 0 \Rightarrow u = -\ell_L \Rightarrow U_m \sin \omega t = \frac{d\psi}{dt}$$

$$W \frac{d\Phi_t}{dt} = U_m \sin \omega t,$$

$$\Phi_t = \int \frac{U_m}{W} \sin \omega t dt = \frac{U_m}{\omega W} (-\cos \omega t) + C = \frac{U \sqrt{2}}{2\pi f W} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\Phi_t = \frac{U}{4,44 W f} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right).$$

$C=0$, тому що напруга синусоїдальна.

Висновки:

1. Магнітний потік у осерді повністю визначається напругою на обвитці і не залежить від параметрів магнітного кола.
2. При синусоїдальній напрузі живлення потік у осерді також синусоїдальний.
3. Потік відстає від прикладеної напруги на $\pi/2$.
4. Амплітуда потоку в осерді дроселя залежить тільки від величини прикладеної напруги (при $f_{мережы} = \text{const}$ $W \text{ дроселя} = \text{const}$).

З'ясуємо тепер характер зміни струму. Скористаємося вебер-амперною характеристикою.

У результаті графічних побудов одержуємо криву струму i (рис. 9.41).

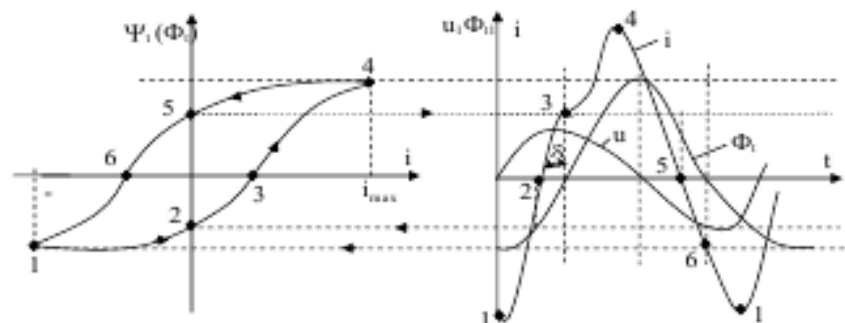


Рисунок 9.41

Висновки:

1. Струм несинусоїдальний. Причому внаслідок симетричності кривої струму щодо осі абсцис при розрізненні будуть відсутні парні гармоніки (присутні 3-тя, 5-та, 7-ма). Крива струму i має загострену форму.
2. Струм досягає max одночасно з потоком. Причому чим більше насичене осердя, тим більше max струму.
3. Струм відстає від напруги на 90° , де θ - кут втрат магнітних, обумовлений явищем гістерезису й пропорційний втратам енергії в одиниці об'єму осердя за 1 цикл перемагнічування.

Одним з прикладів нелінійного елемента є діод. Діод пропускає струм в одному з напрямків, а в іншому – не пропускає. Схема підключення діода до навантаження подана на рис. 9.42. Діоди використовуються для випрямлення, посилення, обмеження.

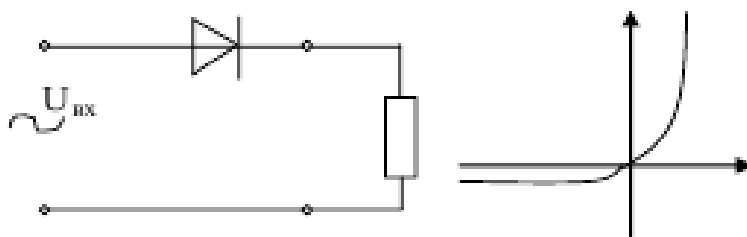


Рисунок 9.42

На рис. 9.43 проілюстрований процес обмеження від'ємних напівперіодів змінної напруги.

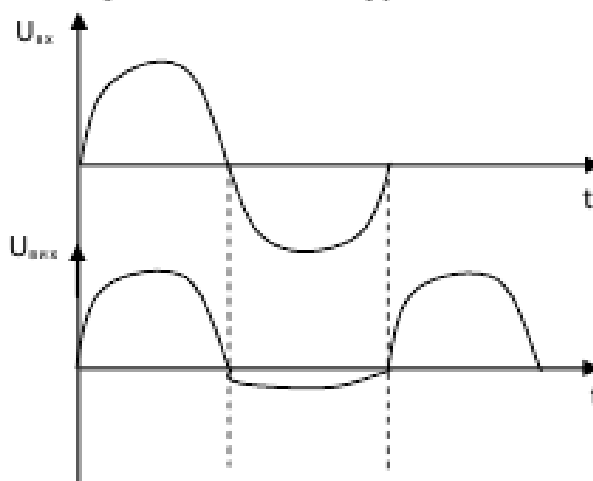


Рисунок 9.43

На рис. 9.44 подана схема включення діода обмеження напруги змінної (рис. 9.43).

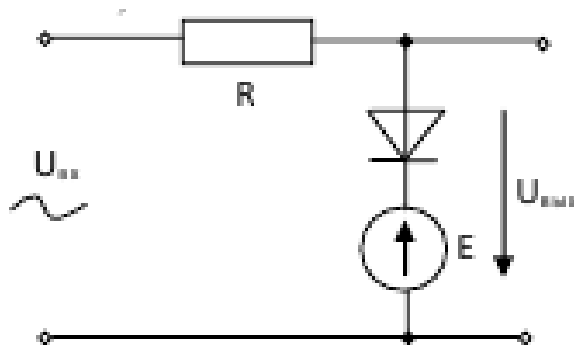


Рисунок 9.44

10 Електричні кола з розподіленими параметрами

10.1 Основні поняття

У принципі параметри будь-якого електричного кола (R , L , C , M , g) тією чи іншою

мірою розподілені вздовж ділянок кола. Відповідно струми та напруги у такому колі для того самого моменту часу змінюються при переході від однієї точки кола до сусідньої (у будь-який момент часу струм і напруга у різних точках мають різні значення).

У більшості практичних випадків розподіл параметрів уздовж електричного кола можна не враховувати та в аналізі кіл припускати, що параметри кола зосереджені на її ділянках. Критерієм застосовності такого підходу є співвідношення між швидкістю зміни у часі напруг і струмів у колі та швидкістю поширення електромагнітної енергії вздовж електричного кола. Якщо це співвідношення мале, то електричне коло розглядають як коло із зосередженими параметрами. Якщо ж ці швидкості порівнянні, то електричне коло необхідно розглядати як коло з розподіленими параметрами.

Прикладами кіл з розподіленими параметрами є електричні лінії з розподіленими параметрами (довгі лінії):

- лінії передачі електричної енергії на більші відстані;
- повітряні та кабельні лінії телефонного та телеграфного зв'язку;
- високочастотні коаксіальні лінії радіотехнічних і телевізійних пристроїв.

Очевидно, що струми та напруги в довгих лініях (лінії з розподіленими параметрами) є функціями двох незалежних змінних: часу t і координати x , відлічуваних як відстань від розглянутої точки лінії до її початку (кінця).

Відповідно процеси у довгих лініях описуються диференціальними рівняннями у частинних похідних. Якщо параметри лінії розподілені рівномірно, то ця лінія однорідна (наприклад, лінія передачі електричної енергії, у якій перетин проводів, їх взаємне розміщення та характеристика середовища не змінюються за довжиною лінії). Якщо параметри лінії не залежать від величини струмів, що проходять через лінію, то ця лінія лінійна.

10.2 Рівняння довгої лінії

10.2.1 Схеми заміщення довгих ліній

На рис. 10.1 зображено схему електричного кола, яке складається із джерела і приймача електричної енергії, зв'язаних двопровідною лінією. Це коло можна розглядати нерозгалуженим, з однаковим струмом у всіх його елементах, якщо не враховувати двох обставин: швидкість поширення електромагнітних збурень кінцева; є струми, зумовлені ємністю між проводами (ємнісний струм) і провідністю ізоляції (струм витікання крізь ізоляцію).

