

**ТЕРНОПІЛЬСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ЕКОНОМІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**  
**Факультет комп'ютерних інформаційних технологій**  
Кафедра комп'ютерних наук

*Марценюк Євгенія Олексіївна*

# **ОПОРНИЙ КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ**

**з дисципліни**  
**“КОМП'ЮТЕРНА ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА”**

для студентів денної форми навчання спеціальності

*“Програмне забезпечення автоматизованих систем”*

Тернопіль  
2014

# РОЗДІЛ 1. МНОЖИНИ І ВІДНОШЕННЯ

## Тема 1.1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТЕОРІЇ МНОЖИН

### *Коротка історична довідка*

Основи теорії множин були закладені відомим німецьким математиком Георгом Кантором у другій половині минулого століття (1871-1873 рр.). У 1904-1908 рр. Е.Цермело сформулював першу систему аксіом теорії множин. Ця теорія давала можливість створення метамови математики, тобто формальної єдиної системи понять і принципів, за допомогою якої можна викласти різні розділи математики.

Однак пізніше було виявлено суперечності теорії множин Кантора – так звані *парадокси* або *антиномії*. Виникла потреба в пошуках обґрунтованіших та точніших принципів і концепцій для несуперечливості теорії множин.

Значний внесок у становлення аксіоматичної теорії множин зробили такі видатні математики і мислителі нашого століття, як Б.Рассел, Д.Гільберт, К.Гедель та ін.

Сьогодні теорія множин – це одна з основних математичних теорій, на якій ґрунтується більшість розділів сучасної математики, як неперервної, так і дискретної.

Детальніше ознайомитися з історією виникнення та розвитку теорії множин можна, прочитавши монографію А.Френкеля і І.Бар-Хіллела "Основи теорії множин" або книгу М.Клайна "Математика. Втрата певності".

### *1.1.1. Поняття множини*

Часто теорію множин, в якій закони скінчених множин поширюються на нескінченні, називають "*інтуїтивною*" або "*наївною*". Це не означає, що поняття чи результати цієї теорії є інтуїтивними чи наївними. Такими є лише методи введення понять і обґрунтування тверджень. Самі ж поняття чи результати входять до аксіоматичної теорії, причому їх дістають уже формально та строго доводять.

В інтуїтивній теорії множин поняття "*множина*" належить до первинних не означуваних понять (як "число", "нескінченність" в алгебрі, "точка", "пряма" в геометрії тощо). Це поняття не може бути означено через інші простіші терміни або об'єкти, воно є настільки широким та загальним, що не входить як частина в жодне інше, ще загальніше поняття. Його пояснюють на прикладах, апелюючи до нашої уяви та інтуїції.

Певний час користувалися канторівським означенням: „Множина – це об'єднання в єдине спільне визначених об'єктів, які чітко розрізняються нашою інтуїцією або думкою”. Проте його не можна вважати строгим математичним означенням через нематематичні терміни “об'єднання”, “інтуїція”, “думка”, це є швидше поясненням поняття множини. Істотним тут є лише те, що множину означено як єдине ціле, причому на природу об'єктів, що складають множину, ніяких обмежень не накладається.

В оточуючому світі існують як окремі об'єкти, так і їх сукупності (множини). Наприклад, будинки на вулиці, студенти групи тощо. Іншими синонімами основного слова “множина” є “сукупність”, “набір”, “колекція”, “об'єднання”, “клас”, “масив” тощо.

### *1.1.2. Елементи множини*

**Означення 1.1.1.** Об'єкти, які утворюють дану множину, називають її *елементами*.

Елементами множини можуть бути найрізноманітніші об'єкти: парні числа, літери, люди, автомобілі на стоянці, картини в музеї тощо.

Множини, як правило, позначають великими латинськими літерами:  $A, B, C, \dots, M, \dots$ , а елементи множин – малими:  $a, b, c, \dots, m, \dots$ . Записують:

$A = \{a, b, c, \dots, x, y, \dots\}$  (перелічивши всі елементи у фігурних дужках, якщо множина складається з невеликої кількості елементів), або

$A = \{a_1, a_2, \dots, a_i, \dots\}$  (використовуючи змінні з індексами).

При цьому слід розрізняти загальний елемент множини  $x$ , довільний –  $a_i$  чи конкретний –  $a, b, c, \dots$ .

Для деяких найважливіших множин у математиці вживаються загальноприйняті позначення:

- $\mathbb{N}$  – множина натуральних чисел;
- $\mathbb{Z}$  – множина цілих чисел;
- $\mathbb{Q}$  – множина раціональних чисел;
- $\mathbb{R}$  – множина дійсних чисел;
- $\mathbb{C}$  – множина комплексних чисел;
- $[a; b]$  – числовий проміжок (відрізок);
- $(a; b)$  – числовий інтервал тощо.

Якщо  $A$  – деяка числова множина, то через  $A_+$  позначають множину її додатних елементів, а через  $A_-$  – від’ємних.

Те, що об’єкт  $a$  є елементом множини  $M$  записуються так:  $a \in M$  (читають: “ $a$  належить множині  $M$ ”, “ $a$  є елементом множини  $M$ ”, “множина  $M$  містить елемент  $a$ ”, “ $a$  входить до множини  $M$ ”). **Знак належності** елемента множині  $\in$  є стилізацією першої літери грецького слова εστι (бути). Для того, щоб підкреслити, що деякий елемент  $a$  не належить множині  $M$ , вживають позначення  $a \notin M$ ,  $a \notin M$  або  $a \notin M$ .

Запис  $a, b, c, \dots \in M$  використовують для скорочення запису  $a \in M, b \in M, c \in M, \dots$ .

Множину називають **скінченною**, якщо кількість її елементів скінчена, тобто існує натуральне число  $k$ , що є кількістю елементів цієї множини. У протилежному разі множина є **нескінченною**.

Елементами множини можуть бути ще й інші множини. Наприклад, нехай множина  $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$  – множина студентів деякої групи, які склали іспит. Цю множину можна означити й по-іншому:  $S = \{S_2, S_3, S_4, S_5\}$ , де  $S_2$  – множина студентів, які склали іспит на оцінку “2”, відповідно  $S_3, S_4, S_5$  – на “3”, “4” і “5”. У цьому випадку множини  $S_2, S_3, S_4, S_5$  називають **підмножинами** множини  $S$ .

Необхідно розрізняти такі два різні об’єкти, як елемент  $a$  і множина  $\{a\}$ , яка складається з єдиного елемента  $a$ .

Множину вважають **заданою**, якщо про кожен її об’єкт можна сказати є він елементом даної множини чи ні. Це дає змогу сформулювати **інтуїтивний принцип абстракції (аксіома згортання)**: елементами множини є лише ті і тільки ті об’єкти, які мають певну характеристичну властивість.

Іноді може не існувати об’єктів, які мають характеристичну властивість для складання множини. Тоді кажуть, що ця властивість визначає **порожню множину**. Її позначають символом “ $\emptyset$ ”. Записують:  $A = \emptyset, x \in \emptyset$ .

Елементи множин можуть бути **різними і рівними**. Рівні (однакові) елементи мають такі властивості:

- $x = x$  – **рефлексивність**;
- якщо  $x = y$ , то  $y = x$  – **симетричність**;
- якщо  $x = y$  і  $y = z$ , то  $x = z$  – **транзитивність**.

### 1.1.3. Рівність множин

Іноді означення рівності множин називають **інтуїтивним принципом об’ємності (аксіомою екстенціональності)**.

**Означення 1.1.2.** Множини  $A$  і  $B$  називають **рівними**, якщо вони складаються з одних і тих самих елементів, тобто кожний елемент множини  $A$  є елементом множини  $B$  і навпаки.

Записують:  $A = B$ .

$A = B \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B \text{ і } x \in B \Rightarrow x \in A)$  або  $A = B \Leftrightarrow (x \notin A \Rightarrow x \notin B \text{ і } x \notin B \Rightarrow x \notin A)$

Наприклад,  $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{N}_+ = \mathbb{N}$ ,  $[-2; 5]_+ = [-2; 0)$ .

Властивості рівності множин:

- $A = A$  – рефлексивність;
- якщо  $A = B$ , то  $B = A$  – симетричність;
- якщо  $A = B$  і  $B = C$ , то  $A = C$  – транзитивність.

Запис  $A \neq B$  означає, що принаймні одна з розглядуваних множин містить елемент, який не належить іншій.

Наприклад,  $\mathbb{Z}_+ \neq \mathbb{Z}$ ,  $[-2; 5]_+ \neq [-2; 5]$ ,  $\{\{a, b\}\} \neq \{a, b\}$ ,  $\{(a, b)\} \neq \{a, b\}$ .

### 1.1.4. Задання та запис множин

Для **задання множини**, утвореної з будь-яких елементів, будемо використовувати такі способи. В основі всіх способів лежить позначення множини за допомогою фігурних дужок.

**СПОСІБ 1.** Якщо  $a_1, a_2, \dots, a_n$  – деякі об'єкти, то множину цих об'єктів можна позначити через  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ , де у фігурних дужках перелічують всі елементи відповідної множини. Таким способом переважно задають скінченні множини, які мають невелику кількість елементів. Порядок запису елементів множини при цьому позначенні є **неістотним**. Якщо множина містить однакові елементи, то у фігурних дужках їх прийнято записувати лише один раз.

Наприклад, множину десяткових цифр записують  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ , множину основних арифметичних операцій –  $\{+, -, *, /\}$  або  $\{*, /, +, -\}$ , множину розв'язків нерівності  $x^2 + 1 \leq 1 - \{0\}$ .

**СПОСІБ 2.** Цей спосіб задання множин ґрунтується на описі загальної характеристичної властивості (умови) для всіх об'єктів, що утворюють множину.

У загальному випадку задання множини  $M$  має вигляд:

$$M = \{a \mid P(a)\}.$$

Цей вираз читається так: “множина  $M$  – це множина всіх таких елементів  $a$ , для яких виконується властивість  $P$ ”, де через  $P(a)$  позначено властивість, яку мають елементи множини  $M$  і тільки вони. Іноді замість вертикальної риски записують двокрапку.

Наприклад,

$$S = \{n \mid n - \text{непарне число}\}$$

$$X = \{x \mid x = \pi k, k \in \mathbb{Z}\},$$

$$F = \{f_i \mid f_{i+2} = f_{i+1} + f_i, i \in \mathbb{N}, f_1 = f_2 = 1\}.$$

Порожню множину можна визначити за допомогою будь-якої суперечливої властивості, наприклад:  $\emptyset = \{x \mid x \neq x\}$  тощо. Твердження “множина  $M$  – не порожня” можна замінювати рівносильним йому твердженням “існують елементи, які належать множині  $M$ ”.

**СПОСІБ 3.** Елементи множини можна задати за допомогою елементів вже відомих множин із застосуванням для них деякого правила чи операцій над вже відомими множинами. При цьому задання множини повинно обов'язково містити опис допоміжних (вже відомих) множин.

Наприклад,

$$\mathbb{N}_0 = \{0, \mathbb{N}\}, \quad \mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\};$$

$$\mathbb{N}_{2n} = \{2n \mid n=1, 2, 3, \dots\} - \text{множина всіх парних натуральних чисел};$$

$$X = \{x \mid x = \pi k, k \in \mathbb{Z}\},$$

$$P = \left\{ (x, y) \left| \begin{array}{l} x \in \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \\ y \in \{b_1, b_2, \dots, b_n\} \end{array} \right. \right\}$$

Останнім способом задано множину всіх можливих пар, перша компонента яких належить множині  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ , а друга –  $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ .

Отже, після вертикальної риски слід записати опис допоміжних множин.

### 1.1.5. Підмножини. Універсальна множина.

**Означення 1.1.3.** Множину  $A$  називають **підмножиною** множини  $B$  тоді і тільки тоді, коли кожний елемент множини  $A$  належить і множині  $B$ .

Позначають  $A \subseteq B$  або  $B \supseteq A$ . Читають: “множина  $A$  міститься у множині  $B$ ”, “множина  $B$  містить множину  $A$ ”. Знаки  $\subseteq$  і  $\supseteq$  називаються **знаками включення** або **нестрогої нерівності**.

Якщо  $A \subseteq B$ , однак  $A \neq B$ , то пишуть  $A \subset B$  і називають множину  $A$  **власною** (строгою або істинною) **підмножиною** множини  $B$ . Знак  $\subset$  (або  $\supset$ ), на відміну від знака  $\subseteq$  (або  $\supseteq$ ), називається **знаком строгого включення**.

Очевидно, що для будь-якої множини  $A$  виконується  $A \subseteq A$ . Крім того, прийнято вважати, що порожня множина є підмножиною будь-якої множини  $A$ , тобто  $\emptyset \subseteq A$  (зокрема,  $\emptyset \subseteq \emptyset$ ). Множини  $A$  і  $\emptyset$  називають **невласними підмножинами** множини  $A$ , всі інші – **власні**.

Слід чітко розуміти різницю між знаками  $\in$  і  $\subseteq$  та не плутати ситуації їхнього вживання. Для будь-якого об'єкта  $x$  виконується  $x \notin \emptyset$ .

*Наприклад,*

$$\{a, b\} \subseteq \{\{a, b\}, \{b, c\}\}, a \in \{a, b\}, \{c\} \notin \{a, c\}, \{a\} \subseteq \{a, b\}.$$

Властивості підмножин:

- $A \subset A$  – рефлексивність;
- якщо  $A \subset B$  і  $B \subset A$ , то  $A = B$  – антисиметричність;
- якщо  $A \subset B$  і  $B \subset C$ , то  $A \subset C$  – транзитивність.

Разом з множиною  $A$  іноді доводиться мати справу з множиною всіх її підмножин, яку на честь Джорджа Буля назвали **буліаном** множини  $A$  і позначають  $\beta(A)$ . Отже, за означенням:

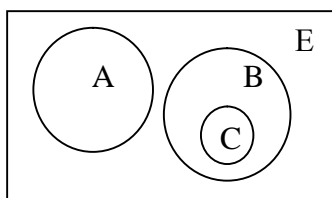
$$\beta(A) = \{B \mid B \subset A\}.$$

Наприклад, якщо  $A = \{a, b, c\}$ , то  $\beta(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$ .

Зауважимо, що якщо множина  $A$  має  $n$  елементів, то буліан  $\beta(A)$  міститиме  $2^n$  елементів, через що його називають **множиною-степенем** множини  $A$ .

У конкретній математичній теорії буває зручно вважати, що всі розглядувані множини є підмножинами деякої фіксованої множини, яку називають **універсальною множиною** або **універсумом** і позначають через  $E$  (або  $U$ ). Наприклад, в елементарній алгебрі такою універсальною множиною можна вважати множину дійсних чисел  $R$ , у вищій алгебрі – множину комплексних чисел  $C$ , в арифметиці – множину цілих чисел  $Z$ , в традиційній планіметрії – множину всіх точок площини або множину всіх геометричних об'єктів, тобто множину множин точок на площині тощо.

У процесі вивчення множин зручно застосовувати так звані діаграми Ейлера-Венна. На



них універсальну множину схематично зображують у вигляді прямокутника, а різні її підмножини – у вигляді кругів чи інших фігур всередині цього прямокутника. Наприклад, на даному рисунку зображено універсальну множину  $E$  та її підмножини  $A$ ,  $B$  і  $C$ , причому  $C \subset B$ .

### 1.1.6. Операції над множинами та їхні властивості

Для множин можна ввести ряд операцій (теоретико-множинних операцій), результатом виконання яких будуть також множини. За допомогою цих операцій можна конструювати із заданих множин нові множини.

Нехай  $A$  і  $B$  – деякі множини.

**1.1.6.1.** Означення 1.1.4. **Об'єднанням** множин  $A$  і  $B$  (позначають  $A \cup B$ ) називають множину тих елементів, які належать хоча б одній з множин  $A$  чи  $B$ . Символічно операція об'єднання множин записується так

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ або } x \in B\} \text{ або } x \in A \cup B \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A, \\ x \in B \end{cases}.$$

Наприклад,  $\{a,b,c\} \cup \{a,c,d,e\} = \{a,b,c,d,e\}$ .

Властивості об'єднання множин:

- 1) комутативність:  $A \cup B = B \cup A$ ;
- 2) асоціативність:  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ ;
- 3) ідемпотентність  $A \cup A = A$ ;
- 4)  $A \cup \emptyset = A$ ;
- 5)  $A \cup E = E$ .

**1.1.6.2.** Означення 1.1.5. **Перетином (перерізом)** множин  $A$  і  $B$  (позначають  $A \cap B$ ) називають множину, що складається з тих і тільки тих елементів, які належать множинам  $A$  і  $B$  одночасно. Тобто

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ і } x \in B\} \text{ або } x \in A \cap B \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A, \\ x \in B \end{cases}.$$

Наприклад,  $\{a,b,c\} \cap \{a,c,d,e\} = \{a,c\}$ ,  
 $\{a,b,c\} \cap \{d,e\} = \emptyset$ .

Кажуть, що множини  $A$  і  $B$  **не перетинаються**, якщо  $A \cap B = \emptyset$ .

Операції об'єднання та перетину множин можуть бути поширені на випадок довільної сукупності множин  $\{A_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ . Так об'єднання множин  $A_i$  (записується  $\bigcup_{i \in I} A_i$ ) складається з тих елементів, які належать хоча б одній з множин  $A_i$  даної сукупності. А перетин множин  $A$  (записується  $\bigcap_{i \in I} A_i$ ) містить тільки ті елементи, які одночасно належать кожній з множин  $A_i$ .

Властивості перерізу множин:

- 1) комутативність:  $A \cap B = B \cap A$ ;
  - 2) асоціативність:  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ ;
  - 3) дистрибутивність операції  $\cap$  відносно операції  $\cup$ :  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ ;
  - 4) дистрибутивність операції  $\cup$  відносно операції  $\cap$ :  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ ;
  - 5) ідемпотентність:  $A \cap A = A$ ;
  - 6)  $A \cap \emptyset = \emptyset$ ;
  - 7)  $A \cap E = A$ ;
  - 8)  $A \cap (A \cup B) = A$ ;
  - 9)  $A \cup (A \cap B) = A$ .
- } закони поглинання

**1.1.6.3.** Означення 1.1.6. **Різницею** множин  $A$  і  $B$  (записується  $A \setminus B$ ) називають множину тих елементів, які належать множині  $A$  і не належать множині  $B$ . Отже,

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ і } x \notin B\} \text{ або } x \in A \setminus B \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A, \\ x \notin B \end{cases}.$$

Наприклад,  $\{a,b,c\} \setminus \{a,d,c\} = \{b\}$ ,  
 $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{Z}_+ = \mathbb{Z}_-$ ,  
 $\{a,b\} \setminus \{a,b,c,d\} = \emptyset$ .

Властивості різниці множин:

- 1)  $A \setminus A = \emptyset$ ;
- 2)  $A \setminus \emptyset = A$ ;
- 3)  $A \setminus E = \emptyset$ ;
- 4)  $A \setminus B \neq B \setminus A$  – різниця не комутативна;

- 5)  $(A \setminus B) \setminus C \neq A \setminus (B \setminus C)$  – різниця не асоціативна;
- 6)  $(B \cup C) \setminus A = (B \setminus A) \cup (C \setminus A)$  – правий закон дистрибутивності операції  $\setminus$  відносно операції  $\cup$ ;
- 7)  $(B \cap C) \setminus A = (B \setminus A) \cap (C \setminus A)$  – правий закон дистрибутивності операції  $\setminus$  відносно операції  $\cap$ .

**1.1.6.4.** Означення 1.1.7. *Симетричною різницею* множин  $A$  і  $B$  (записують  $A \Delta B$ ,  $A \oplus B$  або  $A \div B$ ) називають множину, що складається з усіх елементів множини  $A$ , які не містяться в  $B$ , а також усіх елементів множини  $B$ , які не містяться в  $A$ . Тобто

$$A \oplus B = \{ x \mid (x \in A \text{ і } x \notin B) \text{ або } (x \in B \text{ і } x \notin A) \} \text{ або } x \in A \oplus B \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A, \\ x \notin B \\ x \notin A, \\ x \in B \end{cases}.$$

Наприклад,  $\{a,b,c\} \oplus \{a,c,d,e\} = \{b,d,e\}$ ,  
 $\{a,b\} \oplus \{a,b\} = \emptyset$ .

Властивості симетричної різниці:

- 1) комутативність:  $A \oplus B = B \oplus A$ ;
- 2) асоціативність:  $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$ ;
- 3) дистрибутивність операції  $\cap$  відносно операції  $\oplus$ :  $A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$ ;
- 4)  $A \oplus A = \emptyset$ ;
- 5)  $A \oplus \emptyset = A$ ;
- 6)  $A \oplus B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ .

Введені теоретико-множинні операції можна проілюструвати діаграмою (рис.1.1).

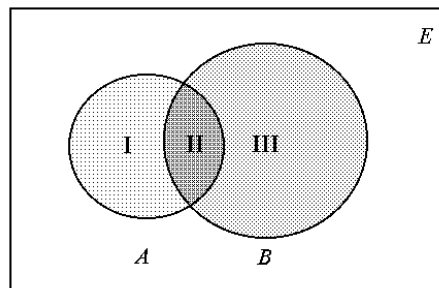


Рис. 1.1.

Тут множини  $A$  і  $B$  – це множини точок двох кругів.

Тоді  $A \cup B$  – складається з точок областей I, II, III,

$A \cap B$  – це область II,

$A \setminus B$  – область I,

$B \setminus A$  – область III,

$A \oplus B$  – області I і III.

**1.1.6.5.** Означення 1.1.8. Якщо зафіксована універсальна множина  $E$ , то **доповненням** множини  $A$  (яке є підмножиною універсальної множини  $E$ ) називають множину всіх елементів універсальної множини, які не належать множині  $A$ . Записують  $\overline{A}$ .

Тобто

$$\overline{A} = \{ x \mid x \in E \text{ і } x \notin A \} \text{ або } x \in \overline{A} \Leftrightarrow x \notin A.$$

Неважно помітити, що  $\overline{\overline{A}} = E \setminus A$ .

Наприклад, якщо за універсальну множину прийняти множину  $N$  всіх натуральних чисел, то доповненням  $\overline{P}$  множини  $P$  всіх парних натуральних чисел буде множина всіх непарних натуральних чисел.

Властивості доповнення:

- |   |   |
|---|---|
| 1) $A \cup \bar{A} = E$ ;                     | 6) $\bar{A} \setminus B = A \cap B$ ;                                     |
| 2) $A \cap \bar{A} = \emptyset$ ;             | 7) якщо $A=B$ , то $\bar{A} = \bar{B}$ ;                                  |
| 3) $\bar{E} = \emptyset$ ;                    | 8) якщо $A \subset B$ , то $\bar{B} \subset \bar{A}$ ;                    |
| 4) $\overline{\emptyset} = E$ ;               | 9) правила (законали) де Моргана $\overline{A \cup B}$                    |
| 5) інволютивність: $\overline{\bar{A}} = A$ ; | $= \bar{A} \cap \bar{B}$ ; $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ . |

Зазначимо, що правила де Моргана припускають узагальнення для сукупності множин:

$$\bigcup_{i \in \mathbf{N}} A_i = \bigcap_{i \in \mathbf{N}} \bar{A}_i; \quad \bigcap_{i \in \mathbf{N}} A_i = \bigcup_{i \in \mathbf{N}} \bar{A}_i.$$

*Приклад.* Покажемо істинність однієї з наведених тотожностей – правила де Моргана.

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}.$$

Доведемо спочатку, що  $\overline{A \cup B} \subseteq \bar{A} \cap \bar{B}$ .

Нехай елемент  $x \in \overline{A \cup B}$ , тоді  $x \in E \setminus (A \cup B)$ , тобто  $x \notin A$  і  $x \notin B$ , звідси  $x \in \bar{A}$  і  $x \in \bar{B}$ , отже,  $x \in \bar{A} \cap \bar{B}$ . Отже, за означенням підмножин:  $\overline{A \cup B} \subseteq \bar{A} \cap \bar{B}$ .

Доведемо обернене включення:  $\bar{A} \cap \bar{B} \subseteq \overline{A \cup B}$ .

