МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЗАХІДНОУКРАЇНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

БЕРЕЗЬКА К. М.

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ З ДИСЦИПЛІНИ «МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ В ІНЖИНІРИНГУ»

Тернопіль – 2021

Рецензенти:
С. В. Мартинюк – к. ф.-м. н., доцент кафедри інформатики і методики її викладання Тернопільського національного педагогічного університету імені Володимира Гнатюка

О. С. Башуцька – к. е. н., ст. викладач кафедри економічної кібернетики та інформатики Західноукраїнського національного університету

Затверджено на засіданні кафедри прикладної математики
протокол №1 від 23.08.2021р.

Конспект лекцій з дисципліни «Математичні методи в інжинірингу» / Укл. Березька К. М. Тернопіль: ЗУНУ, 2021.

У посібнику приведені лекції з дисципліни «Математичні методи в інжинірингу». Для студентів денної і заочної форм навчання.

Відповідальний за випуск: О. М. Мартинюк, кандидат фізико-математичних наук, завідувач кафедри ПМ ЗУНУ

ЗМІСТ

Тема 1. Методологія математичного моделювання в інжинірингу

Предмет та метод дисципліни. Поняття моделі та моделювання. Об’єкт моделювання. Математичні моделі, їх види та основні етапи її побудови. Адекватність математичних моделей. Алгоритм наукових досліджень з допомогою математичного моделювання.

Інжиніринг — набір способів та методів, які компанія, підприємство, фірма використовує для проектування власної діяльності.

В традиційному розумінні — це інженерно-консультативні послуги, пов'язані з підготовкою виробничого процесу, або послуги із забезпечення нормального перебігу процесу виробництва та реалізації продукції.

Математичні методи в інжинірингу – наукова дисципліна, яка займається розробкою та практичним використанням математичного апарату для підготовки виробничого процесу, забезпечення нормального перебігу процесу виробництва та реалізації продукції.

Моделювання – процес побудови моделі, за допомогою якого вивчається функціонування об’єктів різної природи. Він складається з трьох основних елементів: суб’єкта, об’єкта дослідження та моделі, з допомогою якої суб’єкт пізнає об’єкт.

Модель – це такий матеріально або розумово зображуваний об’єкт, який у процесі дослідження замінює об’єкт-оригінал таким чином, що його безпосереднє вивчення дає нові знання про цей об’єкт. Іншими словами, модель – умовне зображення об’єкта, що певною мірою адекватно описує його функціональні характеристики, які істотно важливі для поставленої мети дослідження. Разом із тим, можна сказати, що модель – це інструмент кількісного аналізу певних явищ, крім того, вони розвивають інтелект і дають багато корисного для прийняття рішень.

В означенні моделі можна визначити декілька важливих моментів:

• модель може бути матеріальним об’єктом або абстрактним представленням, і, як наслідок, конкретне втілення моделі не буде суттєвим для мети моделювання;

• основна властивість моделі – здатність представити об’єкт при дослідженні його властивостей;

• моделлю може бути тільки така структура, яка дозволить отримати на її основі більш повну інформацію, в порівнянні з безпосереднім дослідженням об’єкта.

Загальне схематичне зображення основних етапів процесу моделювання показано на рис. 1.1.

Розрізняють фізичне та математичне моделювання. Математичне моделювання – універсальний та ефективний інструмент пізнання внутрішніх закономірностей, властивих явищам і процесам. Воно дає можливість вивчити кількісні взаємозв’язки, взаємозалежності моделюючої системи та вдосконалити її подальший розвиток і функціонування з допомогою математичної моделі.