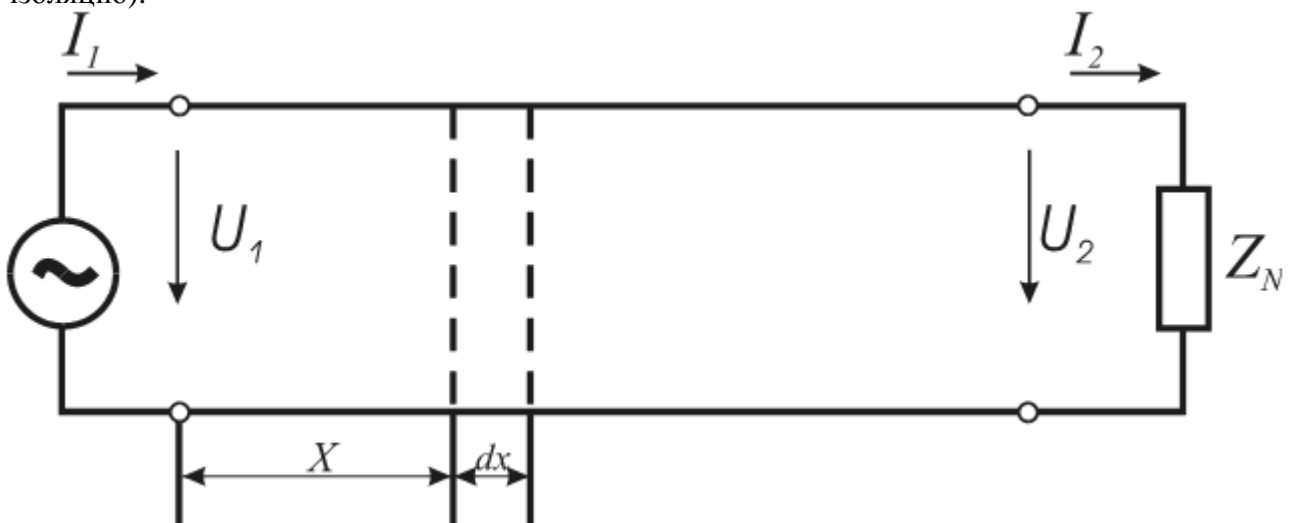


Рис. 10.1 -Схема довгої лінії

Першу обставину можна не враховувати, оскільки швидкість поширення електромагнітних збурень справді велика (у вакуумі дорівнює швидкості світла). Ємнісні струми і струми витікання пропорційні напрузі між проводами; крім того, ємнісний струм

збільшується із зростанням частоти, оскільки зменшується ємнісний опір. Тому при високій напрузі або великій частоті, а також при великій довжині лінії ємнісні струми і струми витікання стають значними і їх не можна виключити з розрахунку.

Струми між проводами існують на скільки завгодно малому відрізку лінії, тому струм у проводах зменшується з віддаленням від початку лінії.

Уздовж лінії напруга між проводами також неоднакова. Вона зменшується в напрямі від початку до кінця лінії, оскільки зростає спад напруги, зумовлений активним та індуктивним опором проводів.

Для розрахунку можна скласти схему заміщення лінії, яку зображено на рис. 10.2. На схемі заміщення нескінченно малу ділянку двопровідної лінії завдовжки dx подано коміркою з активним опором $R_0 dx$ прямого й зворотного, проводів, індуктивністю $L_0 dx$, провідністю $G_0 dx$ і ємністю $C_0 dx$ між проводами. Всю лінію можна зобразити електричною схемою послідовного з'єднання таких комірок. Активний опір, індуктивність, провідність та ємність вважають рівномірно розподіленими вздовж лінії, а R_0 , L_0 , G_0 , C_0 — значення цих параметрів на одиницю довжини.

Лінія з рівномірним розподілом параметрів називається *однорідною*. Реальні лінії можна вважати однорідними лише наближено, оскільки їхні параметри розподілені нерівномірно. При високій частоті (наприклад, у радіотехнічних пристроях) або при коротких імпульсах напруги в лініях, які виникають від грозових розрядів, ємнісні струми між проводами можуть бути порівняно великими і ними нехтувати не можна.

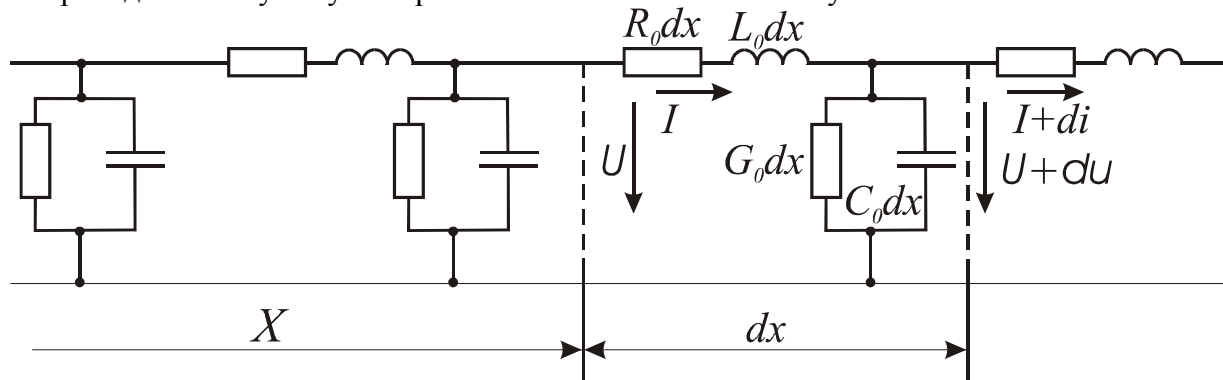


Рис. 10.2 - Схема заміщення однорідної лінії з втратами

Разом з тим при високій частоті й малій довжині лінії в окремих випадках можна знехтувати активним опором R_0 і провідністю G_0 .

При такому спрощенні матимемо лінію без втрат, схему заміщення якої показано на рис. 10.3.

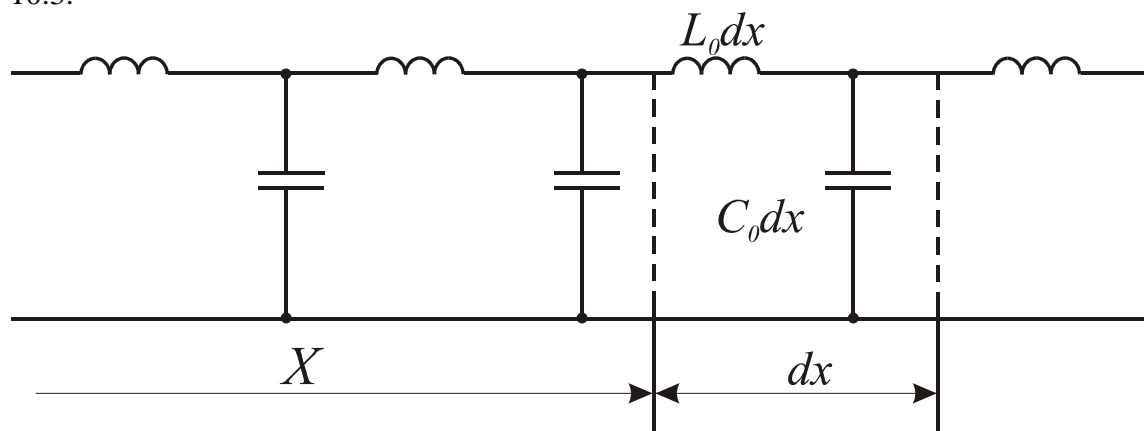


Рис. 10.3 - Схема заміщення однорідної лінії без втрат

Основні рівняння довгої лінії

При синусоїдній напрузі джерела живлення напруга і струм в лінії на будь-якій відстані x

від її початку змінюються з часом. Разом з тим напруга і струм змінюються вздовж лінії. Усталений режим в довгій лінії можна подати досить складною просторово-часовою картиною, для вивчення якої необхідно мати аналітичну залежність напруги і струму від двох незалежних змінних — часу і відстані.