Припустимо  $x \in \bar{A} \cap \bar{B}$ , це означає, що  $x \in \bar{A}$  і  $x \in \bar{B}$ , тобто  $x \notin A$  і  $x \notin B$ , тому  $x \notin A \cup B$ , отже  $x \in \overline{A \cup B}$ . Зі справедливості обох включень  $\overline{A \cup B} \subseteq \bar{A} \cap \bar{B}$  і  $\bar{A} \cap \bar{B} \subseteq \overline{A \cup B}$  за законом антисиметричності для підмножин впливає істинність рівності  $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ .

Твердження доведено. ■

Аналогічно можуть бути доведені всі інші наведені теоретико-множинні тотожності. Ці тотожності дають змогу спрощувати різні складні вирази над множинами.

*Приклад.*  $(A \cap B \cap C \cap \bar{D}) \cup (\bar{A} \cap C) \cup (B \cap C) \cup (C \cap D) = (A \cap B \cap C \cap \bar{D}) \cup ((\bar{A} \cup \bar{B} \cup D) \cap C) = ((A \cap B \cap \bar{D}) \cup (A \cap B \cap D)) \cap C = E \cap C = C$ . ■

### 1.1.7. Потужність множин

Усі введені вище теоретико-множинні операції та їхні властивості мають місце як для скінченних, так і для нескінченних множин. Суттєва різниця між скінченними та нескінченними множинами виявляється, коли мова заходить про “кількість елементів” та при спробі порівняти такі множини за “кількістю елементів”. Тут слова “кількість елементів” беруться в лапки тому, що зрозуміла умовність та невизначеність цього поняття для нескінченних множин.

Одними з основних досягнень канторівської теорії множин є поширення поняття “кількість елементів” зі скінченних множин на нескінченні та формулювання принципу, за яким можна порівнювати за “кількістю елементів” нескінченні множини. Зокрема, несподіваним та незвичайним виявився той факт, що різні нескінченні множини можуть мати різну “кількість елементів”, тобто для нескінченностей також існує своя ієрархія.

Канторівська ідея ґрунтується на такому спостереженні: для того щоб порівняти за кількістю елементів дві скінченні множини, зовсім необов’язково перелічувати елементи кожної з них. Можна діяти таким чином. Наприклад, необхідно порівняти за кількістю дві множини – множину  $S$  студентів та множину  $M$  всіх місць в аудиторіях. Запропонуємо кожному студенту зайняти одне місце. Якщо кожен студент отримає місце і при цьому в аудиторіях не залишиться жодного вільного місця, то очевидно, що кількість елементів в обох множинах  $S$  і  $M$  однакова. У протилежному випадку, множина  $S$  містить більше елементів ніж множина  $M$ , або навпаки. Очевидно, що запропонована процедура встановлює деяку функціональну відповідність між множинами  $S$  і  $M$ . У першому випадку ця відповідність виявляється взаємно однозначною, тоді коли у другому і третьому випадках умови взаємної однозначності не виконуються: або порушується умова **повної визначеності**



(принаймні один студент не дістав місця), або порушується умова *сюр'ективності* (хоча б одне місце залишилося вільним).

Кількість елементів множини  $A$  прийнято позначати через  $|A|$ .

Отже, неважко переконатися, що між двома скінченними множинами  $A$  і  $B$  існує взаємно однозначна відповідність тоді і тільки тоді, коли  $|A|=|B|$ .

Сформульоване твердження дозволяє розв'язувати задачу обчислення кількості елементів множини  $A$  шляхом встановлення взаємно однозначної відповідності між множиною  $A$  і деякою множиною  $B$ , кількість елементів якої відома або легко може бути визначена.

**Означення 1.1.9.** Елементи двох множин  $A$  і  $B$  перебувають у *взаємно однозначній* відповідності, якщо кожному елементу  $a \in A$  відповідає єдиний елемент  $b \in B$  і, навпаки, кожен елемент  $b \in B$  є зіставленим єдиному елементу  $a \in A$ .

Множини  $A$  і  $B$  назвемо *еквівалентними* або *рівнопотужними*, якщо існує взаємно однозначна відповідність між множинами  $A$  і  $B$ .

Якщо еквівалентність множин  $A$  і  $B$  позначити через  $A \sim B$ , то безпосередньо з означення випливають такі властивості еквівалентності:

- $A \sim A$  (рефлексивність);
- Якщо  $A \sim B$ , то  $B \sim A$  (симетричність);
- Якщо  $A \sim B$  і  $B \sim C$ , то  $A \sim C$  (транзитивність).

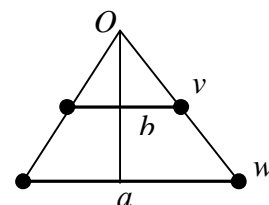
Наведемо декілька *прикладів* еквівалентних нескінченних множин.

1) Множина натуральних чисел  $\mathbb{N}$  еквівалентна множині квадратів натуральних чисел  $\mathbb{N}^2 = \{1, 4, 9, 16, \dots\}$ . Взаємно однозначна відповідність встановлюється за законом: кожне натуральне число має єдиний квадрат, і навпаки, кожен елемент множини  $\mathbb{N}^2$  має єдиний корінь у множині  $\mathbb{N}$ , тобто  $(n, n^2)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n^2 \in \mathbb{N}^2$ .

2) Множина  $\mathbb{Z}$  всіх цілих чисел еквівалентна множині  $\mathbb{P}$  всіх парних чисел. Тут взаємно однозначна відповідність встановлюється так:  $(n, 2n)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $2n \in \mathbb{P}$ .

3) Множина точок інтервалу  $(-\pi/2, \pi/2)$  еквівалентна множині точок дійсної прямої. Шукана взаємно однозначна відповідність встановлюється за допомогою тригонометричної функції  $\text{tg}$ :  $(x, \text{tg } x)$ ,  $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ ,  $\text{tg } x \in (-\infty, \infty)$ .

4) Множини точок двох довільних відрізків  $a$  і  $b$  еквівалентні. Правило, за яким встановлюється взаємно однозначна відповідність між точками відрізків  $a$  і  $b$  різної довжини, зображено на рисунку. Кожний промінь з точки  $O$ , який перетинає відрізки  $a$  і  $b$  в точках  $v$  і  $w$ , утворює одну пару  $(v, w)$  необхідної взаємно однозначної відповідності.



Множина  $A$  еквівалентна множині  $\mathbb{N}$  натуральних чисел називається *зліченною* множиною.

Іншими словами, зліченна множина  $A$  – це така множина, всі елементи якої можна занумерувати числами  $1, 2, 3, \dots$ , тобто можна вказати спосіб, за яким першому елементу множини  $A$  ставиться у відповідність число 1, другому – число 2, третьому – число 3 і т.д. Отже, будь-яку зліченну множину  $A$  можна подати у вигляді

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\}.$$

Неважко переконатись, що множини квадратів натуральних чисел, усіх парних чисел, усіх непарних чисел, чисел кратних деякому числу  $k$ , чисел, які закінчуються парою цифр 00 тощо є зліченими множинами.

**Теорема Кантора.** Множина всіх дійсних чисел з інтервалу  $(0, 1)$  незліченна.

Будь-яку множину, еквівалентну множині всіх дійсних чисел з інтервалу  $(0, 1)$ , називають *континуальною*, або множиною *потужності континууму*.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Капітонова Ю.В., Кривий С.Л., Летичевський О.А., Луцькиц Г.М., Печорін М.К. Основи дискретної математики. – К.: Наукова думка, 2002. – С.6-15.
2. Кужель О.В. Елементи теорії множин і математичної логіки. – К.: Рад. школа, 1977. – С. 4-24.
3. Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов. – СПб.: Питер, 2002. – С.19-32.
4. Федосеева Л.И. Дискретная математика: Учеб.-практич. пособие. – Пенза: Изд-во Пенз. технол. ин-та, 1998. – С. 3-30.

## Тема 1.2. ВІДНОШЕННЯ У МНОЖИНАХ

### **1.2.1. Поняття впорядкованої пари**

Нехай  $A = \{1, 2\}$  і  $B = \{2, 1\}$  – множини. Оскільки вони містять однакові елементи, то  $A = B$ . При цьому порядок розміщення їх елементів до уваги не береться.

Проте, коли ми говоримо про точки  $A(1; 2)$  і  $B(2; 1)$ , то порядок запису їхніх координат має принципове значення. Точки  $A$  і  $B$  не рівні.

Коли порядок розміщення елементів у множині відіграє важливу роль, то говорять про впорядковану сукупність елементів.

**Означення 1.2.1.** **Впорядкована  $n$ -ка** – це сукупність  $n$  не обов'язково різних об'єктів із заданим порядком їх розташування.

Якщо  $n = 2$ , то говорять про впорядковану пару, при  $n = 3$ .

Впорядковану пару елементів позначають  $\langle a, b \rangle$  або  $(a, b)$ .

За допомогою поняття множини впорядковану пару означають так:

$$\langle a, b \rangle = \{\{a\}, \{a, b\}\}.$$

Може статися, що впорядкована пара має однакові елементи:

$$\langle a, a \rangle = \{\{a\}, \{a, a\}\} = \{\{a\}, \{a\}\} = \{\{a\}\}.$$

**Теорема 1.2.1.** Рівність  $\langle a, b \rangle = \langle c, d \rangle$  справджується тоді і тільки тоді, коли  $a = c$  і  $b = d$ .

Оскільки елементи  $a$  і  $b$  впорядкованої пари  $\gamma = \langle a, b \rangle$  – нерівноправні, то елемент  $a$  називають **першою (лівою) координатою (проекцією, компонентою)**, а  $b$  – **другою (правою) координатою (проекцією, компонентою)** цієї пари.

Використовуючи поняття впорядкованої пари можна означити впорядковану трійку:

$$\langle a, b, c \rangle = \langle \langle a, b \rangle, c \rangle.$$

У літературі впорядковані  $n$ -ки, зокрема пари, трійки, іноді називають  **$n$ -вимірними** (відповідно, двовимірними, тривимірними) **векторами** або **кортежами**.

### **1.2.2. Декартовий (прямий) добуток множин**

Окремо розглянемо ще одну дуже важливу операцію над множинами.

**Означення 1.2.2.** **Декартовим (прямим) добутком** множин  $A$  і  $B$  (записується  $A \times B$ ) називають множину всіх пар  $\langle a, b \rangle$ , в яких перша компонента належить множині  $A$  ( $a \in A$ ), а друга – множині  $B$  ( $b \in B$ ).

Тобто

$$A \times B = \{ \langle a, b \rangle \mid a \in A \text{ і } b \in B \} \text{ або } \langle a, b \rangle \in A \times B \Leftrightarrow \begin{cases} a \in A, \\ b \in B. \end{cases}$$

Декартовий добуток природно узагальнюється на випадок довільної сукупності множин. Якщо  $A_1, A_2, \dots, A_n$  – множини, то їхнім декартовим добутком називають множину

$$D = \{ \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n \},$$

яка складається з усіх наборів  $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ , в кожному з яких  $i$ -й член, що називається ***i*-ю координатою** або ***i*-ю компонентою** набору, належить множині  $A_i$ ,  $i=1,2,\dots,n$ . Декартовий добуток позначається через  $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ .

Як зазначалося, набір  $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ , щоб відрізнити його від множини, яка складається з елементів  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , записують не у фігурних, а в круглих дужках і називають **кортежем**, **вектором** або **впорядкованим набором**. Довжиною кортежу називають кількість його координат. Два кортежі  $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$  і  $\langle b_1, b_2, \dots, b_n \rangle$  однакової довжини вважаються **рівними** тоді і тільки тоді, коли рівні їхні відповідні координати, тобто  $a_i = b_i$ ,  $i=1,2,\dots,n$ .

Декартовий добуток множини  $A$  на себе  $n$  разів, тобто множину  $A \times A \times \dots \times A$  називають ***n*-м декартовим** (або **прямим**) **степенем** множини  $A$  і позначають  $A^n$ .

Прийнято вважати, що  $A^0 = \emptyset$  ( $n=0$ ) і  $A^1 = A$  ( $n=1$ ).

Наприклад, якщо  $A = \{a, b\}$  і  $B = \{b, c, d\}$ , то

$$A \times B = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, b), (b, c), (b, d)\},$$

$$A^2 = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}.$$

Якщо  $R$  – множина дійсних чисел або множина точок координатної прямої, то  $R^2$  – це множина пар  $(a, b)$ , де  $a, b \in R$ , або множина точок координатної площини.

Координатне зображення точок площини вперше було запропоновано французьким математиком і філософом Рене Декартом, тому введена теоретико-множинна операція і називається декартовим добутком.

Операція декартового добутку неасоціативна і не комутативна, тобто множини  $(A \times B) \times C$  і  $A \times (B \times C)$ , а також множини  $A \times B$  і  $B \times A$ , у загальному випадку, не рівні між собою.

Зв'язок декартового добутку з іншими теоретико-множинними операціями встановлюється такими тотожностями:

1.  $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$ ,
2.  $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$ ,
3.  $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ ,
4.  $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ .

### 1.2.3. Бінарні відношення

**Означення 1.2.3.** Підмножина  $R$  декартового степеня  $M^n$  деякої множини  $M$  називається ***n*-місним** або ***n*-арним відношенням** на множині  $M$ . Кажуть, що елементи  $a_1, a_2, \dots, a_n \in M$  знаходяться у відношенні  $R$ , якщо  $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle \in R$ .

При  $n=1$  відношення  $R \subseteq M$  називають **одномісним** або **унарним**. Таке відношення часто називають також **ознакою** або **характеристичною властивістю** елементів множини  $M$ . Кажуть, що елемент  $a \in M$  має ознаку  $R$ , якщо  $a \in R$  і  $R \subseteq M$ . Наприклад, ознаки “парність” і “кратність 3” виділяють із множини  $N$  натуральних чисел унарні відношення  $R' = \{2k \mid k \in N\}$  і  $R'' = \{3k \mid k \in N\}$ , відповідно.

Найбільш популярними в математиці є **двомісні** або **бінарні** відношення ( $n=2$ ), на вивченні властивостей яких ми зупинимось детальніше. Далі скрізь під словом “відношення” розумітимемо бінарне відношення. Якщо елементи  $a, b \in M$  знаходяться у відношенні  $R$  (тобто  $\langle a, b \rangle \in R$ ), то це часто записують у вигляді  $aRb$ . Зауважимо, що бінарні відношення іноді розглядають, як окремий випадок відповідностей, а саме – відповідності між однаковими множинами.

Наприклад, на різних множинах можна задати такі бінарні відношення.

1. Відношення на множині  $N$  натуральних чисел:  
 $R_1$  - відношення “менше або дорівнює”, тоді  $7R_1 9$ ,  $2R_1 2$ ,  $1R_1 m$  для будь-якого  $m \in N$ ;  
 $R_2$  - відношення “ділиться на”, тоді  $12R_2 3$ ,  $49R_2 7$ ,  $mR_2 1$  для будь-якого  $m \in N$ ;

- $R_3$  - відношення "складаються з однакових цифр", тоді  $107R_3701, 123R_33213311$ .
2. Відношення на множині точок координатної площини  $R^2$ :
- $R_4$  - відношення "знаходяться на однаковій відстані від початку координат", тоді  $(3,2)R_4(\sqrt{5}, -\sqrt{8}), (0,0)R_4(0,0)$  ;
- $R_5$  - відношення "симетричні відносно осі ординат", тоді  $(1,7)R_5(-1,7)$ , а в загальному випадку  $(a,b)R_5(-a,b)$  для будь-яких  $a,b \in R$  ;
- $R_6$  - відношення "менше або дорівнює". Вважаємо, що  $(a,b)R_6(c,d)$ , якщо  $a \leq c$  і  $b \leq d$ . Зокрема,  $(1,7)R_6(20,14), (-12,4)R_6(0,17)$ .
3. Відношення на множині людей:
- $R_7$  - відношення "є другом",
- $R_8$  - відношення "є молодшим за віком від".

Слід звернути увагу на такі основні моменти:

- розглядуване відношення має місце не для всіх пар елементів заданих множин, а лише для деяких з них;
- не завжди якщо елемент  $x$  перебуває у відношенні з елементом  $y$ , то елемент  $y$  перебуває у тому самому відношенні з елементом  $x$ ;
- кожне відношення між елементами даної множини можна розглядати як сукупність деяких впорядкованих пар декартового добутку двох однакових або різних множин.

Позначимо символом  $R_-$  сукупність лівих координат впорядкованих пар бінарного відношення  $R$ , тобто:

$$R_- = \{a \mid \text{існує такий елемент } b, \text{ що } \langle a, b \rangle \in R\}.$$

Множину  $R_-$  називають **лівою областю** або **областю визначення** відношення  $R$ .

Аналогічно множину

$$R_+ = \{b \mid \text{існує такий елемент } a, \text{ що } \langle a, b \rangle \in R\}$$

називають **правою областю** або **множиною значень** відношення  $R$ .

Наприклад, для відношення  $R = \{\langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle a, d \rangle, \langle c, a \rangle\}$   $R_- = \{a, b, c\}$ , а  $R_+ = \{a, b, c, d\}$ .

Множину  $F(R) = R_- \cup R_+$  називають **полем** відношення  $R$ . Для розглянутого прикладу  $F(R) = \{a, b, c, d\}$ .

Якщо будь-який елемент заданої множини перебуває у відношенні з будь-яким елементом цієї множини, то таке відношення називають **універсальним**. Якщо ж жоден елемент заданої множини не перебуває у відношенні з жодним елементом цієї множини, то таке відношення називають **порожнім**.

Відношення  $\Delta_A = \{\langle a, a \rangle \mid a \in A\}$  називають **діагональним** або **одиничним**.

#### 1.2.4. Переріз відношення. Фактор-множина

Нехай  $R$  – деяке відношення у множині  $M_1 \times M_2$  ( $R \subset M_1 \times M_2$ ) і  $a \in M_1$ .

**Означення 1.2.4.** Сукупність всіх таких елементів  $b \in M_2$ , для яких  $\langle a, b \rangle \in R$ , називають **перерізом** відношення  $R$  за елементом  $a$ .

Позначають  $R_a$ . За означенням  $R_a = \{b \mid \langle a, b \rangle \in R\}$ .

Наприклад, нехай  $M_1 = M_2 = \{1, 2, 3, 4\}$  і  $R = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 4 \rangle\}$ . Тоді:

$$R_1 = \{2, 3\}, R_2 = \{1, 2, 3, 4\}, R_3 = \{4\}, R_4 = \emptyset.$$

**Означення 1.2.5.** Сукупність всіх перерізів відношення  $R$  за елементами множини  $M_1$  називають **фактором** або **фактор-множиною** множини  $M_2$  і позначають  $M_2 / R$ .

Отже,  $M_2 / R = \{R_a \mid a \in M_1\}$ .

Для розглянутого прикладу  $M_2 / R = \{R_1, R_2, R_3, R_4\} = \{\{2, 3\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{4\}, \emptyset\}$ .

Оскільки за означенням елементами буліана  $\beta(M_2)$  є підмножини множини  $M_2$ , то довільна фактор-множина  $M_2 / R$  є підмножиною цього буліана:  $M_2 / R \subset \beta(M_2)$ .

Нехай  $R$  – деяке відношення у множині  $M_1 \times M_2$  ( $R \subset M_1 \times M_2$ ) і  $M_1' \subset M_1$ .

**Означення 1.2.6.** *Перерізом* відношення  $R$  за множиною  $M_1'$  називають об'єднання всіх перерізів відношення  $R$  за елементами множини  $M_1'$ , тобто

$$R_{M_1'} = \bigcup_{a \in M_1'} R_a.$$

Якщо у розглянутому прикладі покласти  $M_1' = \{2,3\}$ , то

$$R_{\{2,3\}} = R_2 \cup R_3 = \{1,2,3,4\} \cup \{4\} = \{1,2,3,4\}.$$

Якщо  $M_1' = R_-$ , то  $R_{M_1'} = R_+$ .

### 1.2.5. Способи задання відношень

**1. Множинний спосіб.** Оскільки відношення є множиною, елементами якої є впорядковані пари, то його можна задати за допомогою способів задання множин.

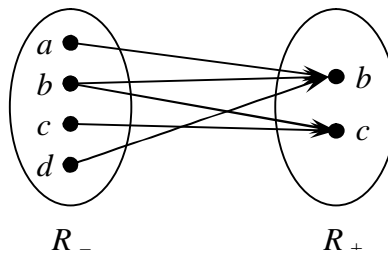
*Наприклад,*  $R = \{\langle a,b \rangle, \langle b,b \rangle, \langle b,c \rangle, \langle c,c \rangle, \langle d,b \rangle\}$ ,

$$S = \{\langle x,y \rangle \mid y = kx; x, y \in \mathbb{Z}; k \in \mathbb{N}\}.$$

**2. Стрілочний спосіб.** Елементи області визначення і множини значень відношення зображують точками площини напроти одна від одної, а впорядковані пари зображують стрілками, спрямованими від відповідних точок області визначення до точок множини значень.

*Наприклад,* задамо стрілочним способом відношення  $R$ , задане вище множинним способом. Спочатку знайдемо його область визначення і множину значень:

$$R_- = \{a, b, c, d\}, R_+ = \{b, c\}.$$



**3. Табличний спосіб.** Таблиця відношення складається з двох рядків і стільки стовпців, скільки елементів в області визначення. Під кожним елементом області визначення записують переріз відношення за цим елементом.

*Наприклад,* задамо стрілочним способом згадане відношення  $R$ .

$a$	$b$	$c$	$d$
$\{b\}$	$\{b,c\}$	$\{c\}$	$\{b\}$

**4. Матричний спосіб.** Матриця відношення має стільки рядків, скільки елементів у області визначення, і стільки стовпців, скільки елементів у множині значень. Елементами матриці відношення є:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \langle i, j \rangle \in R, \\ 0, & \text{якщо } \langle i, j \rangle \notin R. \end{cases}$$

*Наприклад,* задамо матричним способом побудоване раніше відношення  $R$ .

$$R = \begin{matrix} & b & c \\ a & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ b & \\ c & \\ d & \end{matrix}$$

Для діагонального, універсального та порожнього відношень у множині  $M = \{a_1, a_2, a_3\}$  матриці матимуть вигляд:

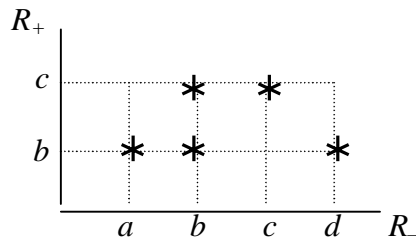
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**5. Графічний спосіб.** Цей спосіб передбачає побудову *графіка* та *графа* відношення.

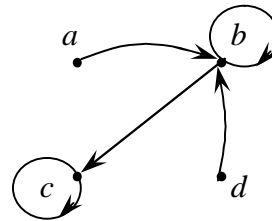
Для побудови графіка у першому координатному куті на горизонтальній осі відкладають точками елементи області визначення, а на вертикальній – точки множини значень. Кожну впорядковану пару зображують точкою або зірочкою у цьому координатному куті (отримані точки не сполучають!).

Для побудови графа відношення елементи поля цього відношення зображують точками довільно на площині. Кожну впорядковану пару зображують дугою, спрямованою від точки області визначення до точки множини значень.

*Наприклад*, зобразимо графічно розглядуване відношення  $R$ , знайшовши його поле:  $F(R) = R_- \cup R_+ = \{a, b, c, d\} \cup \{b, c\} = \{a, b, c, d\}$ .



**Графік**



**Граф**

## ЛІТЕРАТУРА

1. Капігонова Ю.В., Кривий С.Л., Летичевський О.А., Луцький Г.М., Печорін М.К. Основи дискретної математики. – К.: Наукова думка, 2002. – С.15-18, 30-37.
2. Кужель О.В. Елементи теорії множин і математичної логіки. – К.: Рад. школа, 1977. – С. 26-42.

## Тема 1.3. ВЛАСТИВОСТІ ВІДНОШЕНЬ

### **1.3.1. Теоретико-множинні операції над відношеннями**

Оскільки відношення є множинами, елементами яких є впорядковані пари, то над ними можна виконувати всі відомі операції над множинами.

