УДК 519.688: 517.443

В.І. Волинець, канд. техн. наук, доц.

РЕКУРЕНТНІ МЕТОДИ ОБЧИСЛЕННЯ МОДИФІКОВАНИХ БАГАТОВИМІРНИХ ДПФ І ДПХ ДЛЯ ОКРЕМИХ РОЗМІРІВ ПЕРЕТВОРЕНЬ

Вінницький торговельно-економічний інститут КНТЕУ, e-mail: victvol@mail.ru

Отримано рекурентні вирази, що покладено в основу рекурентних методів обчислення модифікованих багатовимірних дискретних перетворень Фур'є та Хартлі на ковзних та стрибкових інтервалах за одним виміром для розмірів перетворень за цим виміром, кратним двом та чотирьом. Запропоновані рекурентні методи забезпечують практичний виграш лише при обчисленні модифікованих двовимірних дискретних перетворень Фур'є та Хартлі у 2 – 2,4 разу за кількістю операцій множення та 1,2 – 1,33 разу за кількістю операцій додавання.

Вступ і постановка завдання. В основу динамічного спектрального аналізу, який виконують над ковзними або стрибковими фрагментами багатовимірного вхідного сигналу, тобто коли черговий фрагмент вхідного сигналу зсунутий відносно попереднього фрагменту вхідного сигналу на один або декілька відліків за одним або декількома вимірами, покладено використання рекурентних методів обчислення багатовимірних дискретних перетворень Фур'є (ДПФ) та Хартлі (ДПХ), ефективність яких значно вища за ефективність прямих та швидких методів обчислення багатовимірних дискретних перетворень, оскільки рекурентні методи враховують результати обчислення для попередніх фрагментів вхідного сигналу.

Рекурентні методи обчислення багатовимірних ДПФ і ДПХ ґрунтуються на рекурентних виразах [1–3]. Зокрема, у праці [3] на основі загального підходу до розроблення рекурентних методів отримано рекурентні вирази обчислення звичайних та модифікованих багатовимірних ДПФ і ДПХ на ковзних та стрибкових інтервалах, порівняльний аналіз арифметичної складності яких показав, що для обчислення багатовимірних ДПФ і ДПХ доцільно використовувати рекурентні методи обчислення багатовимірних ДПФ і ДПХ на ковзних та стрибкових інтервалах за одним виміром.

Також відомо [4], що рекурентні методи обчислення модифікованих одновимірних ДПФ і ДПХ для окремих розмірів перетворень мають меншу арифметичну складність ніж рекурентні методи для довільних розмірів перетворень. Однак аналіз рекурентних методів обчислення модифікованих багатовимірних ДПФ і ДПХ для окремих розмірів перетворень з метою виявлення можливостей зменшення їх арифметичної складності не проводився. Тому цю роботу присвячено розв'язанню цієї задачі.

Рекурентні методи обчислення модифікованих багатовимірних ДПФ і ДПХ. Рекурентні вирази обчислення модифікованих багатовимірних ДПФ і ДПХ на ковзних та стрибкових інтервалах за одним виміром мають такий вигляд [3]:

$$F_{i_r+m_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r)=F_{i_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r)+\sum_{n_r=0}^{m_r-1}\Delta F_{i_r+n_r}\left(k_1,k_2,\ldots,k_{r-1}\right)\cdot W^{\frac{(i_r+n_r)k_r}{N_r}}, \qquad (1)$$

$$H_{i_r+m_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r)=H_{i_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r)+\sum_{n_r=0}^{m_r-1}\Delta H_{i_r+n_r}\left(k_1,k_2,\ldots,k_{r-1}\right)\cdot\cos\frac{2\pi(i_r+n_r)k_r}{N_r}+$$
$$+\sum_{n_r=0}^{m_r-1}\Delta H_{i_r+n_r}\left(-k_1,-k_2,\ldots,-k_{r-1}\right)\cdot\sin\frac{2\pi(i_r+n_r)k_r}{N_r}, \qquad (2)$$

де $F_{i_r+m_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r)$, $F_{i_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r)$ та $H_{i_r+m_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r)$, $H_{i_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r)$ – значення r-вимірних перетворень Фур'є та Хартлі r-вимірних фрагментів вхідного сигналу $x(n_1,n_2,\ldots,n_r)$, зсунутих за r-м виміром на m_r відліків ($m_r=1$ на ковзних інтервалах), де

