УДК 531.36

А.М. Алілуйко

Ін–т математики НАН України, Київ
E-mail: aliluyko@imath.kiev.ua

Стійкість диференціальних систем другого порядку з нелінійною невизначеністю *

Algebraic methods for stability analysis of linear second order differential systems with nonlinear uncertainty are develop. Stability conditions in terms of spectral bounds of matrix coefficients of system taking into account bounds on nonlinear perturbations are formulated. Efficiency of methods are shown on an example of rotor systems with external perturbation.

Развиваются алгебраические методы исследования устойчивости линейных дифференциальных систем второго порядка с нелинейной неопределенностью. Формулируются алгебраические условия устойчивости в терминах спектральных оценок матричных коэффициентов системы с учетом приведенных оценок на нелинейные возмущения. Эффективность методов демонстрируются на примере роторной системы с внешним возмущением.

Вступ. Рівняння збуреного руху широкого класу механічних систем задаються у вигляді

$$M\ddot{x} + (D+G)\dot{x} + (K+S)x = f(x,\dot{x},t), \quad t \geq t_0, \tag{1}$$

де $x, \dot{x} \in C^n$ — вектори узагальнених координат та швидкостей; M, D і $K \in C^{n\times n}$ — ермітові додатно визначені матриці мас, демпфування та жорсткості, а G та $K \in C^{n\times n}$ — косоермітові матриці гіроскопічних та неконсервативних позиційних сил відповідно; вектор-функція f

* Робота виконана при частковій підтримці НДР № 0107U002198

описує вплив зовнішніх сил на динаміку системи. Причому $f(0,0,t) \equiv 0$ і положення рівноваги $x = \dot{x} \equiv 0$ системи (1) знаходиться в області $S_0 = \{z = (x,y)^T : \|z\| \le l\}$ для деякого $l > 0$.

До основних практичних задач стосовно системи (1) є розробка критеріїв стійкості положення рівноваги та побудови систем стабілізації в термінах інваріантних характеристик (слід, визначник, власні значення і т. п.), які входять в матричні коефіцієнти системи (див., наприклад, [1–4]). Ці задачі ускладнюється для систем з нелінійною невизначеністю.

Задачам аналізу стійкості диференціальних систем другого порядку з невизначеністю присвячена велика кількість робіт. Відомі критерії стійкості для майже класично демпфованих систем та систем з некласичним демпфуванням доведені шляхом використання спеціальної функції Ляпунова та врахування обмежень на нелінійні збурення (див., наприклад, [5, 6]).

В даній роботі розвиваються алгебраїчні методи дослідження стійкості диференціальних систем другого порядку з нелінійною невизначеністю. Формулюються умови стійкості в термінах спектральних оцінок матричних коефіцієнтів системи. Отримані результати демонструються на прикладі роторної системи із зовнішнім збуренням.

1. Коефіцієнтні умови стійкості. Розглянемо диференціальну систему другого порядку (1). Будемо вважати, що існують додатні константи ξ_1 і ξ_2, при яких нелінійна функція $f(x,\dot{x},t)$ задовольняє умови

$$\|f(x,\dot{x},t)\| \le \xi_1\|x\| + \xi_2\|\dot{x}\|, \quad t \ge t_0, \quad (x,\dot{x}) \in S_0. \tag{2}$$

Введемо позначення

$$\mu = \lambda_{max}(M), \quad d = \lambda_{min}(D), \quad k = \lambda_{min}(K),$$

$$s = \sqrt{\lambda_{max}(S^*S)}, \quad g = \sqrt{\lambda_{max}(G^*G)}.$$

Тут і далі через $\lambda_{max}(N)$ та $\lambda_{min}(N)$ позначені відповідно найбільше та найменше власні значення ермітової матриці N. $\|N\|$ — узгоджена матрична норма з векторною нормою $\|x\|$.