*Наприклад*, якщо  $P = \{\langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle, \langle b, a \rangle, \langle c, d \rangle\}$ , а  $Q = \{\langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, a \rangle, \langle c, d \rangle\}$ , то

$$P \cup Q = \{\langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle, \langle b, a \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, a \rangle, \langle c, d \rangle\};$$

$$P \cap Q = \{\langle a, b \rangle, \langle c, d \rangle\};$$

$$P \setminus Q = \{\langle a, c \rangle, \langle b, a \rangle\};$$

$$P \oplus Q = \{\langle a, c \rangle, \langle b, a \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, a \rangle\}.$$

Якщо відношення “менше”, “більше”, “дорівнює” тощо записати значками для їх позначення у дужках, то операції над цими відношеннями матимуть вигляд:

$$(<) \cup (=) = (\leq), \quad (<) \cap (=) = \emptyset, \quad (\geq) \setminus (=) = (>), \quad (\geq) \oplus (>) = (=).$$

Якщо для двох відношень  $R$  і  $S$  виконується умова  $R \subset S$ , то  $S$  називають **розширенням** відношення  $R$ , а  $R$  – **звуженням** відношення  $S$ .

Наприклад,  $(\leq)$  – розширення відношень  $(<)$  і  $(=)$ , бо  $(<) \subset (\leq)$  і  $(=) \subset (\leq)$ .

### 1.3.2. Композиція відношень

Крім теоретико-множинних операцій над відношеннями можна виконувати й інші операції. Однією з них є композиція.

**Означення 1.3.1.** **Композицією** відношень  $R$  і  $S$  називають множину всіх таких впорядкованих пар  $\langle a, b \rangle$ , для кожної з яких існує деякий елемент  $c$  такий, що  $\langle a, c \rangle \in R$ ,  $\langle c, b \rangle \in S$ .

Позначають композицію  $R \circ S$ . Отже, за означенням:

$$R \circ S = \{ \langle a, b \rangle \mid \exists c, \langle a, c \rangle \in R, \langle c, b \rangle \in S \}.$$

Наприклад, якщо  $P = \{ \langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle, \langle b, a \rangle, \langle c, d \rangle \}$ , а  $Q = \{ \langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, a \rangle, \langle c, d \rangle \}$ , то

$$P \circ Q = \{ \langle a, c \rangle, \langle a, a \rangle, \langle a, d \rangle, \langle b, b \rangle \},$$

$$Q \circ P = \{ \langle a, a \rangle, \langle b, d \rangle, \langle c, b \rangle, \langle c, c \rangle \}.$$

Приклад свідчить, що композиція відношень, у загальному випадку, – операція не комутативна, тобто  $R \circ S \neq S \circ R$ . Однак, композиція має такі властивості:

- 1) асоціативність:  $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$ ;
- 2) дистрибутивність  $\circ$  відносно  $\cup$ :  $(R \cup S) \circ T = (R \circ T) \cup (S \circ T)$ .

### 1.3.3. Обернені відношення

**Означення 1.3.2.** Відношення  $R^{-1}$ , задане на множині  $M_2 \times M_1$ , називають **оберненим** (**інверсним**) до відношення  $R$ , заданого на  $M_1 \times M_2$ , якщо

$$R^{-1} = \{ \langle a, b \rangle \mid \langle b, a \rangle \in R \}.$$

**Означення 1.3.3.** **Інверсією** називають операцію, яка довільному відношенню  $R$  ставить у відповідність відношення  $R^{-1}$ .

З означення видно, що область визначення  $R_-$  відношення  $R$  є множиною значень  $R^{-1}_+$  для відношення  $R^{-1}$ , і навпаки.

Геометричне зображення інверсії  $R^{-1}$  графіка  $R$  легко утворити за допомогою перетворення симетрії координатної площини відносно бісектриси першого координатного кута. При цьому вісь абсцис і вісь ординат міняються місцями, а точка  $\langle x, y \rangle$  переходить у точку  $\langle y, x \rangle$ .

Зрозуміло, що у випадку універсального, діагонального та порожнього відношень:

$$E^{-1} = E, \quad \Delta^{-1} = \Delta, \quad \emptyset^{-1} = \emptyset.$$

Властивості обернених відношень:

- 1)  $(R^{-1})^{-1} = R$ ;
- 2) якщо  $R \subset S$ , то  $R^{-1} \subset S^{-1}$ ;
- 3)  $\overline{R^{-1}} = \overline{R}^{-1}$ ;

$$4) (R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1};$$

$$5) (R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}.$$

### 1.3.4. Рефлексивні, симетричні і транзитивні відношення

**Означення 1.3.4.** Бінарне відношення  $R$  називають **рефлексивним** у множині  $A = F(R)$ , якщо будь-який елемент  $a \in F(R)$  перебуває у відношенні сам з собою ( $\langle a, a \rangle \in R$ ).

**Означення 1.3.5.** Бінарне відношення  $R$  називають **рефлексивним**, якщо з того, що  $\langle a, b \rangle \in R$  слідує, що  $\langle a, a \rangle \in R$  і  $\langle b, b \rangle \in R$ .

*Наприклад*, відношення  $R = \{\langle 1,1 \rangle, \langle 1,2 \rangle, \langle 2,2 \rangle, \langle 3,3 \rangle\}$  рефлексивне у множині  $A = \{1,2,3\}$ , проте не рефлексивне у множині  $A' = \{1,2,3,4\}$ .

Рефлексивними є відношення рівності, подільності, паралельності, конгруентності, подібності фігур, універсальне та діагональне відношення.

**Означення 1.3.6.** Бінарне відношення  $R$  називають **антирефлексивним** (**іррефлексивним**) у множині  $A = F(R)$ , якщо жоден елемент  $a \in F(R)$  не перебуває у відношенні сам з собою ( $\langle a, a \rangle \notin R$ ).

*Наприклад*, відношення  $S = \{\langle 1,2 \rangle, \langle 1,3 \rangle, \langle 2,1 \rangle, \langle 3,2 \rangle\}$  антирефлексивне у множині  $A = \{1,2,3\}$ . Анти рефлексивними є відношення “не дорівнює”, “менше”, “більше”, перпендикулярності тощо.

Порожнє відношення прийнято вважати як рефлексивним, так і антирефлексивним.

Якщо відношення є ні рефлексивним, ні анти рефлексивним, то його називають **не рефлексивним**.

*Наприклад*, відношення  $P = \{\langle 1,1 \rangle, \langle 1,3 \rangle, \langle 2,1 \rangle, \langle 3,3 \rangle\}$  не рефлексивне, оскільки елемент 2, на відміну від всіх інших, не перебуває у відношенні сам з собою ( $\langle 2,2 \rangle \notin P$ ).

При зображенні рефлексивного відношення з допомогою графіка видно, що всі точки діагоналі  $A \times A$  належать графіку відношення.

**Означення 1.3.7.** Бінарне відношення  $R$  називають **симетричним**, якщо з того, що  $\langle a, b \rangle \in R$  слідує, що  $\langle b, a \rangle \in R$ .

*Наприклад*, відношення  $R = \{\langle 1,1 \rangle, \langle 1,2 \rangle, \langle 2,1 \rangle, \langle 2,3 \rangle, \langle 3,2 \rangle\}$  симетричне. Симетричними є відношення паралельності, перпендикулярності, подібності, конгруентності, універсальне відношення тощо.

Для симетричного відношення його графік симетричний відносно діагоналі – бісектриси координатного кута.

**Означення 1.3.8.** Бінарне відношення  $R$  називають **антисиметричним**, якщо з того, що  $\langle a, b \rangle \in R$  слідує, що  $\langle b, a \rangle \notin R$ .

*Наприклад*, відношення  $S = \{\langle 1,2 \rangle, \langle 2,3 \rangle, \langle 3,4 \rangle\}$  антисиметричне. Антисиметричними є відношення включення, “менше”, “більше”, “менше дорівнює” тощо.

Відношення рівності, діагональне та порожнє вважають як симетричними, так і антисиметричними.

**Означення 1.3.9.** Бінарне відношення  $R$  називають **транзитивним**, якщо з того, що  $\langle a, b \rangle \in R$  і  $\langle b, c \rangle \in R$  слідує, що  $\langle a, c \rangle \in R$ .

*Наприклад*, відношення  $R = \{\langle 1,1 \rangle, \langle 1,2 \rangle, \langle 1,4 \rangle, \langle 2,2 \rangle, \langle 2,4 \rangle, \langle 4,4 \rangle\}$  транзитивне. Транзитивними також є відношення “менше”, “більше дорівнює”, подільності, паралельності, подібності, включення, діагональне, порожнє та універсальне відношення тощо.

Не транзитивними є відношення “не дорівнює”, перпендикулярності, належності тощо.



Графік транзитивного відношення має властивість  $R \circ R \subseteq R$  і навпаки.

Операція обернення зберігає 5 властивостей відношень: рефлексивність, антирефлексивність, симетричність, антисиметричність і транзитивність.

**Означення 1.3.10.** Відношення  $R^*$  називають **транзитивним замиканням** відношення  $R$  на множині  $A$ , якщо  $\langle a, b \rangle \in R^*$  тоді і тільки тоді, коли у множині  $A$  існує послідовність елементів  $a_1, a_2, \dots, a_n$  така, що  $a_1 = a$ ,  $a_n = b$  і  $\langle a_1, a_2 \rangle \in R$ ,  $\langle a_2, a_3 \rangle \in R$ , ...,  $\langle a_{n-1}, a_n \rangle \in R$ .

Наприклад, нехай  $A$  – множина точок на площині і  $\langle a, b \rangle \in R$ ,  $a, b \in A$ , якщо точки  $a$  і  $b$  з'єднані відрізком. Тоді  $\langle c, d \rangle \in R^*$ ,  $c, d \in A$ , якщо існує ламана лінія, яка з'єднує точки  $c$  і  $d$ .

### 1.3.5. Відношення еквівалентності

**Означення 1.3.11.** Бінарне відношення  $R$  називають **відношенням еквівалентності**, коли воно рефлексивне, симетричне і транзитивне.

Отже,  $R$  є відношенням еквівалентності, якщо:

- 1)  $\langle a, a \rangle \in R$ ;
- 2)  $\langle a, b \rangle \in R \Rightarrow \langle b, a \rangle \in R$ ;
- 3)  $\langle a, b \rangle \in R, \langle b, c \rangle \in R \Rightarrow \langle a, c \rangle \in R$ .

Якщо при цьому  $A = F(R)$ , то говорять, що  $R$  – відношення еквівалентності на множині  $A$ .

Наприклад, відношення  $R = \{\langle 1,1 \rangle, \langle 1,2 \rangle, \langle 2,1 \rangle, \langle 2,2 \rangle\}$  є відношенням еквівалентності.

Відношеннями еквівалентності є також відношення рівності, рівно потужності множин, конгруентності, подібності, діагональне, порожнє та універсальне відношення.

Важливу роль відіграє в математиці відношення “мають однакову остачу при діленні на  $k$ ” або “конгруентні за модулем  $k$ ”, яке є відношенням еквівалентності на множині  $\mathbb{N}$  натуральних чисел для будь-якого фіксованого  $k \in \mathbb{N}$ . Відношення конгруентності за модулем  $k$  часто позначають  $a \equiv b \pmod{k}$ . Цьому відношенню належать, наприклад, пари натуральних чисел  $(17,22)$ ,  $(1221,6)$ ,  $(42,57)$  для  $k=5$ , тобто  $17 \equiv 22 \pmod{5}$ ,  $1221 \equiv 6 \pmod{5}$ ,  $42 \equiv 57 \pmod{5}$ .

Нехай  $R (R \subset A \times A)$  – відношення еквівалентності і  $a \in A$ .

**Означення 1.3.12.** Переріз  $R_a$  відношення  $R$  за елементом  $a$  називають класом еквівалентності за відношенням  $R$  і позначають  $[a]$  або  $[a]_R$ .

Отже, за означенням  $[a] = R_a = \{b \mid \langle a, b \rangle \in R\}$ . Тобто клас еквівалентності  $[a]$  містить всі такі елементи множини  $A$ , які перебувають у відношенні  $R$  з елементом  $a$ .

Наприклад, якщо  $R$  – відношення паралельності у площині  $\alpha$ , а  $l$  – деяка фіксована пряма у цій площині, то клас еквівалентності  $[l]$  містить усі прямі площини  $\alpha$ , паралельні прямій  $l$ .

**Теорема 1.3.1.** Будь-які два класи еквівалентності за відношенням  $R$  або не мають спільних елементів, або збігаються.

**Теорема 1.3.2.** Будь-яку множину  $A$ , в якій задано відношення еквівалентності  $R$ , можна подати у вигляді об'єднання різних класів еквівалентності за відношенням  $R$ , тобто  $A = \bigcup_{a \in A} [a]$ .

**Означення 1.3.13.** Множину всіх класів еквівалентності за відношенням  $R$  називають **фактор-множиною** множини  $A$  за відношенням  $R$ :  $A/R = \{[a] \mid a \in A\}$  або

$A/R = \{[a] \mid a \in M\}$ , де  $M$  – сукупність таких елементів множини  $A$ , яким відповідають різні класи еквівалентності.

*Наприклад*, якщо  $A$  – сукупність всіх студентів певної групи, які отримали за іспит оцінку  $k$ , а  $R$  – відношення еквівалентності, що визначається умовою  $\langle a, b \rangle \in R$  тоді і тільки тоді, коли  $a \in A_k$  і  $b \in A_k$ , то  $A/R = \{A_2, A_3, A_4, A_5\}$ . Фактор-множина для відношення “конгруентні за модулем 3” на множині  $\mathbb{N}$  натуральних чисел складається з трьох класів  $\{3k \mid k \in \mathbb{N}\}$ ,  $\{3k-1 \mid k \in \mathbb{N}\}$  і  $\{3k-2 \mid k \in \mathbb{N}\}$ .

Потужність фактор-множини  $|A/R|$  називають **індексом розбиття** або **індексом відношення еквівалентності  $R$** .

Нехай  $R$  відношення еквівалентності на множині  $A$ . Відображення множини  $A$  на фактор-множину  $A/R$ , яке кожному елементу  $a \in A$  ставить у відповідність клас еквівалентності  $[a]_R$ , називають **канонічним** або **природним відображенням** множини  $A$  на фактор-множину  $A/R$ .

### 1.3.6. Відношення порядку

**Означення 1.3.14.** Бінарне відношення  $R$  називають **відношенням строгого порядку**, коли воно антисиметричне і транзитивне. Позначають:  $<(>)$  або  $<_R (>_R)$ .

Отже  $R$  – відношення строгого порядку, якщо:

- 1)  $\langle a, b \rangle \in R, \langle b, a \rangle \in R \Rightarrow a = b$ ;
- 2)  $\langle a, b \rangle \in R, \langle b, c \rangle \in R \Rightarrow \langle a, c \rangle \in R$ .

Наприклад, розташування символів у довільному скінченному алфавіті означає відношення **строгого лексикографічного порядку**, яке лежить в основі впорядкування словників, енциклопедій, індексів, довідників, списків, таблиць тощо.

**Означення 1.3.15.** Якщо відношення порядку є рефлексивним ( $\langle a, a \rangle \in R$ ), то його називають **відношенням часткового (нестрогого) або квазіпорядку**. Позначають:  $\leq (\geq)$  або  $\leq_R (\geq_R)$ .

*Наприклад*, у числових множинах  $\mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$  встановлено відношення строгого ( $<(>)$ ) і нестрогого ( $\leq (\geq)$ ) порядку.

Множину  $M$ , на якій задано відношення порядку, називають **впорядкованою**, а елементи  $a, b \in M$  – **порівнюваними** за відношенням  $R$ , якщо виконується  $\langle a, b \rangle \in R$  або  $\langle b, a \rangle \in R$ . Запис  $\langle A; \leq \rangle$  означає, що у множині  $A$  відношення порядку  $\leq$ .

Впорядковану множину  $M$ , в якій будь-які різні два елементи є порівнюваними між собою, називають **лінійно впорядкованою** множиною або **ланцюгом**. Відповідне відношення  $R$  (як строге, так і нестроге), задане на лінійно впорядкованій множині, називають **лінійним (досконалим) порядком**.

Очевидно, відношення рівності є відношенням часткового порядку на будь-якій множині  $M$ , цей порядок називають **тривіальним**.

**Теорема 1.3.3.** Якщо  $R$  – відношення строгого (нестрогого) порядку, то обернене відношення  $R^{-1}$  – теж відношення строгого (нестрогого) порядку.

Нехай  $M$  частково впорядкована множина і  $A$  деяка непорожня підмножина множини  $M$ .

**Означення 1.3.16.** **Верхньою гранню** підмножини  $A \subseteq M$  в множині  $M$  називається елемент  $b \in M$  такий, що  $a \leq b$  всіх  $a \in A$ . Елемент  $b$  називається **найбільшим елементом** множини  $M$ , якщо  $b$  – верхня грань множини  $M$ . Відповідно, елемент  $c$  частково впорядкованої множини  $M$  називається **нижньою гранню** підмножини  $A \subseteq M$ , якщо  $c \leq a$  для будь-якого  $a \in A$ . Елемент  $c$  – **найменший** в множині  $M$ , якщо  $c$  – нижня грань самої множини  $M$ .

**Означення 1.3.17.** Елемент  $x \in M$  називається **максимальним** в множині  $M$ , якщо не існує елемента  $a \in M$  такого, що  $x < a$ . Відповідно, елемент  $n \in M$  називається **мінімальним** у множині  $M$ , якщо не існує елемента  $a \in M$  такого, що  $a < n$ .

У лінійно впорядкованій множині поняття найбільшого і максимального (найменшого і мінімального) елементів збігаються.

### 1.3.7. Відображення і функції

**Означення 1.3.18.** Відношення  $F$ , задане на множинах  $A_1, A_2, \dots, A_n, B$  називають **функціональним**, якщо для будь-якого елемента  $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$  існує не більше одного елемента  $b \in B$ , такого, що  $(a_1, a_2, \dots, a_n, b) \in F$ .

Якщо ж деякого  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  такий елемент  $b \in B$  існує, то його позначають  $F(a_1, a_2, \dots, a_n)$  і записують  $b = F(a_1, a_2, \dots, a_n)$ .

Нехай  $F^{-1}(b) = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \in A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \mid F(a_1, a_2, \dots, a_n) = b\}$ . Очевидно, для будь-якого функціонального відношення  $F$ , заданого на множині  $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$  виконується включення  $\bigcup_{b \in B} R^{-1}(b) \subseteq A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ , де  $\bigcup_{b \in B} R^{-1}(b)$  – **область визначення** відображення. Коли ж  $\bigcup_{b \in B} R^{-1}(b) = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ , то відношення  $F$  називають **повністю визначеним**, у випадку  $\bigcup_{b \in B} R^{-1}(b) \subset A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$  – **частково визначеним** або **частковим**.

**Означення 1.3.19.** Відношення  $F$ , задане на множинах  $A_1, A_2, \dots, A_n, B$  називають **відображенням** або **функцією**, якщо  $F$  – функціональне і часткове. Позначають:  $F : A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \rightarrow B$ .

Число  $n$  називають **арністю** функції  $F$ .

Якщо  $F : A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \rightarrow B$  та існує  $b \in B$ , такий, що  $b = F(a_1, a_2, \dots, a_n)$ , то елемент  $b$  називають **образом** елемента  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  при відображенні  $F$ , а  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  – **прообразом** елемента  $b$ .

Відношення  $F : A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \rightarrow B$  називають **відображенням** тоді і тільки тоді, коли для довільного  $b \in B$ :  $F^{-1}(b) \neq \emptyset$ . Множину всіх таких елементів  $b$  називають **множиною значень** відображення  $F$ .

Відображення  $F$  множини  $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$  на множину  $B$  називають **взаємно однозначним відображенням** або **взаємно однозначною відповідністю** тоді і тільки тоді, коли обернене відношення  $F^{-1}$  є відображенням  $B$  на  $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ .

### ЛІТЕРАТУРА

1. Капітонова Ю.В., Кривий С.Л., Летичевський О.А., Луцький Г.М., Печорін М.К. Основи дискретної математики. – К.: Наукова думка, 2002. – С.17-30.
2. Кужель О.В. Елементи теорії множин і математичної логіки. – К.: Радянська школа, 1977. – С. 42-67.

## РОЗДІЛ 2. ТЕОРІЯ ГРАФІВ

### Тема 2.1. ОСНОВНІ ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ГРАФІВ

#### 2.1.1. Поняття графа

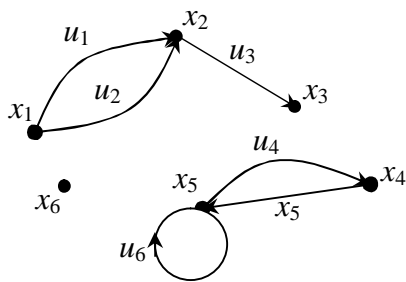
Теорія графів – важливий розділ дискретної математики, який зародився при розв’язанні головоломок та ігор, таких як задача про кенігсберзькі мости (1736 р.), задача про три криниці і три будинки, гра Гамільтона, задача про чотири фарби. Зараз ця теорія стала потужним засобом дослідження і розв’язання багатьох задач, які виникають при дослідженні великих і складних систем, зокрема обчислювальних. Одним з основних напрямків її використання в обчислювальній техніці є побудова та опис ефективних алгоритмів і аналіз їх складності.

Теорію графів відносять до **якісної геометрії** (яка оперує безрозмірними величинами: одиниці вимірювання ролі не грають, основне – наявність просторових елементів (точок, ліній, поверхонь) і зв’язків між ними).

Основним поняттям є поняття графа.

**Означення 2.1.1.** **Графом**  $G$  називають пару об’єктів  $G(X, \Gamma)$ , де  $X$  – скінчена непорожня множина, а  $\Gamma$  – скінчена підмножина прямого добутку  $X \times X \times \mathbb{N}$  (можливо і порожня), причому  $X$  називають множиною вершин, а  $\Gamma$  – множиною дуг графа  $G$ .

**Наприклад:**  $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ ,  $\Gamma = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ , де  $u_1 = (x_1, x_2, 1)$ ,



$u_2 = (x_1, x_2, 2)$ ,  $u_3 = (x_2, x_3, 1)$ ,  $u_4 = (x_4, x_5, 1)$ ,  $u_5 = (x_5, x_4, 1)$ ,

$u_5 = (x_5, x_5, 1)$ . У позначенні дуги  $u_k = (x_i, x_j, n)$  вершини  $x_i$

та  $x_j$ , які визначають дугу, називають **кінцевими** або

**граничними**, причому перша координата  $x_i$  вказує на

вихідну вершину дуги  $u_k$ , друга координата  $x_j$  – на вхідну,

а де  $n \in \mathbb{N}$  – номер дуги для позначення різних дуг з

однаковими вихідними та вхідними вершинами (при цьому

не обов’язково використовують номери від 1 до кількості дуг).

**Означення 2.1.2.** Дві вершини графа називають **суміжними**, якщо вони є кінцевими для хоча б однієї дуги.

**Означення 2.1.3.** Дві дуги графа називають **суміжними**, якщо вони мають принаймні одну спільну вершину.

Зауважимо, що суміжність – відношення між однорідними елементами графа – вершиною і вершиною, дугою і дугою. Для позначення відношення між різнорідними елементами графа вводять поняття “інциденція”.

**Означення 2.1.4.** Дугу  $u \in \Gamma$  та вершину  $x \in X$  графа  $G(X, \Gamma)$  називають **інцидентними**, якщо ця вершина є початком або кінцем даної дуги (першою або другою проекцією:  $x = \text{rg}_1 u$  або  $x = \text{rg}_2 u$ ).

У наведеному прикладі графа вершини  $x_1$  і  $x_2$ ,  $x_2$  і  $x_3$ ,  $x_4$  і  $x_5$  – суміжні, а  $x_1$  і  $x_3$ ,  $x_3$  і  $x_4$ ,  $x_5$  і  $x_6$  – несуміжні, дуги  $u_1$  і  $u_2$ ,  $u_4$  і  $u_6$  – суміжні, а  $u_1$  і  $u_4$ ,  $u_3$  і  $u_6$  – несуміжні, вершина  $x_1$  і дуга  $u_1$  – інцидентні, а вершина  $x_1$  і дуга  $u_4$  – неінцидентні.