Розв'язати таке завдання можна, використавши схему заміщення однорідної лінії (див, рис. 26.2). На схемі крім параметрів деякого елемента довжини лінії dx позначено напругу і струм на початку і в кінці цього елемента, розташованого на відстані x від початку лінії.

Спад напруги в елементі довжини dx лінії

$$U - (U + dU) = -dU = IR_0 dx + Ij\omega L_0 dx.$$

Різниця струмів на початку і в кінці того самого елемента дорівнює сумі струму витікання та ємнісного струму:

$$I - (I + dI) = -dI = UG_0 dx + Uj\omega C_0 dx.$$

Із цих виразів можна дістати диференціальні рівняння однорідної лінії, до яких входять комплекси струмів і напруг, що змінюються з часом за синусоїдним законом, а також їх похідні за змінною координатою x :

$$\begin{cases} -\frac{dU}{dx} = (R_0 + j\omega L_0)I = \underline{Z}_0 I \\ -\frac{dI}{dx} = (G_0 + j\omega C_0)U = \underline{Y}_0 U \end{cases} \quad (26.1)$$

де $\underline{Z}_0 = R_0 + j\omega L_0$ — повний опір одиниці довжини лінії (визначають за поздовжніми параметрами лінії); $\underline{Y}_0 = G_0 + j\omega C_0$ — повна провідність одиниці довжини лінії (визначають за поперечними параметрами лінії).

Поздовжні R_0, L_0 і поперечні G_0, C_0 параметри лінії характеризують цілком різні фізичні явища, тому між собою вони не зв'язані.

Далі можна скласти рівняння, в яких змінними будуть напруги або струми. Для цього продиференціюємо за x рівняння (26.1):

$$-\frac{d^2 U}{dx^2} = \underline{Z}_0 \frac{dI}{dx}; \quad -\frac{d^2 I}{dx^2} = \underline{Y}_0 \frac{dU}{dx}.$$

Врахувавши вирази (26.1), матимемо лінійні диференціальні рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами:

$$\frac{d^2 U}{dx^2} = \underline{Z}_0 \underline{Y}_0 U; \quad \frac{d^2 I}{dx^2} = \underline{Z}_0 \underline{Y}_0 I \quad (26.2)$$

Розв'язком першого рівняння з (26.2) є вираз

$$U = \underline{A}_1 e^{-\gamma x} + \underline{A}_2 e^{+\gamma x} \quad (26.3)$$

Рівняння струму дістанемо з (26.1) і (26.3):

$$I = -\frac{1}{\underline{Z}_0} \frac{dU}{dx} = \frac{\gamma}{\underline{Z}_0} (\underline{A}_1 e^{-\gamma x} - \underline{A}_2 e^{+\gamma x}) \quad (26.4)$$

Характеристики довгої лінії

У виразах (26.3) і (26.4) \underline{A}_1 і \underline{A}_2 — сталі коефіцієнти, які залежать від умов на початку або в кінці лінії; $\underline{\gamma}$ — коефіцієнт поширення електромагнітної хвилі в лінії (коефіцієнти виражено комплексними числами):

$$\underline{\gamma} = \sqrt{\underline{Z}_0 \underline{Y}_0} = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)}. \quad (26.5)$$

Врахувавши формулу (26.5), запишемо інше рівняння струму:

$$I = \frac{\sqrt{\underline{Z}_0 \underline{Y}_0}}{\underline{Z}_0} (\underline{A}_1 e^{-\gamma x} - \underline{A}_2 e^{+\gamma x}),$$

або

$$I = \frac{\underline{A}_1 e^{-\gamma x} - \underline{A}_2 e^{+\gamma x}}{\underline{Z}_c}, \quad (26.6)$$

де величина

$$\underline{Z}_c = \sqrt{\frac{\underline{Z}_0}{\underline{Y}_0}} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_0}{Y_0}} e^{j\theta} \quad (26.7)$$

має розмірність опору і називається хвильовим опором лінії.

Сталі коефіцієнти \underline{A}_1 і \underline{A}_2 неважко знайти, якщо відомо режим на початку лінії, тобто задано U_1 та I_1 .

З рівнянь (26.3) і (26.6) при $x = 0$ маємо:

$$U_1 = \underline{A}_1 + \underline{A}_2; \quad I_1 = \frac{\underline{A}_1 - \underline{A}_2}{\underline{Z}_c}.$$

Звідси

$$\underline{A}_1 = \frac{U_1 + I_1 \underline{Z}_c}{2}; \quad \underline{A}_2 = \frac{U_1 - I_1 \underline{Z}_c}{2}. \quad (26.8)$$

Відношення комплексу напруги до комплексу струму на початку лінії називається вхідним опором лінії.

Вхідний опір лінії при навантаженні \underline{Z}_2 можна визначити через вхідні опори при холостому ході \underline{Z}_x і короткому замиканні \underline{Z}_k :

$$\underline{Z}_{вх} = \frac{U_1}{I_1} = \underline{Z}_x \frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_k}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_x} \quad (26.9)$$

Коефіцієнт поширення електромагнітної хвилі $\underline{\gamma}$, як комплексну величину, можна подати в алгебраїчній формі: $\underline{\gamma} = \delta + j\beta$.

Цей коефіцієнт, маючи два доданки, характеризує електромагнітний процес в лінії в двох напрямках: згасання амплітуд і зміну фази напруги та струму залежно від відстані від початку лінії.

Відповідно до цього дійсна частина комплексу δ називається коефіцієнтом згасання, а уявна частина β — коефіцієнтом фази.

Коефіцієнт згасання δ показує ступінь згасання амплітуди коливань при поширенні хвилі на одиницю довжини.

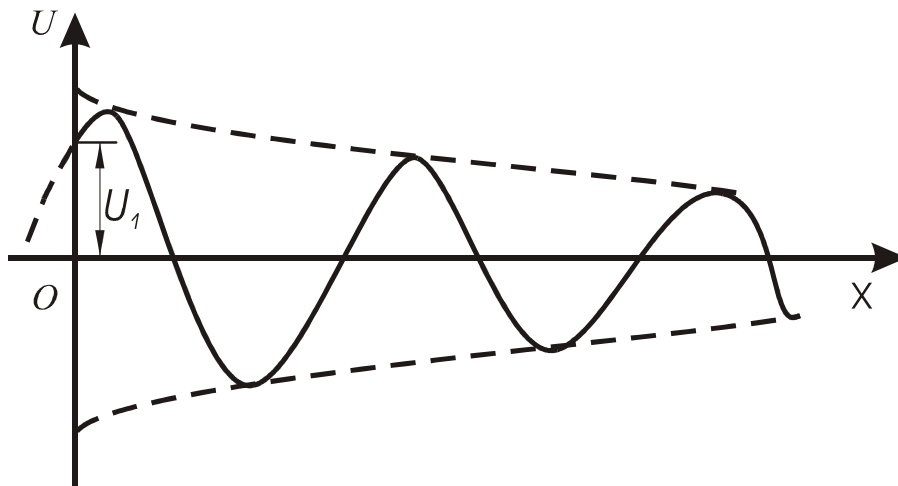


Рис. 26.4. Графік розподілу напруги вздовж лінії

На рис. 26.4 показано графік розподілу напруги вздовж лінії в деякий фіксований момент часу. З графіка видно, що напруга вздовж лінії розподілена за періодичним законом, а амплітуди напруги згасають за експоненціальним законом у напрямі від початку до кінця лінії.