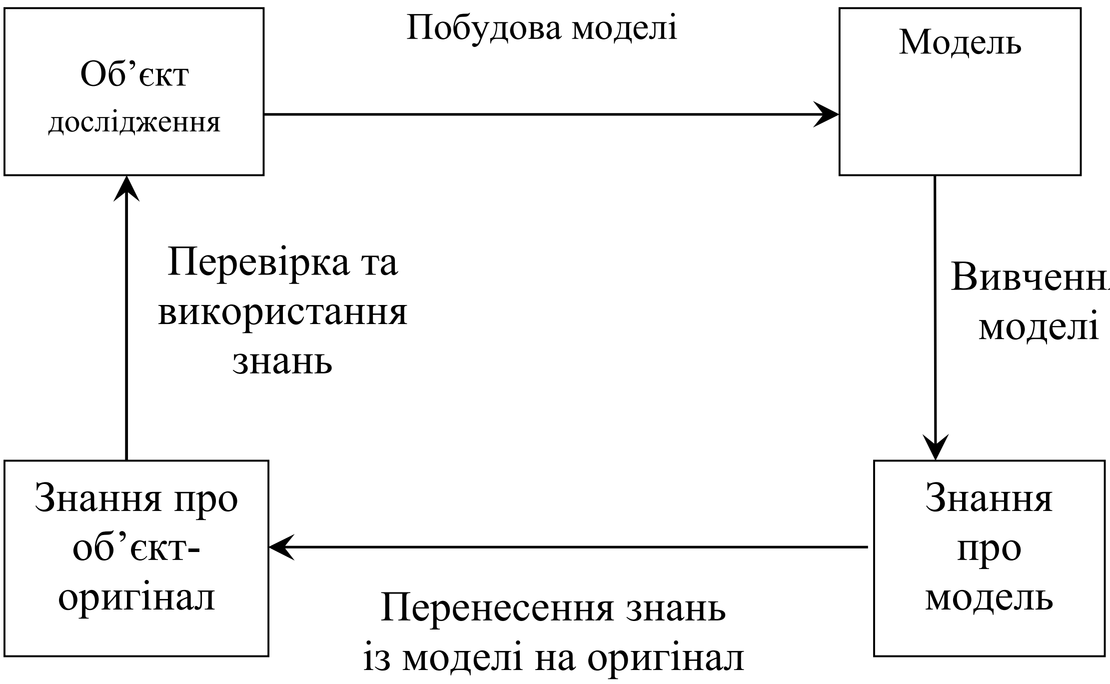


Рис. 1.1. Основні складові процесу моделювання

Математичну модель розуміємо як формалізований, тобто представлений математичними співвідношеннями, набір правил, що описують фактори суттєвого впливу на функціонування об’єкта дослідження.

Отже, математична модель є системою математичних формул, нерівностей або рівнянь, які більш-менш адекватно описують явища та процеси, що властиві для оригіналу.

Тому процес побудови та використання математичної моделі для її розв’язання з допомогою прикладних задач називається математичним моделюванням.

Розглянемо характерні особливості математичного моделювання економічних та технічних процесів.

По-перше, математичне моделювання як методологія наукових досліджень поєднує в собі надбання різних галузей науки про природу та суспільство, а саме: прикладної математики, інформатики та системного аналізу для вирішення фундаментальних проблем, які мають важливе макроекономічне значення. Математичне моделювання об’єктів складної природи – єдиний замкнутий цикл розробок від фундаментального дослідження проблеми до конкретних числових розрахунків показників ефективності функціонування об’єкта. Результатом розробок може бути система математичних моделей, які якісно описують різноманітні закономірності функціонування об’єкта та його еволюцію в цілому, як складної системи в різних умовах. Розрахункові експерименти з допомогою математичних моделей дають вихідні дані для оцінки показників ефективності функціонування об’єкта. Тому математичне моделювання як методологія організації наукової експертизи великих проблем є незамінним при прийнятті макроекономічних рішень.

По-друге, за своєю суттю математичне моделювання є методом розв’язання нових складних проблем, тому дослідження з його допомогою повинно бути упередженим: треба заздалегідь розробляти нові методи та готувати спеціалістів-аналітиків, які зможуть зі знанням справи використовувати ці методи для розв'язання нових прикладних задач.

По-третє, ті, від кого залежить розподіл ресурсів, ще не повністю усвідомили, що методи математичного моделювання мають велике народногосподарське значення і від їх розвитку залежить розвиток соціально-економічного та науково-технічного прогресу країни. Досвід показує, що відносно компактні, але добре структуровані математичні моделі дають можливість отримувати нетривіальні розв'язки складних економічних та технічних проблем.

Тема 2. Оптимізаційні задачі в інжинірингу. Моделі задач лінійного програмування та методи їх розв'язування

Постановка задач лінійного програмування, їх моделі та основні форми. Графічний метод розв'язування задач лінійного програмування. Симплексний метод розв'язування задач лінійного програмування. Метод штучного базису. Розв'язування задач лінійного програмування з допомогою пакетів прикладних програм. Теорія двоїстості та кількісний аналіз оптимізаційних розрахунків.