Дуги з однаковими кінцевими вершинами називають **паралельними** або **кратними**. У наведеному прикладі ребра  $u_1$  та  $u_2$  – паралельні.

Якщо кінцеві вершини дуги однакові, то її називають **петлею**. Дуга  $u_5 = (x_5, x_5, 1)$  є петлею.

Граф, який не містить петель і паралельних ребер називають **простим**, у протилежному випадку – **мультиграфом**.

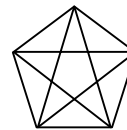
Граф  $G$  є графом порядку  $n$ , якщо множина його вершин складається з  $n$  елементів:  $|X| = n$ .

Якщо у графі  $G$  вершина  $x_i$  не є початком і кінцем жодного ребра, то її називають **ізолюваною**. У прикладі: вершина  $x_6$  – ізолювана.

Граф, який складається з ізолюваних вершин, тобто не містить жодного ребра, називають **нуль-графом, порожнім або виродженим**.

Якщо у графі вершина  $x_i$  є початком або кінцем лише одного ребра, то її називають **висячою** або **тупиком**. У прикладі вершина  $x_3$  – висяча.

Якщо граф має  $n$  вершин ( $n > 1$ ) і кожна пара вершин з'єднана ребром, то його називають повним.



Граф називають **плоским**, якщо він має геометричну реалізацію на площині.

Області площини, окреслені ребрами плоского графа, називають його **гранями**.

Граф  $G(X, \Gamma)$  називають **дводольним**, якщо множину його множин  $X$  можна розбити на дві такі підмножини  $X_1$  та  $X_2$ , що кожне ребро, яке належить  $\Gamma$  має одну кінцеву вершину у множині  $X_1$ , а другу – в  $X_2$ .

**Рефлексивним** називають граф, що має петлю у кожній вершині.

**Симетричним** називають граф, у якому кожній дузі  $u=(x_1, x_2)$  відповідає дуга  $u'=(x_2, x_1)$ .

**Транзитивним** називають граф, у якому існування дуг  $u_1=(x_1, x_2)$  і  $u_2=(x_2, x_3)$  означає існування дуги  $u_3=(x_1, x_3)$ .

Граф  $G(X, \Gamma)$  називають **орієнтованим** або **орграфом**, якщо розрізняють початкову і кінцеву вершини дуги. Для геометричного зображення використовують стрілки.

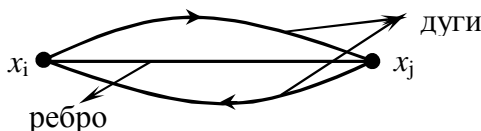
У випадку орієнтованого графа, його ребра називають дугами, заданими впорядкованими парами (трійками):

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= (x_1, x_2, 1) \\ u_2 &= (x_1, x_2, 2) \end{aligned} \right\} - \text{паралельні або кратні}$$

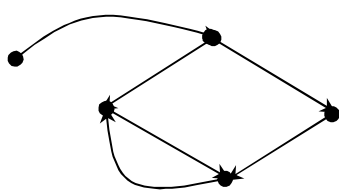
$$u_3 = (x_2, x_1, 1)$$

Тоді, коли зв'язок між вершинами не позначений стрілками, його називають **ребром** графа, причому початок  $x_i$  і кінець  $x_j$  ребра не розрізняють, тобто пара  $(x_i, x_j)$  є не впорядкованою.

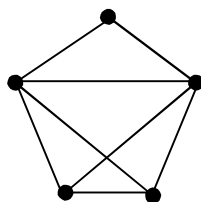
Якщо дуги  $(x_i, x_j, n)$  та  $(x_j, x_i, n)$  є різними, то ребро – це підмножина виду  $\{(x_i, x_j, n), (x_j, x_i, n)\} \subset \Gamma$ , причому номери  $n$  – однакові.



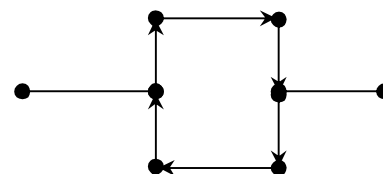
Графи бувають неорієнтованими, орієнтованими та змішаними:



орієнтований



неорієнтований



змішаний

### 2.1.2. Ізоморфізм графів. Підграф. Суграф. Частковий граф

Нехай  $G = (X, \Gamma)$  і  $G' = (X', \Gamma')$  – графи і  $h: G \rightarrow G'$  – взаємно однозначна відповідність.

**Означення 2.1.5.** Відображення  $h$  називають **ізоморфізмом графів**  $G$  і  $G'$ , якщо для довільних вершин  $x_i$  і  $x_j$  графа  $G$  їх образи  $h(x_i)$  і  $h(x_j)$  суміжні у графі  $G'$  тоді і тільки тоді, коли  $x_i$  і  $x_j$  суміжні в  $G$ .

Якщо таке відображення існує, то графи  $G$  і  $G'$  називають **ізоморфними**. Відношення ізоморфізму графів є відношенням еквівалентності.

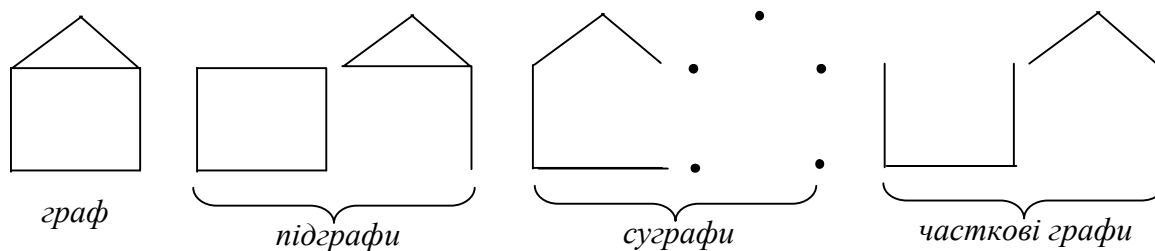
**Означення 2.1.6.** Підграфом  $G'(X', \Gamma')$  графа  $G(X, \Gamma)$  називають граф, у якого  $X' \subset X$ ,  $\Gamma' = \Gamma \cap (X' \times X' \times \mathbb{N})$ , тобто ребро  $(x_i, x_j)$  міститься в  $\Gamma'$  лише тоді, якщо  $x_i$  та  $x_j$  містяться в  $X'$ , граф  $G$  називається **надграфом** графа  $G'$ .

**Означення 2.1.7.** Якщо всі вершини  $X' = X$  графа  $G$  присутні у підграфі  $G'$ , то  $G'$  називають **остовним підграфом**  $G$  або **суграфом**.

**Означення 2.1.8.** Частковим графом  $G'(X', \Gamma')$  графа  $G(X, \Gamma)$  називають граф, у якого  $X' \subset X$ ,  $\Gamma' \subset \Gamma$ .

Іншими словами, суграф отримуємо з графа видаленням деякої кількості дуг із збереженням всіх вершин, підграф – деякої кількості вершин разом з дугами цих вершин, а частковий граф – поєднання двох вищезгаданих операцій.

Наприклад:



Якщо множина вершин  $X'$  графа  $G'$  є найменшою підмножиною  $X$ , що містить всі кінцеві вершини ребер в  $\Gamma'$ , то підграф  $G'$  називають **реберно породженим підграфом** графа  $G$  і позначають  $\langle \Gamma' \rangle$ .

Якщо множина ребер  $\Gamma'$  графа  $G'$  є найбільшою підмножиною  $\Gamma$  такою, що кінцеві вершини всіх його ребер належать  $X'$ , то  $G'$  називають **вершинно породженим підграфом** графа  $G$ .

**Означення 2.1.9.** Граф  $\bar{G} = (X, \Gamma')$  називають **доповненням** простого графа  $G = (X, \Gamma)$  якщо ребро  $(x_i, x_j)$  входить в  $\Gamma'$  лише тоді, коли воно не входить в  $\Gamma$ .

### 2.1.3. Числові характеристики графа

**Означення 2.1.10.** **Напівстепенем виходу**  $p$  вершини  $x$  називають кількість вихідних з неї дуг.

**Означення 2.1.11.** **Напівстепенем входу**  $q$  вершини  $x$  називають кількість вхідних до неї дуг.

**Означення 2.1.12.** **Степенем (валентністю)** вершини  $x$  називають суму її вхідних та вихідних дуг.

$$st(x) = p + q.$$

Вершину, степінь якої дорівнює 0, називають **ізолюваною**. Вершину, степінь якої дорівнює 1, називають **висячою**.

Граф, всі вершини якого мають однаковий степінь, називають **регулярним** або **однорідним**.

**Лема про рукостискання.** Сума степенів всіх вершин графа є парним числом.

**Наслідок.** У довільному графі кількість вершин непарного степеня – число парне.

**Теорема 2.1.1.** Максимальна кількість ребер у плоскому графі обчислюється за формулою  $|\Gamma|_{\max} = 3(|\Gamma| - 2)$ .

**Теорема 2.1.2.** Кількість ребер у повному графі обчислюється за формулою  $|\Gamma| = \frac{|X|(|X| - 1)}{2}$ .

**Теорема 2.1.3.** Кількість ребер у регулярному плоскому графі обчислюється за формулою  $|\Gamma| = \frac{|X|r}{2}$ , де  $r$  – показник регулярності графа (ступінь всіх вершин).

**Теорема 2.1.4.** Найбільша кількість ребер у графі, який не має трикутних граней, обчислюється за формулою  $|\Gamma| = \frac{|X|^2}{4}$ .

**Теорема 2.1.5.** Максимальна кількість ребер у повному дводольному графі обчислюється за формулою  $|\Gamma|_{\max} = mn$ , де  $m = |X_1|$ ,  $n = |X_2|$ .

**Теорема 2.1.6.** Стала залежність між кількістю вершин, ребер і граней плоского графа визначається за **формулою Ейлера**:  $S_0 + S_1 - S_2 = 2$ , де  $S_0$  – кількість вершин,  $S_1$  – кількість ребер, а  $S_2$  – кількість граней графа.

#### 2.1.4. Маршрути незамкнені (ланцюги, шляхи) і замкнені (цикли, контури). Повнота. Зв'язність. Сильна зв'язність

Коли задають або шукають певну послідовність ребер (дуг), то говорять про маршрути у графах..

**Означення 2.1.13.** Скінченну послідовність ребер (дуг) графа  $u_1, u_2, \dots, u_n$  (не обов'язково різних) називають **маршрутом довжини  $n$** , якщо існує послідовність вершин  $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$  (не обов'язково різних), таких що  $u_i : (x_{i-1}, x_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Вершини  $x_1$  і  $x_{n+1}$  називають **кінцевими** або **термінальними**.

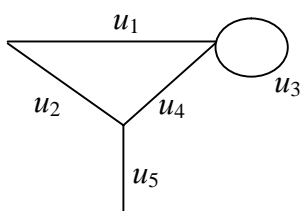
**Означення 2.1.4.** Маршрут називають **відкритим** або **незамкненим**, якщо  $x_1 \neq x_{n+1}$  і **замкненим** у протилежному випадку.

**Означення 2.1.5.** Незамкнений маршрут, у якого немає ребер (дуг), що повторюються, називають **ланцюгом** для неорієнтованого і **шляхом** для орієнтованого графа.

**Означення 2.1.6.** Замкнений маршрут, у якого немає ребер (дуг), що повторюються, називають **циклом** для неорієнтованого і **контуром** для орієнтованого графа.

Кажуть, що граф **ациклічний** або **без контурний**, якщо він не має циклів чи контурів.

Наприклад,



$u_1, u_4, u_2, u_1, u_3$  – незамкнений маршрут;

$u_1, u_4, u_5, u_5, u_2$  – замкнений маршрут;

$u_1, u_4, u_5$  – ланцюг;

$u_1, u_4, u_2$  – цикл.

Граф називають **повним**, якщо будь-які його дві вершини суміжні.

Орієнтований граф  $G=(X, \Gamma)$  називають **повним**, якщо з того, що  $(x_i, x_j) \in \Gamma$  слідує, що  $(x_j, x_i) \in \Gamma$ .

**Означення 2.1.7.** Неорієнтований граф  $G=(X, \Gamma)$  називають **зв'язним**, якщо в ньому існує ланцюг між кожною парою вершин.

**Властивості зв'язних графів:**

- 1) граф зв'язний тоді і тільки тоді, коли множину його вершин  $X$  не можна розбити на дві непорожні підмножини  $X_1$  та  $X_2$  так, що дві граничні точки кожного ребра були в одній і тій самій множині;
- 2) у зв'язному графі довільні два шляхи максимальної довжини мають спільну вершину;

3) якщо граф  $G=(X,\Gamma)$  – зв’язний, то граф  $G'=(X,\Gamma-u)$ , отриманий в результаті видалення циклічного ребра  $u$ , також зв’язний.

**Означення 2.1.8.** Орієнтований граф називають **зв’язним**, якщо зв’язним є неорієнтований граф, що лежить в його основі.

**Означення 2.1.9.** Орієнтований граф  $G=(X,\Gamma)$  називають **сильно зв’язним**, якщо для кожної пари різних вершин  $x_i$  і  $x_j$  існує шлях з  $x_i$  до  $x_j$  і навпаки – з  $x_j$  до  $x_i$ .

### 2.1.5. Способи задання графа

Існує три основних способи задання графа:

- геометричний;
- табличний;
- абстрактний
- матричний

Геометричний – найпоширеніший спосіб задання графів, тому що він є зручним, наочним і цим способом можна задати довільний плоский граф.

Для початку введемо визначення евклідового простору  $(\mathcal{E}^n)$  – це множина послідовностей із  $n$  дійсних чисел  $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , у якій відстань між довільними двома

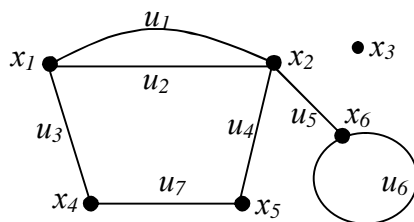
точками  $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$  та  $y=(y_1, y_2, \dots, y_n)$  визначена так:  $d(x; y) = \left[ \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right]^{1/2}$ .

Простою незамкненою кривою в евклідовому просторі називають неперервну криву, що самонеперетинається і з’єднує дві різні точки в  $(\mathcal{E}^n)$  (тобто криву, отриману неперервною деформацією прямолінійного відрізка). Аналогічно простою замкненою кривою називають неперервну криву, яка самонеперетинається і кінцеві точки якої співпадають.

**Означення 2.1.10.** **Геометричний граф** у просторі  $(\mathcal{E}^n)$  – це множина  $X = \{x\}$  точок простору  $(\mathcal{E}^n)$  і множина  $\Gamma = \{u_i\}$  простих кривих, які задовольняють такі умови:

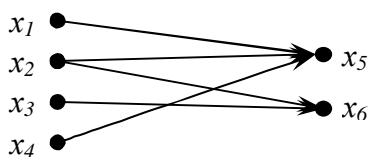
- 1) кожна замкнена крива в  $\Gamma$  містить лише одну точку з множини  $X$ ;
- 2) кожна незамкнена крива в  $\Gamma$  містить лише дві точки з множини  $X$ , які є її граничними точками;
- 3) криві в  $\Gamma$  не мають спільних точок, за виключенням точок множини  $X$ .

Отже, геометричний граф – це проста конфігурація чи структура в просторі  $\mathcal{E}^n$ , яка складається з множини точок взаємопов’язаних множиною кривих, які є неперервними і самонеперетинаються. Нагадаємо, що для геометричного зображення орієнтованого графа використовують стрілки.



**Граф G**

$x_i$  - геометричні вершини;  
 $u_j$  - геометричні ребра.



Дводольний граф задають аналогічно стрілочному способу задання відношень:

Хоча багато графів, які представляють реальні об’єкти (після їх ідеалізації) є геометричними графами, з точки зору теорії графів їх єдиною структурною особливістю є те,



що з кожним ребром пов'язані дві геометричні вершини (які можуть в співпадати). Теорія графів побудована із вираховуванням цієї особливості і не враховує реальної природи ребер та вершин.

Ребра	Відповідні вершини
$u_1$	$x_1, x_2$
$u_2$	$x_1, x_2$
$u_3$	$x_1, x_4$
$u_4$	$x_2, x_5$
$u_5$	$x_2, x_6$
$u_6$	$x_6, x_6$
	$x_3$

Отже для опису геометричного графа можна подати **таблицю**, у якій в першому стовпці записують ребра (дуги), а у другому – інцидентні їм вершини. Нумерація ребер та вершин, задання їх даною таблицею містить всю інформацію про даний геометричний граф.

*Наприклад*, для графа, побудованого геометричним способом вище, таблиця матиме такий вигляд.

Введемо поняття неупорядкованого добутку множини на себе.

Нагадаємо, що впорядкованим (декартовим прямим) добутком множини  $S$  на себе  $S \times S$  називають множину впорядкованих пар  $(S_1, S_2)$ ,  $S_1, S_2 \in S$ . Тут  $(S_1, S_2)$  і  $(S_2, S_1)$  – різні елементи, якщо  $S_1 \neq S_2$ . Символом  $\&$  позначимо неупорядковану пару елементів –  $(S_1 \& S_2) = (S_2 \& S_1)$ , а неупорядкований добуток позначимо  $S\&S$ .

Якщо  $S \times S$  складається з  $k^2$  впорядкованих пар, то  $S\&S$  – з  $k(k+1)/2$  різних неупорядкованих пар.

**Означення 2.1.11.** **Абстрактний граф** – це сукупність непорожньої множини  $X$ , ізольованої від неї множини  $\Gamma$  (можливо і порожньої) і відображення  $\Phi$  множини  $\Gamma$  на  $X \& X$ . Елементи множини  $X$  називають вершинами графа, а  $\Gamma$  – ребрами.  $\Phi$  називають **відображенням інцидентності** графа:  $\Phi(u) = x_1 \& x_2$  – ребро  $u$  інцидентне кожній з вершин  $x_1$  і  $x_2$  і навпаки. Часом відображення  $\Phi$  не задають у явному вигляді, а записують  $u \sim (x_1 \& x_2)$  і читають: “ребро  $u$  з'єднує вершини  $x_1$  і  $x_2$ ”.

Якщо  $X$  і  $\Gamma$  – скінченні множини (порожня множина теж скінченна), то граф  $G(X, \Gamma)$  – скінчений. У протилежному випадку кажуть, що граф нескінчений.

Введення абстрактного графа дає змогу зберегти найсуттєвіші комбінаторні характеристики графа, на відміну від геометричного.

*Наприклад*, граф  $G$ , наведений вище можна зобразити абстрактним способом так:

$$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}, \Gamma = \{(x_1 \& x_2, 1), (x_1 \& x_2, 2), (x_1 \& x_4), (x_2 \& x_5), (x_2 \& x_6), (x_6 \& x_6)\}.$$

**Матричне** зображення графів передбачає побудову різних видів матриць – інциденцій, суміжності вершин, суміжності ребер, циклів, розрізів, шляхів, доступності, ваг тощо. Розглянемо деякі з них.

Нехай  $G$  – граф, який має  $n$  вершин і  $m$  ребер. Графу  $G$  можна зіставити **матрицю інциденцій** розміром  $n \times m$ , рядки і стовпці якої відповідають вершинам та ребрам графа відповідно. Розглянемо випадок неорієнтованого графа:

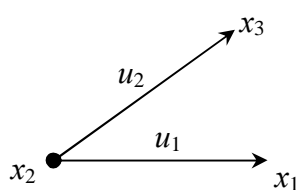
Елемент матриці  $a_{ij}$  набуває значення 1 або 0 залежно від того, інцидентне  $j$ -е ребро  $i$ -й вершині чи ні. Для петлі всі елементи стовпця дорівнюють нулеві.

*Наприклад*, вище згаданий граф  $G$  має таку матрицю інциденцій:

$$G = \begin{matrix} & \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Матриця інциденцій не вказує на існування петлі, тому при такому способі задання графів слід виключати графи з петлями.

При описі орієнтованих графів елементів 0 і 1 недостатньо, оскільки дуга може бути інцидентною даній вершині і спрямована до неї, інцидентною даній вершині і спрямованою від неї, неінцидентною даній вершині. Тому елементи матриць можуть набувати значень: -1, 1 та 0.



$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} u_1 & u_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

**Матриця суміжності вершин** має розмірність  $n \times n$ , де  $n$  – кількість вершин графа. Елементи матриці неорієнтованого графа визначають так:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо вершини } x_i \text{ та } x_j \text{ – суміжні;} \\ 0, & \text{якщо вершини } x_i \text{ та } x_j \text{ – несуміжні.} \end{cases}$$

Елементами матриці орієнтованого графа можуть бути такі числа:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо вершини } x_i \text{ та } x_j \text{ – суміжні, і дуга, що їх з'єднує, спрямована від } x_i; \\ -1, & \text{якщо вершини } x_i \text{ та } x_j \text{ – суміжні, і дуга, що їх з'єднує, спрямована до } x_i; \\ 0, & \text{якщо вершини } x_i \text{ та } x_j \text{ – несуміжні.} \end{cases}$$

**Матриця суміжності ребер** має розмірність  $t \times t$ , де  $t$  – кількість ребер графа. Елементи матриці неорієнтованого графа визначають так:

**Матриця суміжності вершин** має розмірність  $n \times n$ , де  $n$  – кількість вершин графа. Елементи матриці неорієнтованого графа визначають так:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо вершини } x_i \text{ та } x_j \text{ – суміжні;} \\ 0, & \text{якщо вершини } x_i \text{ та } x_j \text{ – несуміжні.} \end{cases}$$

**Матриця циклів** має стільки рядків, скільки незалежних циклів у графа і стільки стовпців, скільки у ньому ребер (дуг). Елементи матриці циклів визначають так:

а) неорієнтований граф:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо цикл } c_i \text{ проходить через ребро } u_j; \\ 0, & \text{якщо цикл } c_i \text{ не проходить через ребро } u_j. \end{cases}$$

б) орієнтований граф:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо цикл } c_i \text{ проходить через дугу } u_j, \text{ і напрямок обходу } c_i \text{ співпадає з напрямком } u_j; \\ -1, & \text{якщо цикл } c_i \text{ проходить через дугу } u_j, \text{ і напрямки } c_i \text{ і } u_j \text{ не співпадають;} \\ 0, & \text{якщо цикл } c_i \text{ не проходить через дугу } u_j. \end{cases}$$

**Матриця розрізів** має стільки рядків, скільки простих розрізів у графі і стільки стовпців, скільки у ньому ребер. Елементи матриці розрізів визначають для неорієнтованого графа так:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо ребро } u_j \text{ належить розрізу } k_i; \\ 0, & \text{якщо ребро } u_j \text{ не належить розрізу } k_i. \end{cases}$$

## ЛІТЕРАТУРА

1. Басакер Р., Саати Т. Конечные графы и сети. – М.: Наука, 1974. – С. 3-16, 136-143.
2. Белов В.В., Воробьев Е.М., Шаталов В.Е. Теория графов. – М.: Высшая школа, 1976. – С.7-14.
3. Дискретная математика для программистов / Ф.А.Новиков. – СПб.: Питер, 2002. – С.189-198.
4. Капітонова Ю.В., Кривий С.Л., Летичевський О.А., Луцький Г.М., Печорін М.К. Основи дискретної математики. – К.: Наукова думка, 2002. – С.224-229, 236-243.
5. Свами М., Тхуласираман К. Графы, сети и алгоритмы. – М.: Мир, 1984. – С.11-23, 78-84.

## Тема 2.2. ОПЕРАЦІЇ НАД ГРАФАМИ

### 2.2.1. Поняття графа

Існують різні перетворення заданих графів, в результаті яких отримують нові графи. Ці перетворення називають операціями над графами.

**2.2.1.1. Операція вилучення ребра (дуги).** Якщо  $G(X, \Gamma)$  – заданий граф і  $u \in \Gamma$  – його ребро (дуга), то граф  $G_1(X, \Gamma \setminus \{u\})$  називають графом, отриманим з  $G$  вилученням ребра (дуги). Кінцеві вершини вилученого ребра (дуги) із множини  $X$  не вилучаються.

