УДК 517.44:004

ЗВ'ЯЗКИ МІЖ РЕКУРЕНТНИМИ МЕТОДАМИ ОБЧИСЛЕННЯ БАГАТОВИМІРНИХ ДИСКРЕТНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ ФУР'Є ТА ХАРТЛІ

Волинець В.І., *к.т.н., доцент*
Вінницький інститут економіки ТНЕУ

Використовуючи залежності між багатовимірними дискретними перетвореннями Фур'є та Хартлі, визначено зв'язки між рекурентними виразами для їх обчислення, використовуючи які отримано рекурентні вирази для обчислення одних перетворень на підставі рекурентних виразів для обчислення інших перетворень.

Utillizing dependences between multidimensional discrete Fourier and Hartly transforms, connections between recurrent expressions for their calculation are defined, utillizing which recurrent expressions are got for the calculation of one transforms on the basis of recurrent expressions for the calculation of other transforms.

Вступ. На сучасному етапі розвитку засобів цифрової обробки сигналів (ЦОС) для систем різноманітного призначення, зокрема спектрального аналізу [1], широко застосовують методи, що ґрунтуються на дискретних перетвореннях (ДП), де основним математичним апаратом є дискретні перетворення Фур'є (ДПФ) та Хартлі (ДПХ). Ефективність засобів ЦОС багато в чому визначається ефективністю використовуваних методів ЦОС. Зокрема, при проведенні динамічного спектрального аналізу багатовимірних сигналів [2, 3] необхідно обчислювати багатовимірні ДП на ковзних або стрибкових інтервалах, коли чергове ДП обчислюється для вхідного сигналу, до якого додається група нових відліків і така ж кількість початкових відліків вхідного сигналу відкидається. В цьому випадку для обчислення багатовимірних ДП доцільно використовувати рекурентні методи обчислення, котрі враховують результати попереднього обчислення багатовимірних ДП.

Існує ряд робіт [4 - 7], в яких описано рекурентні вирази для обчислення багатовимірних ДПФ і ДПХ. Зокрема, в роботі [7] запропоновано загальні підходи, на основі яких отримано рекурентні вирази для обчислення звичайних та модифікованих багатовимірних ДПФ і ДПХ на ковзних і стрибкових інтервалах. Однак, якщо підхід до отримання рекурентних виразів для обчислення багатовимірних ДПФ і ДПХ є наочним, то підхід до отримання рекурентних виразів для обчислення модифікованих багатовимірних ДПФ і ДПХ таким не є, оскільки вимагає застосування штучних математичних перетворень. Крім того, не визначено зв'язки між рекурентними виразами для обчислення різних багатовимірних перетворень.

Отже, метою роботи є визначення зв'язків між рекурентними виразами для обчислення різних багатовимірних ДПФ і ДПХ, використовуючи які можна отримати рекурентні вирази для обчислення одних багатовимірних ДПФ і ДПХ на підставі рекурентних виразів для обчислення інших багатовимірних ДПФ і ДПХ наочним і простим способом.

Методи та результати. Багатовимірні ДПФ і ДПХ на ковзних (стрибкових) інтервалах за одним виміром визначаються такими виразами [7]:

$$F_i(k_1,k_2,...,k_r)=\sum_{n_1=0}^{N_1-1}\sum_{n_2=0}^{N_2-1}...\sum_{n_r=0}^{N_r-1}x(n_1,n_2,...,n_r+i)W^{\sum\limits_{l=1}^{r}\frac{n_l k_l}{N_l}}\ ; \qquad (1)$$

$$H_i(k_1,k_2,...,k_r)=\sum_{n_1=0}^{N_1-1}\sum_{n_2=0}^{N_2-1}...\sum_{n_r=0}^{N_r-1}x(n_1,n_2,...,n_r+i)\operatorname{cas}\left(2\pi\sum_{l=1}^{r}\frac{n_l k_l}{N_l}\right), \qquad (2)$$

де $F_i(k_1,k_2,...,k_r)$ і $H_i(k_1,k_2,...,k_r)$ – відповідно r-вимірні ДПФ і ДПХ ($k_l=\overline{0,N_l-1}$, $l=\overline{1,r}$) на i-му інтервалі ($i=0,1,2,\ldots$) розміром $\prod_{l=1}^{r}N_l$; $x(n_1,n_2,...,n_r+i)$ – r-вимірний вхідний сигнал на i-му інтервалі; $W=\exp(-j2\pi)$, $j=\sqrt{-1}$; $cas(X)=$ $=\cos(X)+\sin(X)$.