Структурні складові технічної системи мають мету (ціль) свого розвитку та функціонування. Це може бути, наприклад, отримання максимально чистого прибутку чи валового випуску, мінімізація витрат чи відходів та інше. Ступінь досягнення мети, в більшості випадків, має кількісну характеристику, тобто її можна описати математично. Нехай Z – обрана ціль.

Загальну лінійну математичну модель, так звану загальну задачу лінійного програмування, можна подати у вигляді:

знайти максимум (мінімум) функції

$$Z = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n, \tag{2.1}$$

за умов

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \{\leq, =, \geq\} b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \{\leq, =, \geq\} b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \{\leq, =, \geq\} b_m, \end{cases} \tag{2.2}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, ..., x_n \geq 0. \tag{2.3}$$

Функцію Z називають *цільовою функцією* або *функцією мети*. Для технічної системи це є функція ефективності її функціонування та розвитку.

Сформулюємо загальне визначення задачі лінійного програмування таким чином:

Необхідно знайти такі значення керованих змінних $\mathbf{x_j}$, щоб цільова функція при цих значеннях набувала екстремального (мінімального чи максимального) значення за виконання певної множини умов.

Отже, потрібно знайти значення змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$, які задовольняють умови (2.2) і (2.3), при яких цільова функція (2.1) набуває екстремального (максимального чи мінімального) значення. Набір символів $\{\le, =, \ge\}$ в (2.2) означає, що для деяких значень індексу i $(i = \overline{1, n})$ виконуються нерівності "$\le$", для інших – рівності (=), а для решти – нерівності типу "$\ge$".

Система (2.2)-(2.3) називається *системою обмежень* або *системою умов* задачі. Вона описує внутрішні технологічні та економічні процеси функціонування і розвитку виробничо-економічної системи, а також процеси зовнішнього середовища, які впливають на результат діяльності системи. Для економічних систем змінні $\boldsymbol{x_j}$ мають бути невід'ємними.

Формалізований запис задачі (2.1)-(2.3) є загальною математичною моделлю функціонування умовної системи. Розробляючи окреслену модель, потрібно керуватися такими правилами:

1) модель має адекватно описувати реальні економічні та технологічні процеси;
2) у моделі потрібно враховувати все істотне, суттєве в досліджуваному явищі чи процесі, відкидаючи все другорядне, неістотне;
3) модель має бути зрозумілою для користувача;
4) треба забезпечити, щоб множина наборів $\boldsymbol{x_j}$ була непустою.

Будь-який набір змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$, що задовольняє умови (2.2) та (2.3), називають *допустимим планом* або планом. Очевидно, що кожний допустимий план є відповідною стратегією системи, програмою дій. Кожному допустимому плану відповідає значення цільової функції, яке обчислюється за формулою (2.1).

Сукупність усіх розв'язків систем обмежень (2.2) та (2.3), тобто множина всіх допустимих планів, становить *область існування планів*.

План, за якого цільова функція набуває екстремального значення, називається *оптимальним*. Оптимальний план є розв'язком задачі математичного програмування (2.1)-(2.3).

Слід відзначити, що в задачі математичного програмування передбачається одна цільова функція, яка кількісно виражена. В реальних економічних системах на роль критерію оптимальності (ефективності) претендують багато показників. Наприклад, максимум чистого доходу від виготовленої продукції чи максимум рентабельності, мінімум собівартості виготовленої продукції або мінімум витрат дефіцитних ресурсів і т.д. Хоча загальна задача математичного програмування передбачає одну цільову функцію, але існують математичні методи побудови компромісних планів, тобто методи багатокритеріальної оптимізації.

Розглянемо найпростіші математичні моделі задач лінійного програмування (ЛП):

1) ***Задача про використання ресурсів (сировини)*.**

Для виготовлення двох видів продукції $\boldsymbol{\Pi_1}$ та $\boldsymbol{\Pi_2}$ використовуються три види сировини $\boldsymbol{S_1}$, $\boldsymbol{S_2}$, $\boldsymbol{S_3}$. Запаси сировини, норми витрат сировини на виготовлення одиниці продукції кожного виду та дохід від одиниці продукції кожного виду наведені в таблиці:

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на виготовлення одиниці продукції	
		$\boldsymbol{\Pi_1}$	$\boldsymbol{\Pi_2}$
$\boldsymbol{S_1}$	b_1	a_{11}	a_{12}
$\boldsymbol{S_2}$	b_2	a_{21}	a_{22}
$\boldsymbol{S_3}$	b_3	a_{31}	a_{32}
Дохід від одиниці продукції		c_1	c_2

Необхідно знайти такий план виробництва продукції, який забезпечить найбільший сумарний дохід.