**2.2.1.2. Операція вилучення вершини.** Якщо  $G(X, \Gamma)$  – заданий граф і  $x \in X$  – його вершина, то граф  $G_2(X \setminus \{x\}, \Gamma)$  називають графом, отриманим з  $G$  вилученням вершини, якщо із множини  $\Gamma$  вилучено всі ребра (дуги), інцидентні вилученій вершині.

**2.2.1.3. Операція введення ребра (дуги).** Якщо  $G(X, \Gamma)$  – заданий граф,  $x_1, x_2 \in X$  – його вершини, причому  $(x_1, x_2) \notin \Gamma$ , то граф  $G_3(X, \Gamma \cup \{(x_1, x_2)\})$  називають графом, отриманим з  $G$  введенням ребра (дуги).

**2.2.1.4. Операція введення вершини.** Якщо  $G(X, \Gamma)$  – заданий граф,  $(y, z) \in \Gamma$  – його ребро (дуга) і  $x \notin X$ , то граф  $G_4(X \cup \{x\}, \Gamma)$  називають графом, отриманим з  $G$  введенням вершини, якщо із множини  $\Gamma$  вилучено ребро (дугу)  $(y, z)$  і введено два нових –  $(y, x)$  і  $(x, z)$ .

**2.2.1.5. Операція об'єднання графів.** Якщо  $G(X, \Gamma)$  і  $G^*(X^*, \Gamma^*)$  – задані графи, то граф  $G_5(X \cup X^*, \Gamma \cup \Gamma^*)$  називають об'єднанням графів  $G$  та  $G^*$ .

**2.2.1.6. Операція перерізу (перетину) графів.** Якщо  $G(X, \Gamma)$  і  $G^*(X^*, \Gamma^*)$  – задані графи, то граф  $G_6(X \cap X^*, \Gamma \cap \Gamma^*)$  називають перерізом графів  $G$  та  $G^*$ .

**2.2.1.7. Операція віднімання графів.** Якщо  $G(X, \Gamma)$  і  $G^*(X^*, \Gamma^*)$  – задані графи, то граф  $G_7(X, \Gamma \setminus \Gamma^*)$  називають різницею графів  $G$  та  $G^*$ .

**2.2.1.8. Операція строгої диз'юнкції графів.** Якщо  $G(X, \Gamma)$  і  $G^*(X^*, \Gamma^*)$  – задані графи, то реберно породжений граф  $G_8: [\Gamma \oplus \Gamma^*]$  називають симетричною різницею графів  $G$  та  $G^*$ .

**2.2.1.9. Операція множення графів.** Якщо  $G(X, \Gamma)$  і  $G^*(X^*, \Gamma^*)$  – задані графи, то граф  $G_8(X \times X^*, \Gamma^{**})$  називають добутком графів  $G$  та  $G^*$ , якщо  $((x_i^{(1)}, x_k^{(2)}), (x_j^{(1)}, x_l^{(2)})) \in \Gamma^{**}$  тоді і тільки тоді, коли  $(x_i^{(1)}, x_j^{(1)}) \in \Gamma$ ,  $(x_k^{(2)}, x_l^{(2)}) \in \Gamma^*$ .

Для операції над матрицями при визначенні об'єднання, перетину, різниці, симетричної різниці використовують правила:

$$\begin{array}{cccc} 0 \cup 0 = 0 & 0 \cap 0 = 0 & 0 \setminus 0 = 0 & 0 \oplus 0 = 0 \\ 0 \cup 1 = 1 & 0 \cap 1 = 0 & 0 \setminus 1 = 0 & 0 \oplus 1 = 1 \\ 1 \cup 0 = 1 & 1 \cap 0 = 0 & 1 \setminus 0 = 1 & 1 \oplus 0 = 1 \\ 1 \cup 1 = 1 & 1 \cap 1 = 1 & 1 \setminus 1 = 1 & 1 \oplus 1 = 0 \end{array}$$

Щоб розглянути матрично добуток графів, впорядковують елементи  $X \times X^*$  так:

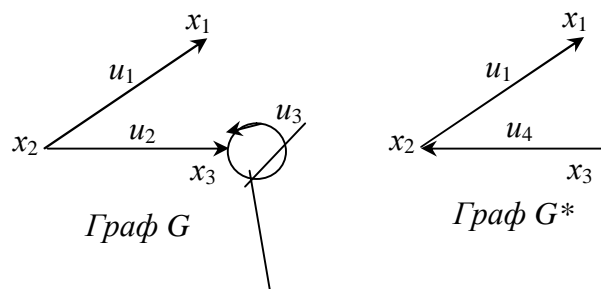
$$\begin{pmatrix} (x_1^{(1)}, x_1^{(2)}) & \dots & (x_1^{(1)}, x_l^{(2)}) \\ (x_2^{(1)}, x_1^{(2)}) & \dots & (x_2^{(1)}, x_l^{(2)}) \\ \dots & \dots & \dots \\ (x_m^{(1)}, x_1^{(2)}) & \dots & (x_m^{(1)}, x_l^{(2)}) \end{pmatrix},$$

де  $n$  і  $m$  – кількості вершин графів  $G$  та  $G^*$ , тобто  $|X| = m$ ,  $|X^*| = l$ .

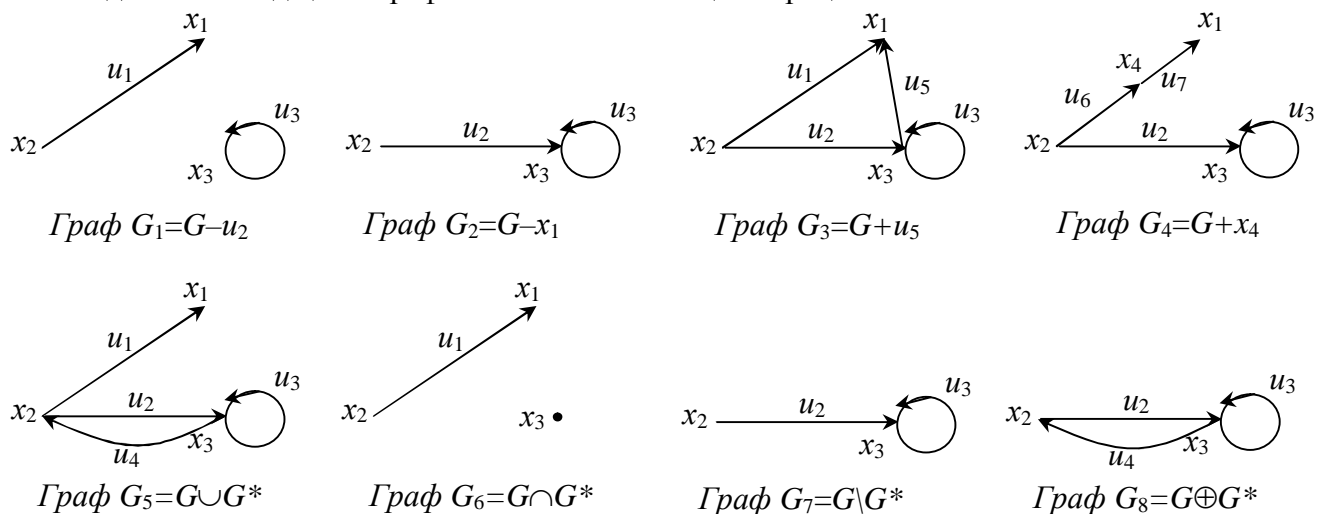
Тоді якщо  $A = \|a_{ij}^{(1)}\|$ ,  $A^* = \|a_{ij}^{(2)}\|$  – матриці суміжностей вершин графів  $G$  та  $G^*$  відповідно, то  $A^{**} = \|b_{(i,k),(j,l)}\| = a_{ij}^{(1)} \cdot a_{kl}^{(2)}$  – матриця суміжності вершин графа  $G^{**} = G \times G^*$ :

$$A^{**} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} A^* & a_{12}^{(1)} A^* & \dots & a_{1m}^{(1)} A^* \\ a_{21}^{(1)} A^* & a_{22}^{(1)} A^* & \dots & a_{2m}^{(1)} A^* \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}^{(1)} A^* & a_{m2}^{(1)} A^* & \dots & a_{ml}^{(1)} A^* \end{pmatrix}.$$

Наприклад, нехай задано графи  $G$  та  $G^*$  так:



Здійснимо над цими графами всі описані вище операції.

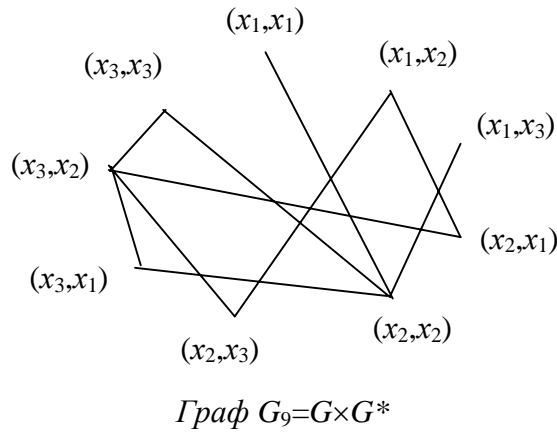


Для геометричного зображення графа добутку, не беручи до уваги орієнтацію графів  $G$  та  $G^*$ , побудуємо спочатку його матрицю суміжності вершин за матрицями суміжності вершин графів  $G$  та  $G^*$ .

$$G = \begin{matrix} & x_1 & x_2 & x_3 \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}, \quad G^* = \begin{matrix} & x_1 & x_2 & x_3 \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$G_9 = \begin{matrix} & \begin{matrix} (x_1, x_1) \\ (x_1, x_2) \\ (x_1, x_3) \end{matrix} \\ \begin{matrix} (x_1, x_1) \\ (x_1, x_2) \\ (x_1, x_3) \\ (x_2, x_1) \\ (x_2, x_2) \\ (x_2, x_3) \\ (x_3, x_1) \\ (x_3, x_2) \\ (x_3, x_3) \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{matrix} \begin{matrix} (x_2, x_1) \\ (x_2, x_2) \\ (x_2, x_3) \end{matrix} \\ \begin{matrix} (x_3, x_1) \\ (x_3, x_2) \\ (x_3, x_3) \end{matrix} \end{matrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} (x_1, x_1) \\ (x_1, x_2) \\ (x_1, x_3) \\ (x_2, x_1) \\ (x_2, x_2) \\ (x_2, x_3) \\ (x_3, x_1) \\ (x_3, x_2) \\ (x_3, x_3) \end{matrix} \\ \begin{matrix} (x_1, x_1) \\ (x_1, x_2) \\ (x_1, x_3) \\ (x_2, x_1) \\ (x_2, x_2) \\ (x_2, x_3) \\ (x_3, x_1) \\ (x_3, x_2) \\ (x_3, x_3) \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Кожну вершину графа зображуємо впорядкованою парою і з'єднуємо відповідні пари за матрицею суміжності вершин.



## Тема 2.3. ДЕРЕВА І ЦИКЛИ У ГРАФАХ

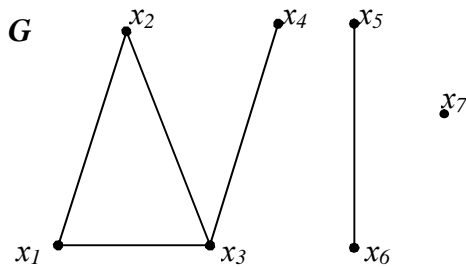
### 2.3.1. Компоненти зв'язності

Нагадаємо, що граф  $G$  називають **зв'язним**, якщо у ньому існує шлях між кожною парою вершин.

Позначимо  $X_a$  множину, що складається з даної вершини  $a$  і всіх тих вершин графа, що можуть бути з'єднані з нею ланцюгом.

**Означення 2.3.1.** **Компонента зв'язності** чи просто **компонента** – це підграф, породжений множиною типу  $X_a$  або вершинно породжений підграф  $\langle X_a \rangle$ .

Розглянемо незв'язний неорієнтований граф  $G(X, \Gamma)$ .



Множину його вершин  $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$  можна розбити на такі підмножини:

$$X_1 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}; \quad X_2 = \{x_5, x_6\}; \quad X_3 = \{x_7\},$$

так, що вершинно породжені підграфи  $\langle X_1 \rangle$ ,  $\langle X_2 \rangle$ ,  $\langle X_3 \rangle$  були зв'язними, і жодна вершина з підмножини  $X_i$  не була суміжною з жодною

вершиною підмножини  $X_j$ ,  $i \neq j$ .

Очевидно, виконуються такі властивості для підмножин  $X_i$ , які утворюють розбиття множини  $X$ :

- 1)  $X_i \neq \emptyset$ ;
- 2)  $X_i \neq X_j \Rightarrow X_i \cap X_j = \emptyset$ , ( $i \neq j$ );
- 3)  $\cup X_i = X$ .

Підграфи  $\langle X_1 \rangle$ ,  $\langle X_2 \rangle$ ,  $\langle X_3 \rangle$  – компоненти зв'язності графа  $G$ . Кожен з них – максимально зв'язний підграф графа  $G$ , тобто  $\langle X_i \rangle$  не є власним підграфом будь-якого іншого підграфа  $\langle X_j \rangle$ .

Отже, наведений на прикладі граф  $G$  має три компоненти зв'язності.

**Теорема 2.3.1.** Граф буде зв'язним лише у тому випадку, якщо він складається з однієї компоненти зв'язності.

### 2.3.2. Ранг та цикломатичне число графа

Розглянемо граф  $G$  на  $n$  вершинах і  $m$  ребрах, який має  $p$  компонент зв'язності.

**Означення 2.3.2.** *Рангом графа  $G$*  називають число, яке дорівнює різниці між кількістю його вершин і компонент зв'язності:

$$\rho(G) = n - p.$$

**Означення 2.3.3.** *Цикломатичним числом графа  $G$*  називають число, яке дорівнює різниці між кількістю його ребер і вершин плюс кількість компонент зв'язності:

$$v(G) = m - n + p.$$

Зауважимо, що існує зв'язок між рангом і цикломатичним числом графа:

$$\rho(G) + v(G) = m.$$

Ранг і цикломатичне число – найважливіші характеристики графа.

**Теорема 2.3.2.** Нехай  $G'$  граф, одержаний з графа  $G$  додаванням нового ребра між вершинами  $x_i$  та  $x_j$ . Тоді:

1) якщо  $x_i = x_j$  чи вони можуть бути з'єднані ланцюгом в  $G$ , то

$$\rho(G') = \rho(G) \text{ та } v(G') = v(G) + 1;$$

2) якщо  $x_i \neq x_j$  чи вони не можуть бути з'єднані ланцюгом в  $G$ , то

$$\rho(G') = \rho(G) + 1 \text{ та } v(G') = v(G).$$

*Доведення.*

Якщо виконується умова 1), то додавання нового ребра кількості компонент зв'язності графа не змінює. Очевидно, що  $n' = n$ ,  $m' = m + 1$ ,  $p' = p$ .

Тому

$$\rho(G') = n' - p' = n - p = \rho(G),$$

$$v(G') = m' - n' + p' = (m + 1) - n + p = (m - n + p) + 1 = v(G) + 1.$$

Випадок 1) доведено.

Якщо ж виконується умова 2), то додане ребро – перешийок між компонентами зв'язності графа  $G$ , тому воно зменшує їх кількість на 1.

У цьому випадку  $n' = n$ ,  $m' = m + 1$ ,  $p' = p - 1$ .

Тоді

$$\rho(G') = n' - p' = n - (p - 1) = (n - p) + 1 = \rho(G) + 1,$$

$$v(G') = m' - n' + p' = (m + 1) - n + (p - 1) = m - n + p = v(G).$$

Випадок 2) доведено. Теорему доведено ■.

**Наслідок.**  $\rho(G) \geq 0$ ,  $v(G) \geq 0$ .

*Доведення.*

Якщо граф – вироджений, тобто має лише вершини, а ребра – відсутні, то  $\rho(G) = 0$  і  $v(G) = 0$ . За теоремою 2.3.2 додавання нового ребра збільшує або  $\rho(G)$ , або  $v(G)$ . Отже, числа  $\rho(G)$  та  $v(G)$  можуть лише зростати.

Наслідок доведено ■.

Підсумовуючи вище сказане, бачимо, що цикломатичне число графа вказує на **кількість** у ньому **циклів**.

### 2.3.3. Дерева і ліси

Серед зв'язних графів найпростішу структуру мають дерева.

**Означення 2.3.4.** *Деревом* називають скінчений зв'язний граф без циклів, який має щонайменше дві вершини.

Граф є деревом тоді і тільки тоді, коли кожна пара різних його вершин з'єднана одним і тільки одним ланцюгом.

Видалення довільного ребра з дерева робить його незв'язним, оскільки це ребро є складовою єдиного ланцюга, що з'єднує будь-які дві точки.

**Теорема 2.3.3.** Для графа  $G$ , який має  $n$  ( $n > 1$ ) вершин і  $m$  ребер, наступні твердження є еквівалентними:

- 1)  $G$  є деревом;
- 2) є лише один ланцюг між будь-якими двома вершинами в  $G$ ;
- 3)  $G$  є зв'язним і  $m=n-1$ ;
- 4)  $G$  не має циклів і  $m=n-1$ ;
- 5)  $G$  не має циклів і при з'єднанні ребром довільних двох несуміжних вершин отримуємо граф, який має лише один цикл;
- 6)  $G$  є зв'язним проте втрачає цю властивість, якщо вилучити одне ребро.

**Означення 2.3.5.** **Деревом графа  $G$**  називають зв'язний підграф графа  $G$ , що не має циклів.

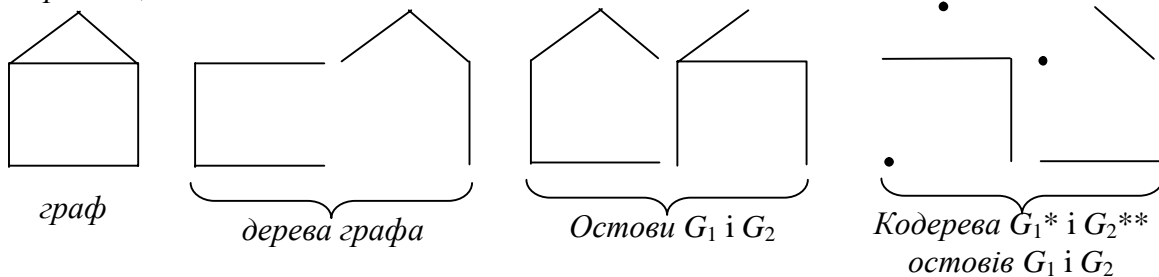
**Означення 2.3.6.** **Остовом** або **покриттям** графа  $G$  називають дерево графа  $G$ , що містить всі вершини графа  $G$ .

**Означення 2.3.7.** **Кодерево  $T^*$**  остова  $T$  графа  $G$  – це підграф графа  $G$ , що містить всі вершини графа  $G$  і лише ті ребра, які не входять в  $T$ .

Орієнтований граф  $G$  називається **орієнтованим деревом** (або **прадеревом**), що росте з кореня  $x_0$ , якщо:

- 1) він є деревом без врахування орієнтації;
- 2) з  $x_0$  є орієнтований шлях до всіх інших вершин графа  $G$ .

Наприклад,



Ребра остова графа  $G$  називають **гілками** дерева  $T$ , а ребра відповідно кодерева – **хордами** або **зв'язками**.

**Додання однієї хорди до остова графа вказує на незалежний цикл.**

**Теорема 2.3.4.** Граф  $G$  є зв'язним тоді і тільки тоді, коли він має остов.

**Означення 2.3.8.** **Лісом з  $k$  дерев** називають граф, що не має циклів і складається з  $k$  компонент.

**Теорема 2.3.5.** Кожне дерево з  $n$  вершинами має  $n-1$  ребро.

**Теорема 2.3.6.** Ліс з дерев, який містить  $n$  вершин, має  $n-k$  ребер.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Алферова З.В. Математическое обеспечение экономических расчетов с помощью графов. – М.: Статистика, 1994. – С.18-23.
2. Басакер Р., Саати Т. Конечные графы и сети. – М.: Наука, 1974. – С. 30-34,136-143.
3. Белов В.В., Воробьев Е.М., Шаталов В.Е. Теория графов. – М.: Высшая школа, 1976. – С.43-59.
4. Капітонова Ю.В., Кривий С.Л., Легичевський О.А., Луцький Г.М., Печорін М.К. Основи дискретної математики. – К.: Наукова думка, 2002. – С.230-235, 273-275.
5. Свами М., Тхуласираман К. Графы, сети и алгоритмы. – М.: Мир, 1984. – С.39-40, 105-108.

## Тема 2.4. РОЗФАРБУВАННЯ ГРАФА

### 2.4.1. Задача про чотири фарби. Правильне розфарбування графа

В основу теорії розфарбування графа лягла задача “Про чотири фарби”. Полягала вона в тому, щоб на політико-адміністративній карті розфарбувати країни так, щоб ніякі дві країни, що мають спільний кордон, не були розфарбовані однаковою фарбою, чотирма фарбами. При цьому спільний кордон, який зображений точкою, а не лінією, не враховувався.

Ця задача зводилася до задачі про розфарбування плоского графа: маючи деяку кількість фарб, розфарбувати кожну вершину (грань) так, щоб довільні дві суміжні вершини мали різний колір.

Це одна з перших задач теорії графів. Гіпотезу про чотири фарби вперше було висунуто в 1840р. На лекціях Мьобіуса. Нею займався Де Морган (1850р.). У 1878р. Келей не зміг отримати строгого доведення цієї гіпотези. У 1890р. Хівуд довів суперечність і показав, що необхідно п'ять кольорів.

Надалі вважатимемо, що граф  $G$  – плоский, не має кратних ребер і неорієнтований.

Крім розфарбування граней графа існує його реберне і вершинне розфарбування.

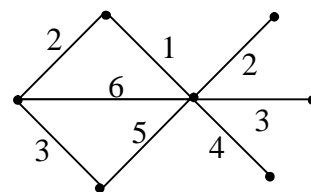
**Означення 2.4.1.** *Реберним  $k$ -розфарбуванням* графа називають присвоєння ребрам графа  $k$  різних фарб.

**Означення 2.5.2.** Граф  $G(X, \Gamma)$  називають *правильно реберно розфарбованим*  $k$  фарбами, якщо кожне його ребро розфарбоване однією з  $k$  фарб і з того що два ребра  $u_i$  і  $u_j$  є суміжними слідує, що вони розфарбовані різними фарбами.

**Означення 2.5.3.** *Хроматичний індекс* або *реберне хроматичне число*  $X'(G)$  графа  $G$  – це мінімальне число  $k$ , для якого граф має правильне реберне  $k$ -розфарбування.

**Теорема Візинга.** Якщо  $G(X, \Gamma)$  – простий граф, то або  $X'(G) = \Delta$ , або  $X'(G) = \Delta + 1$ , де  $\Delta$  – максимальний степінь вершини у графі  $G$  (для дводольного графа  $X'(G) = \Delta$ ).

*Наприклад*, у заданого графа максимальний степінь вершини 6, тобто 6 ребер є суміжними і повинні бути розфарбовані різними фарбами, тому менше, ніж 6 фарб неможливо використати для правильного розфарбування. На рисунку наведено один із способів правильного реберного розфарбування заданого графа.



**Означення 2.5.4.** Граф  $G(X, \Gamma)$  називають *правильно вершинно розфарбованим*  $\lambda$  фарбами, якщо кожна його вершина розфарбована однією з  $\lambda$  фарб і якщо з  $(x_i, x_j) \in \Gamma$  слідує, що  $x_i$  і  $x_j$  розфарбовані різними фарбами.

**Означення 2.5.5.** Граф  $G(X, \Gamma)$  називають  *$p$ -хроматичним*, якщо існує правильне розфарбування вершин графа  $G$   $p$  фарбами. Мінімальне з таких  $p$  називають *хроматичним числом графа*.