$k_i = \overline{0, N_i - 1}$ для $i = \overline{1, r}$, N_i – розміри перетворення та вхідного сигналу за i-м виміром; $W = \exp(-j2\pi)$, де $j = \sqrt{-1}$; i_r – номер інтервалу за r-м виміром;

$$\Delta F_{i_r+n_r}(k_1, k_2, \ldots, k_{r-1}) = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \ldots \sum_{n_{r-1}=0}^{N_{r-1}-1} \left[x(n_1, n_2, \ldots, N_r + i_r + n_r) - x(n_1, n_2, \ldots, i_r + n_r)\right] \cdot W^{\sum_{i=1}^{r-1} \frac{n_i k_i}{N_i}},$$

$$\Delta H_{i_r+n_r}(k_1, k_2, \ldots, k_{r-1}) = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \ldots \sum_{n_{r-1}=0}^{N_{r-1}-1} \left[x(n_1, n_2, \ldots, N_r + i_r + n_r) - x(n_1, n_2, \ldots, i_r + n_r)\right] \cdot \mathrm{cas}\left(2\pi \sum_{i=1}^{r-1} \frac{n_i k_i}{N_i}\right).$$

Аналіз виразів (1) та (2) показує, що при їх обчислення можна досягти скорочення кількості операцій множення та додавання для окремих розмірів перетворень, ураховуючи властивості функцій косинуса та синуса.

Для парних значень N_r справедливі такі співвідношення:

$$\left.\begin{aligned}
&\cos(2\pi(i_r + n_r)(N_r - k_r)/N_r) = \cos(2\pi(i_r + n_r)k_r/N_r)\\
&\sin(2\pi(i_r + n_r)(N_r - k_r)/N_r) = -\sin(2\pi(i_r + n_r)k_r/N_r)\\
&\cos(2\pi(i_r + n_r)(N_r/2 - k_r)/N_r) = (-1)^{i_r+n_r}\cos(2\pi(i_r + n_r)k_r/N_r)\\
&\sin(2\pi(i_r + n_r)(N_r/2 - k_r)/N_r) = -(-1)^{i_r+n_r}\sin(2\pi(i_r + n_r)k_r/N_r)\\
&\cos(2\pi(i_r + n_r)(N_r/2 + k_r)/N_r) = (-1)^{i_r+n_r}\cos(2\pi(i_r + n_r)k_r/N_r)\\
&\sin(2\pi(i_r + n_r)(N_r/2 + k_r)/N_r) = (-1)^{i_r+n_r}\sin(2\pi(i_r + n_r)k_r/N_r)
\end{aligned}\right\}. \tag{3}$$

Ураховуючи співвідношення (3), рекурентний метод обчислення модифікованого багатовимірного ДПФ на ковзних та стрибкових інтервалах за одним виміром для парних значень N_r може ґрунтуватись на таких рекурентних виразах:

$$\left.\begin{aligned}
&\mathrm{Re}\left[F_{i_r+n_r+1}(k_1, k_2, \ldots, k_r)\right] = \mathrm{Re}\left[F_{i_r+n_r}(k_1, k_2, \ldots, k_r)\right] + T_1(k_1, k_2, \ldots, k_r)\\
&\mathrm{Im}\left[F_{i_r+n_r+1}(k_1, k_2, \ldots, k_r)\right] = \mathrm{Im}\left[F_{i_r+n_r}(k_1, k_2, \ldots, k_r)\right] + T_2(k_1, k_2, \ldots, k_r)\\
&\mathrm{Re}\left[F_{i_r+n_r+1}(k_1, k_2, \ldots, -k_r)\right] = \mathrm{Re}\left[F_{i_r+n_r}(k_1, k_2, \ldots, -k_r)\right] + T_3(k_1, k_2, \ldots, k_r)\\
&\mathrm{Im}\left[F_{i_r+n_r+1}(k_1, k_2, \ldots, -k_r)\right] = \mathrm{Im}\left[F_{i_r+n_r}(k_1, k_2, \ldots, -k_r)\right] + T_4(k_1, k_2, \ldots, k_r)\\
&\mathrm{Re}\left[F_{i_r+n_r+1}(k_1, k_2, \ldots, N_r/2 - k_r)\right] = \mathrm{Re}\left[F_{i_r+n_r}(k_1, k_2, \ldots, N_r/2 - k_r)\right] + (-1)^{i_r+n_r} T_3(k_1, k_2, \ldots, k_r)\\
&\mathrm{Im}\left[F_{i_r+n_r+1}(k_1, k_2, \ldots, N_r/2 - k_r)\right] = \mathrm{Im}\left[F_{i_r+n_r}(k_1, k_2, \ldots, N_r/2 - k_r)\right] + (-1)^{i_r+n_r} T_4(k_1, k_2, \ldots, k_r)\\
&\mathrm{Re}\left[F_{i_r+n_r+1}(k_1, k_2, \ldots, N_r/2 + k_r)\right] = \mathrm{Re}\left[F_{i_r+n_r}(k_1, k_2, \ldots, N_r/2 + k_r)\right] + (-1)^{i_r+n_r} T_1(k_1, k_2, \ldots, k_r)\\
&\mathrm{Im}\left[F_{i_r+n_r+1}(k_1, k_2, \ldots, N_r/2 + k_r)\right] = \mathrm{Im}\left[F_{i_r+n_r}(k_1, k_2, \ldots, N_r/2 + k_r)\right] + (-1)^{i_r+n_r} T_2(k_1, k_2, \ldots, k_r)
\end{aligned}\right\}, \tag{4}$$