Теорема 1. *Нехай функція $f(x,\dot{x},t)$ задовольняє умови (2). Тоді положення рівноваги $x = \dot{x} \equiv 0$ системи (1) асимптотично стійке,* *якщо для деякого $\alpha > 0$ сумісна система нерівностей*

$$\begin{gathered}\alpha d - \mu - \alpha\xi_1 > 0,\\ 4(k-\xi_1)(\alpha d - \mu - \alpha\xi_2) - (\alpha s + g + \alpha\xi_1 + \xi_2)^2 > 0.\end{gathered} \tag{3}$$

Доведення. Подамо систему (1) у вигляді

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + F(y(t), t), \tag{4}$$

де

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}(K+S) & -M^{-1}(D+G) \end{bmatrix},$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 \\ -M^{-1}f(x,\dot{x},t) \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}.$$

Розглянемо в якості функції Ляпунова наступну квадратичну форму:

$$V(y,t) = y^*Xy, \quad X = \begin{bmatrix} D+\alpha K & M \\ M & \alpha M \end{bmatrix}.$$

Симетрична матриця X додатно визначена тоді і тільки тоді, коли виконується матрична нерівність

$$D + \alpha K - \alpha^{-1}M > 0.$$

Остання нерівність справедлива, якщо виконується співвідношення

$$d + \alpha k - \alpha^{-1}\mu > 0. \tag{5}$$

Тут і далі застосовано відомий критерій додатної визначеності блочної матриці у випадку невиродженого діагонального блока X_1:

$$\begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_2^T & X_3 \end{bmatrix} > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad X_1 > 0, \quad X_3 - X_2^T X_1^{-1} X_2 > 0.$$

Похідну функції $V(y,t)$ в силу системи (1) можна подати у вигляді

$$\dot{V}(y,t) = -2x^*Kx - 2x^*(G-\alpha S)\dot{x} - 2\dot{x}^*(\alpha D - M)x + 2(x^* + \alpha\dot{x}^*)f(x,\dot{x},t).$$

Враховуючи умови теореми маємо оцінку

$$\dot{V}(y,t) \leq -2[k\|x\|^2 - (\alpha s + g)\|x\|\|\dot{x}\| + (\alpha d - \mu)\|\dot{x}\|^2] + 2[\xi_1\|x\|^2 +$$

$$+(\xi_2+\alpha\xi_1)\|x\|\|\dot{x}\|+\xi_2\alpha\|\dot{x}\|^2]=-2[\|x\|\|\dot{x}\|]Y\begin{bmatrix}\|x\|\\ \|\dot{x}\|\end{bmatrix},$$

де

$$Y=\begin{bmatrix} k-\xi_1 & -\frac{1}{2}(\alpha s+g+\alpha\xi_1+\xi_2)\\ -\frac{1}{2}(\alpha s+g+\alpha\xi_1+\xi_2) & \alpha d-\mu-\alpha\xi_2\end{bmatrix}.$$

Тут при оцінюванні квадратичних форми $\dot{V}(y,t)$ використано відомі нерівності

$$\lambda_{min}(M)\|x\|^2\le x^*Mx\le\lambda_{max}(M)\|x\|^2,\quad |x^*Ny|\le\sqrt{\lambda_{max}(N^*N)}\|x\|\|y\|,$$

які справедливі для довільних векторів x і y, матриці N та ермітової матриці M.

Матриця Y додатно визначена тоді і тільки тоді, коли сумісна система нерівностей (3). При чому з першої умови в (3) виконується нерівність (5).

Отже, $V(y,t)$ при умовах (3) є функцією Ляпунова для системи (4) і за другою теоремою Ляпунова положення рівноваги $x=\dot{x}\equiv 0$ нелінійної системи (1) є асимптотично стійким.

Теорема доведена.

Якщо в доведенні теореми 1 покласти $\alpha=\dfrac{2\mu}{d}$, то отримаємо наступне твердження.