### 2.5.2. Визначення хроматичного числа. Хроматичний поліном

Для обчислення хроматичного числа вводять функцію  $\pi(G, \lambda)$ .

**Означення 2.5.6.** Для заданого графа  $G$  і натурального числа  $\lambda$  через  $\pi(G, \lambda)$  (хроматичний поліном) позначається кількість всіх правильних розфарбувань графа  $G$  з допомогою  $\lambda$  фарб.

Слід відмітити що наступна формула справедлива для достатньо малих  $S_0$ .

**Теорема 2.5.2.** Справедлива формула:

$$\pi(G, \lambda) = \sum_{S, C} (-1)^S \cdot \rho(S, C) \cdot \lambda^C, \text{ де}$$

$S$  – кількість ребер суграфів графа  $G$ ;

$C$  – кількість компонент зв'язаності суграфів графа  $G$ ;

$\rho(S, C)$  – кількість суграфів графа  $G$ .

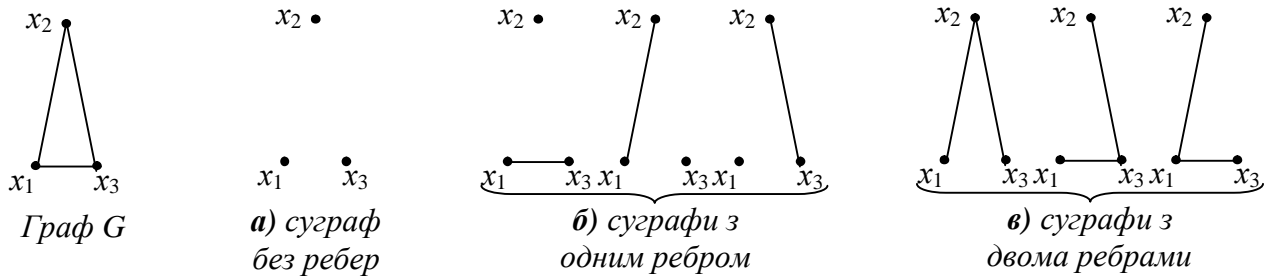


Якщо суграфів немає, то  $\rho(S, C) = 0$ .

Ця формула дає змогу прослідкувати такі властивості функції  $\pi(G, \lambda)$ :

- 1)  $\pi(G, \lambda)$  це многочлен степеня  $S_0$  з коефіцієнтом 1 при старшому члені;
- 2)  $\pi(G, \lambda)$  ділиться на  $\lambda$ .

Нариклад, за теоремою 2.5.2 обчислимо  $\pi(G, \lambda)$  для трикутного графа  $G$ .



Розпишемо кожен з випадків, нагадавши, що сам граф є своїм суграфом (випадок  $\varepsilon$ ):

- а)  $S=0, C=3, \rho(S, C) = 1$
- б)  $S=1, C=2, \rho(S, C) = 3$
- в)  $S=2, C=1, \rho(S, C) = 3$
- г)  $S=3, C=1, \rho(S, C) = 1$ .

Тоді  $\pi(G, \lambda) = \lambda^3 - 3 \cdot \lambda^2 + 3 \cdot \lambda - \lambda = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)$ .

Простим перебором чисел від 1, знаходимо хроматичне число. Підставивши у цю формулу  $\lambda = 1$  або  $\lambda = 2$ , отримаємо, що  $\pi(G, 1) = \pi(G, 2) = 0$ , тобто кількість правильних розфарбувань графа однією чи двома фарбами дорівнює нулеві – однією або двома фарбами граф розфарбовувати не можна. Хроматичне число цього графа є 3, оскільки його підставлення у формулу дало позитивний результат:

$$\pi(G, 3) = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 3! = 6$$

Властивості хроматичних поліномів:

1)  $\pi(G, \lambda) = \pi(G_1, \lambda) \cdot \pi(G_2, \lambda)$  (якщо  $G(\pi, \lambda)$  складається з двох незв'язних частин, то розфарбування можна вибрати незалежно для двох незв'язних графів).

2)  $\pi(G, \lambda) = \frac{1}{\lambda} \pi(G_1, \lambda) \cdot \pi(G_2, \lambda)$  (якщо граф  $G$  отримано з двох графів склеюванням в одній точці  $x_0$ ).

3)  $\pi(G, \lambda) = \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) \pi(G_1, \lambda) \cdot \pi(G_2, \lambda)$  (якщо граф  $G$  отримано з двох незв'язних графів склеюванням по ребру, зовнішньому для обох графів).

4)  $\pi(G, \lambda) = \pi(G_1, \lambda) - \pi(G', \lambda)$  (якщо граф  $G$  отримано з  $G_1$  доданням ребра без зміни вершин,  $G'$  – граф, отриманий з  $G_1$  склеюванням вершин, які інцидентні доданому ребру).

Граф  $G$  є однохроматичним тоді і тільки тоді, коли він не містить ні одного ребра; двохроматичним – тоді і тільки тоді, коли він не містить циклів непарної довжини.

Для розфарбування граней, утворених перетином прямих ліній на площині достатньо двох кольорів.

Необхідною і достатньою умовою розфарбування двома кольорами є те, що кожна вершина повинна мати парний степінь  $\geq 2$ .

## РОЗДІЛ 3. ЗАГАЛЬНА АЛГЕБРА

### Тема 3.1. ГРУПИ

#### 3.1.1. Поняття алгебраїчної операції

Ще в середній школі розглядають різноманітні числові множини:  $N$ ,  $Z$ ,  $Q$ ,  $R$ ,  $C$ . Якщо поставити завдання – проаналізувати, які спільні властивості мають ці множини і чим відрізняються, то прийдемо до висновку, що для цього числові множини слід розглядати не самі по собі, а відносно певних *математичних дій* або *математичних операцій*.

$$N \xrightarrow{(-)} Z \xrightarrow{(\cdot)} Q \xrightarrow{(\sqrt{2})} R \xrightarrow{(\sqrt{-1})} C.$$

Отже, зазначені множини чисел відрізняються одна від одної здійсненністю або нездійсненністю в них тих чи інших математичних операцій.

У цьому ж проявляється і спільність властивостей цих числових множин. Справді, є операції, які здійсненні у кожній з них. Це дві основні дії арифметики – **додавання** і **множення**, відносно яких інші арифметичні дії виступають як залежні, а саме – як обернені. Яку б названих множин ми не взяли, дії додавання і множення можна виконувати над довільними двома елементами цієї множини.

Крім того, основні закони цих дій – комутативний, асоціативний, дистрибутивний – справедливі в кожній з цих множин.

З цього випливає, що однією з найважливіших характеристик числових множин є можливість виконувати над її елементами ті чи інші операції (насамперед,  $+$  і  $*$ ), не виходячи за межі цієї множини.

Наведемо властивості дій додавання і множення.

##### **Властивості додавання:**

- 1) для довільних елементів  $a$  і  $b$  даної множини існує єдиний елемент  $c$  цієї ж множини такий, що  $c = a + b$  ( $c$  називають сумою, а  $a$  і  $b$  – доданками);
- 2) асоціативність додавання:  $(a + b) + c = a + (b + c)$ ;
- 3) для довільного елемента  $a$  даної множини існує єдиний нульовий елемент  $\theta$  такий, що  $a + \theta = a$  (роль  $\theta$  відіграє 0);
- 4) для довільного елемента  $a$  даної множини існує єдиний протилежний елемент  $-a$  такий, що  $a + (-a) = \theta$ .

##### **Властивості множення:**

- 5) для довільних елементів  $a$  і  $b$  даної множини існує єдиний елемент  $c$  цієї ж множини такий, що  $c = a \cdot b$  ( $c$  називають добутком, а  $a$  і  $b$  – множниками);
- 6) асоціативність множення:  $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ ;
- 7) для довільного елемента  $a$  даної множини існує єдиний одиничний елемент  $e$  такий, що  $a \cdot e = a$  (роль  $e$  відіграє 1);
- 8) для довільного елемента  $a$  даної множини існує єдиний обернений елемент  $a^{-1}$  такий, що  $a \cdot a^{-1} = e$ .

Властивості додавання і множення аналогічні, тому їх можна об'єднати, якщо назвати елементи  $\theta$  і  $e$  **нейтральними**, а  $-a$  і  $a^{-1}$  – **симетричними**. Очевидно, нейтральний елемент симетричний сам собі.

**Означення 3.1.1.** Нехай  $M$  – множина елементів довільної природи. Кажуть, що в  $M$  введено якусь **алгебраїчну операцію**, якщо довільним двом елементам з даної множини  $a, b \in M$  поставлено у відповідність єдиний третій елемент  $c \in M$ .

Довільну бінарну операцію позначають  $*$ :

$$a * b = c.$$

Отже, операція  $*$  є **допустимою** і **однозначною**.

#### 3.1.2. Означення і приклади груп

**Означення 3.1.2.** Непорожню множину  $G$  елементів довільної природи, в якій введено якусь бінарну алгебраїчну операцію  $*$ , називають *групою*, якщо виконуються такі умови:

- 1) операція  $*$  – асоціативна:  $(a * b) * c = a * (b * c)$ ;
- 2) існує єдиний нейтральний елемент  $\eta \in G$  такий, що для довільного  $a \in G$ :  
 $a * \eta = a$  і  $\eta * a = a$ ;
- 3) існує єдиний симетричний елемент  $a' \in G$  такий, що для довільного  $a \in G$ :  
 $a * a' = \eta$  і  $a' * a = \eta$ .

Властивості 1)-3) називають *аксіомами групи*.

Очевидно, визначена в групі  $G$  бінарна операція  $*$  не обов'язково комутативна. Якщо ж вона комутативна, то  $G$  називають *комутативною* або *абелевою* групою (Абель – норвезький математик, який вивчав рівняння, теорія яких тісно пов'язана з теорією комутативних груп).

Групу  $G$  називають *скінченною*, якщо множина її елементів – скінченна, і *нескінченною* у протилежному випадку. Кількість елементів скінченної групи називають її *порядком*.

Якщо в групі  $G$  бінарну операцію  $*$  називають додаванням і використовують відповідну символіку (+), то  $G$  називають *адитивною* групою. А якщо в групі  $G$  бінарну операцію  $*$  називають множенням і використовують відповідну символіку ( $\cdot$ ), то  $G$  називають *мультиплікативною* групою. Якщо в групі  $G$  бінарну операцію  $*$  називають додаванням і використовують відповідну символіку (+), то  $G$  називають *адитивною* групою.

Приклади груп.

1. Множина всіх цілих чисел  $\mathbb{Z}$  є абелевою адитивною групою (у  $\mathbb{Z}$  визначена операція додавання, яка асоціативна і комутативна. У множині  $\mathbb{Z}$  існує єдиний нейтральний елемент 0. Кожне ціле число  $a$  має симетричне  $(-a) \in \mathbb{Z}$ . Отже, всі аксіоми групи виконуються).
2. Множина всіх раціональних чисел  $\mathbb{Q}$  і множина всіх дійсних чисел  $\mathbb{R}$  є абелевими адитивними групами.
3. Множина всіх парних чисел є абелевою адитивною групою.
4. Множина всіх додатних раціональних чисел  $\mathbb{Q}_+$  – абелева адитивна група.
5. Множина всіх відмінних від 0 дійсних чисел  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  є абелевою мультиплікативною групою.
6. Множина всіх додатних дійсних чисел  $\mathbb{R}_+$  і множина всіх відмінних від 0 дійсних чисел  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  – абелеві мультиплікативні групи.
7. Послідовність чисел 1 і  $-1$  є абелевою мультиплікативною групою.
8. Множина, що складається з одного числа 0, є абелева адитивна група.

Очевидно, що множина непарних чисел не є групою відносно додавання, бо в ній не визначена операція +: додавання непарних чисел виходить за межі цієї множини (може бути парним числом).

Може статися, що частина  $H$  елементів групи  $G$  є у свою чергу групою. Тоді  $H$  називають *підгрупою* групи  $G$ .

**Означення 3.1.3.** Підмножину  $H$  групи  $G$  називають *підгрупою групи  $G$* , якщо  $H$  є групою відносно бінарної операції  $*$ , визначеної в групі  $G$ .

## Тема 3.2. КІЛЬЦЯ

### 3.2.1. Поняття множини з подвійною композицією

Розглянемо множини, в яких введено одночасно дві алгебраїчні операції. Такі множини називатимемо *множинами з подвійною композицією*.

Очевидно, різні числові множини ( $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$ ) є множинами з подвійною композицією. У кожній з них введено дві алгебраїчні операції – додавання і множення. Ці

операції не є залежними. Вони пов'язані дистрибутивним законом:  $(a+b)c=ac+bc$ , який дає змогу іноді замінити множення додаванням. Обидві операції тісно пов'язані, але кожна з них має своє самостійне значення.

Найважливішими множинами з подвійною композицією є кільця.

### 3.2.2. Числові кільця

**Означення 3.2.1.** Числовою множини  $S$  із введеними у ній операціями додавання і множення називають **числовим кільцем**, якщо операція, обернена до додавання – віднімання – є допустимою у цій множині.

Якщо числове кільце містить 1, то його називають **кільцем з одиницею**. Якщо операція множення в кільці комутативна, то  $S$  – комутативне кільце.

*Приклади кілець:*

- множина цілих чисел  $\mathbb{Z}$  є комутативним кільцем з одиницею відносно визначених у ній операцій додавання і множення;
- множина всіх парних чисел – комутативне кільце без одиниці;
- множини  $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$  – комутативні кільця з одиницею;
- множина, що складається з одного числа 0 є нульовим кільцем.

З означення числового кільця випливають такі його властивості.

1. Якщо числове кільце  $S$  містить число  $a$ , то воно містить і протилежне йому число  $(-a)$ .
2. Будь-яке числове кільце містить число 0.
3. Якщо числове кільце  $S$  містить число  $a$ , то воно містить і всі його кратні, тобто числа  $ka$ , де  $k$  – ціле число.
4. Якщо числове кільце  $S$  містить число  $a$ , то воно містить і всі цілі додатні степені числа  $a$ , тобто всі числа  $a^n$ , де  $n$  – натуральне число.

### 3.2.3. Абстрактні кільця

Відомо, що поняття алгебраїчної операції застосовне не лише до дій над числами, а й до дій над об'єктами більш загальної природи. Тому поняття кільця можна поширити на сукупність довільних математичних об'єктів, у множини яких введено подвійну композицію.

Нехай задано якусь множину  $M$  з подвійною композицією, тобто множину, в якій введено дві бінарні операції додавання і множення. Ці операції позначатимемо „+” і „·”.

**Означення 3.2.2.** Непорожню множину  $K$  з подвійною композицією називають **кільцем**, якщо ця множина і введені в ній операції додавання і множення задовольняють такі умови.

**I. Властивості додавання.**

1. Для довільних елементів кільця  $a, b, c \in K$ :

$$a+b=b+a, a+(b+c)=(a+b)+c,$$

тобто операція додавання є комутативною і асоціативною.

2. У множині  $K$  існує єдиний нейтральний елемент  $\theta$ , що для довільного  $a \in K$ :

$$a+\theta=a.$$

3. Для кожного  $a \in K$  у множині  $K$  існує протилежний йому елемент  $(-a)$ , такий, що:

$$a+(-a)=\theta.$$

**II. Властивості множення.**

4. Операція множення асоціативна, тобто для довільних  $a, b, c \in K$ :

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c.$$

**III. Зв'язок між операціями додавання і множення.**

Дистрибутивний закон операції множення відносно операції додавання для довільних  $a, b, c \in K$  справедливий у двох формах (бо у загальному випадку  $a+b \neq b+a$ ).

5.  $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c.$

6.  $c \cdot (a+b) = c \cdot a + c \cdot b.$

Властивості 1-6 називають **аксіомами кільця**.

Якщо в кільці  $K$  існує такий елемент  $e \neq \theta$ , що для довільного  $a \in K$  справедлива рівність  $a \cdot e = a$ , то кажуть, що  $e$  – **правий одиничний елемент (права одиниця)** кільця  $K$ . Аналогічно визначають **ліву одиницю**:  $e' \cdot a = a$ .

Якщо  $e$  є одночасно і лівою, і правою одиницею кільця  $K$ , то його називають просто **одиницею**, а кільце  $K$  – **кільцем з одиницею**.

Оскільки всі аксіоми групи справедливі і для кільця, то всі властивості груп повністю переносяться на кільця.

1. У кожному кільці  $K$  сума  $n$  його елементів не залежить від способу розставлення дужок, а також від порядку доданків.
2. Якщо  $a+b_1=a+b_2$ , то  $b_1=b_2$  для  $a, b_1, b_2 \in K$ .
3. Для довільних  $a_1, a_2, \dots, a_n \in K$ :  $-(a_1+a_2+a_n) = (-a_1)+(-a_2)+(-a_n)$ .
4. Для довільного  $a \in K$  і натурального  $n$ :  $n \cdot (-a) = -(n \cdot a)$ .
5. У кожному кільці  $K$  існують кратні елементу  $a \in K$ :  $n \cdot a, n \in \mathbb{Z}$ . Для них:

$$(m+n) \cdot a = m \cdot a + n \cdot a;$$

$$n \cdot (a+b) = n \cdot a + n \cdot b;$$

$$m(n \cdot a) = (m \cdot n) \cdot a.$$

До них додаються властивості множення.

6. У кожному кільці  $K$  добуток  $n$  його елементів не залежить від способу розставлення дужок.

7. Кожне кільце  $K$  містить цілі додатні степені  $a^n$  для довільного  $a \in K$ , причому

$$a^n \cdot a^m = a^m \cdot a^n = a^{n+m};$$

$$(a^n)^m = (a^m)^n = a^{n \cdot m}.$$

Це основні властивості кілець.

### 3.2.4. Гомоморфізми кілець

**Означення 3.2.3.** Відображення  $\varphi: K \rightarrow K'$  кільця  $K$  в кільце  $K'$  називають **гомоморфним відображенням** або **гомоморфізмом**, якщо виконуються для довільних елементів  $a, b \in K$  такі умови:

- 1)  $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$ ;

- 2)  $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$ .

Кільце  $K'$  називають **гомоморфним образом** кільця  $K$  і записують  $K \sim K'$ .

*Приклади гомоморфізмів кілець.*

1. Нехай  $C_1$  – кільце всіх комплексних чисел, а  $C_2$  – кільце матриць другого порядку.

Розглянемо відображення  $\psi$ , яке для довільного комплексного числа  $x + iy$  визначають так:

$$\psi(x + iy) = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}.$$

Доведемо, що відображення  $\psi$  є гомоморфізмом, перевіривши виконання умов 1) і 2). Для цього візьмемо два різних комплексних числа  $a + ib$  та  $c + id$  і запишемо гомоморфізм їх суми:

$$\begin{aligned} \psi((a + ib) + (c + id)) &= \psi((a + c) + i(b + d)) = \begin{pmatrix} a + c & b + d \\ -(b + d) & a + c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \\ &= \psi(a + ib) + \psi(c + id). \end{aligned}$$

Властивість 1) доведена.

Доведемо факт, що гомоморфізм добутку комплексних чисел  $a + ib$  та  $c + id$  дорівнює добутку гомоморфізмів цих чисел.

$$\begin{aligned}\psi((a+ib)(c+id)) &= \psi(ac+ibc+iad-bd) = \psi((ac-bd)+i(bc+ad)) = \\ &= \begin{pmatrix} ac-bd & bc+ad \\ -(bc+ad) & ac-bd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \psi(a+ib) \cdot \psi(c+id).\end{aligned}$$

Властивість 2) доведена.

2. Нехай  $C_1$  – кільце матриць другого порядку виду  $\begin{pmatrix} x & y \\ 2y & x \end{pmatrix}$ , а  $C_2$  – кільце всіх чисел виду  $x + \sqrt{2}y$ . Відображення  $\psi$ , яке так:

$$\psi\left(\begin{pmatrix} x & y \\ 2y & x \end{pmatrix}\right) = x + \sqrt{2}y,$$

є гомоморфізмом. Довести самостійно.

## Тема 3.3. ПОЛЯ

### 3.3.1. Означення поля. Приклади полів

У кожному кільці для операції додавання здійсненна обернена операція – віднімання. Про обернену до операції множення – ділення – в означенні кільця не йдеться.

Слід зауважити, що ділення на нуль неможливе у жодній з числових множин. Ця властивість має місце і в абстрактних кільцях – не можна ділити на нульовий елемент  $\theta$ .

Важливу роль в математиці відіграють комутативні кільця, в яких здійсненна операція ділення (крім ділення на нуль). Їх називають **полями**.

**Означення 3.3.1.** Комутативне кільце  $P$  називають **полем**, якщо воно має принаймні один елемент, відмінний від нульового і якщо в ньому в усіх випадках здійсненна операція ділення, крім ділення на нуль, тобто якщо для довільних елементів кільця  $a$  і  $b$ ,  $a \neq \theta$  у кільці міститься, і при тому єдиний, такий елемент  $q$ , для якого  $a \cdot q = b$ .

Елемент  $q$  називають **часткою** елементів  $a$  і  $b$  і записують  $q = \frac{a}{b}$ .

Аналогічно означають і числові поля. Існують ще й інші означення поля.

**Означення 3.3.2.** Комутативне кільце  $P$  з одиницею, яке воно має принаймні один елемент, відмінний від нульового, називають **полем**, якщо для його кожного елемента  $a$ ,  $a \neq \theta$  існує єдиний обернений елемент  $a^{-1}$ , такий що  $a \cdot a^{-1} = e$ .

**Означення 3.3.3.** Комутативне кільце  $P$ , в якому існує хоча б один елемент, відмінний від нульового, називають **полем**, якщо сукупність його елементів без  $\theta$  утворює групу відносно операції множення.

Приклади полів.

1. Множини всіх раціональних, дійсних і комплексних чисел  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$  є полями.

2. Множина чисел виду  $a + \sqrt{2}b$ , де  $a$  і  $b$  – раціональні числа, є полем.

Доведення

Доведемо, що результати операцій додавання, віднімання, множення і ділення належать також до чисел виду  $a + \sqrt{2}b$ . Для цього візьмемо два різних числа заданого виду  $a_1 + \sqrt{2}b_1$  і  $a_2 + \sqrt{2}b_2$ .

1) Операції **додавання і віднімання**:  $(a_1 + \sqrt{2}b_1) \pm (a_2 + \sqrt{2}b_2) = (a_1 \pm a_2) + \sqrt{2}(b_1 \pm b_2)$ .

Тут роль  $a$  відіграє вираз  $a_1 \pm a_2$ , який сумою (різницею) двох раціональних чисел  $a_1$  і  $a_2$ , а тому і раціональним числом, а роль  $b$  – вираз  $b_1 \pm b_2$ , що є також раціональним числом з аналогічних міркувань.

2) Операція **множення**:

$$(a_1 + \sqrt{2}b_1) \cdot (a_2 + \sqrt{2}b_2) = a_1a_2 + a_1\sqrt{2}b_2 + a_2\sqrt{2}b_1 + 2b_1b_2 = (a_1a_2 + 2b_1b_2) + \sqrt{2}(a_1b_2 + a_2b_1).$$

Тут у ролі  $a$  виступає вираз  $a_1a_2 + 2b_1b_2$ , а роль  $b$  – вираз  $a_1b_2 + a_2b_1$ , що є раціональними числами, отриманими в результаті додавання множення раціональних чисел  $a_1, a_2, b_1, b_2$ .

3) Операція **ділення** (для виділення чисел  $a$  і  $b$  позбудемося ірраціональності в знаменнику):

$$\begin{aligned} \frac{a_1 + \sqrt{2}b_1}{a_2 + \sqrt{2}b_2} &= \frac{a_1a_2 - a_1\sqrt{2}b_2 + a_2\sqrt{2}b_1 - 2b_1b_2}{(a_2 + \sqrt{2}b_2)(a_2 - \sqrt{2}b_2)} = \frac{(a_1a_2 - 2b_1b_2) + \sqrt{2}(a_2b_1 - a_1b_2)}{a_2^2 - 2b_2^2} = \\ &= \frac{a_1a_2 - 2b_1b_2}{a_2^2 - 2b_2^2} + \sqrt{2} \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 - 2b_2^2}. \end{aligned}$$

Очевидно, що вирази  $\frac{a_1a_2 - 2b_1b_2}{a_2^2 - 2b_2^2}$  та  $\frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 - 2b_2^2}$ , що виступають в ролі  $a$  і  $b$ , є раціональними, але викликає сумнів те, чи вони завжди мають зміст, тобто чи не дорівнює знаменник нулеві. Доведемо це від супротивного.