ЗАДАЧІ

Задача 26.1. Трифазна лінія електропередачі завдовжки $l = 900$ км має первинні параметри: $R_0 = 0,08 \text{ Ом/км}$; $Z_0 = 1,336 \cdot 10^{-3} \text{ Гн/км}$; $C_0 = 8,6 \cdot 10^{-9} \text{ Ф/км}$; $G_0 = 3,75 \cdot 10^{-8} \text{ См/км}$. Навантаження в кінці лінії $P_2 = 300 \text{ МВт}$; $U_2 = 380 \text{ кВ}$; $\cos \varphi_2 = 1$; частота $f = 50 \text{ Гц}$.

Визначити вторинні параметри лінії (\underline{Z}_c , γ), напругу і струм на її вході.

План розв'язання:

1. Комплекси «повдовжнього» опору і «поперечної» провідності [див. формули (26.1)].
2. Хвильовий опір лінії — за формулою (26.7).
3. Коефіцієнт поширення — за формулою (26.5).
4. Коефіцієнт згасання і коефіцієнт фази — за формулою $\underline{\gamma} = \delta + j\beta$.
5. Струм у кінці лінії — за формулою (20.9).
6. Напруга і струм на початку лінії — за формулами (26.3) і (26.6), які слід записати при умові, що відстані вздовж лінії відлічують від кінця лінії:

$$\begin{aligned} U_1 &= \underline{A}_3 e^{-\gamma l} + \underline{A}_4 e^{\gamma l}; \\ I_1 &= \frac{\underline{A}_3 e^{-\gamma l} - \underline{A}_4 e^{\gamma l}}{\underline{Z}_c}. \end{aligned}$$

При цьому

$$e^{\gamma l} = e^{(\delta + j\beta)l} = e^{\delta l} e^{j\beta l}.$$

Коефіцієнти \underline{A}_3 і \underline{A}_4 визначають за формулами (26.8) при заміні значень напруги і струму на початку лінії цими значеннями в кінці лінії:

$$\underline{A}_3 = \frac{U_2 + I_2 \underline{Z}_c}{2}; \quad \underline{A}_4 = \frac{U_2 - I_2 \underline{Z}_c}{2}.$$

Обчислення за поданим планом виконайте самостійно.

Задача 26.2. Для довгої лінії електропередачі визначено повний опір одиниці довжини \underline{Z}_0 і повну провідність одиниці довжини \underline{Y}_0 . Чи ці величини взаємно-обернені? Що виражають їх добуток і відношення першої до другої?

§ 26.2. УСТАЛЕНИЙ РЕЖИМ У ДОВГІЙ ЛІНІЇ БЕЗ ВТРАТ

Лінія без втрат, як уже зазначалося, не має активних опорів R_0 і провідності \underline{G}_0 .

У радіотехніці довгі лінії з малими втратами зустрічаються часто, тому розгляд лінії при $R_0 = 0$ і $\underline{G}_0 = 0$ має практичне значення.

Рівняння довгої лінії без втрат

Згідно з формулами (26.5) і (26.9), для лінії без втрат коефіцієнт згасання $\delta = 0$, а коефіцієнт поширення хвилі дорівнює коефіцієнту фази:

$$\beta = \omega \sqrt{L_0 C_0}; \quad \underline{\gamma} = j\beta = j\omega \sqrt{L_0 C_0}.$$

Тому графік розподілу напруги вздовж лінії в деякий фіксований момент часу є синусоїдою. Амплітуда напруги вздовж лінії залишається сталою (рис. 26.5).

Хвильовий опір [див. формулу (26.7)]

$$\underline{Z}_0 = \sqrt{L_0 / C_0} Z_0 \text{ при } \theta = 0 \quad (26.10)$$

Рівняння напруги і струму в лінії без втрат, згідно з рівняннями (26.3) і (26.6),

$$\left. \begin{aligned} \dot{U} &= \underline{A}_1 e^{-j\beta x} + \underline{A}_2 e^{j\beta x}; \\ \dot{I} &= \frac{\underline{A}_1}{\underline{Z}_c} e^{-j\beta x} - \frac{\underline{A}_2}{\underline{Z}_c} e^{j\beta x}. \end{aligned} \right\} \quad (26.11)$$

Замість коефіцієнтів \underline{A}_1 і \underline{A}_2 підставимо їх значення з (26.8) визначені за відомими значеннями напруги U_1 і струму I_1 на початку лінії ($x = 0$). Крім того, зробимо заміну:

$$\begin{aligned} e^{-j\beta x} &= \cos \beta x - j \sin \beta x; \\ e^{j\beta x} &= \cos \beta x + j \sin \beta x. \end{aligned}$$

Після перетворення з рівнянь (26.11) дістанемо

$$\left. \begin{aligned} \dot{U} &= \dot{U}_1 \cos \beta x + j \dot{I}_1 \underline{Z}_c \sin \beta x; \\ \dot{I} &= \dot{I}_1 \cos \beta x - j \frac{\dot{U}_1}{\underline{Z}_c} \sin \beta x. \end{aligned} \right\} \quad (26.12)$$

З цих рівнянь можна також дістати вирази напруги і струму в будь-якій точці лінії, якщо відомо напругу U_2 і струм I_2 в кінці лінії при умові відліку відстані від кінця лінії:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U} &= \dot{U}_2 \cos \beta x + j \dot{I}_2 \underline{Z}_c \sin \beta x; \\ \dot{I} &= \dot{I}_2 \cos \beta x - j \frac{\dot{U}_2}{\underline{Z}_c} \sin \beta x. \end{aligned} \right\} \quad (26.13)$$

За допомогою рівнянь (26.12) і (26.13) можна досліджувати різні режими довгої лінії без втрат.

Холостий хід

При холостому ході лінії ($I_2 = 0$)

$$\left. \begin{aligned} \dot{U} &= \dot{U}_2 \cos \beta x; \\ \dot{I} &= j \frac{\dot{U}_2}{\underline{Z}_c} \sin \beta x = \frac{\dot{U}_2}{\underline{Z}_c} e^{j90^\circ} \sin \beta x. \end{aligned} \right\} \quad (26.14)$$

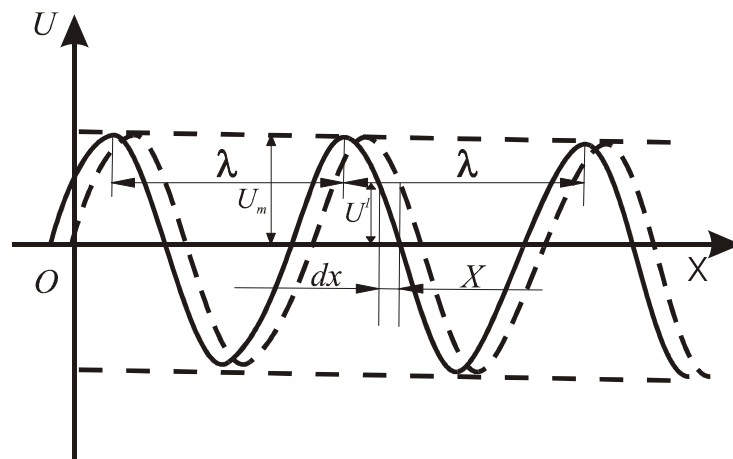


Рис. 26.5. Розподіл хвилі напруги вздовж лінії без втрат

Напруга і струм уздовж лінії в будь-який момент часу розподілені за синусоїдним законом, причому в точках, де напруга дорівнює нулю, струм має найбільше значення, а в точках з найбільшою напругою струм дорівнює нулю (рис. 26.6).

Точки лінії, в яких напруга або струм дорівнюють нулю, називаються вузлами, а точки з найбільшим значенням напруги або струму — видугами.

Отже, вузли напруги за місцем розташування на лінії збігаються з видугами струму, а

видуги напруги — з вузлами струму.

Положення вузлів напруги і видуг струму знайдемо, прирівнявши нулю напругу в першому рівнянні (26.14): $U = 0$ при $\beta x = k + \pi/2$, де k — будь-яке ціле число або нуль, тобто при $\beta x = \pi/2, 3\pi/2, 5\pi/2$ і т. д.