Побудуємо математичну модель задачі. Позначимо:

x_1, x_2 – загальна кількість продукції Π_1 та Π_2;

Z – сумарний дохід, який отримаємо від реалізації всієї продукції Π_1 та Π_2.

Запишемо цільову функцію задачі. Дохід від реалізації одиниці продукції Π_1 становить c_1, а всього цієї продукції плануємо випустити x_1 одиниць, тому перемноживши c_1 на x_1, отримаємо весь дохід, який матимемо від реалізації всієї продукції. Аналогічно дохід від реалізації продукції Π_2 становитиме c_2x_2. Додамо ці два доданки ($c_1x_1+c_2x_2$) і отримаємо весь дохід від реалізації всієї продукції Π_1 та Π_2. Оскільки ми хочемо отримати найбільший дохід, то будемо знаходити максимальне значення цільової функції:

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 \qquad (\max).$$

Тепер потрібно записати обмеження задачі. Нам відомо, скільки ресурсів кожного виду затрачається на виготовлення одиниці продукції кожного виду. Так, на виготовлення одиниці продукції Π_1 ресурсу (сировини) S_1 витрачаємо a_{11}, всього продукції Π_1 плануємо виготовити x_1 одиниць. Перемножимо a_{11} на x_1 і отримаємо ту кількість ресурсу S_1, яка піде на виготовлення всієї продукції Π_1. Цього ж ресурсу S_1 на виготовлення одиниці продукції Π_2 затрачаємо a_{12}, а плануємо виготовити x_2 одиниць продукції Π_2, тому, коли перемножимо a_{12} на x_2, будемо мати кількість ресурсу S_1, затрачену на виготовлення всієї продукції Π_2. Якщо додамо $a_{11}x_1$ та $a_{12}x_2$, то отримаємо сумарні витрати ресурсу S_1 на виготовлення всієї продукції $П_1$ та $П_2$. Але запас кожного виду ресурсу обмежений і використати більше, ніж ми маємо, не можемо. Запас ресурсу S_1 становить b_1. Тому обмеження з використання ресурсу S_1 матиме вигляд: $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1$. Аналогічно запишемо обмеження з використання ресурсів S_2 та S_3:

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2,$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \le b_3.$$

Очевидно, що невідомі x_1, x_2 не можуть бути від'ємними. Причому рівність нулю однієї з них означає, що даний вид продукції виготовляти недоцільно.

Ми отримали таку задачу лінійного програмування:

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 \qquad (\max), \tag{2.4}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \le b_3, \\ x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0. \end{cases} \tag{2.5}$$

Функція (2.4) – це цільова функція або функція мети, (2.5) – система обмежень нашої задачі, причому перші три обмеження (2.5) називають основними обмеженнями, а останні два (обмеження на знак змінних x_1 та x_2) – природними чи економічними.

2) ***Узагальнена модель оптимального планування***

Розглянемо загальну модель оптимального планування. Припустимо, що планується організувати випуск продукції r видів за допомогою m можливих технологій. Для цього використовується n видів виробничих ресурсів (матеріалів, обладнання, праці, сировини тощо).

Введемо позначення: i – індекс ресурсу, $i = \overline{1, n}$; j – індекс технології, $j = \overline{1, m}$; l – індекс виду продукції, $l = \overline{1, r}$; a_{ij} – витрати ресурсу i-го виду на одиницю часу роботи технологічної лінії виду j; b_{lj} – вихід продукції виду l за одиницю часу роботи технологічної лінії виду j; A_i – обсяг запасів ресурсів i-го виду; K_l – коефіцієнт, який відображає частку продукції виду l в загальному обсязі кінцевої продукції; x_j – час роботи технологічної лінії виду j; Z – загальний обсяг кінцевої продукції.