Припустимо, що  $a_2^2 - 2b_2^2 = 0$ .

Звідси  $a_2^2 = 2b_2^2$ , або  $\frac{a_2^2}{b_2^2} = 2$ , або  $\left(\frac{a_2}{b_2}\right)^2 = 2$ , або  $\frac{a_2}{b_2} = \sqrt{2}$ . Останній вираз є суперечністю, оскільки частка двох раціональних чисел не може бути числом ірраціональним. Твердження доведено.

### 3.3.2. Властивості полів

Через те, що поле є кільцем, всі властивості кільця автоматично переносяться на поля, до них лише слід додати властивості операції ділення. Розглянемо ряд властивостей поля, що впливають безпосередньо з його означення.

1. Жодне поле не має дільників нульового елемента.

2. Для відношень  $\frac{b}{a}$  елементів поля  $P$  ( $a \neq \theta$ ) справедливі арифметичні властивості звичайних дробів, а саме:

1) якщо  $a_1, a_2 \neq \theta$ , то  $\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2}$  і тільки тоді, коли  $b_1a_2 = a_1b_2$ ;

2) для довільних елементів поля  $a_1, a_2, b_1, b_2$  ( $a_1, a_2 \neq \theta$ ) виконується рівність  $\frac{b_1 \pm b_2}{a_1 a_2} = \frac{b_1a_2 \pm a_1b_2}{a_1a_2}$ ;

3) для довільних елементів поля  $a_1, a_2, b_1, b_2$  ( $a_1, a_2 \neq \theta$ ) виконується рівність  $\frac{b_1}{a_1} \cdot \frac{b_2}{a_2} = \frac{b_1b_2}{a_1a_2}$ ;

4) для довільних елементів поля  $a_1, a_2, b_1, b_2$  ( $a_1, a_2 \neq \theta$ ) виконується рівність  $\frac{b_1}{a_1} : \frac{b_2}{a_2} = \frac{b_1a_2}{a_1b_2}$ ;

5) для довільних елементів поля  $a_1, b_1$  ( $a_1 \neq \theta$ ) виконується рівність  $\frac{-b_1}{a_1} = -\frac{b_1}{a_1}$ .

3. У полі  $P$  справедливі звичайні арифметичні правила дій з цілими степенями:

$$a^m a^n = a^{m+n}, \quad (a^m)^n = a^{mn}.$$

При цьому за означенням  $a^\theta = e$ ,  $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$  при  $m > 0$ .

## РОЗДІЛ 4. КОМБІНАТОРНИЙ АНАЛІЗ

### Тема 4.1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ КОМБІНАТОРНОГО АНАЛІЗУ

Для вирішення багатьох задач різних галузей людської діяльності доводиться знаходити кількість способів можливих розміщень деяких предметів скінченної множини або число всіх можливих способів виконання певної дії із скінченної множини таких дій. Такі задачі ми вже розв'язували (знаходження булана скінченної множини, побудова все можливих відношень на заданій множині, знаходження шляхів у графах, транспортна задача тощо). Такі задачі вивчає **комбінаторика**, а методи їх розв'язування називають **методами комбінаторного аналізу**. Оскільки комбінаторика має справу із скінченними множинами, на природу об'єктів яких ніяких обмежень не накладають, то її часто називають **теорією скінченних множин**.

Комбінаторика виникла у XVI столітті, коли у житті верхніх прошарків суспільства важливе місце займали азартні ігри (карти, кості, пасьянси, лотереї). Це стало рушійною силою у розвитку комбінаторики та теорії ймовірностей. Ряд перших комбінаторних задач розв'язали такі відомі математики як Паскаль, Ферма, Ейлер, Бернуллі, Лейбніц.

В економіці комбінаторні методи дискретної математики використовують при розв'язанні транспортної задачі, складанні все можливих розкладів, планів виробництва і реалізації продукції, призначення на посади тощо.

Встановлено зв'язки між комбінаторикою та теорією алгоритмічних структур, лінійним програмуванням, статистикою, кодуванням і декодуванням шифрів, вирішенням інших проблем теорії інформації.

#### 4.1.1. Основні правила комбінаторики

Отже, комбінаторні задачі бувають різних видів. Проте більшість з них використовує 2 основних правила комбінаторики – **правило суми** і **правило добутку**.

**Правило суми.** Якщо деякий об'єкт  $a$  можна вибрати  $m$  способами, а інший об'єкт  $b$  можна вибрати  $n$  способами, то вибір „ $a$  або  $b$ ” можна здійснити  $m + n$  способами.

При використанні правила суми треба слідкувати, щоб жоден із способів вибору об'єкта  $a$  не співпадав з будь-яким способом вибору об'єкта  $b$ . Якщо ж такі співпадіння існують, правило суми втрачає силу, і ми отримаємо лише  $m + n - k$  способів вибору, де  $k$  – кількість співпадінь.

**Правило добутку.** Якщо деякий об'єкт  $a$  можна вибрати  $m$  способами і при кожному виборі об'єкта  $a$  інший об'єкт  $b$  можна вибрати  $n$  способами, то вибір пари „ $a$  і  $b$ ” можна здійснити  $m \cdot n$  способами.

Наочно правило добутку можна продемонструвати за допомогою таблиці чи матриці:

$$\begin{pmatrix} (a_1, b_{11}) & \dots & (a_1, b_{1n}) \\ (a_2, b_{21}) & \dots & (a_2, b_{2n}) \\ \dots & \dots & \dots \\ (a_m, b_{m1}) & \dots & (a_m, b_{mn}) \end{pmatrix}.$$

**Узагальнене правило добутку.** Якщо об'єкт  $a_1$  можна вибрати  $m_1$  способами, об'єкт  $a_2$  –  $m_2$  способами і т.д., об'єкт  $a_r$  –  $m_r$  способами, то вибір впорядкованої системи об'єктів (кортежу)  $(a_1, a_2, \dots, a_r)$  можна здійснити  $m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_r$  способами.

**Приклад.** Нехай з пункту  $A$  до пункту  $B$  існує  $m$  доріг, з пункту  $A$  до пункту  $C$  –  $n$  доріг, з пункту  $B$  до пункту  $D$  –  $k$  доріг, а з пункту  $C$  до пункту  $D$  –  $l$  доріг. Пункти  $B$  і  $C$  між собою дорогами не сполучені. Скількома способами можна пройти з пункту  $A$  до пункту  $D$ ?



### Розв'язання

Згідно з правилом добутку з пункту  $A$  до пункту  $D$  через пункт  $B$  веде  $mk$  доріг, а через пункт  $C$  –  $nl$  доріг. Тому за правилом суми кількість доріг з пункту  $A$  до пункту  $D$  дорівнює  $mk + nl$ . ■

### **4.1.2. Розміщення. Розміщення з повтореннями**

Нагадаємо означення впорядкованої множини.

**Означення 4.1.1.** Множину  $M$  називають впорядкованою, коли в ній встановлено відношення порядку “менше”, що має такі властивості:

- 1)  $\forall a, b \in M$ : або  $a < b$ , або  $b < a$ ;
- 2)  $a < b, b < c \Rightarrow a < c$ .

**Означення 4.1.2.** Нехай  $|M| = n$ , тобто множина  $M$  складається з  $n$  елементів,  $k \leq n$  ( $k, n \in \mathbb{N}$ ). **Розміщенням без повторень** з  $n$  елементів по  $k$  називають довільну впорядковану підмножину  $M'$  множини  $M$  ( $M' \subset M$ ), всі елементи якої різні.

Кількість різних розміщень з  $n$  елементів по  $k$  без повторень позначають:

$$A_n^k.$$

Два розміщення вважають різними не лише тоді, коли вони відрізняються один від одного хоча б одним елементом, але й тоді, коли вони складаються з однакових елементів, але відрізняються порядком їх розміщення.

**Теорема 4.1.1.** Кількість  $k$ -розміщень без повторень з  $n$  елементів ( $k \leq n$ ) визначається так:

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1).$$

#### Доведення

Перший елемент впорядкованої пари  $n$ -елементної множини можна вибрати  $n$  способами, другий –  $(n-1)$  способами. Впорядковану пару за правилом добутку вибирають  $n(n-1)$  способами, впорядкована трійка –  $n(n-1)(n-2)$  способами. Продовжуючи цей процес далі, отримаємо:

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1).$$

Теорему доведено. ■

**Теорема 4.1.2.** Кількість різних розміщень без повторень з  $n$  елементів по  $k$  дорівнює добутку  $k$  послідовних чисел, більшим з яких є  $n$ :

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

**Приклад.** Нехай студенту необхідно скласти чотири екзамени протягом десяти днів. Скількома способами можна це зробити?

### Розв'язання

$$A_{10}^4 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 5040. \blacksquare$$

**Означення 4.1.3.** Нехай  $|M| = n$ , а  $k \in \mathbb{N}$ . **Розміщенням з повтореннями** з  $n$  елементів по  $k$  називають довідний впорядкований  $k$ -елементний набір виду  $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ , де  $a_1, a_2, \dots, a_k$  – елементи множини  $M$ , не обов'язково різні.

Кількість різних розміщень з повтореннями позначають  $\overline{A}_n^k$ .

**Теорема 4.1.3.** Кількість різних розміщень з повтореннями з  $n$  елементів по  $k$ , де  $n$  і  $k$  – довільні натуральні числа дорівнює:

$$\overline{A}_n^k = n^k.$$

Приклад. Скількома способами можна записати шестизначний телефонний номер, якщо не зважати на зміст розміщення цифр (тобто номер 000000 вважати можливим)?

Розв'язання

Оскільки всіх цифр є 10 і у номері вони можуть повторюватися, то

$$A_{10}^6 = 10^6 = 1000000. \blacksquare$$

### 4.1.3. Перестановки. Перестановки з повтореннями

Означення 4.1.4. Розміщення з  $n$  елементів по  $n$  називають **перестановкою з  $n$  елементів**.

Кількість різних перестановок без повторень позначають  $P_n$ .

Теорема 4.1.4. різних перестановок без повторень дорівнює добутку всіх натуральних чисел з 1 до  $n$ :

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n = n!.$$

Доведення випливає з того, що  $P_n = A_n^n$ . ■

Приклад. Одного разу 10 друзів зайшли до ресторану. Хазяїн запропонував їм приходити до нього щодня і кожного разу сідати за один і той самий стіл по-іншому. Доки всі способи розміщення будуть вичерпані, їх годуватимуть у ресторані безкоштовно. Коли настане цей день?

Розв'язання

$$P_{10} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 3628800 \quad (\approx 9942 \text{ роки}). \blacksquare$$

Означення 4.1.5. Нехай  $|M| = n$ . **Перестановкою з повтореннями з  $n$  елементів** називають будь-яке впорядкування  $n$ -множини, серед елементів якої є однакові. Якщо серед елементів множини  $M$  є  $n_1$  елементів першого типу,

$n_2$  елементів другого типу,

...

$n_k$  елементів  $k$ -го типу  $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ ,

то кількість всіх перестановок такої множини з повтореннями позначають  $\overline{P}_n(n_1, n_2, \dots, n_k)$ .

Теорема 4.1.5. Має місце формула:

$$\overline{P}_n(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}.$$

Приклад. Скільки перестановок можна зробити з літер слова “Міссісіпі”?

Розв'язання

Оскільки літера “м” входить до слова 1 раз, літера “і” – 4 рази, “с” – 3 рази, “п” – 1 раз, а всіх літер у слові 9, то

$$\overline{P}_9(1, 4, 3, 1) = \frac{9!}{1! \cdot 4! \cdot 3! \cdot 1!} = 2520. \blacksquare$$

### 4.1.4. Комбінації. Комбінації з повтореннями

У тих випадках, коли нас не цікавить порядок елементів у розміщення, а лише його склад, вводять поняття комбінації.

Означення 4.1.6. Нехай  $|M| = n$ , тобто множина  $M$  складається з  $n$  елементів,  $k \leq n$  ( $k, n \in N$ ). **Комбінацією без повторень з  $n$  елементів по  $k$**  називають довільну  $k$ -підмножину  $M'$  множини  $M$  ( $M' \subset M$ ,  $|M'| = k$ ), всі елементи якої різні.

Кількість різних комбінацій з  $n$  елементів по  $k$  без повторень позначають:

$$C_n^k.$$

Отже, комбінація не є впорядкованою множиною, на відміну від розміщення, тобто дві різні комбінації відрізняються хоча б одним елементом.

**Теорема 4.1.6.** Для довільних натуральних чисел  $n$  і  $k$  ( $k \leq n$ ) має місце формула:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

**Теорема 4.1.7.** Для  $C_n^k$  виконується рівність:

$$A_n^k = C_n^k \cdot P_k.$$

Доведення

Серед розміщень з  $n$  елементів по  $k$  можна виділити класи впорядкованих  $k$ -множин, які відрізняються лише порядком розміщення одних і тих самих елементів. У кожному класі таких множин буде  $P_n = k!$ , а кількість різних класів –  $C_n^k$ . Отже,  $A_n^k = C_n^k \cdot P_k$ . ■

Приклад. Скільки діагоналей у правильному  $n$ -кутнику?

Розв'язання

Кількість пар вершин в  $n$ -кутнику, серед яких одні визначають діагональ, а інші – сторону  $n$ -кутника дорівнює:

$$C_n^2 = \frac{1}{2} n(n-1).$$

Оскільки всіх сторін  $n$ , кількість діагоналей визначатимемо так:

$$K_d = \frac{1}{2} n(n-1) - n = \frac{1}{2} n(n-3). \blacksquare$$

Приклад. Скільки натуральних дільників має число  $2310=2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ ?

Розв'язання

Кожен дільник, який не дорівнює одиниці, має вигляд:  $p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k$ , де  $\{p_1, p_2, \dots, p_k\} \subset \{2, 3, 5, 7, 11\}$ .

Оскільки порядок множників у добутку – неістотний, то кожен дільник задається комбінацією з 5 по  $k$ , де  $1 \leq k \leq 5$ . Всього дільників буде:

$$1 + C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5 = 1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 32. \blacksquare$$

**Означення 4.1.7.** **Комбінацією з повтореннями** з  $n$  елементів по  $k$  називають довідний  $k$ -елементний набір виду  $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ , де кожен з елементів  $a_1, a_2, \dots, a_k$  належить до одного з  $n$  типів.

Кількість різних комбінацій з повтореннями позначають  $\overline{C}_n^k$ .

**Теорема 4.1.8.** Кількість різних комбінацій з повтореннями з  $n$  елементів по  $k$ , де  $n$  і  $k$  – довільні натуральні числа дорівнює:

$$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}.$$

Приклад. У кондитерський відділ завезли 4 види тістечок. Скількома способами можна купити 7 тістечок?

Розв'язання

$$\overline{C}_4^7 = C_{7+4-1}^7 = C_{10}^7 = \frac{10!}{7!3!} = 120. \blacksquare$$

#### 4.1.6. Біном Ньютона. Трикутник Паскаля. Властивості біноміальних коефіцієнтів

З елементарної математики відомі формули скороченого множення:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Ці формули можна записати і так:

$$(a+b)^2 = C_2^0 a^2 b^0 + C_2^1 a b + C_2^2 a^0 b^2, \quad (a+b)^3 = C_3^0 a^3 b^0 + C_3^1 a^2 b + C_3^2 a b^2 + C_3^3 a^0 b^3.$$

Очевидно, існує загальна закономірність.

**Теорема 4.1.9.** Справедлива рівність:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^n a^0 b^n.$$

Цю рівність називають **біномом Ньютона**.

Біноміальні коефіцієнти можна подати у вигляді трикутної таблиці, яку називають трикутником Паскаля:

			1	1				$n=1$
			1	2	1			$n=2$
		1	3	3	1			$n=3$
	1	4	6	4	1			$n=4$
1	5	10	10	5	1			$n=5$
			...					

У  $n$ -му рядку трикутника Паскаля кожен коефіцієнт розкладу, крім двох крайніх, що дорівнюють 1, – це сума відповідних коефіцієнтів із попереднього рядка.

Узагальненням бінома Ньютона є наступна теорема:

**Теорема 4.1.10 (поліноміальна теорема).** Справедлива рівність:

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_k)^n = \sum_{\substack{r_1 \geq 0, \dots, r_k \geq 0 \\ r_1 + r_2 + \dots + r_k = n}} C_n(r_1, r_2, \dots, r_k) a_1^{r_1} a_2^{r_2} \dots a_k^{r_k},$$

де  $C_n(r_1, r_2, \dots, r_k) = \frac{n!}{r_1! r_2! \dots r_k!}$ .

Числа  $C_n(r_1, r_2, \dots, r_k)$  називають **біноміальними коефіцієнтами**.

**Властивості біноміальних коефіцієнтів:**

1.  $C_n^k = C_n^{n-k}$  (впливає з теореми 4.1.6, якщо замінити у формулі  $k$  на  $(n-k)$ , то  $(n-k)$  заміниться на  $(n - (n-k)) = k$ ).
2.  $C_{m+n}^n = C_{m+n}^m$  (формула симетрії).
3.  $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$  (формула додавання).
4.  $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n$  ( $2^n$  – кількість всіх розміщень з повтореннями з елементів 2-х типів).
5.  $C_n^k = \frac{n}{k} C_{n-1}^{k-1}$  (формула винесення за дужки).
6.  $C_{n-1}^0 + C_n^1 + C_{n+1}^2 + \dots + C_{n+m-1}^m = C_{m+n}^m$ .
7.  $C_n^k \cdot C_{n-k}^{m-k} = C_m^k \cdot C_n^m$ .

## **РОЗДІЛ 5. ОСНОВИ ЛОГІКИ**

### **Тема 5.1. ВИСЛОВЛЕННЯ ТА ОПЕРАЦІЇ НАД НИМИ**

#### **5.1.1. Висловлення. Висловлювальна форма. Функція істинності**

Під **висловленням** розумітимемо речення, про зміст якого можна сказати: істинний він чи хибний, і притому тільки одне з двох. Звичайно, це не означення. Поняття висловлення є в логіці висловлень вихідним, неозначуваним.

Саме ця властивість — бути істинним чи хибним — є характеристичною для висловлення як предмета вивчення логіки. Поняття істинності і хибності в логіці висловлень не аналізуються, а беруться як дані. Яке значення — «істинність» чи «хибність» — властиве даному висловленню, залежить від відповідної реальності, якої стосується це висловлення.

Наприклад, “7 — просте число” є висловлення істинне, “ТАНГ — не вищий навчальний заклад” — висловлення хибне. Зауважимо, що хоч кожне висловлення або істинне, або хибне, проте це не означає, що про кожне висловлення можна так сказати. Наприклад, формулювання великої теореми Ферма — висловлення, але невідомо яке, істинне чи хибне.

Розглянемо вираз “ $x$  більше від одиниці”. Цей вираз не є висловленням, бо немає смислу твердити про його істинність чи хибність доти, поки символ “ $x$ ” не буде замінено назвою певного дійсного числа.

**Означення 5.1.1.** Вираз, який не є висловленням, але стає ним після заміни всіх символів змінних, що входять до цього виразу, назвами відповідних предметів, називають **висловлювальною формою** або **невизначеним висловленням**.

Наприклад, вирази “ $x + y = 2$ ”, “ $A \cup B = C$ ”, “ $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$ ” — висловлювальні форми.

$2+4=2$ ;  $\frac{4+8}{2} \geq \sqrt{4 \cdot 8}$  - висловлення.

Розглядаючи висловлення, ми виходимо з двох основних *припущень*:

а) кожне висловлення є або істинним, або хибним, тобто третього не дано (**закон виключеного третього**);

б) жодне висловлення не є одночасно істинним і хибним (**закон виключення суперечності**).

Позначимо значення “істинне” та “хибне” відповідно через “1” та “0”. Звичайно, “1” і “0” тут не є назвами чисел, а лише символами значень введеної **функції істинності**. Значення “1” і “0” називають **значеннями істинності** чи **істинісними значеннями**.

Висловлювальні змінні позначають так само, як числові змінні в математиці:  $p, q, r, p_1, p_2, p_3, \dots$ . Замість цих символів можна підставляти довільні висловлення. Звичайно, символи  $p, q, r, p_1, p_2, p_3, \dots$  не є висловленнями, вони є **змінними для висловлень** (їх також називають **змінними висловленнями** або **пропозиційними буквами** чи **пропозиційними змінними**).

Значення функції істинності для даного значення аргументу  $p$  позначатимемо  $|p|$ . Так, позначивши через  $p$  висловлення “2 — найменше просте число”, а через  $q$  — висловлення: “Число  $\pi$  дорівнює 3,14”, матимемо:  $|p|=1, |q|=0$ .

### 5.1.2. Операції над висловленнями

Однією з основних задач логіки висловлень є дослідження операцій, за допомогою яких з певних вихідних висловлень утворюють нові висловлення. Такі операції і називають **логічними**.

Означення кожної логічної операції задаватимемо відповідною матрицею (таблицею), в перших стовпчиках якої записуються всі можливі істинісні значення компонентів, а в останньому стовпчику — істинісне значення результату операції.

**Означення 5.1.2.** Бінарну логічну операцію, яка відповідає зв’язці “і” звичайної мови, позначається символом “ $\wedge$ ” і задається наступною матрицею, називають **кон’юнкцією**, або **логічним множенням**.

$p$	$q$	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Запис “ $p \wedge q$ ” читають: “ $p$  і  $q$ ”.

Вищенаведене табличне означення операції “кон’юнкція” рівнозначне такому словесному означенню: “Кон’юнкція  $p \wedge q$  істинна тоді і тільки тоді, коли обидва компоненти  $p$  і  $q$  є одночасно істинними”.

**Означення 5.1.3.** Бінарну логічну операцію, відповідну зв’язці “або нероздільне”, що позначається символом “ $\vee$ ” і задається наступною таблицею, називають *диз’юнкцією* або *логічним додаванням*. Вираз “ $p \vee q$ ” читають “ $p$  або  $q$ ”.

$p$	$q$	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Словесне означення диз’юнкції: “Диз’юнкція “ $p \vee q$ ” істинна тоді і тільки тоді, коли принаймні один з її компонентів  $p$  або  $q$  є істинним, у протилежному випадку диз’юнкція є хибною”.

**Означення 5.1.4.** Унарну операція, відповідну виразу “неправильно, що”, яку позначають символом “ $\neg$ ” і задають наступною таблицею, називають *логічним запереченням*. Вираз “ $\neg p$ ” читають “не  $p$ ”.

$p$	$\neg p$
0	1
1	0

Словесне означення заперечення: “Заперечення  $\neg p$  істинне тоді і тільки тоді, коли  $p$  — хибне, у протилежному випадку  $\neg p$  — хибне”.

**Означення 5.1.5.** Операцію, яка відповідає сполучнику “якщо..., то...”, позначається символом “ $\rightarrow$ ”, називають *імплікацією*. Її задають таблицею:

$p$	$q$	$p \rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

В імплікації  $p$  називають *антецедентом* або *посиланням (умовою)*,  $q$  — *консеквентом* або *висновком*.

Словесне означення операції “імплікація” таке: “Імплікація “ $p \rightarrow q$ ” хибна тоді і тільки тоді, коли її антецедент — істинний, а консеквент — хибний, в усіх інших випадках імплікація — істинна”.

**Означення 5.1.6.** Бінарну логічну операцію, яка відповідає зв’язці “тоді і тільки тоді”, позначається символом “ $\leftrightarrow$ ”, називають *еквіваленцією*. Її табличне означення:

$p$	$q$	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Словесне означення еквіваленції можна сформулювати так: “Еквіваленція  $p \leftrightarrow q$ ” істинна тоді і тільки тоді, коли  $p$  і  $q$  набувають однакових значень істинності, в протилежному випадку еквіваленція — хибна”.

Із сказаного вище випливає, що символ диз’юнкції “ $\vee$ ” відповідає невиключному, нероздільному “або”.