Наслідок 1. *Нехай функція $f(x,\dot{x},t)$ задовольняє умови (2). Тоді положення рівноваги $x=\dot{x}\equiv 0$ системи (1) асимптотично стійке, якщо*

$$k-\xi_1>0,\quad (k-\xi_1)(\mu-\frac{2\mu}{d}\xi_2)-\frac{1}{4}\left(\frac{2\mu}{d}s+g+\frac{2\mu}{d}\xi_1+\xi_2\right)^2>0.$$

Твердження наслідка 1 у випадку $g=s=0$ встановлене у роботі [6]. Якщо в умовах теореми 1 та наслідка 1 друга нерівність нестрога, то можна говорити про звичайну стійкість положення рівноваги.

Знайдемо оцінку для α, при якому положення рівноваги $x=\dot{x}\equiv 0$ системи (1) буде асимтотично стійким. Для цього систему нерівностей

(3) можна записати у вигляді

$$
\begin{gathered}
\frac{1}{4}(\xi+s)^2\alpha^2+\left[\frac{1}{2}(\xi+g)(\xi+s)-(d-\xi)(k-\xi)\right]\alpha+ \\
+\left[\mu(k-\xi)+\frac{1}{4}(\xi+g)^2\right]<0, \quad \alpha>\frac{\mu}{d-\xi},
\end{gathered} \tag{6}
$$

де $\xi=\max\{\xi_1,\xi_2\}$.

Із системи нерівностей (6) при $\xi=0$ та $s=0$ маємо

$$
\alpha>\frac{\mu k+\frac{1}{4}g^2}{dk}>\frac{\mu}{d}>\frac{\mu}{d-\xi},
$$

а при $\xi\neq 0$ та $s\neq 0$ маємо

$$
\alpha<\frac{2(d-\xi)(k-\xi)-(\xi+g)(\xi+s)-2\sqrt{\Delta}}{(\xi+s)^2},
$$

$$
\Delta=\left[(d-\xi)(k-\xi)-\frac{1}{2}(\xi+g)(\xi+s)\right]^2-(\xi+s)^2\left[\mu(k-s)+\frac{1}{4}(\xi+g)^2\right].
$$

На основі проведених міркувань отримали наступну теорему.

Теорема 2. *Нехай функція $f(x,\dot{x},t)$ задовольняє умови (2). Тоді положення рівноваги $x=\dot{x}\equiv 0$ системи (1) асимптотично стійке, якщо сумісна система нерівностей*

$$
\frac{\mu k+\frac{1}{4}g^2}{dk}<\frac{2(d-\xi)(k-\xi)-(\xi+g)(\xi+s)-2\sqrt{\Delta}}{(\xi+s)^2}, \quad \Delta>0.
$$

2. Робастна стійкість. Розглянемо диференціальну систему (1). Нехай симетричні додатно визначені матриці демпфування та жорсткості представлені у вигляді сімейства матриць

$$
D=D_0+D_1, \quad K=K_0+K_1,
$$

де

$$
D_0=D_0^*>0, \quad K_0=K_0^*>0, \quad \|D_1\|\leq\delta, \quad \|K_1\|\leq\delta \tag{7}
$$

для деякого $\delta>0$. Система (1) при умовах (7) описує модель з матричною невизначеністю [7].

Нехай

$$d_0 = \lambda_{min}(D_0), \quad k_0 = \lambda_{min}(K_0), \quad \xi = \xi_1 = \xi_2.$$

Виберемо функцію Ляпунова, як і в доведенні теореми 1. Тоді похідна функції $V(y,t)$ в силу системи (1) із врахуванням умов (2) та (7) має наступну оцінку

$$\dot{V}(y,t) = 2\left[-x^* K_0 x - x^*(G-\alpha S)\dot{x} - \dot{x}^*(\alpha D_0 - M)\dot{x} - \delta(x^* K_1 x^* + \right.$$

$$+x^*(D_1+\alpha K_1)\dot{x} + \alpha\dot{x}^* D_1 \dot{x}) + (x+\alpha\dot{x})^* M f(x,\dot{x},t)] \leq 2\left[(\mu\xi+\delta-k_0)\times \right.$$

$$\left.\times\|x\|^2 + ((1+\alpha)(\mu\xi+\delta)+\alpha s+g)\|x\|\|\dot{x}\| + (\alpha(\mu\xi+\delta)+\mu-\alpha d_0)\|\dot{x}\|^2\right].$$