Тоді узагальнена модель оптимального планування матиме вигляд: знайти такий план $\{x_j \ge 0; j = \overline{1, m}; Z \ge 0\}$, який забезпечить

$$Z \to \max$$

при виконанні обмежень:

а) за обсягом ресурсів

$$\left.\begin{aligned} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m \le A_1, \\ & \vdots \\ & a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m \le A_n; \end{aligned}\right\} \qquad (2.6)$$

б) за структурою кінцевої продукції

$$\left.\begin{aligned} & b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1m}x_m \ge K_1 Z, \\ & \vdots \\ & b_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rm}x_m \ge K_r Z. \end{aligned}\right\} \qquad (2.7)$$

Симплексний метод розв’язування задач лінійного програмування

На відміну від графічного методу, який доцільно застосовувати лише для розв'язування задач лінійного програмування з двома змінними, за допомогою симплекс-методу можна знаходити розв'язки задач ЛП з більшою кількістю невідомих. Процес розв'язування задачі таким методом має ітераційний характер. Обчислювальні процедури (ітерації) одного й того самого типу повторюються в конкретній послідовності за певними правилами до тих пір, доки не буде отримано оптимальний план задачі або з'ясовано, що його не існує.

Симплекс-метод – це поетапна обчислювальна процедура, в основу якої покладено принцип послідовного поліпшення значень цільової функції переходом від одного опорного плану задачі ЛП до іншого.

Цей метод можна використовувати для розв'язування задач ЛП, які записані в канонічній формі, тобто:

1) задача ЛП записана в першій стандартній формі (обмеження-рівності);
2) праві частини рівнянь-обмежень (вільні члени) невід'ємні;
3) система рівнянь-обмежень має чітко виділений базис, тобто в кожному рівнянні є невідома з коефіцієнтом 1 і ця невідома відсутня в усіх інших рівняннях системи обмежень. Ці невідомі називаються базисними, а всі інші – вільними;
4) цільова функція залежить тільки від вільних невідомих.

Алгоритм симплексного методу розв'язування задач лінійного програмування складається з таких етапів:

1. Визначення початкового опорного плану задачі лінійного програмування.
2. Побудова симплексної таблиці.
3. Перевірка опорного плану на оптимальність за допомогою чисел нульового рядка симплекс-таблиці. Якщо умова оптимальності виконується, то визначений опорний план є оптимальним, якщо ж не виконується, то переходять до нового опорного плану або встановлюють, що оптимального плану задачі не існує.

4. Перехід до нового опорного плану задачі здійснюється визначенням ключового (генерального) елемента та розрахунком нової симплекс-таблиці.
5. Повторення дій, починаючи з п.3.

Тема 3. Транспортна задача лінійного програмування

Постановка транспортної задачі та її математична модель. Методи побудови початкового опорного плану. Метод потенціалів. Критерій оптимальності опорного плану за методом потенціалів. Цикли перерахунку транспортної задачі. Відкрита транспортна задача. Задачі, що зводяться до задач транспортного типу.

Постановка транспортної задачі така: однорідний товар знаходиться в певних пунктах постачання A_i, де $i=\overline{1,m}$ в кількості a_i $(i=\overline{1,m})$ одиниць вантажу. Товар слід доставити споживачам B_j $(j=\overline{1,n})$, які мають потреби в цьому товарі, відповідно b_j $(j=\overline{1,n})$ одиниць вантажу. Відомі вартості перевезення одиниці вантажу від *i*-го пункту постачання, до *j*-го пункту споживання - c_{ij}. Вимагається задоволення потреб в товарі з найменшою вартістю транспортних витрат.

Транспортна задача закритого типу (з правильним балансом), якщо $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$ і відкритого типу, якщо $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$ або $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$.

Способи складання початкових опорних планів:

1. *діагональний*, якщо задоволення потреб здійснюється по рядку занесення в таблицю споживачів. Спочатку за рахунок І-го пункту постачання, потім ІІ-го і т.д.
2. метод найменшої вартості: задоволення потреб здійснюється, починаючи з клітинки в таблиці, яка має *найменшу вартість*, якщо їх кілька, то заповнюють цю клітинку, яка ближча до діагоналі. Задовольняють потреби споживачів в порядку зростання вартості перевезення одиниці вантажу.

Початковий опорний план будують завжди до закритої задачі (якщо ж задача відкрита, то роблять її закритою, ввівши фіктивного споживача чи постачальника на різницю сум запасів чи потреб, вартість перевезень фіктивного вантажу нульова).