**Означення 5.1.7.** Бінарну логічну операцію, яка відповідає виключному, роздільному “або”, позначається символом “ $\oplus$ ”, називають *строгою диз’юнкцією* і задають таблицею:

$p$	$q$	$p \oplus q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Словами строго диз’юнкцію означають так: “Строга диз’юнкція “ $\oplus$ ” хибна тоді і тільки тоді, коли  $p$  і  $q$  набувають однакових значень істинності, в протилежному випадку строга диз’юнкція — істинна”.

Висловлення, які не містять логічних зв’язок, називають *елементарними* чи *атомарними*. Наприклад, висловлення “Рейк’явік — столиця Ісландії” і “3 — просте число” — елементарні висловлювання. Висловлення, яке містить хоча б одну логічну зв’язку, називають *складним*. Наприклад, висловлення “10 не є простим числом”.

Пропозиційні літери, символи логічних операцій та дужки – це *вихідні символи* алгебри висловлень.

Довільну послідовність вихідних символів називають *виразом мови*.

З множини виразів виділяють підмножину формул.

**Формулами** алгебри висловлень називають пропозиційні літери і вирази виду

$$\bar{F}, F \wedge G, F \vee G, F \rightarrow G, F \leftrightarrow G,$$

де  $F, G$  – формули.

При цьому пропозиційні літери є елементарними (атомарними) формулами. Наприклад,  $((p \rightarrow (q)) \vee r) \oplus s$  – формула.

Дужки у формулі означають порядок виконання операції.

Символу кожної логічної операції відповідає пара дужок. Щоб запобігти громіздкості формул, використовують такі правила скорочення:

1) зовнішні дужки у записі кінцевої формули можна опустити;

2) всім логічним операціям приписують відповідний ранг, який знижується зліва на право:  $\bar{\quad}$ ,  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\rightarrow$ ,  $\leftrightarrow$ .

Лівіша операція є сильнішою за правішу.

Знаючи ранг операції можна не використовувати дужки.

### 5.1.3. Таблиці істинності

У таблиці істинності формули  $f(p, q, r)$  кожному символу логічної операції в формулі  $f(p, q, r)$  відповідає окремий стовпчик таблиці, останній стовпчик відповідає істинісному значенню, яке визначається даною формулою (її головною операцією). Звернемо увагу на те, що кожен стовпчик таблиці істинності для формули  $f(p, q, r)$  відповідає певному кроку процесу її побудови або, як кажуть, певній підформулі  $f(p, q, r)$ .

Наприклад, нехай задано функцію  $f(p, q, r) = (\bar{p} \rightarrow q \vee r) \wedge (q \rightarrow p \vee \bar{r})$ .

$p$	$q$	$r$	$\bar{p}$	$q \vee r$	$\bar{p} \rightarrow q \vee r$	$\bar{r}$	$p \vee \bar{r}$	$q \rightarrow p \vee \bar{r}$	$f(p, q, r)$
0	0	0	1	0	0	1	1	1	0
0	0	1	1	1	1	0	0	1	1

0	1	0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	0	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1	1	1
1	1	1	0	1	1	0	1	1	1

Часто таблицею істинності формули  $f(p_1, \dots, p_n)$  називають скорочену таблицю, в якій з вищенаведеної залишають перших  $n$  стовпчиків (значень аргументів  $p_1, \dots, p_n$ ) і останній стовпчик.

Степінь складності таблиці істинності для формули  $f$  швидко зростає із збільшенням кількості різних пропозиційних букв, що входять до  $f$ . Так, при  $n = 3$  кількість рядків таблиці дорівнює  $2^3 = 8$ , при  $n = 4$  воно становить  $2^4 = 16$ , при  $n = 5$  дорівнює  $2^5 = 32$ , а при  $n = 10$  — вже 1024. Практично побудувати таблицю істинності в останньому випадку вже неможливо.

#### 5.1.4. Тавтології і суперечності.

**Означення 5.1.8.** Формули алгебри висловлень  $f(p_1, \dots, p_n)$ , які на всіх наборах  $(p_1, \dots, p_n)$ , тобто при всіх можливих розподілах істинісних значень пропозиційних літер  $p_1, \dots, p_n$ , набувають значення 1, називають **тавтологіями**, **тотожно істинними формулами** або **законами алгебри висловлень**.

Приклади деяких найважливіших тавтологій:

1.  $p \leftrightarrow \bar{\bar{p}}$  – закон подвійного заперечення.
2.  $p \vee \bar{p}$  – закон виключеного третього.
3.  $(p \wedge \bar{p})$  – закон виключення суперечності.
4.  $p \rightarrow p$  – закон тотожності.
5.  $p \wedge p \leftrightarrow p$  – закон ідемпотентності.
6.  $p \vee p \leftrightarrow p$  – закон ідемпотентності.
7.  $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\bar{q} \vee p)$  – закон контрапозиції.

Довести те, що формули (1)–(7) є тавтологіями, можна за допомогою таблиць істинності. Наприклад, доведемо, що формула (7) є тавтологією.

$p$	$q$	$p \rightarrow q$	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$\bar{q} \rightarrow \bar{p}$	(7)
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	1	0	0	1	1

Те, що формула алгебри висловлень  $f$  є тавтологією, позначають так:  $\models f$ .

**Означення 5.1.9.** Формулу алгебри висловлень  $f(p_1, \dots, p_n)$ , яка набуває значення істинності 0 на всіх  $2^n$  наборах, називають **суперечністю**. Найпростішим прикладом суперечності є формула  $p \wedge \bar{p}$ .

**Означення 5.1.10.** Формулу алгебри висловлень, яка не є ні тавтологією, ні суперечністю, називають **нейтральною**. Прикладом нейтральної формули є  $p \rightarrow q$ .

Множини тавтологій, суперечностей і нейтральних формул попарно не перетинаються і разом становлять множину всіх формул алгебри висловлень.

**Означення 5.1.11.** Формулу алгебри висловлень, яка не є суперечністю, називають **виконуваною**.

Так, формула  $p \rightarrow p$  — виконувана і формула  $p \rightarrow \bar{p}$  теж виконувана при  $|p| = 0$ ;  $|p \rightarrow \bar{p}| = 1$ .

**Означення 5.1.12.** Висловлення називають **логічно істинним** (на базі алгебри висловлень) тоді і тільки тоді, коли його логічна структура є тавтологією.



Прикладом логічно істинного твердження є “Трикутник  $ABC$  — рівнобедрений або трикутник  $ABC$  — не рівнобедрений” (логічна структура цього твердження —  $p \vee \bar{p}$ ).

### 5.1.5. Рівносильність формул. Властивості логічних операцій

**Означення 5.1.13.** Формули алгебри висловлень  $f(p_1, \dots, p_n)$  і  $g(p_1, \dots, p_n)$  називають **рівносильними** або **логічно еквівалентними**, якщо їх функції істинності  $|f|$  і  $|g|$  тотожно рівні, тобто, якщо їх значення на всіх  $2^n$  наборах збігаються.

Рівносильність формул  $f$  і  $g$  позначатимемо  $f \equiv g$ . Символ “ $\equiv$ ” не є символом операції алгебри висловлень, а означає певне відношення між формулами.

#### Основні рівносильності (закони) алгебри висловлень:

1.  $p \wedge q \equiv q \wedge p$  – комутативність кон’юнкції.
2.  $p \vee q \equiv q \vee p$  – комутативність диз’юнкції.
3.  $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$  – асоціативність кон’юнкції.
4.  $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$  – асоціативність диз’юнкції.
5.  $p \wedge (q \vee r) \equiv p \wedge q \vee p \wedge r$  – перший дистрибутивний закон.
6.  $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$  – другий дистрибутивний закон.
7.  $\overline{(p \wedge q)} \equiv \bar{p} \vee \bar{q}$  } закони
8.  $\overline{(p \vee q)} \equiv \bar{p} \wedge \bar{q}$  } де Моргана.
9.  $p \rightarrow q \equiv \bar{p} \vee q$ .
10.  $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ .
11.  $\overline{\bar{p}} \equiv p$  – закон подвійного заперечення.
12.  $p \wedge p \equiv p$  } закони
13.  $p \vee p \equiv p$  } ідемпотентності.
14.  $p \rightarrow q \equiv \bar{q} \rightarrow \bar{p}$ .
15.  $p \vee p \wedge q \equiv p$  } закони
16.  $p \wedge (p \vee q) \equiv p$  } поглинання.
17.  $u \wedge 1 \equiv u$  } правила
18.  $u \wedge 0 \equiv 0$  } співвідно-
19.  $u \vee 1 \equiv 1$  } шення
20.  $u \vee 0 \equiv u$  } констант
21.  $p \vee \bar{p} \equiv 1$  – закон виключення третього.
22.  $p \wedge \bar{p} \equiv 0$  – закон протиріччя.

Формули 1-8, 11-13, 15-22 – називають аксіомами **булевої алгебри** або властивостями операцій кон’юнкція, диз’юнкція і заперечення.

Наступні властивості називають аксіомами алгебри Жегалкіна.

- 1ж.  $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$  – асоціативність кон’юнкції.
- 2ж.  $p \oplus (q \oplus r) \equiv (p \oplus q) \oplus r$  – асоціативність строгої диз’юнкції.
- 3ж.  $p \wedge q \equiv q \wedge p$  – комутативність кон’юнкції.
- 4ж.  $p \wedge q \equiv q \wedge p$  – комутативність кон’юнкції.

## Тема 5.4. БУЛЕВІ ФУНКЦІЇ

### 5.4.1. Поняття булевої функції. Способи задання

Алгебра булевих функцій – зручний формалізм для використання логічних умов у програмах, записаних сучасними мовами програмування.

**Означення 5.4.1.** *Булевою* називають функцію, область визначення і множина значень якої належать заданій двоелементній множині.

Зафіксуємо цю двоелементну множину як  $\{0,1\}$ . Тоді  $n$ -місна булева функція (від  $n$  аргументів) є відображенням  $\{0,1\}^n$  на  $\{0,1\}$ .

Булеву функцію  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  можна задати різними способами:

**Спосіб 1: за допомогою таблиці істинності**, за якою визначають, яке значення  $f$  відповідає кожній окремій  $n$ -ці (набору) значень аргументів  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

$x_1, x_2, \dots, x_n$	$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$
0, 0, ..., 0, 0	$f(0, 0, \dots, 0, 0)$
0, 0, ..., 0, 1	$f(0, 0, \dots, 0, 1)$
0, 0, ..., 1, 0	$f(0, 0, \dots, 1, 0)$
0, 0, ..., 1, 1	$f(0, 0, \dots, 1, 1)$
...	...
1, 1, ..., 1, 1	$f(1, 1, \dots, 1, 1)$

Оскільки кількість всіх наборів  $x_1, x_2, \dots, x_n$  становить  $2^n$ , то кількість всіх булевих функцій дорівнює кількості розміщень з повтореннями з 2 елементів по  $2^n$ :

$$A_2^{2^n} = 2^{2^n}.$$

Отже, для  $n=1$  існує 4 одномісних булевих функцій.

**Таблиця 5.1**

$x_1$	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Для  $n=2$  існує 16 двомісних булевих функцій.

**Таблиця 2**

$x_1$	$x_2$	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$	$f_5$	$f_6$	$f_7$	$f_8$	$f_9$	$f_{10}$	$f_{11}$	$f_{12}$	$f_{13}$	$f_{14}$	$f_{15}$	$f_{16}$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Таблиці істинності булевих функцій із ростом кількості аргументів стають громіздкими і незручними. Тому існує потреба в зручнішому способі їх задання.

**Спосіб 2: за допомогою формули**, в якій задають логічні операції над аргументами  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

Наприклад, у таблиці 1:  $f_1$  і  $f_4$  – константи,  $f_2(x_1)=x_1$ ,  $f_3(x_1)=\overline{x_1}$ .

У таблиці 2:  $f_1(x_1, x_2)$  і  $f_{16}(x_1, x_2)$  – константи;

$f_2(x_1, x_2) = x_1 \wedge x_2$  – кон'юнкція;

$f_3(x_1, x_2) = x_1 \rightarrow x_2$  – антиімплікація;

$f_4(x_1, x_2) = x_1$ ;

$f_5(x_1, x_2) = x_2 \rightarrow x_1$  – обернена антиімплікація;

- $f_6(x_1, x_2) = x_2$ ;  
 $f_7(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2$  – строга диз’юнкція (антиеквіваленція)  
 $f_8(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2$  – диз’юнкція;  
 $f_9(x_1, x_2) = \overline{x_1 \vee x_2} = x_1 \uparrow x_2$  – антидиз’юнкція або стрілка Пірса;  
 $f_{10}(x_1, x_2) = x_1 \leftrightarrow x_2$  – еквіваленція;  
 $f_{11}(x_1, x_2) = \overline{x_2}$  – заперечення  $x_2$ ;  
 $f_{12}(x_1, x_2) = \overline{x_2} \rightarrow x_1$  – обернена імплікація;  
 $f_{13}(x_1, x_2) = \overline{x_1}$  – заперечення  $x_1$ ;  
 $f_{14}(x_1, x_2) = x_1 \rightarrow x_2$  – імплікація;  
 $f_{15}(x_1, x_2) = x_1 \wedge x_2 = x_1 | x_2$  – антикон’юнкція або штрих Шеффера.

**Теорема 5.4.1.** Кожна булева функція зображується формулою алгебри висловлень, яка містить символи не більше, ніж трьох логічних операцій – кон’юнкції, диз’юнкції і заперечення.

## Тема 5.5. ЛОГІКА ПРЕДИКАТІВ

### 5.5.1. Предикати, логічні операції над ними

В алгебрі числення висловлень просте висловлення виступає як вихідний елемент досліджень, неподільний на частини, тобто внутрішня структура висловлення до уваги не бралася.

Вихід за межі логіки висловлень здійснюється в логіці предикатів.

Внутрішню структуру висловлення тут називають *суб’єктно-предикатною*. *Суб’єкт* – назва предмету, а *предикат* – назва властивості предмету чи відношення між предметами.

Суб’єктно-предикатну структуру висловлення виражають відповідною символікою. Вихідним пунктом тут є поняття предиката. Для символічного позначення предиката вживають великі латинські літери, а для позначення суб’єктів – малі.

Наприклад, висловлення “3 – просте число” можна записати як  $A(11)$ , а “Ігор вищий від Юрія” –  $C(i, j)$ .

Отже,  $A(x)$  означає, що  $x$  – просте число, а  $C(x, y)$  – що  $x$  вищий за  $y$ . У розглянутих прикладах 11,  $i, j$  – *предметні константи*, а  $x$  та  $y$  – *предметні змінні*.

Вираз, яким записано предикат – це *висловлювальна форма*.

За кількістю аргументів розрізняють одномісні, двомісні, ...,  $n$ -місні предикати.

Одномісні виражають властивості відповідних елементів універсальної множини.

Наприклад, обравши за універсальну множину натуральних чисел для предиката  $A(x)$  ( $x$  – просте число), одержимо:  $A(1)=0, A(2)=1, A(3)=1, A(4)=0, A(5)=1, A(6)=0, \dots$

$n$ -місні предикати при  $n > 1$  виражають відношення між елементами універсальної множини. Наприклад, “4 ділить  $x$ ” на множині натуральних чисел означає кратність  $x$  четвірці.

Існує поняття 0-місного предиката, під яким розуміють висловлення.

Задати предикат можна за допомогою таблиці. Наприклад, для згадуваного предиката  $A(x)$  ( $x$  – просте число), таблиця матиме вигляд:

$x$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
$A(x)$	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0	...

У загальному випадку для  $n$ -місного предиката, означеного на множині з  $m$  елементів, кількість елементів таблиці обчислюють за формулою кількості розміщень з повтореннями :

$$\overline{A_m^n} = m^n.$$

Тоді кількість різних  $n$ -місних логічних функцій (предикатів) на  $m$ -елементній універсальній множині становитиме кількість розміщень з повтореннями з двох елементів  $(0,1)$  по  $m^n$ :  $A_2^{m^n} = 2^{m^n}$ .

Отже, застосування таблиць для зображення предикатів обмежене невеликими значеннями  $m$  і  $n$ .

Предикат називають **тотожно істинним** або **загальнозначущим**, якщо при всіх допустимих значеннях змінних він набуває лише істинісних значень.

Наприклад,  $P(x) = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ,  $x \in R$ ;

$Q(x) = x : x$ ,  $x \in Z$ .

Оскільки значеннями предикатів є висловлення, то над предикатами можна виконувати такі логічні операції:  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\overline{\phantom{x}}$ ,  $\rightarrow$ ,  $\leftrightarrow$ . Означимо їх.

Нехай  $x$  – довільний, але зафіксований елемент універсальної множини  $E$ ,  $P$  і  $Q$  – позначення довільних предикатів, заданих на  $E$ .

$|P(x) \wedge Q(x)| = 1$  тоді і тільки тоді, коли  $|P(x)| = 1$  і  $|Q(x)| = 1$ , в інших випадках  $|P(x) \wedge Q(x)| = 0$ .

$|P(x) \vee Q(x)| = 0$  тоді і тільки тоді, коли  $|P(x)| = 0$  і  $|Q(x)| = 0$ , в інших випадках  $|P(x) \vee Q(x)| = 1$ .

$|\overline{P(x)}| = 1$  тоді і тільки тоді, коли  $|P(x)| = 0$  і навпаки.

$|P(x) \rightarrow Q(x)| = 0$  тоді і тільки тоді, коли  $|P(x)| = 1$  і  $|Q(x)| = 0$ , в інших випадках  $|P(x) \rightarrow Q(x)| = 1$ .

$|P(x) \leftrightarrow Q(x)| = 1$  тоді і тільки тоді, коли  $|P(x)| = |Q(x)|$ , в інших випадках  $|P(x) \leftrightarrow Q(x)| = 0$ .

Предикатам і логічним операціям над ними надають теоретико-множинного змісту.

**Предикат** – це підмножина універсальної множини  $E$ , а саме та, на якій істиннісне значення предиката тотожно дорівнює 1 – множина істинності предиката.

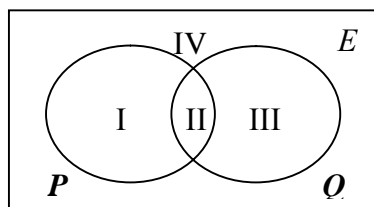
**Кон'юнкції** предикатів  $P \wedge Q$  відповідає **переріз** тих підмножин  $M_1, M_2 \in E$ , які відповідають предикатам  $P$  і  $Q$  окремо:  $M_1 \cap M_2$ .

**Диз'юнкції** предикатів  $P \vee Q$  відповідає **об'єднання** підмножин  $M_1 \cup M_2$ .

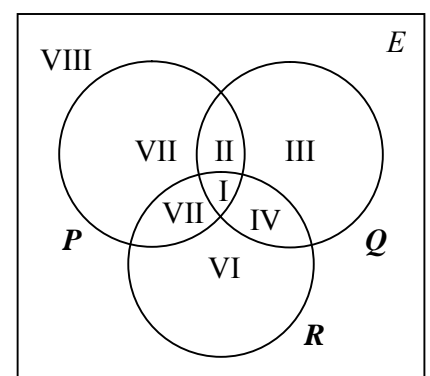
**Запереченню** предиката  $P$  відповідає **доповнення** до підмножини  $\overline{M_1}$ .

Теоретико-множинний зміст  $\rightarrow$  та  $\leftrightarrow$  впливає з того, що їх можна подати через  $\vee$  і  $\overline{\phantom{x}}$ .

Наочно це зображують на діаграмах Ейлера-Венна (згаданих у розділі 1):



$P \wedge Q$  – область II;  
 $P \vee Q$  – області I, II і III;  
 $\overline{P}$  – області III і IV;  
 $P \rightarrow Q$  – області II, III і IV;  
 $P \leftrightarrow Q$  – області II і IV.



Аналогічну картину матимемо і для 3-х предикатів, де універсальну множину  $E$  розбивають на  $2^3=8$  частин.

У випадку 4-х предикатів універсальну множину  $E$  розбивають на  $2^4=16$  частин, замінюючи круги еліпсами.

### 5.4.2. Квантифікація предикатів. Квантор існування і квантор загальності

Крім операцій алгебри висловлень над предикатами виконують ще 2 логічні операції, які називають **кванторами**.

Розглянемо два висловлення:

$$p = \text{“існує } x, \text{ що } x > 3\text{”} \quad \text{і} \quad q = \text{“}x > 3 \text{ для деякого } x\text{”}.$$

Вони істинні, рівносильні між собою, відрізняються лише побудовою речення, що з погляду алгебри логіки не так вже й істотно. Логічна структура їх визначається виразами “існує» і “для деякого”. Символічно цей вираз записують так:

$$(\exists x).P(x) \text{ або } (\exists x)[P(x)].$$

Читають: “існує таке  $x$ , що  $P(x)$ ”.

Наприклад, наведене висловлення  $p$  можна записати так:

$$(\exists x).x > 3 \text{ або } (\exists x)[x > 3].$$

Символ  $\exists$  називають **квантором існування**. Записуючи квантор перед предикатом, здійснюють **квантифікацію** предиката. Очевидно, висловлення  $(\exists x).P(x)$  істинне тоді і тільки тоді, коли існує принаймні одне значення  $a$  змінної  $x$ , при якому  $P(a) \equiv 1$ .

Можна здійснювати повторну квантифікацію виразу, що містить більше, ніж одну змінну:

$(\exists x)(\exists y)[x+y=2]$  – тут спочатку квантифікують предикат за змінною  $x$ , а потім – за  $y$ ;

$(\exists y)(\exists x)[x+y=2]$  – тут квантифікують спочатку за змінною  $y$ , а потім – за  $x$ .

У даному випадку порядок здійснення квантифікації – неістотний.

Іноді при застосуванні квантора існування вказують, що значення змінної беруть з деякої множини або накладають умову:

$$(\exists x \in M).P(x) \text{ або } (\exists x).(x \in M) \wedge P(x),$$

$$(\exists x > a).P(x) \text{ або } (\exists x).(x > a) \wedge P(x).$$

Деколи доцільно підкреслити, що існує єдиний елемент  $x \in A$  такий, що  $P(x)$ . Для цього використовують такі позначення:

$$(\exists! x \in A).P(x) \text{ або } (\exists! x \in A).P(x).$$

Розглянемо висловлення:

$s = \text{“при будь-якому } x: x^2 - x + 1 > 0\text{”}$ ;

$r = \text{“при кожному } x: x^2 - x + 1 > 0\text{”}$ ;

$t = \text{“для довільного } x: x^2 - x + 1 > 0\text{”}$ .

Замість цих фраз записують:

$$(\forall x).P(x) \text{ або } (\forall x)[P(x)].$$

Для наведених висловлень:  $(\forall x).(x^2 - x + 1 > 0)$  або  $(\forall x)[x^2 - x + 1 > 0]$ .

Символ  $\forall$  (початкова буква від англ. *All* перевернута) називають **квантором загальності**.

Квантифікація при цьому  $n$ -місного предиката дає  $(n-1)$ -місний предикат, а одномісного – дає нуль-місний предикат, тобто висловлення.

Порядок повторного застосування квантора загальності не має значення:

$$(\forall x)(\forall y).P(x,y) = (\forall y)(\forall x).P(x,y).$$

Квантори існування і загальності можна по-черзі застосувати до предиката. Проте тут порядок квантифікації має істотне значення. Наприклад,

$$P(x,y) = \text{“}x+y=2\text{”}, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

$P = (\forall y)(\exists x)[x+y=2]$  – при довільному дійсному  $y$  існує таке  $x$ , що  $x+y=2$ .  $|P|=1$ ;

$Q = (\exists x)(\forall y)[x+y=2]$  – існує таке  $x$ , що при довільному дійсному  $y$   $x+y=2$ .  $|Q|=0$ .

Отже, у загальному випадку  $(\forall y)(\exists x).P(x,y) \neq (\exists x)(\forall y).P(x,y)$ .

**Принцип заперечення.** Щоб дістати заперечення предиката (зокрема висловлення), який містить квантори існування та загальності, досить змінити квантори загальності на квантори існування і навпаки, а замість предиката взяти його заперечення.