де Re та Im – дійсні та уявні частини значень ДПФ;

$$T_1(k_1, k_2, \ldots, k_r) = T_{11}(k_1, k_2, \ldots, k_r) + T_{12}(k_1, k_2, \ldots, k_r) = \cos(2\pi(i_r + n_r)k_r/N_r) \times$$
$$\times \mathrm{Re}[\Delta F_{i_r+n_r}(k_1, k_2, \ldots, k_{r-1})] + \sin(2\pi(i_r + n_r)k_r/N_r) \cdot \mathrm{Im}[\Delta F_{i_r+n_r}(k_1, k_2, \ldots, k_{r-1})];$$

$$T_2(k_1, k_2, \ldots, k_r) = T_{21}(k_1, k_2, \ldots, k_r) - T_{22}(k_1, k_2, \ldots, k_r) = \cos(2\pi(i_r + n_r)k_r/N_r) \times$$
$$\times \mathrm{Im}[\Delta F_{i_r+n_r}(k_1, k_2, \ldots, k_{r-1})] - \sin(2\pi(i_r + n_r)k_r/N_r) \cdot \mathrm{Re}[\Delta F_{i_r+n_r}(k_1, k_2, \ldots, k_{r-1})];$$

$$T_3(k_1, k_2, \ldots, k_r) = T_{11}(k_1, k_2, \ldots, k_r) - T_{12}(k_1, k_2, \ldots, k_r);$$

$$T_4(k_1, k_2, \ldots, k_r) = T_{21}(k_1, k_2, \ldots, k_r) + T_{22}(k_1, k_2, \ldots, k_r);$$

$k_i = \overline{0, N_i - 1}$ для $i = \overline{1, r-1}$; $k_r = \overline{0,]N_r/4[}$, де $]X[$ – ціла частина значення X; $n_r = \overline{0, m_r - 1}$.

Ураховуючи співвідношення (3), рекурентний метод обчислення модифікованого багатовимірного ДПХ на ковзних та стрибкових інтервалах за одним виміром для парних значень N_r може ґрунтуватись на таких рекурентних виразах:

$$\left.\begin{array}{l}
H_{i_r+n_r+1}(k_1,k_2,\ldots,k_r) = H_{i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r) + T_1(k_1,k_2,\ldots,k_r) \\
H_{i_r+n_r+1}(-k_1,-k_2,\ldots,-k_r) = H_{i_r+n_r}(-k_1,-k_2,\ldots,-k_r) + T_2(k_1,k_2,\ldots,k_r) \\
H_{i_r+n_r+1}(k_1,k_2,\ldots,-k_r) = H_{i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,-k_r) + T_3(k_1,k_2,\ldots,k_r) \\
H_{i_r+n_r+1}(-k_1,-k_2,\ldots,k_r) = H_{i_r+n_r}(-k_1,-k_2,\ldots,k_r) + T_4(k_1,k_2,\ldots,k_r) \\
H_{i_r+n_r+1}(k_1,k_2,\ldots,N_r/2-k_r) = H_{i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,N_r/2-k_r) + (-1)^{i_r+n_r} T_3(k_1,k_2,\ldots,k_r) \\
H_{i_r+n_r+1}(-k_1,-k_2,\ldots,N_r/2+k_r) = H_{i_r+n_r}(-k_1,-k_2,\ldots,N_r/2+k_r) + (-1)^{i_r+n_r} T_4(k_1,k_2,\ldots,k_r) \\
H_{i_r+n_r+1}(k_1,k_2,\ldots,N_r/2+k_r) = H_{i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,N_r/2+k_r) + (-1)^{i_r+n_r} T_1(k_1,k_2,\ldots,k_r) \\
H_{i_r+n_r+1}(-k_1,-k_2,\ldots,N_r/2-k_r) = H_{i_r+n_r}(-k_1,-k_2,\ldots,N_r/2-k_r) + (-1)^{i_r+n_r} T_2(k_1,k_2,\ldots,k_r)
\end{array}\right\}, \quad (5)$$