Функція $\dot{V}(y,t)$ є від'ємною тоді і тільки тоді, коли сумісна система нерівностей

$$\alpha\gamma - \alpha d_0 + \mu < 0, \quad 4(\gamma-k_0)(\alpha\gamma-\alpha d_0+\mu) > [(1+\alpha)\gamma+\alpha s+g]^2,$$

де $\gamma = \mu\xi+\delta$. При чому, якщо виконується перша нерівність, то виконується і нерівність (5). Розв'яжемо другу нерівність відносно γ. Корені відповідного многочлена при $\alpha \neq 1$ мають вигляд

$$\gamma_{\pm} = \frac{-\alpha(k_0+d_0)+\mu-(1+\alpha)(\alpha s+g) \pm \sqrt{\widetilde{\Delta}}}{(1-\alpha)^2},$$

$$\widetilde{\Delta} = [\alpha(k_0+d_0)-\mu+(1+\alpha)(\alpha s+g)]^2 - (1-\alpha)^2\left[4k_0(\mu-\alpha d_0)+(\alpha s+g)^2\right].$$

Оскільки, $\gamma_- < 0$, то розв'язки нерівності знаходяться між 0 і γ_+. Якщо $\alpha = 1$, то

$$\gamma < \frac{4k_0(d_0-\mu)-(s+g)^2}{2[k_0+d_0-\mu+2(s+g)]}.$$

Доведено наступну теорему.

Теорема 3. *Нехай функція $f(x,\dot{x},t)$ задовольняє умови (2). Тоді при умові (7) положення рівноваги $x = \dot{x} \equiv 0$ системи (1) асимптотично стійке, якщо для деякого $\alpha > 0$ сумісна система нерівностей*

$$\begin{gathered}\mu\xi+\delta < \frac{4k_0(\alpha d_0-\mu)-(\alpha s+g)^2}{\alpha(k_0+d_0)-\mu+(1+\alpha)(\alpha s+g)+\sqrt{\widetilde{\Delta}}}, \quad \widetilde{\Delta} > 0, \\ \mu\xi+\delta < d_0 - \frac{\mu}{\alpha}, \quad \mu\xi+\delta < \frac{4k_0(d_0-\mu)-(s+g)^2}{2[k_0+d_0-\mu+2(s+g)]}.\end{gathered} \tag{8}$$

3. Ротор Лаваля із зовнішнім збуренням. У якості прикладу розглянемо механічну модель ротора, яка являє собою невагому гнучку балку із закріпленим в її центрі твердим диском маси m, що разом обертаються з сталою кутовою швидкістю ω. Кріплення A і B маси m_0 розміщенні в двох кінцях ротора відповідно. Балка є однорідною з коефіцієнтом пружності k, d та d_0 — відповідно внутрішнє демпфування та демпфування на кріпленнях (рис. 1). x_r, y_r, x_a, y_a, x_b, y_b — характеризують зміщення центрів мас диска та кріплень відповідно. Коефіцієнт жорсткості на опорах задається як змінна періодична функція часу

$$k_0(t) = k_0(1 + \delta cos(\varpi t)),$$

де $\delta \ll 1$ — амплітуда гармонічних коливань, а ϖ — параметр частоти. Змінна жорсткість є параметричним збуренням і вводиться для погашення самозбурувальних коливань. f_r, f_a, f_b — зовнішні сили нелінійного характеру, а $f_1 = -d_1(\dot{z}_r - i\omega z_r)$ — сила, яка діє на ротор і виникає в зазорі між диском та статором.