Модифіковані багатовимірні ДПФ і ДПХ на ковзних (стрибкових) інтервалах за одним виміром визначаються такими виразами [7]:

$$F_i^M(k_1,k_2,...,k_r)=\sum_{n_1=0}^{N_1-1}\sum_{n_2=0}^{N_2-1}\ldots\sum_{n_r=0}^{N_r-1}x(n_1,n_2,...,n_r+i)W^{\sum_{l=1}^{r}\frac{n_lk_l}{N_l}+\frac{ik_r}{N_r}}; \qquad (3)$$

$$H_i^M(k_1,k_2,...,k_r)=\sum_{n_1=0}^{N_1-1}\sum_{n_2=0}^{N_2-1}\ldots\sum_{n_r=0}^{N_r-1}x(n_1,n_2,...,n_r+i)\mathrm{cas}\left(2\pi\left(\sum_{l=1}^{r}\frac{n_lk_l}{N_l}+\frac{ik_r}{N_r}\right)\right), \qquad (4)$$

де $F_i^M(k_1,k_2,...,k_r)$ і $H_i^M(k_1,k_2,...,k_r)$ – відповідно модифіковані r-вимірні ДПФ і ДПХ на i-му інтервалі.

З виразів (1) і (3) випливає залежність між багатовимірним ДПФ і модифікованим багатовимірним ДПФ:

$$F_i(k_1,k_2,...,k_r)=F_i^M(k_1,k_2,...,k_r)\cdot W^{-\frac{ik_r}{N_r}}; \qquad (5)$$

$$F_i^M(k_1,k_2,...,k_r)=F_i(k_1,k_2,...,k_r)\cdot W^{\frac{ik_r}{N_r}}.$$

З виразів (2) і (4) випливає залежність між багатовимірним ДПХ і модифікованим багатовимірним ДПХ:

$$H_i(k_1,k_2,...,k_r)=H_i^M(k_1,k_2,...,k_r)\cdot\cos(2\pi\frac{ik_r}{N_r})-H_i^M(-k_1,-k_2,...,-k_r)\cdot\sin(2\pi\frac{ik_r}{N_r});$$

$$H_i^M(k_1,k_2,...,k_r)=H_i(k_1,k_2,...,k_r)\cdot\cos(2\pi\frac{ik_r}{N_r})+H_i(-k_1,-k_2,...,-k_r)\cdot\sin(2\pi\frac{ik_r}{N_r}).$$

З виразів (1) і (2) та (3) і (4) випливають залежності між багатовимірними ДПХ і ДПФ та модифікованими багатовимірними ДПХ і ДПФ для дійсного вхідного сигналу:

$$H_i(k_1,k_2,...,k_r)=\mathrm{Re}\,F_i(k_1,k_2,...,k_r)-\mathrm{Im}\,F_i(k_1,k_2,...,k_r); \qquad (6)$$

$$H_i^M(k_1,k_2,...,k_r)=\mathrm{Re}\,F_i^M(k_1,k_2,...,k_r)-\mathrm{Im}\,F_i^M(k_1,k_2,...,k_r), \qquad (7)$$

де Re та Im – відповідно дійсна та уявна частини комплексних значень багатовимірних ДПФ.

Розглянемо отримання рекурентних виразів обчислення багатовимірних ДПХ та модифікованих багатовимірних ДПФ і ДПХ на підставі рекурентного виразу обчислення багатовимірного ДПФ.

Рекурентний вираз для обчислення багатовимірного ДПФ на стрибкових інтервалах за одним виміром має такий вигляд [7]:

$$F_{i+m}(k_1,k_2,...,k_r)=\left[F_i(k_1,k_2,...,k_r)+\sum_{n_1=0}^{N_1-1}\sum_{n_2=0}^{N_2-1}\ldots\sum_{n_{r-1}=0}^{N_{r-1}-1}\sum_{n_r=0}^{m-1}\Delta x\cdot W^{\sum_{l=1}^{r}\frac{n_lk_l}{N_l}}\right]\cdot W^{-\frac{mk_r}{N_r}}, \qquad (8)$$

де $F_{i+m}(k_1,k_2,...,k_r)$ – r-вимірне ДПФ на $(i+m)$-му інтервалі; $m=\overline{1,N_r-1}$ – зсув між інтервалами вхідного сигналу за r-им виміром; $\Delta x=x(n_1,n_2,...,N_r+n_r+i)-$ $-x(n_1,n_2,...,n_r+i)$.