Кількість заповнених клітинок опорного плану $m+n-1=r$. Якщо ця рівність не виконується, то необхідно недостатню кількість клітинок заповнити нулями (заповнення здійснюється по ходу розставляння потенціалів, а не скоріше (див. далі).

Для перевірки опорного плану на *оптимальність* використовують метод потенціалів, який грунтується на теоремах двоїстості. Кожному рядку таблиці приписують змінну $\alpha_i (i=\overline{1,m})$, а стовпцю $\beta_j (j=\overline{1,n})$.

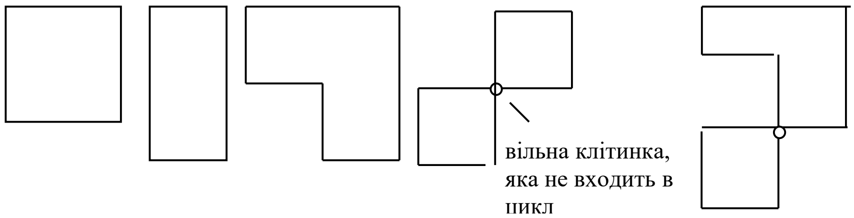
Критерій оптимальності опорного плану:

1) $\alpha_i + \beta_j = C_{ij}$ — для *базисних* (заповнених) клітинок таблиці;

2) $\alpha_i + \beta_j \le C_{ij}$ — для *вільних* (незаповнених) клітинок таблиці.

Якщо опорний план не оптимальний (не в усіх клітинках виконується умова 2), то план поліпшують за допомогою циклу перерахунку для клітинки в якій умова 2) не виконалася. Якщо для усіх вільних клітинок виконується умова 2), то план – оптимальний.

Цикл перерахунку — це замкнена ламана лінія, одна вершина якої лежить у вільній клітинці, а всі інші в базисних. Цикли можуть мати вигляд, як показано на рисунку.



Кожній вершині циклу ставляться у відповідність знаки “+” і “-”. Їх розставляють починаючи із “+” для єдиної вільної клітинки, а дальше знаки чергуються.

Перерахунок по циклу здійснюється на число θ, яке визначається за найменшою кількістю одиниць вантажу з клітин циклу із знаком “-”.

Перерахунок (зсув) по циклу виконують так: до чисел вершин із знаком “+” додають встановлене число перерахунку θ, а від чисел вершин із знаком “-” – віднімають те ж число.

Перевірку нового опорного плану на оптимальність здійснюють аналогічно попередньому.

Примітка. Значення базисних клітинок, які не брали участі в циклі перерахунку, в новій таблиці залишаються без змін.

Тема 4. Задачі цілочислового лінійного програмування в інжинірингу та методи їх розв'язання

Постановка задачі цілочислового лінійного програмування. Методи розв'язування задач цілочислового лінійного програмування. Метод Гоморі. Метод „віток і меж”. Прикладні моделі задач цілочислового лінійного програмування: задача про призначення, про комівояжера.

Існує досить широкий клас задач математичного програмування, в оптимальному розв'язку яких змінні приймають дробові значення, що з економічної точки зору не має змісту, наприклад, коли говориться про випуск певної продукції (комп'ютерів, меблів, станків і т.д.). Тому це призвело до нового класу задач – задач цілочислового програмування.

В загальному випадку така задача має вигляд:

Знайти максимум (мінімум) функції

$$Z = c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \tag{4.1}$$

за умов

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \{\le, =, \ge\} b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \{\le, =, \ge\} b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \{\le, =, \ge\} b_m, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, n}. \end{cases} \tag{4.2}$$

$$x_j \ - \ \textit{цілі}, \quad j = \overline{1, n}. \tag{4.3}$$

До задач цього класу можна віднести задачу про використання сировини, транспортну задачу, задачу раціонального розкрою матеріалів, а інший клас задач цілочислового програмування містить задачі оптимізації, в яких змінні набувають лише двох цілих значень – 0 або 1 (бульові змінні). Прикладом такої задачі є задача про комівояжера. Її зміст полягає в тому, що комівояжеру потрібно відвідати кожне з n міст, починаючи і закінчуючи свій маршрут в одному й тому ж місті і не заїжджаючи двічі в одне місто. Якщо між містами i та j немає прямого маршруту, то вважають, $c_{ij} = \infty$ (на практиці беруть достатньо велике число). Крім цього, можливо, що $c_{ij} \ne c_{ji}$. Задача полягає у знаходженні найкоротшого шляху комівояжера. Математична модель задачі має вигляд:

$$z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \qquad (\min),$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = \overline{1, n}; i \ne j, \\ \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = \overline{1, n}; i \ne j, \end{cases} \tag{4.4}$$