Положення на лінії вузлів струму й видуг напруги визначаємо з другого рівняння (26.14) при $I = 0$.

Напруга і струм, розподіляючись вздовж лінії за синусоїдним законом без затухання, за таким самим законом змінюються з часом.

Коротке замикання

Аналогічна картина спостерігається й при короткому замиканні кінця лінії без втрат. Відмінність електромагнітних процесів у лінії без втрат у режимах холостого ходу й короткого замикання полягає лише в тому, що змінюється розташування видуг і вузлів напруги і струму за довжиною лінії: в тих точках, де при холостому ході утворюються видуги напруги і вузли струму, при короткому замиканні будуть видуги струму й вузли напруги. Зокрема, в кінці розімкненої лінії є видуга напруги й вузол струму ($I_2 = 0$), а в кінці короткозамкненої лінії — видуга струму й вузол напруги ($U_2 = 0$).

Стояча хвиля

Нехай вектор напруги в кінці розімкненої лінії напрямлений за дійсною віссю комплексної площини, тобто початкова часова фаза напруги дорівнює нулю:

$$u_2 = U_{2m} \sin \omega t \text{ або } \dot{U}_2 = U_2.$$

В цьому випадку миттєві значення напруги і струму в лінії можна подати рівняннями

$$\left. \begin{aligned} u &= U_{2m} \cos \beta x \sin \omega t; \\ i &= \frac{U_{2m}}{Z_c} \sin \beta x \cos \omega t. \end{aligned} \right\} \quad (26.15)$$

При $\omega t = 0$ у всіх точках лінії напруги немає ($u = 0$). Потім напруга зростає в усіх точках лінії, крім вузлів, і при $\omega t = \pi/2$ досягає амплітуди.

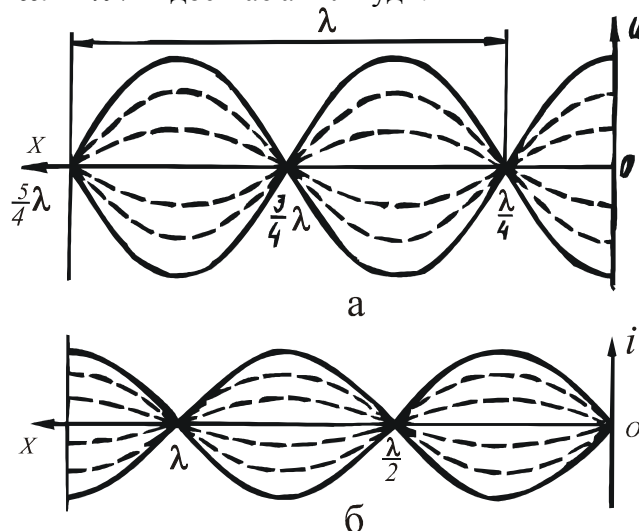


Рис. 26.6. Графіки напруги (а) та струму (б) стоячої електромагнітної хвилі в довгій лінії без втрат

Проте ця амплітуда в усіх точках лінії різна. В місці видуги напруга досягає найбільшого значення U_{2m} , а у вузлі вона завжди дорівнює нулю.

Електромагнітний процес, що підпорядковується рівнянням (26.15), називається стоячою хвилею, характерною особливістю якої є нерухомість вузлів і видуг на лінії.

Біжуча хвиля

З тригонометрії відомо, що

$$\cos \beta x \sin \omega t = \frac{\sin(\omega t + \beta x) + \sin(\omega t - \beta x)}{2}.$$

Отже, напругу і струм у лінії можна подати сумою двох складових, кожна з яких є рівнянням біжучої хвилі:

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{U_{2m}}{2} \sin(\omega t + \beta x) + \frac{U_{2m}}{2} \sin(\omega t - \beta x); \\ i &= \frac{U_{2m}}{2Z_c} \sin(\omega t + \beta x) + \frac{U_{2m}}{2Z_c} \sin(\omega t - \beta x). \end{aligned} \right\} \quad (26.16)$$

Перший доданок у цих рівняннях — пряма хвиля, яка поширюється від початку до кінця лінії; другий — зворотна хвиля з такою самою амплітудою.

В цьому можна переконатися, розглянувши докладно одну із складових, наприклад першу в рівнянні напруги.

Припустімо, що деяке значення напруги u' в момент часу t має місце в точці, просторове положення якої визначається відстанню x від кінця (або початку) лінії (див. рис. 26.5):

$$u' = u(t, x) = \frac{U_{2m}}{2} \sin(\omega t + \beta x).$$

Поширення хвилі напруги означає, що, через нескінченно малий проміжок часу dt така сама напруга u' виникає в іншій точці лінії, яка віддалена від першої на нескінченно малу відстань dx :

$$u' = u(t + dt; x + dx) = \frac{U_{2m}}{2} \sin[\omega(t + dt) + \beta(x + dx)].$$

Рівність напруг у моменти часу, які віддалені на dt , можлива при рівності аргументів синусів в обох рівняннях, тобто при

$$\omega t + \beta x = \omega t + \omega dt + \beta x + \beta dx.$$

Звідси

$$\omega dt + \beta dx = 0,$$

або

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\omega}{\beta} = v. \quad (26.17)$$

Відношення dx/dt характеризує швидкість поширення хвилі напруги уздовж лінії і називається фазовою швидкістю хвилі.

Знак мінус свідчить про те, що хвиля рухається від початку до кінця лінії (відстань x зменшується).

Аналогічно можна показати, що друга складова напруги в рівнянні (26.16) є хвилею, що поширюється у зворотному напрямі (x збільшується).

Хвиля, що поширюється від початку до кінця лінії, називається прямою, або падаючою, а хвиля, яка поширюється в зворотному напрямі (від кінця лінії до початку), — зворотною, або відбитою.

Ті самі міркування можна віднести до складових струму в другому рівнянні (26.16).

Отже, *стояча хвиля напруги являє собою суму, а хвиля струму — різницю прямої (падаючої) і зворотної (відбитої) хвиль однакової амплітуди.*

Хвильовий опір. Довжина хвилі

Рівняння (26.16) запишемо в такому вигляді:

$$u = u_{nad} + u_{відб};$$

$$i = u_{nad} / Z_c - u_{відб} / Z_c = i_{nad} - i_{відб}.$$

Звідси

$$Z_0 = u_{nad} / i_{nad} = u_{відб} / i_{відб}.$$

Хвильовий опір лінії виражається відношенням напруги до струму падаючих хвиль або аналогічним відношенням для відбитих хвиль.

Хвильовий опір лінії можна визначити через вхідні опори при холостому ході й короткому замиканні:

$$Z_0 = \sqrt{Z_x Z_k}. \quad (26.18)$$

Великий інтерес становить така відстань, на яку біжуча хвиля поширюється за час одного періоду, протягом якого відбувається синусоїдна зміна напруги або струму.

З формули (26.17) видно, що фазова швидкість стала; тому

$$x = \omega t / \beta.$$

Шлях, пройдений хвилею за час періоду $T = 2\pi / \omega$, називається довжиною хвилі:

$$\lambda = vT = \omega T / \beta = 2\pi / \beta.$$

В лінії без втрат фазова швидкість

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}, \quad (26.18)$$

а довжина хвилі

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\omega \sqrt{L_0 C_0}} = \frac{1}{f \sqrt{L_0 C_0}}. \quad (26.19)$$

Знайдемо значення фазової швидкості для повітряної лінії без втрат, підставивши у формулу (26.19) L_0 і C_0 двопровідної лінії, визначені раніш [див. формули (7.31), (8.29)]:

$$v = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = c_0.$$

Фазова швидкість електромагнітної хвилі в повітряній лінії без втрат дорівнює швидкості світла.