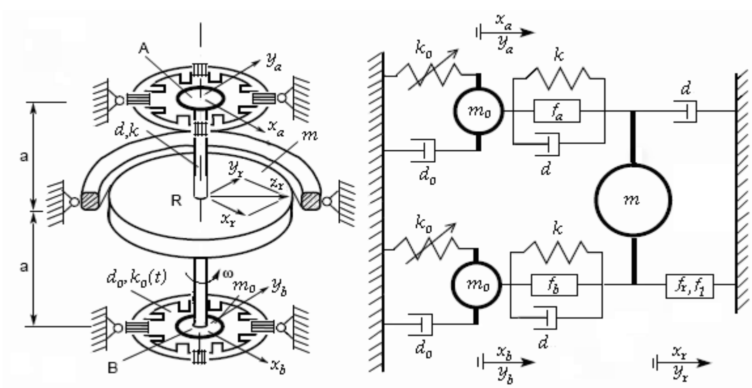

Рис. 1: Ротор Лаваля із зовнішнім збуренням.

Рух ротора описується диференціальним рівняння (1) з наступними параметрами [8]

$$M = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m_0 & 0 \\ 0 & 0 & m_0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2d + d_1 & -d & -d \\ -d & d + d_0 & 0 \\ -d & 0 & d + d_0 \end{bmatrix}, \quad G = 0,$$

$$K = \begin{bmatrix} 2k & -k & -k \\ -k & k+k_0(t) & 0 \\ -k & 0 & k+k_0(t) \end{bmatrix}, \quad S = i\omega \begin{bmatrix} -(2d+d_1) & d & d \\ d & -d & 0 \\ d & 0 & -d \end{bmatrix},$$

$$x = \begin{bmatrix} z_r & z_a & z_b \end{bmatrix}^T, \quad f = \begin{bmatrix} f_r & f_a & f_b \end{bmatrix}^T,$$

де

$$z_j = x_j + iy_j, \quad j = \{r, a, b\}, \quad \|f(x, \dot{x}, t)\| \le \xi_1\|x\| + \xi_2\|\dot{x}\|.$$

Введемо безрозмірний час $\tau = \nu t$, де $\nu = \sqrt{2k/m}$. Тоді систему (1) перепишемо в еквівалентній формі з безрозмірними коефіцієнтами

$$Mx'' + \frac{1}{\nu}(D+G)x' + \frac{1}{\nu^2}(K+S)x = \widetilde{f}(x, x', \tau), \quad \tau \ge \tau_0, \qquad (9)$$

де

$$\|\widetilde{f}(x, x', \tau)\| \le \widetilde{\xi}_1\|x\| + \widetilde{\xi}_2\|x'\|.$$

Розглянемо систему (9) при наступних значеннях параметрів

$$m = 2 \text{ кг},\ m_0 = 1 \text{ кг},\ d = 100 \text{ Нс/м},\ d_0 = 500 \text{ Нс/м},\ d_1 = 300 \text{ Нс/м},$$

$$k = 28000 \text{ Н/м},\ k_0 = 15000 \text{ Н/м},\ \omega = 25 \text{ рад/с}.$$

Знайдемо області стійкості ротора Лаваля без зовнішнього збурення ($\delta = 0$). Згідно наслідку 1 теореми 1 область стійкості в просторі параметрів $\widetilde{\xi}_1$ та $\widetilde{\xi}_2$ на рисунку 2 обмежена алгебраїчною кривою. Якщо $\xi = \max\{\widetilde{\xi}_1, \widetilde{\xi}_2\}$, то область стійкості обмежена прямими $\widetilde{\xi}_1 = 1.374$ та $\widetilde{\xi}_2 = 1.374$.

Дослідимо на стійкість роторну систему (9) із зовнішнім збуренням ($\delta \ne 0$). Для цього змінну матрицю K розкладемо на два доданки

$$K_0 = \begin{bmatrix} 2k & -k & -k \\ -k & k+k_0 & 0 \\ -k & 0 & k+k_0 \end{bmatrix}, \quad K_1 = k_0\delta \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\varpi t) & 0 \\ 0 & 0 & cos(\varpi t) \end{bmatrix}$$

і використаємо теорему 3, врахувавши, що $\|K_1\| \le k_0\delta$.

На рисунку 3 зображено область D в просторі параметрів α та $\gamma = \mu\xi + \delta$, при яких виконується система нерівностей (8).

