ВАЖЛИВІ АСПЕКТИ ЗАСТОСУВАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ

(Семчишин Л.М. канд. фіз.-мат. наук, доцент)

Чортківський навчально-науковий інститут підприємництва і бізнесу

Західноукраїнського національного університету, м. Чортків, Україна

Економіко-математичні дослідження, що проводяться в країні, охоплюють важливі проблеми на різних рівнях планування та управління. Успішне розв'язання численних економіко-математичних задач стало можливим лише завдяки широкому використанню математичних моделей, обчислювальних методів і комп'ютерних технологій. Застосування математики в економіці дозволяє виділити й формально описати найголовніші зв'язки між економічними змінними та параметрами об'єктів дослідження, індуктивним шляхом одержати нові відомості про об'єкт, зробити важливі теоретичні висновки і прийняти правильні економічні рішення. Головні переваги математики як засобу наукового пізнання найповніше розкриваються саме у процесі побудови математичних моделей.

Основним методом дослідження таких складних задач є моделювання. Метод моделювання базується на принципі аналогії, тобто можливості вивчення реального об’єкта не безпосередньо, а через розгляд подібного йому і більш доступного об’єкта, його моделі.

Використання математичного моделювання в економіці та управлінні дозволяє поглибити кількісний економічний аналіз, розширити область економічної інформації, інтенсифікувати економічні розрахунки.

Економіко-математичне моделювання є одним із ефективних методів опису функціонування складних соціально-економічних об’єктів та процесів у виді математичних моделей, об’єднуючи тим самим в єдине ціле економіку та математику.

Застосування математичного апарату в економіці ґрунтується на засвоєнні необхідної бази математичних знань. Економіко-математичні методи – методологічний інструмент у професійній діяльності економістів-аналітиків, який допомагає їм вирішити два основні завдання: перше – визначити, чому у виробничо-економічній системі чи іншій структурній інституції склалася поточна кризова ситуація, тобто провести комплексний економічний аналіз стану фінансово-господарської діяльності та виробити прогнозну стратегію наслідків прийнятих управлінських рішень на перспективу. Друге завдання полягає в кількісному обґрунтуванні процедури дій «що буде, якщо ….» для кожного з можливих сценаріїв розвитку, обираючи при цьому найбільш корисний (вигідний) за заданим критерієм або множиною критеріїв.

Широке використання математичних методів є важливим напрямком удосконалення аналізу різних сфер національної економіки, який підвищує ефективність діяльності процесів в суспільстві. Зазначимо що таке модель та моделювання. Модель – це такий матеріально або розумово зображуваний об’єкт, який у процесі дослідження замінює об’єкт-оригінал таким чином, що його безпосереднє вивчення дає нові знання про цей об’єкт. Іншими словами, модель – умовне зображення об’єкта, що певною мірою адекватно описує його функціональні характеристики, які істотно важливі для поставленої мети дослідження. [1]. Моделювання – це наукова теорія побудови і реалізації моделей, за допомогою яких досліджуються явища, процеси в природі і суспільному житті [4].

Побудова економіко-математичних моделей – складний процес, який вимагає глибоких знань з економічної теорії, предмета дослідження і математичного інструментарію [2].

Задача пошуку оптимальних обсягів виробництва ґрунтується на допущеннях про лінійність зв’язку між витратами ресурсів і обсягами виготовленої продукції; між ціною, рекламою та попитом тощо. Але такі зв’язки насправді є нелінійними, тому точніші математичні моделі доцільно формулювати в термінах нелінійного програмування [3].

Нехай для деякої виробничої системи необхідно визначити план випуску продукції за умови найкращого способу використання її ресурсів. Відомі загальні запаси кожного ресурсу, норми витрат кожного ресурсу на одиницю продукції та ціни реалізації одиниці виготовленої продукції. Критерії оптимальності можуть бути різними, наприклад, максимізація виручки від реалізації продукції. Така умова подається лінійною залежністю загальної виручки від обсягів проданого товару та цін на одиницю продукції.

Однак, загальновідомим є факт, що за умов ринкової конкуренції питання реалізації продукції є досить складним. Обсяг збуту продукції визначається передусім її ціною, отже, як цільову функцію доцільно брати максимізацію не всієї виготовленої, а лише реалізованої продукції. Необхідно визначати також і оптимальний рівень ціни на одиницю продукції, за якої обсяг збуту був би максимальним. Для цього її потрібно ввести в задачу як невідому величину, а обмеження задачі мають враховувати зв'язки між ціною, рекламою та обсягами збуту продукції. Цільова функція в такому разі буде виражена добутком двох невідомих величин: оптимальної ціни одиниці продукції на оптимальний обсяг відповідного виду продукції, тобто буде нелінійно [4]. Отже, маємо задачу нелінійного програмування.

Розглянемо утворення найхарактерніших нелінійних моделей.

Загальну задачу математичного програмування сформулюємо так: знайти такі значення змінних x_j $(j=\overline{1,n})$, щоб цільова функція набувала екстремального (максимального чи мінімального) значення:

$$\max(\min)\ F = f(x_1, x_2, ..., x_n) \tag{1}$$

за умов:

$$g_i(x_1, x_2, ..., x_n)\{\le, =, \ge\} b_i \quad (i=\overline{1,m}); \tag{2}$$

$$x_j \ge 0 \quad (j=\overline{1,n}). \tag{3}$$

Якщо всі функції $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ та $g_i(x_1, x_2, ..., x_n)$, $i=\overline{1,m}$ є лінійними, то це задача лінійного програмування, інакше (якщо хоча б одна з функцій є нелінійною) маємо *задачу нелінійного програмування*.