Якщо середовище, в якому поширюється електромагнітна хвиля, характеризується значенням діелектричної ϵ_F , і магнітної μ_F , проникностей, то

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0 \epsilon_F \mu_F}} = c_0 \frac{1}{\sqrt{\epsilon_F \mu_F}}.$$

Прийнявши $v = c_0$, при частоті $f = 50$ Гц матимемо довжину хвилі

$$\lambda = c_0 / f = (3 \cdot 10^8) / 50 = 6000 \text{ км.}$$

Неважко помітити, що при частоті $f = 50$ Гц у реальних лініях електропередачі 6...220 кВ, довжина яких значно менша від 6000 км, вміщується тільки невелика частина довжини хвилі. Тому хвилеподібна зміна напруги і струму вздовж цих ліній при такій частоті практично не спостерігається.

В лініях далеких передач з номінальною напругою 500 кВ і більше зміни напруги вздовж лінії стають помітними й доводиться вживати заходів щодо її вирівнювання. Із збільшенням частоти довжина хвилі зменшується. В техніці зв'язку, де застосовуються високі частоти, довжина хвилі може бути в багато разів меншою від довжини лінії.

ЗАДАЧІ

Задача 26.3. В кінці двопровідної лінії без втрат напруга $U_2 = 600$ В при холостому ході. Визначити напругу і струм на початку лінії, якщо відомо: хвильовий опір $Z_c = 600$ Ом, довжина лінії 24 км, коефіцієнт поширення $\gamma = j0,01$ км⁻¹.

План розв'язання.

1. Напруга на початку лінії — за першою формулою (26.13) при $I_2 = 0$.
2. Струм на початку лінії — за другою формулою (26.13).

Обчислення за цим планом виконайте самостійно.

Додаткове завдання до задачі

Визначити напругу і струм на початку лінії при короткому замиканні на кінці, де струм $I = 4$ А.

Задача 26.4. Визначити, як відрізняються фазові швидкості поширення електромагнітної хвилі в повітряній та кабельній лініях.

§ 26.3. НАВАНТАЖУВАЛЬНІ РЕЖИМИ ДОВГОЇ ЛІНІЇ БЕЗ ВТРАТ

Крім крайніх режимів холостого ходу й короткого замикання для практики ще більш цікавими є навантажувальні режими, коли в кінці лінії вмикається приймач електромагнітної енергії. З різних навантажувальних режимів розглянемо режими з узгодженим і неузгодженим активними навантаженнями.

Режим з узгодженим навантаженням

Режим у лінії називається узгодженим, якщо опір навантаження в кінці лінії дорівнює її хвильовому опору: $Z_2 = Z_c$. В цьому випадку $U_2 = I_2 Z_c$, а рівняння (26.13) записують так:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U} &= \dot{U}_2 \cos \beta x + j \dot{U}_2 \sin \beta x = \dot{U}_2 (\cos \beta x + j \sin \beta x); \\ \dot{I} &= \dot{I}_2 \cos \beta x + j \dot{I}_2 \sin \beta x = \dot{I}_2 (\cos \beta x + j \sin \beta x). \end{aligned} \right\} \quad (26.21)$$

Враховавши, що

$$\cos \beta x + j \sin \beta x = e^{j\beta x},$$

рівняння (26.21) можна записати у вигляді

$$\dot{U} = \dot{U}_2 e^{j\beta x}; \dot{I} = \dot{I}_2 e^{j\beta x}. \quad (26.22)$$

Припустімо, що синусоїдна напруга в кінці лінії має початкову фазу $\varphi = 0$; тоді $\dot{U}_2 = U_{2m} e^{j\alpha t}$.

Якщо навантаження лінії активне ($R_2 = Z_c$), струм і напруга збігаються за фазою: $\dot{I}_2 = I_{2m} e^{j\alpha t}$.

Рівняння напруги і струму в лінії:

$$\dot{U} = U_{2m} e^{j(\alpha t + \beta x)}; \dot{I} = I_{2m} e^{j(\alpha t + \beta x)}. \quad (26.23)$$

В цьому випадку миттєві значення напруги і струму в будь-якій точці лінії на відстані x від її кінців визначають за рівняннями

$$u = U_{2m} \sin(\omega t + \beta x); i = I_{2m} \sin(\omega t + \beta x) \quad (26.24)$$

Це рівняння біжучих хвиль напруги і струму, які поширюються від початку до кінця лінії (прямі хвилі) з фазовою швидкістю $v = \omega / \beta$.

При узгодженому навантаженні відбитих хвиль в лінії немає; отже, енергія, яку несе падаюча електромагнітна хвиля, повністю поглинається в навантаженні.

Режим з неузгодженим навантаженням

Навантаження лінії називається неузгодженим, якщо навантажувальний опір у кінці лінії Z_2 відрізняється від хвильового опору Z_c , тобто $Z_2 \neq Z_c$.

Розглянемо випадок, коли лінію замкнено на активний опір $R_2 > Z_c$. Напругу в кінці лінії

визначаємо добутком: $U_2 = I_2 R_2$ - Рівняння (26.13) для цього випадку

$$\left. \begin{aligned} U &= U_2 \cos \beta x + j \frac{U_2}{R_2} Z_c \sin \beta x; \\ I &= \frac{U_2}{R_2} \cos \beta x + j \frac{U_2}{Z_c} \sin \beta x. \end{aligned} \right\} \quad (26.25)$$

Відношення $Z_c/R_2 = k$ називається коефіцієнтом біжучої хвилі.

Із введенням цього коефіцієнта рівняння (26.25) набувають такого вигляду:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U} &= \dot{U}_2 \cos \beta x + j k \dot{U}_2 \sin \beta x; \\ \dot{I} &= k \frac{\dot{U}_2}{Z_c} \cos \beta x + j \frac{\dot{U}_2}{Z_c} \sin \beta x. \end{aligned} \right\}$$

Замість $\cos \beta x$ у рівняння напруги і $\sin \beta x$ у рівняння струму підставимо тотожні їм вирази:

$$\begin{aligned} \cos \beta x &= k \cos \beta x + (1 - k) \cos \beta x; \\ \sin \beta x &= k \sin \beta x + (1 - k) \sin \beta x. \end{aligned}$$

Після підстановки матимемо

$$\left. \begin{aligned} \dot{U} &= k \dot{U}_2 (\cos \beta x + j \sin \beta x) + (1 - k) \dot{U}_2 \cos \beta x; \\ \dot{I} &= k \frac{\dot{U}_2}{Z_c} (\cos \beta x + j \sin \beta x) + (1 - k) \frac{\dot{U}_2}{Z_c} \sin \beta x. \end{aligned} \right\} \quad (26.26)$$

Перші доданки в цих рівняннях аналогічні рівнянням (26.21). Аналіз їх показав, що вони виражають біжучі хвилі напруги і струму. Другі доданки аналогічні рівнянням (26.14), які є рівняннями стоячих хвиль.

Опустивши проміжні висновки, виконані раніше для біжучих і стоячих хвиль, напишемо рівняння для миттєвих значень напруги і струму при неузгодженому навантаженні:

$$\left. \begin{aligned} u &= k U_{2m} \sin(\omega t + \beta x) + (1 - k) U_{2m} \cos \beta x \sin \omega t; \\ i &= k \frac{U_{2m}}{Z_c} \sin(\omega t + \beta x) + (1 - k) \frac{U_{2m}}{Z_c} \sin \beta x \cos \omega t. \end{aligned} \right\} \quad (26.27)$$

Отже, режим у лінії без втрат при неузгодженому навантаженні можна розглядати як накладання біжучих і стоячих хвиль напруги і струму.

Наявність біжучих хвиль у напрямі від початку до кінця лінії свідчить про споживання енергії в навантаженні. Проте споживається лише частина енергії електромагнітної хвилі, інша частина відбивається від кінця лінії.