де $T_1(k_1,k_2,\ldots,k_r) = T_{11}(k_1,k_2,\ldots,k_r) + T_{12}(k_1,k_2,\ldots,k_r) = \cos(2\pi(i_r+n_r)k_r/N_r)\times$
$\times \Delta H_{i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_{r-1}) + \sin(2\pi(i_r+n_r)k_r/N_r)\cdot\Delta H_{i_r+n_r}(-k_1,-k_2,\ldots,-k_{r-1})$;

$T_2(k_1,k_2,\ldots,k_r) = T_{21}(k_1,k_2,\ldots,k_r) - T_{22}(k_1,k_2,\ldots,k_r) = \cos(2\pi(i_r+n_r)k_r/N_r)\times$
$\times \Delta H_{i_r+n_r}(-k_1,-k_2,\ldots,-k_{r-1})] - \sin(2\pi(i_r+n_r)k_r/N_r)\cdot\Delta H_{i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_{r-1})]$;

$T_3(k_1,k_2,\ldots,k_r) = T_{11}(k_1,k_2,\ldots,k_r) - T_{12}(k_1,k_2,\ldots,k_r)$;

$T_4(k_1,k_2,\ldots,k_r) = T_{21}(k_1,k_2,\ldots,k_r) + T_{22}(k_1,k_2,\ldots,k_r)$;

$k_i = \overline{0, N_i - 1}$ для $i = \overline{1, r-1}$; $k_r = \overline{0,]N_r/4[}$; $n_r = \overline{0, m_r - 1}$.

Додаткового скорочення кількості операцій множення та додавання можна досягти для N_r, кратних чотирьом, для яких справедливі такі співвідношення:

$$\cos\left(\frac{2\pi(i_r+n_r)(\frac{N_r}{4}-k_r)}{N_r}\right) = \cos\left(\frac{2\pi(i_r+n_r)(\frac{3N_r}{4}+k_r)}{N_r}\right) = \begin{cases} \cos(2\pi(i_r+n_r)k_r/N_r),\ i_r+n_r = 4l \\ \sin(2\pi(i_r+n_r)k_r/N_r),\ i_r+n_r = 4l+1 \\ -\cos(2\pi(i_r+n_r)k_r/N_r),\ i_r+n_r = 4l+2 \\ -\sin(2\pi(i_r+n_r)k_r/N_r),\ i_r+n_r = 4l+3 \end{cases};$$

$$\sin\left(\frac{2\pi(i_r+n_r)(\frac{N_r}{4}-k_r)}{N_r}\right) = -\sin\left(\frac{2\pi(i_r+n_r)(\frac{3N_r}{4}+k_r)}{N_r}\right) = \begin{cases} -\sin(2\pi(i_r+n_r)k_r/N_r),\ i_r+n_r = 4l \\ \cos(2\pi(i_r+n_r)k_r/N_r),\ i_r+n_r = 4l+1 \\ \sin(2\pi(i_r+n_r)k_r/N_r),\ i_r+n_r = 4l+2 \\ -\cos(2\pi(i_r+n_r)k_r/N_r),\ i_r+n_r = 4l+3 \end{cases};$$

$$\cos\left(\frac{2\pi(i_r+n_r)(\frac{N_r}{4}+k_r)}{N_r}\right)=\cos\left(\frac{2\pi(i_r+n_r)(\frac{3N_r}{4}-k_r)}{N_r}\right)=\begin{cases}\cos(2\pi(i_r+n_r)k_r/N_r),\ i_r+n_r=4l\\-\sin(2\pi(i_r+n_r)k_r/N_r),\ i_r+n_r=4l+1\\-\cos(2\pi(i_r+n_r)k_r/N_r),\ i_r+n_r=4l+2\\\sin(2\pi(i_r+n_r)k_r/N_r),\ i_r+n_r=4l+3\end{cases};$$

$$\sin\left(\frac{2\pi(i_r+n_r)(\frac{N_r}{4}+k_r)}{N_r}\right)=-\sin\left(\frac{2\pi(i_r+n_r)(\frac{3N_r}{4}-k_r)}{N_r}\right)=\begin{cases}\sin(2\pi(i_r+n_r)k_r/N_r),\ i_r+n_r=4l\\\cos(2\pi(i_r+n_r)k_r/N_r),\ i_r+n_r=4l+1\\-\sin(2\pi(i_r+n_r)k_r/N_r),\ i_r+n_r=4l+2\\-\cos(2\pi(i_r+n_r)k_r/N_r),\ i_r+n_r=4l+3\end{cases}. \tag{6}$$