На рисунку 4 зображено залежність від параметра ξ амплітуди δ, при якій порушуються умови (8). Дана залежність отримана при максимально допустимому значенні γ, яке досягається при $\alpha \in [0.9681, 1.2513]$.

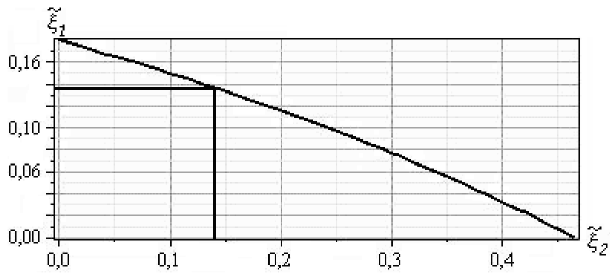

Рис. 2: Область стійкості системи (9) в просторі параметрів $\widetilde{\xi}_1$, $\widetilde{\xi}_2$.

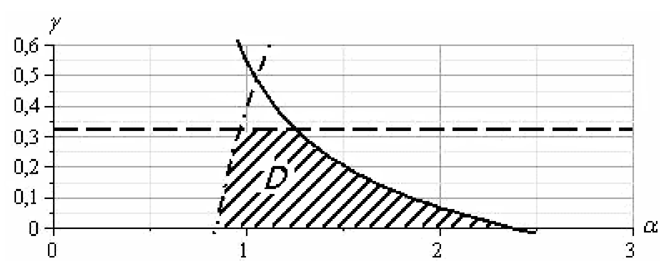

Рис. 3: Область стійкості системи (9) в просторі параметрів α, γ.

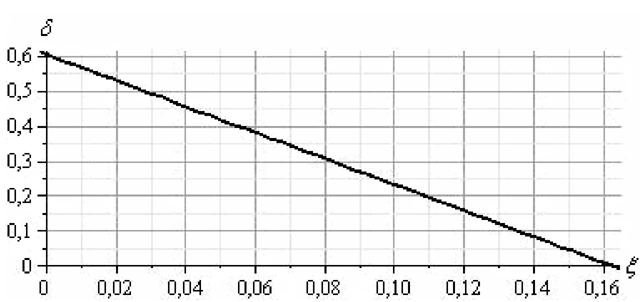

Рис. 4: Область стійкості системи (9) в просторі параметрів ξ, δ.

Література

[1] *Меркин Д.Р.* Введение в теорию устойчивости движения. — М.: Наука, 1987. — 304 с.

[2] *Tisseur F., Meerbergen K.* The Quadratic Eigenvalue Problem // SIAM Review. — 2001. — **43**, № 2. — P. 235–286.

[3] *Алілуйко А.М., Мазко О.Г.* Стійкість та стабілізація диференціальних систем другого порядку // Проблеми аналітичної механіки : Зб. праць Ін-ту математики НАН України.— 2006. — Т. 3, № 1. — С. 7–24.

[4] *Косов А.А.* Об экспоненциальной устойчивости и стабилизации неавтономных механических систем с неконсервативными силами // Прикл. мат. и мех. — 2007. — Т. 71, Вып. 3. – С. 411–426.

[5] *Cox S.J., Moro J.* A Lyapunov Function for Systems Whose Linear Part is Almost Classically Damped // ASME J. Appl. Mech. — 1997. — **64**, № 4. — P. 965–968.

[6] *Cao D.Q., Ge Y.M., Yang Y.R.* Stability Criteria for Nonclassically Damped Systems With Nonlinear Uncertainties // ASME J. Appl. Mech. — 2004. — **71**, № 5. — P. 632–636.

[7] *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Робастная устойчивость и управление. — М.: Наука, 2002. — 303 с.

[8] *Ecker H., Pumhossel T., Tondl A.* A Study on Parametric Excitation for Suppressing Self-excited Rotor Vibrations // Proceedings of 6th International Conference on Rotor Dynamics, IFToMM, Sydney, Australia, — 2002. — **1**. — P. 85–92.