Режими холостого ходу і з узгодженим навантаженням лінії без втрат є окремими випадками, які відповідають значенням коефіцієнта біжучої хвилі $k = 0$ (холостий хід) і $k = 1$ (узгоджене навантаження).

Коефіцієнти відбиття й заломлення

Подання електромагнітного процесу в лінії як накладання прямих (падаючих) і зворотних (відбитих) хвиль напруги і струму можливе не тільки в розглянутих окремих випадках. Воно відповідає загальним рівнянням напруги і струму в лінії (26.12), у правій частині яких записано суму (різницю) двох складових.

При аналізі електромагнітних процесів у довгих лініях вводиться поняття про коефіцієнт відбиття ρ , який дорівнює відношенню комплексу напруги відбитої хвилі до комплексу напруги падаючої хвилі або аналогічному відношенню комплексів струмів:

$$\rho = \dot{U}_{\text{відб}} / \dot{U}_{\text{над}} = \dot{I}_{\text{відб}} / \dot{I}_{\text{над}}.$$

Виразимо напругу і струм уцінці лінії їх падаючими і відбитими складовими згідно з рівняннями (26.11):

$$\dot{U}_2 = \dot{U}_{2nad} + \dot{U}_{2відб} = \dot{I}_2 R_2; \quad \dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_{2nad}}{Z_c} - \frac{\dot{U}_{2відб}}{Z_c}.$$

Розв'язавши ці рівняння, знайдемо коефіцієнт відбиття:

$$\rho = \frac{\dot{I}_{2відб}}{\dot{I}_{2nad}} = \frac{\dot{U}_{2відб}}{\dot{U}_{2nad}} = \frac{R_2 - Z_c}{R_2 + Z_c}. \quad (26.28)$$

Підставимо знайдений вираз ρ у рівняння напруги U_2 і струму I_2 :

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_2 &= \dot{U}_{2nad} + \frac{R_2 - Z_c}{R_2 + Z_c} \dot{U}_{2nad} = \frac{2\dot{U}_{2nad}}{1 + \frac{Z_c}{R_2}}; \\ \dot{I}_2 &= \frac{\dot{U}_{2nad}}{Z_c} - \rho \frac{\dot{U}_{2nad}}{Z_c} = \frac{\dot{U}_{2nad}}{Z_c} \left(1 - \frac{R_2 - Z_c}{R_2 + Z_c} \right) = \frac{2\dot{I}_{2nad}}{1 + \frac{R_2}{Z_c}}. \end{aligned} \right\} \quad (26.29)$$

Множники

$$m_u = \frac{2}{1 + \frac{Z_c}{R_2}} = \frac{2R_2}{R_2 + Z_c}; \quad m_i = \frac{2}{1 + \frac{R_2}{Z_c}} = \frac{2Z_c}{Z_c + R_2}. \quad (26.30)$$

називаються коефіцієнтами заломлення хвиль напруги (струму).

Згідно з виразами (26.29), коефіцієнт заломлення дорівнює відношенню комплексів напруги (струму) в розглядуваній точці лінії до комплексу напруги (струму) падаючої хвилі:

$$m = \dot{U}_2 / \dot{U}_{2nad} = \dot{I}_2 / \dot{I}_{2nad}.$$

Аналіз цих формул показує:

1) при холостому ході лінії ($R_2 = \infty$) коефіцієнт відбиття $\rho = 1$, а коефіцієнти заломлення в кінці лінії $m_u = 2$, $m_i = 0$; напруга в кінці лінії дорівнює подвоєному значенню напруги падаючої хвилі, а струм — нулю: $\dot{U}_2 = m_u \dot{U}_{2nad} = 2\dot{U}_{nad}$; $\dot{I}_2 = m_i \dot{I}_{2nad} = 0$;

2) при короткому замиканні лінії ($R_2 = 0$) коефіцієнт відбиття $\rho = -1$, а коефіцієнти заломлення $m_u = 0$, $m_i = 2$; напруга в кінці лінії дорівнює нулю, а струм — подвоєному значенню струму падаючої хвилі: $\dot{U}_2 = 0$; $\dot{I}_2 = 2\dot{I}_{nad}$;

3) при узгодженому навантаженні ($R_2 = Z_c$) коефіцієнт відбиття $\rho = 0$, а коефіцієнти заломлення $m_u = 0$, $m_i = 1$; напруга і струм у кінці лінії дорівнюють своїм падаючим складовим: $\dot{U}_2 = \dot{U}_{2nad}$; $\dot{I}_2 = \dot{I}_{2nad}$; при узгодженому активному навантаженні ($R_2 > Z_c$) коефіцієнт відбиття

$$\rho = \frac{1-k}{1+k}; \quad 0 < \rho < 1.$$

де k — коефіцієнт біжучої хвилі:

$$\dot{U}_2 = \frac{2\dot{U}_{2nad}}{1+k} \quad \text{або} \quad \dot{U}_{nad} < \dot{U}_2 < 2\dot{U}_{nad};$$

$$\dot{I}_2 = \frac{2\dot{I}_{2nad}}{1+k} \text{ або } \dot{I}_{nad} > \dot{I}_2 > 0.$$

ЗАДАЧІ

Задача 26.5. Знайти всі величини за умовою задачі 26.1, якщо вважати лінію без втрат ($R_0 = 0, G_2 = 0$).

Задача 26.6. Двопровідна лінія без втрат має такі параметри: $L_0 = 1,96$ мГн/км; $C_0 = 5,7 \cdot 10^{-3}$ мкФ/км. Лінію навантажено на кінці активним опором, який дорівнює хвильовому ($R_2 = Z_c$). Струм у навантаженні $I_2 = 17,6$ А.

Визначити напругу і струм на початку лінії.

§ 26.4. ПОШИРЕННЯ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОЇ ХВИЛІ З ПРЯМОКУТНИМ ФРОНТОМ УЗДОВЖ ЛІНІЇ БЕЗ ВТРАТ

Як було показано в попередніх параграфах, усталений режим у довгій лінії при синусоїдній зміні напруги і струму зручно подати накладанням прямих і зворотних електромагнітних хвиль.

Перехідні процеси в колах з розподіленими параметрами теж розглядають як рух прямих і відбитих хвиль, які виникають після вмикання або вимикання якої-небудь ділянки, при передаванні телемеханічних або телефонно-телеграфних сигналів через лінії зв'язку тощо. Перехідні процеси можуть бути також наслідком зміни зовнішніх магнітних і електричних полів, пов'язаної з грозовими явищами.

Електромагнітна хвиля з прямокутним фронтом

У колі із зосередженими параметрами перехідний процес починається й спостерігається одночасно в усіх його елементах. Особливістю перехідного процесу в довгій лінії є те, що збурення, яке виникає в деякій її точці, поширюється по лінії з певною швидкістю; тому перехідний процес у цій точці лінії починається тим пізніше, чим вона далі від місця збурення.

При перехідних процесах у колах з розподіленими параметрами (лінії, обмотки електричних машин і трансформаторів) можуть виникати електромагнітні хвилі різної форми.

Якісно явище поширення електромагнітної хвилі розглянемо на прикладі хвилі з прямокутним фронтом (рис. 26.7) у лінії без втрат.

Для такої хвилі характерне те, що в усіх точках лінії, розташованих до фронту хвилі, напруга і струм дорівнюють нулю, а в точках лінії, розташованих за фронтом хвилі, напруга і струм сталі.

Поширення електромагнітної хвилі з прямокутним фронтом означає, що напруга і струм послідовно в кожній точці лінії змінюються стрибкоподібно. Як було показано раніш, така зміна напруги і струму в колах, які мають ємність та індуктивність, неможлива, оскільки потребує джерела нескінченно великої потужності. Таких джерел не існує, тому хвилю з прямокутним фронтом треба розглядати як деяку ідеалізацію реального процесу.