Ураховуючи співвідношення (3) та (6), рекурентний метод обчислення модифікованого багатовимірного ДПФ на ковзних та стрибкових інтервалах за одним виміром для значень N_r, кратних чотирьом, може ґрунтуватись на таких рекурентних виразах:

$$\left.\begin{aligned}
&\mathrm{Re}\left[F_{i_r+n_r+1}(k_1,k_2,\ldots,k_r)\right]=\mathrm{Re}\left[F_{i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r)\right]+T_1(k_1,k_2,\ldots,k_r)\\
&\mathrm{Im}\left[F_{i_r+n_r+1}(k_1,k_2,\ldots,k_r)\right]=\mathrm{Im}\left[F_{i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r)\right]+T_2(k_1,k_2,\ldots,k_r)\\
&\mathrm{Re}\left[F_{i_r+n_r+1}(k_1,k_2,\ldots,-k_r)\right]=\mathrm{Re}\left[F_{i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,-k_r)\right]+T_3(k_1,k_2,\ldots,k_r)\\
&\mathrm{Im}\left[F_{i_r+n_r+1}(k_1,k_2,\ldots,-k_r)\right]=\mathrm{Im}\left[F_{i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,-k_r)\right]+T_4(k_1,k_2,\ldots,k_r)\\
&\mathrm{Re}\left[F_{i_r+n_r+1}(k_1,k_2,\ldots,N_r/2-k_r)\right]=\mathrm{Re}\left[F_{i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,N_r/2-k_r)\right]+(-1)^{i_r+n_r}T_3(k_1,k_2,\ldots,k_r)\\
&\mathrm{Im}\left[F_{i_r+n_r+1}(k_1,k_2,\ldots,N_r/2-k_r)\right]=\mathrm{Im}\left[F_{i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,N_r/2-k_r)\right]+(-1)^{i_r+n_r}T_4(k_1,k_2,\ldots,k_r)\\
&\mathrm{Re}\left[F_{i_r+n_r+1}(k_1,k_2,\ldots,N_r/2+k_r)\right]=\mathrm{Re}\left[F_{i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,N_r/2+k_r)\right]+(-1)^{i_r+n_r}T_1(k_1,k_2,\ldots,k_r)\\
&\mathrm{Im}\left[F_{i_r+n_r+1}(k_1,k_2,\ldots,N_r/2+k_r)\right]=\mathrm{Im}\left[F_{i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,N_r/2+k_r)\right]+(-1)^{i_r+n_r}T_2(k_1,k_2,\ldots,k_r)\\
&\mathrm{Re}\left[F_{i_r+n_r+1}(k_1,k_2,\ldots,N_r/4-k_r)\right]=\mathrm{Re}\left[F_{i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,N_r/4-k_r)\right]+T_5(k_1,k_2,\ldots,k_r)\\
&\mathrm{Im}\left[F_{i_r+n_r+1}(k_1,k_2,\ldots,N_r/4-k_r)\right]=\mathrm{Im}\left[F_{i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,N_r/4-k_r)\right]+T_6(k_1,k_2,\ldots,k_r)\\
&\mathrm{Re}\left[F_{i_r+n_r+1}(k_1,k_2,\ldots,3N_r/4+k_r)\right]=\mathrm{Re}\left[F_{i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,3N_r/4+k_r)\right]+T_7(k_1,k_2,\ldots,k_r)\\
&\mathrm{Im}\left[F_{i_r+n_r+1}(k_1,k_2,\ldots,3N_r/4+k_r)\right]=\mathrm{Im}\left[F_{i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,3N_r/4+k_r)\right]+T_8(k_1,k_2,\ldots,k_r)\\
&\mathrm{Re}\left[F_{i_r+n_r+1}(k_1,k_2,\ldots,3N_r/4-k_r)\right]=\mathrm{Re}\left[F_{i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,3N_r/4-k_r)\right]+(-1)^{i_r+n_r}T_5(k_1,k_2,\ldots,k_r)\\
&\mathrm{Im}\left[F_{i_r+n_r+1}(k_1,k_2,\ldots,3N_r/4-k_r)\right]=\mathrm{Im}\left[F_{i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,3N_r/4-k_r)\right]+(-1)^{i_r+n_r}T_6(k_1,k_2,\ldots,k_r)\\
&\mathrm{Re}\left[F_{i_r+n_r+1}(k_1,k_2,\ldots,N_r/4+k_r)\right]=\mathrm{Re}\left[F_{i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,N_r/4+k_r)\right]+(-1)^{i_r+n_r}T_7(k_1,k_2,\ldots,k_r)\\
&\mathrm{Im}\left[F_{i_r+n_r+1}(k_1,k_2,\ldots,N_r/4+k_r)\right]=\mathrm{Im}\left[F_{i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,N_r/4+k_r)\right]+(-1)^{i_r+n_r}T_8(k_1,k_2,\ldots,k_r)
\end{aligned}\right\},\tag{7}$$