Часто задачу нелінійного програмування намагаються звести до лінійного вигляду, що призводить до значних похибок [4].

Розглянемо основні труднощі розв’язування нелінійних задач [5].

1. Для лінійних задач можна завжди знайти оптимальний розв’язок універсальним методом – симплексним. При цьому не існує проблеми стосовно доведення існування такого розв’язку, тобто в результаті застосування алгоритму симплексного методу завжди отримують один з таких варіантів відповіді:

а) отримали оптимальний розв’язок;

б) умови задачі суперечливі, тобто розв’язку не існує;

в) цільова функція необмежена, тобто розв’язку також не існує.

Для задач нелінійного програмування не існує універсального методу розв’язання, що зумовило розроблення значної кількості різних методів розв’язування окремих типів задач нелінійного програмування. Для кожного специфічного методу необхідно доводити існування розв’язку задачі та його єдиність, що також є досить складною математичною задачею.

2. Для задач лінійного програмування доведено наявність єдиного екстремуму, що досягається в одній (або кількох одночасно) з вершин багатогранника допустимих розв’язків задачі.

3. Класичний метод оптимізації. Метод множників Лагранжа. Як уже згадувалось, для розв’язування задач нелінійного програмування не існує універсального методу, тобто до них необхідно застосовувати широке коло різних методів і обчислювальних алгоритмів. Вони в основному базуються на застосуванні диференційного числення і залежать від конкретної постановки задачі та форми економіко-математичної моделі.

Ідея методу множників Лагранжа полягає в заміні початкової задачі простішою. Для цього цільову функцію замінюють іншою, з більшою кількістю змінних, тобто такою, яка включає в себе умови, що подані як обмеження. Після такого перетворення подальше розв’язування задачі полягає в знаходженні екстремуму нової функції, на змінні якої не накладено ніяких обмежень. Тобто від початкової задачі пошуку умовного екстремуму переходимо до задачі відшукання безумовного екстремального значення іншої функції. Отже, завдяки такому перетворенню можливе застосування методів класичного знаходження екстремуму функції кількох змінних.

Розглянемо метод множників Лагранжа для розв'язування задачі нелінійного програмування, що має вигляд:

$$\max(\min)Z = f(x_1, \quad x_2, \quad ..., \quad x_n) \tag{4}$$

за умов:

$$q_i(x_1, \quad x_2, \quad ..., \quad x_n) = b_i \quad (i = \overline{1, m}), \tag{5}$$

де функції $f(x_1, \quad x_2, \quad ..., \quad x_n)$ і $q_i(x_1, \quad x_2, \quad ..., \quad x_n)$ мають бути диференційовними.

Задача (4)-(5) полягає в знаходженні екстремуму функції $f(x)$ за умов виконання обмежень $q_i, (i = \overline{1, m})$.

Переходимо до задачі пошуку безумовного екстремуму. Теоретично доведено, що постановки та розв'язання таких задач еквівалентні.

Замінюємо цільову функцію (4) на складнішу. Це є функція Лагранжа і має такий вигляд:

$$\begin{gathered} L(x_1, \quad x_2, \quad ..., \quad x_n; \lambda_{1,} \quad \lambda_2, \quad ..., \quad \lambda_m) = \\ f(x_1, x_2, ..., x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (b_i - q_i(x_1, x_2, ..., x_n)), \end{gathered} \tag{6}$$

де λ_i – деякі невідомі величини, множники Лагранжа.

Обчисливши частинні похідні, прирівнявши їх до нуля, отримаємо розв'язки $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ і $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, ..., \lambda_m^*)$ – стаціонарні точки. Оскільки, ці розв'язки отримані з необхідної умови екстремуму, то вони визначають максимум, мінімум задачі (4).

Одним із найефективніших методів розв'язування економіко-математичних моделей є оптимізаційні задачі з лінійною формою взаємозв'язків. Вони мають задовольняти наступні вимоги:

- будь-яка задача повинна бути представлена в математичній формі за допомогою систем нерівностей або рівнянь;
- будь-який отриманий розв’язок не повинен суперечити економічному змісту задачі;
- система лінійних рівнянь повинна бути невизначеною;
- для знаходження оптимального розв’язку необхідно сформулювати критерій оптимальності і виразити його у формі цільової функції, яка в процесі розв’язку набуде екстремального значення.

Використання методів економіко-математичного моделювання дає змогу аналізувати якісно і кількісно складні економічні процеси. Нові методи моделювання, засновані на строгих математичних розв’язаннях економічних завдань із застосуванням виявлених законів економіки виробництва, у поєднанні із сучасною обчислювальною технікою сприяють створення високоефективних систем для аналізу стану і науково обґрунтованого прогнозування розвитку економіки підприємств, галузей і країни загалом, дають можливість усвідомлено управляти економічними процесами виробництва.

Література

1. Григорків В. С. Моделювання економіки. Ч. 2: Навч. посібник. – Чернівці: Рута, 2006. – 100 с.
2. Економіко-математичне моделювання: Навчальний посібник / За ред. О.Т. Іващука. Тернопіль. ТНЕУ, 2008. – 704 с.
3. Ляшенко І.М. Економіко-математичні методи та моделі сталого розвитку – К. : Вища школа, 1999. – 236 с.
4. Недашковський М.О. Ковальчук О.Я. Обчислення з λ-матрицями – К.: Наукова думка, 2007. – 294 с.
5. Семчишин Л.М. Динамічні математичні моделі в економіці – Вісник Тернопільського національного економічного університету. – Тернопіль: Економічна думка, 2008. – Випуск 3. – С. 123-129.