З виразу (8)

$$\operatorname{Re} F_{i+m}(k_1,k_2,...,k_r) =$$

$$= \left[\operatorname{Re} F_i(k_1,k_2,...,k_r) + \sum_{n_1=0}^{N_1-1}\sum_{n_2=0}^{N_2-1}...\sum_{n_{r-1}=0}^{N_{r-1}-1}\sum_{n_r=0}^{m-1}\Delta x\cdot\cos(2\pi\sum_{l=1}^{r}\frac{n_l k_l}{N_l}) \right]\cdot\cos(\frac{2\pi m k_r}{N_r}) -$$

$$- \left[\operatorname{Im} F_i(k_1,k_2,...,k_r) - \sum_{n_1=0}^{N_1-1}\sum_{n_2=0}^{N_2-1}...\sum_{n_{r-1}=0}^{N_{r-1}-1}\sum_{n_r=0}^{m-1}\Delta x\cdot\sin(2\pi\sum_{l=1}^{r}\frac{n_l k_l}{N_l}) \right]\cdot\sin(\frac{2\pi m k_r}{N_r}); \qquad (9)$$

$$\operatorname{Im} F_{i+m}(k_1,k_2,...,k_r) =$$

$$= \left[\operatorname{Re} F_i(k_1,k_2,...,k_r) + \sum_{n_1=0}^{N_1-1}\sum_{n_2=0}^{N_2-1}...\sum_{n_{r-1}=0}^{N_{r-1}-1}\sum_{n_r=0}^{m-1}\Delta x\cdot\cos(2\pi\sum_{l=1}^{r}\frac{n_l k_l}{N_l}) \right]\cdot\sin(\frac{2\pi m k_r}{N_r}) +$$

$$+ \left[\operatorname{Im} F_i(k_1,k_2,...,k_r) - \sum_{n_1=0}^{N_1-1}\sum_{n_2=0}^{N_2-1}...\sum_{n_{r-1}=0}^{N_{r-1}-1}\sum_{n_r=0}^{m-1}\Delta x\cdot\sin(2\pi\sum_{l=1}^{r}\frac{n_l k_l}{N_l}) \right]\cdot\cos(\frac{2\pi m k_r}{N_r}). \qquad (10)$$

Враховуючи вирази (9), (10) та залежність (6), рекурентний вираз для обчислення багатовимірного ДПХ на стрибкових інтервалах за одним виміром визначається як

$$H_{i+m}(k_1,k_2,...,k_r) = \operatorname{Re} F_{i+m}(k_1,k_2,...,k_r) - \operatorname{Im} F_{i+m}(k_1,k_2,...,k_r) =$$

$$= \left[H_i(k_1,k_2,...,k_r) + \sum_{n_1=0}^{N_1-1}\sum_{n_2=0}^{N_2-1}...\sum_{n_{r-1}=0}^{N_{r-1}-1}\sum_{n_r=0}^{m-1}\Delta x\cdot cas(2\pi\sum_{l=1}^{r}\frac{n_l k_l}{N_l}) \right]\cdot\cos(\frac{2\pi m k_r}{N_r}) -$$

$$- \left[H_i(-k_1,-k_2,...,-k_r) + \sum_{n_1=0}^{N_1-1}\sum_{n_2=0}^{N_2-1}...\sum_{n_{r-1}=0}^{N_{r-1}-1}\sum_{n_r=0}^{m-1}\Delta x\cdot cas(2\pi\sum_{l=1}^{r}\frac{n_l k_l}{N_l}) \right]\cdot\sin(\frac{2\pi m k_r}{N_r}), \qquad (11)$$

де $H_{i+m}(k_1,k_2,...,k_r)$ – r-вимірне ДПХ на $(i+m)$-му інтервалі.

Враховуючи залежність (5), вираз (8) можна записати як

$$F^{M}_{i+m}(k_1,k_2,...,k_r)\cdot W^{-\frac{(i+m)k_r}{N_r}} =,$$

$$= \left[F_i^{M}(k_1,k_2,...,k_r)\cdot W^{-\frac{ik_r}{N_r}} + \sum_{n_1=0}^{N_1-1}\sum_{n_2=0}^{N_2-1}...\sum_{n_{r-1}=0}^{N_{r-1}-1}\sum_{n_r=0}^{m-1}\Delta x\cdot W^{\sum_{l=1}^{r}\frac{n_l k_l}{N_l}} \right]\cdot W^{-\frac{mk_r}{N_r}},$$

де $F^{M}_{i+m}(k_1,k_2,...,k_r)$ – модифіковане багатовимірне ДПФ на $(i+m)$-му інтервалі.