Електричні й магнітні явища в лінії – це дві сторони єдиного електромагнітного процесу. Проте ці явища зручно розглядати окремо, тобто виділяти з електромагнітної хвилі хвилю напруги і хвилю струму.

В § 26.1 було записано в комплексній формі рівняння (26.1) для синусоїдної зміни напруги і струму. Ті самі рівняння для миттєвих значень напруги і струму в однорідній лінії без втрат мають вигляд

$$-\frac{du}{dx} = L_0 \frac{di}{dt}; \quad -\frac{di}{dx} = C_0 \frac{du}{dt}. \quad (26.31)$$

Розв'язком цих рівнянь в загальному вигляді є функції

$$\left. \begin{aligned} u &= f_1(x - vt) + f_2(x + vt) = u_{\text{над}} + u_{\text{відб}}; \\ i &= \frac{1}{Z_c} f_1(x - vt) + \frac{1}{Z_c} f_2(x + vt) = i_{\text{над}} + i_{\text{відб}}. \end{aligned} \right\} \quad (26.32)$$

де $v = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}$, — швидкість поширення електромагнітної хвилі вздовж лінії; ця

величина, яка називається хвильовою швидкістю, чисельно дорівнює фазовій швидкості [див. формулу (26.19)]; Z_c — хвильовий опір лінії.

Рівняння (26.32) за своєю структурою подібні до рівнянь (26.16), тому будь-який електромагнітний перехідний процес у лінії можна розглядати, як накладання прямих і зворотних хвиль напруги і струму. Фізичний зміст перехідних процесів у лінії зручно з'ясувати на найпростіших прикладах.

Підмикання джерела сталої напруги U_0 до нескінченно довгої лінії

Після вмикання джерела вздовж лінії поширюватиметься хвиля з прямокутним фронтом, яка заряджатиме її послідовно (від однієї точки до іншої) до напруги U_0 . На поверхні проводів з'явиться заряд, значення якого на одиниці довжини $Q_0 = C_0 U_0$.

Якщо за час dt хвиля перемістилася на відстань dx , лінія дістає додатковий заряд $dQ_0 = C_0 U_0 dx$.

Цей заряд ніби поширюється по проводах від джерела вздовж лінії до точки x_1 , в якій в цей момент перебуває фронт хвилі; при цьому утворюється струм

$$i = \frac{dQ}{dt} = C_0 U_0 \frac{dx}{dt} = C_0 U_0 v = I_0.$$

Один провід заряджається позитивно, а другий (зворотний) — негативно, що відповідає протилежному напрямку струмів у них (рис. 26.7).

На відрізок лінії завдовжки dx , біля фронту хвилі, виникнення електричного поля супроводиться струмом зміщення між проводами. Отже, коло замкнене. При русі хвилі цез продовжується, але струм залишається постійним і дорівнює I_0 .

Контур, уздовж якого замикається струм, пронизує магнітний потік, напрямлений, згідно з правилом свердлика, в площинах, перпендикулярних до осей проводів.

Переміщення хвилі на dx супроводиться збільшенням магнітного потоку на величину

$$d\Phi = L_0 I_0 dx = L_0 I_0 v dt$$

і наведенням у контурі е. р. с. самоіндукції

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -L_0 I_0 \frac{dx}{dt} = -L_0 I_0 v.$$

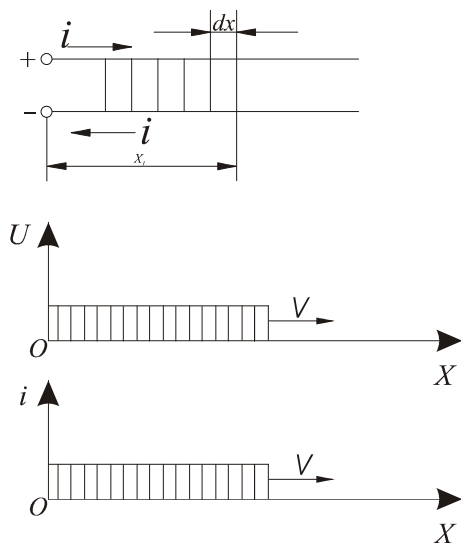


Рис. 26.7. Поширення електромагнітної хвилі з прямокутним фронтом уздовж лінії без втрат

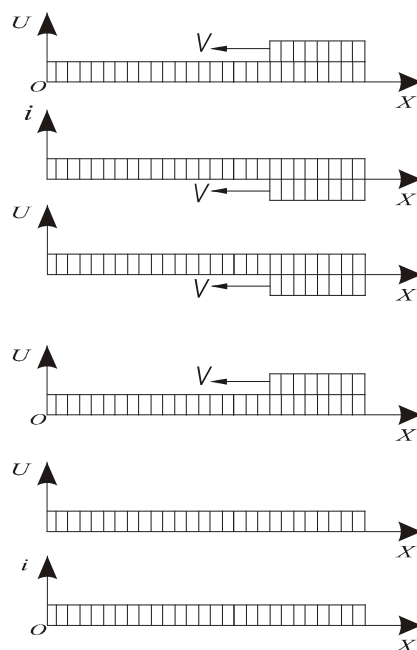


Рис. 26.8. Різні випадки відбиття електромагнітної хвилі прямокутним фронтом від кінця лінії

Е. р. с. самоіндукції напрямлена проти струму, тобто біля фронту хвилі назустріч напрузі U_0 і дорівнює їй за значенням: $U_0 = L_0 I_0$.

Відношення напруги до струму дає значення хвильового опору лінії:

$$\frac{U_0}{I_0} = L_0 v = L_0 \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = Z_0.$$

Енергія, яку віддає джерело в лінію за одиницю часу, $P = U_0 I_0$.

На відрізок лінії довжиною, що дорівнює одиниці, створюється запас енергії $C_0 U_0^2 / 2$ в електричному, $L_0 I_0^2 / 2$ — в магнітному полях.

Згідно із законом збереження енергії, потужність джерела має дорівнювати енергії, яка накопичується в електромагнітному полі за 1 с:

$$U_0 I_0 = \left(\frac{C_0 U_0^2}{2} + \frac{L_0 I_0^2}{2} \right) v,$$

де v — швидкість електромагнітної хвилі, що дорівнює відстані, яку пробігає хвиля за 1 с; створюючи на своєму шляху електричне й магнітне поля.

Вмикання джерела сталої напруги на лінію кінцевої довжини

Використавши висновки, добуті раніш, розглянемо рух хвиль з урахуванням можливих відбиттів від кінця лінії.

Якщо лінія розімкнена на кінці, то коефіцієнти відбиття ρ і заломлення m , згідно з формулами (26.28) і (26.30), становлять: $\rho = 1$; $m_u = 2$; $m_i = 0$. Отже, $u_2 = 2U_{nad}$; $i_2 = 0$.

Відбита хвиля напруги накладається на падаючу, внаслідок чого напруга на лінії подвоюється (рис. 26.8, а).

При цьому енергія електромагнітної хвилі перетворюється на енергію електричного поля.

При короткому замиканні кінця лінії $\rho = -1$; $m_u = 0$; $m_i = 2$.

Відбита хвиля напруги компенсує падаючу хвилю ($u_2 = 0$), а струм у лінії подвоюється (рис. 26.8, б). Цей процес супроводиться перетворенням цієї енергії хвилі на енергію **магнітного поля**.

При узгодженому навантаженні ($R_2 = Z_c$) $\rho = 0$; $u_2 = U_{над}$; $i_2 = I_{над}$

Відбитих хвиль немає, а енергія хвилі повністю поглинається навантаженням (рис. 26.8, в).

ЗАДАЧІ

Задача 26.7. Довести, що значення енергії електричного і магнітного полів хвилі з прямокутним фронтом однакові між собою.

Задача 26.8. Накреслити графіки руху вздовж лінії хвиль з прямокутним фронтом у таких випадках: а) при холостому ході лінії; б) при короткому замиканні лінії; в) при узгодженому навантаженні лінії.