де $T_1(k_1,k_2,\ldots,k_r)$, $T_2(k_1,k_2,\ldots,k_r)$, $T_3(k_1,k_2,\ldots,k_r)$, $T_4(k_1,k_2,\ldots,k_r)$ визначено в поясненнях до виразу (4);

$$T_5(k_1,k_2,\ldots,k_r)=\begin{cases}T_3(k_1,k_2,\ldots,k_r),\ l_r=4l\\T_4(k_1,k_2,\ldots,k_r),\ l_r=4l+1\\-T_3(k_1,k_2,\ldots,k_r),\ l_r=4l+2\\-T_4(k_1,k_2,\ldots,k_r),\ l_r=4l+3\end{cases};\quad T_6(k_1,k_2,\ldots,k_r)=\begin{cases}T_4(k_1,k_2,\ldots,k_r),\ l_r=4l\\-T_3(k_1,k_2,\ldots,k_r),\ l_r=4l+1\\-T_4(k_1,k_2,\ldots,k_r),\ l_r=4l+2\\T_3(k_1,k_2,\ldots,k_r),\ l_r=4l+3\end{cases};$$

$$T_7(k_1,k_2,\ldots,k_r)=\begin{cases} T_1(k_1,k_2,\ldots,k_r),\ l_r=4l \\ -T_2(k_1,k_2,\ldots,k_r),\ l_r=4l+1 \\ -T_1(k_1,k_2,\ldots,k_r),\ l_r=4l+2 \\ T_2(k_1,k_2,\ldots,k_r),\ l_r=4l+3 \end{cases};\quad T_8(k_1,k_2,\ldots,k_r)=\begin{cases} T_2(k_1,k_2,\ldots,k_r),\ l_r=4l \\ T_1(k_1,k_2,\ldots,k_r),\ l_r=4l+1 \\ -T_2(k_1,k_2,\ldots,k_r),\ l_r=4l+2 \\ -T_1(k_1,k_2,\ldots,k_r),\ l_r=4l+3 \end{cases};$$

$k_i=\overline{0,N_i-1}$ для $i=\overline{1,r-1}$; $k_r=\overline{0,]N_r/8[}$; $n_r=\overline{0,m_r-1}$; $l_r=i_r+n_r$.

Ураховуючи співвідношення (3) та (6), рекурентний метод обчислення модифікованого багатовимірного ДПХ на ковзних та стрибкових інтервалах за одним виміром для значень N_r, кратних чотирьом, може ґрунтуватись на таких рекурентних виразах:

$$\left.\begin{array}{l}
H_{i_r+n_r+1}(k_1,k_2,\ldots,k_r)=H_{i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r)+T_1(k_1,k_2,\ldots,k_r)\\
H_{i_r+n_r+1}(-k_1,-k_2,\ldots,-k_r)=H_{i_r+n_r}(-k_1,-k_2,\ldots,-k_r)+T_2(k_1,k_2,\ldots,k_r)\\
H_{i_r+n_r+1}(k_1,k_2,\ldots,-k_r)=H_{i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,-k_r)+T_3(k_1,k_2,\ldots,k_r)\\
H_{i_r+n_r+1}(-k_1,-k_2,\ldots,k_r)=H_{i_r+n_r}(-k_1,-k_2,\ldots,k_r)+T_4(k_1,k_2,\ldots,k_r)\\
H_{i_r+n_r+1}(k_1,k_2,\ldots,N_r/2-k_r)=H_{i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,N_r/2-k_r)+(-1)^{i_r+n_r}T_3(k_1,k_2,\ldots,k_r)\\
H_{i_r+n_r+1}(-k_1,-k_2,\ldots,N_r/2+k_r)=H_{i_r+n_r}(-k_1,-k_2,\ldots,N_r/2+k_r)+(-1)^{i_r+n_r}T_4(k_1,k_2,\ldots,k_r)\\
H_{i_r+n_r+1}(k_1,k_2,\ldots,N_r/2+k_r)=H_{i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,N_r/2+k_r)+(-1)^{i_r+n_r}T_1(k_1,k_2,\ldots,k_r)\\
H_{i_r+n_r+1}(-k_1,-k_2,\ldots,N_r/2-k_r)=H_{i_r+n_r}(-k_1,-k_2,\ldots,N_r/2-k_r)+(-1)^{i_r+n_r}T_2(k_1,k_2,\ldots,k_r)\\
H_{i_r+n_r+1}(k_1,k_2,\ldots,N_r/4-k_r)=H_{i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,N_r/4-k_r)+T_5(k_1,k_2,\ldots,k_r)\\
H_{i_r+n_r+1}(-k_1,-k_2,\ldots,3N_r/4+k_r)=H_{i_r+n_r}(-k_1,-k_2,\ldots,3N_r/4+k_r)+T_6(k_1,k_2,\ldots,k_r)\\
H_{i_r+n_r+1}(k_1,k_2,\ldots,3N_r/4+k_r)=H_{i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,3N_r/4+k_r)+T_7(k_1,k_2,\ldots,k_r)\\
H_{i_r+n_r+1}(-k_1,-k_2,\ldots,N_r/4-k_r)=H_{i_r+n_r}(-k_1,-k_2,\ldots,N_r/4-k_r)+T_8(k_1,k_2,\ldots,k_r)\\
H_{i_r+n_r+1}(k_1,k_2,\ldots,3N_r/4-k_r)=H_{i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,3N_r/4-k_r)+(-1)^{i_r+n_r}T_5(k_1,k_2,\ldots,k_r)\\
H_{i_r+n_r+1}(-k_1,-k_2,\ldots,N_r/4+k_r)=H_{i_r+n_r}(-k_1,-k_2,\ldots,N_r/4+k_r)+(-1)^{i_r+n_r}T_6(k_1,k_2,\ldots,k_r)\\
H_{i_r+n_r+1}(k_1,k_2,\ldots,N_r/4+k_r)=H_{i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,N_r/4+k_r)+(-1)^{i_r+n_r}T_7(k_1,k_2,\ldots,k_r)\\
H_{i_r+n_r+1}(-k_1,-k_2,\ldots,3N_r/4-k_r)=H_{i_r+n_r}(-k_1,-k_2,\ldots,3N_r/4-k_r)+(-1)^{i_r+n_r}T_8(k_1,k_2,\ldots,k_r)
\end{array}\right\},\quad (8)$$

де $T_1(k_1,k_2,\ldots,k_r)$, $T_2(k_1,k_2,\ldots,k_r)$, $T_3(k_1,k_2,\ldots,k_r)$, $T_4(k_1,k_2,\ldots,k_r)$ визначено в поясненнях до виразу (5); $T_5(k_1,k_2,\ldots,k_r)$, $T_6(k_1,k_2,\ldots,k_r)$, $T_7(k_1,k_2,\ldots,k_r)$, $T_8(k_1,k_2,\ldots,k_r)$ визначено в поясненнях до виразу (7); $k_i=\overline{0,N_i-1}$ для $i=\overline{1,r-1}$; $k_r=\overline{0,]N_r/8[}$; $n_r=\overline{0,m_r-1}$.

Арифметичну складність рекурентних методів обчислення модифікованих багатовимірних ДПФ і ДПХ для різних розмірів перетворень наведено в таблиці.