З останнього рівняння рекурентний вираз для обчислення модифікованого багатовимірного ДПФ на стрибкових інтервалах за одним виміром визначається як

$$F^{M}_{i+m}(k_1,k_2,...,k_r) = F_i^{M}(k_1,k_2,...,k_r) + \sum_{n_1=0}^{N_1-1}\sum_{n_2=0}^{N_2-1}...\sum_{n_{r-1}=0}^{N_{r-1}-1}\sum_{n_r=0}^{m-1}\Delta x\cdot W^{\sum_{l=1}^{r}\frac{n_l k_l}{N_l}+\frac{ik_r}{N_r}}. \qquad (12)$$

З виразу (12)

$$\operatorname{Re} F^{M}_{i+m}(k_1,k_2,...,k_r) =$$

$$= \operatorname{Re} F_i^M (k_1, k_2, ..., k_r) + \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} ... \sum_{n_{r-1}=0}^{N_{r-1}-1} \sum_{n_r=0}^{m-1} \Delta x \cdot \cos(2\pi (\sum_{l=1}^{r} \frac{n_l k_l}{N_l} + \frac{ik_r}{N_r})), \tag{13}$$

$$\operatorname{Im} F_{i+m}^M (k_1, k_2, ..., k_r) =$$

$$= \operatorname{Im} F_i^M (k_1, k_2, ..., k_r) - \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} ... \sum_{n_{r-1}=0}^{N_{r-1}-1} \sum_{n_r=0}^{m-1} \Delta x \cdot \sin(2\pi (\sum_{l=1}^{r} \frac{n_l k_l}{N_l} + \frac{ik_r}{N_r})). \tag{14}$$

Враховуючи вирази (13), (14) та залежність (7) рекурентний вираз для обчислення модифікованого багатовимірного ДПХ на стрибкових інтервалах за одним виміром визначається як

$$H_{i+m}^M (k_1, k_2, ..., k_r) = \operatorname{Re} F_{i+m}^M (k_1, k_2, ..., k_r) - \operatorname{Im} F_{i+m}^M (k_1, k_2, ..., k_r) =$$

$$= H_i^M (k_1, k_2, ..., k_r) + \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} ... \sum_{n_{r-1}=0}^{N_{r-1}-1} \sum_{n_r=0}^{m-1} \Delta x \cdot cas(2\pi (\sum_{l=1}^{r} \frac{n_l k_l}{N_l} + \frac{ik_r}{N_r})), \tag{15}$$

де $H_{i+m}^M (k_1, k_2, ..., k_r)$ – модифіковане багатовимірне ДПХ на $(i+m)$-му інтервалі.

Отримані вирази (11), (12) і (15) збігаються з рекурентними виразами для обчислення багатовимірного ДПХ та модифікованих багатовимірних ДПФ і ДПХ, наведеними в [7].

Аналогічним чином, використовуючи наведені залежності між багатовимірними ДПФ і ДПХ, можна отримати рекурентні вирази для обчислення багатовимірних ДПФ і ДПХ на підставі будь-якого іншого рекурентного виразу, а також рекурентні вирази для обчислення багатовимірних ДПФ і ДПХ на ковзних (стрибкових) інтервалах за багатьма вимірами [7].

Висновки. Використовуючи залежності між багатовимірними ДПФ і ДПХ, визначено зв'язки між рекурентними виразами для їх обчислення, використовуючи які можна отримати рекурентні вирази для обчислення одних перетворень на підставі рекурентних виразів для обчислення інших перетворень. Зокрема, в роботі розглянуто отримання рекурентних виразів для обчислення багатовимірного ДПХ та модифікованих багатовимірних ДПФ і ДПХ на підставі рекурентного виразу для обчислення багатовимірного ДПФ. На відміну від відомих способів отримання рекурентних виразів для обчислення багатовимірних ДПФ і ДПХ даний спосіб відрізняється наочністю та простотою і може бути використаний для отримання нових рекурентних виразів для обчислення багатовимірних ДПФ і ДПХ.

Література

1. Айчифер Э.С., Джервис Б.У. Цифровая обработка сигналов: практический подход, 2-е издание: Пер. с англ. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2004. – 992 с.
2. Даджион Д., Мерсеро Р. Цифровая обработка многомерных сигналов: Пер. с англ. – М.: Мир, 1988. – 488 с.
3. Брейсуэлл Р. Преобразование Хартли: Пер. с англ. – М.: Мир, 1990. – 175 с.
4. Ярославский Л.П. Цифровая обработка сигналов в оптике и голографии: Введение в цифровую оптику. – М.: Радио и связь, 1987. – 296 с.
5. Цифровые анализаторы спектра /В.Н. Плотников, А.В. Белинский, В.А.Суханов, Ю.Н. Жигулевцев. – М.: Радио и связь, 1990. – 184 с.
6. Zhu Yisheng, Zhou Jianhua, Gu Hong. 2-D sliding DFT algorithm and array processor architecture // Chinese Journal of Electronics. – 1999. – Vol. 8, № 4. – P. 406-412.
7. Волинець В.І. Рекурентні методи обчислення багатовимірних дискретних перетворень Фур'є та Хартлі // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2003. – № 4. – С. 69–74.

Волинець В.І., к.т.н., доцент кафедри інформаційних систем Вінницького інституту економіки ТНЕУ