Арифметична складність рекурентних методів обчислення модифікованих багатовимірних ДПФ і ДПХ

Розмір перетворення N_r	r-вимірні перетворення		Двовимірні перетворення (для $N_1=N_2=N$)	
	Кількість операцій		Кількість операцій	
	множення	додавання	множення	додавання

Довільний (вирази (1) – (2))	$m_r\left(\prod_{i=1}^{r-1} N_i^2 + 2\prod_{i=1}^{r} N_i\right)$	$m_r\left(\prod_{i=1}^{r-1} N_i^2 + 2\prod_{i=1}^{r} N_i\right)$	$3m_2N^2$	$3m_2N^2$
Кратний двом (вирази (4) – (5))	$m_r\left(\prod_{i=1}^{r-1} N_i^2 + \frac{1}{2}\prod_{i=1}^{r} N_i\right)$	$m_r\left(\prod_{i=1}^{r-1} N_i^2 + \frac{3}{2}\prod_{i=1}^{r} N_i\right)$	$\frac{3}{2}m_2N^2$	$\frac{5}{2}m_2N^2$
Кратний чотирьом (вирази (7) – (8))	$m_r\left(\prod_{i=1}^{r-1} N_i^2 + \frac{1}{4}\prod_{i=1}^{r} N_i\right)$	$m_r\left(\prod_{i=1}^{r-1} N_i^2 + \frac{5}{4}\prod_{i=1}^{r} N_i\right)$	$\frac{5}{4}m_2N^2$	$\frac{9}{4}m_2N^2$

Порівняльний аналіз арифметичної складності запропонованих і відомих рекурентних методів обчислення модифікованих багатовимірних ДПФ і ДПХ показує, що перші забезпечують практичний виграш лише для двовимірного випадку у 2 – 2,4 разу за кількістю операцій множення та 1,2 – 1,33 разу за кількістю операцій додавання.

Висновки. У результаті аналізу рекурентних виразів, що лежать в основі рекурентних методів обчислення модифікованих багатовимірних ДПФ і ДПХ на ковзних та стрибкових інтервалах за одним виміром для довільних розмірів N_r, з урахуванням властивостей функцій косинуса й синуса отримано рекурентні вирази обчислення модифікованих багатовимірних ДПФ і ДПХ на ковзних та стрибкових інтервалах за одним виміром для розмірів N_r, кратних двом та чотирьом. Порівняльний аналіз арифметичної складності рекурентних методів для розмірів N_r, кратних двом та чотирьом, з арифметичною складністю рекурентних методів для довільних розмірів N_r показав, що перші забезпечують практичний виграш лише при обчисленні модифікованих двовимірних ДПФ і ДПХ у 2 – 2,4 разу за кількістю операцій множення та 1,2 – 1,33 разу за кількістю операцій додавання. Отримані результати можуть бути використані в аналізаторах спектра двовимірних сигналів для підвищення їх швидкодії.

Список літератури

1. *Ярославский Л.П.* Цифровая обработка сигналов в оптике и голографии: Введение в цифровую оптику. – М.: Радио и связь, 1987. – 296 с.
2. *Плотников В.Н., Белинский А.В., Суханов В.А., Жигулевцев Ю.Н.* Цифровые анализаторы спектра. – М.: Радио и связь, 1990. – 184 с.
3. *Волинець В.І.* Рекурентні методи обчислення багатовимірних дискретних перетворень Фур'є та Хартлі // Вісник ВПІ. – 2003. – № 4. – С. 69–74.
4. *Волинець В.І.* Рекурентні методи обчислення модифікованих дискретних перетворень Фур'є та Хартлі для окремих розмірів перетворень // Електроніка та системи управління. – 2005. – № 4 (6). – С. 27–32.

В.И. Волынец

Рекуррентные методы вычисления модифицированных многомерных ДПФ и ДПХ для некоторых размеров преобразований

Получены рекуррентные выражения, которые лежат в основе рекуррентных методов вычисления модифицированных многомерных дискретных преобразований Фурье и Хартли на скользящих и скачущих интервалах по одному измерению для размеров преобразований по этому измерению, кратных двум и четырем. Предложенные рекуррентные методы обеспечивают практический выигрыш только при вычислении модифицированных двумерных дискретных преобразований Фурье и Хартли в 2 – 2,4 раза по количеству операций умножения и 1,2 – 1,33 раза по количеству операций сложения.

V.I. Volynets

Recurrent methods of calculation of the modified multidimensional DFT and DHT transforms for some sizes of transforms

Recurrent expressions of recurrent methods of calculation of the modified multidimensional discrete Fourier and Hartley transforms on sliding and skipping intervals on one measuring for the sizes of transforms on this measuring, multiple to two and to four, are obtained. The offered recurrent methods provide practical winning only at a calculation of the modified two-dimensional discrete Fourier and Hartley transforms to 2 – 2,4 times on the amount of multiplication operations and 1,2 – 1,33 times on the amount of addition operations.