де c_{ij} – відстань між містами i та j;

x_{ij} – бульові змінні:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \textit{якщо маршрут передбачає переїзд із } i-\textit{го міста до } j-\textit{го}, \\ 0, & \textit{у протилежному випадку}. \end{cases}$$

Обмеження, задані першою формулою в системі (4.4), – це умова щодо одноразового в'їзду в кожне місто, а другою формулою – щодо одноразового виїзду з кожного міста.

Розглянемо ще один приклад задачі з бульовими змінними. Інвестиційна компанія може вкласти кошти в декілька підприємств. Ефективність кожного проекту оцінена згідно з тим, що його реалізація можлива за певних умов. Кожному проекту відповідає невідома, яка рівна 1 чи 0 залежно від того, вкладає чи не вкладає інвестиційна компанія кошти в підприємство.

В деяких реальних задачах ставиться умова цілочислових значень не до всіх змінних, а до однієї чи декількох. Такі задачі називають частково цілочисловими.

Для знаходження оптимального розв'язку цілочислових задач використовують спеціальні методи. Найпростішим методом розв'язування цілочислової задачі є знаходження її оптимального розв'язку, як задачі, що має неперервні змінні, з подальшим округленням останніх. Такий підхід часто є виправданим. Проте якщо мова йде про випуск продукції великої вартості (наприклад, турбіни до електростанцій чи агрегати в сушильний цех), то будь-які заокруглення недопустимі.

Для знаходження оптимальних планів цілочислових задач застосовують дві основні групи методів:

- методи відтинання;
- комбінаторні методи.

Основою методів відтинання є ідея поступового «звуження» області допустимих розв'язків задачі. Спочатку розв'язується задача з так званими послабленими умовами, тобто без урахування вимог цілочисловості змінних, а потім вводять в модель додаткові обмеження, які враховують вимогу, щоб значення змінних були цілими. Таким чином многокутник допустимих розв'язків послабленої задачі поступово зменшуємо до тих пір, доки змінні оптимального розв'язку не набудуть цілих значень. Основним методом цієї групи є метод Гоморі.

Комбінаторні методи цілочислової оптимізації базуються на повному переборі всіх допустимих цілочислових розв'язків, тобто вони реалізують процедуру цілеспрямованого перебору, під час якої розглядається лише частина розв'язків (досить невелика), а решта враховується одним із спеціальних методів.

Найпоширенішим в цій групі є метод «*віток і меж*», який, починаючи з розв'язування послабленої задачі, передбачає розбиття початкової задачі на дві підзадачі виключенням областей, що не мають цілочислових розв'язків, і дослідженням кожної окремої частини многокутника допустимих розв'язків.

Для розв'язування задач з бульовими змінними використовують комбіновані методи, і якщо змінні є бульовими, то методи пошуку оптимального розв'язку значно спрощуються.

Методи розв'язування задач цілочислового лінійного програмування
Метод Гоморі

Нехай маємо задачу цілочислового програмування (4.1)-(4.3). Для її розв'язування можна скористатися ітеративним методом Гоморі, суть алгоритму якого полягає у:

1. Використовуючи симплекс-метод, знаходять розв'язок послабленої задачі, тобто задачі без вимог цілочисловості змінних – (4.1)-(4.2). Якщо серед елементів умовно-оптимального плану немає дробових чисел, то цей план є оптимальним планом задачі цілочислового програмування (4.1)-(4.3).

2. Якщо в умовно-оптимальному плані є дробові значення, то вибирається змінна, яка має найбільшу дробову частину. На базі цієї змінної та елементів рядка останньої симплекс-таблиці, що відповідає цій змінній будується додаткове обмеження Гоморі:

$$\sum_{j=1}^{n}\{a_{ij}\}x_j \ge \{b_j\},$$

де символ { } означає дробову частину числа.

Для визначення дробової частини будь-якого числа необхідно від нього відняти цілу його частину – найбільше ціле число, що не перевищує зазначеного. Цілу частину числа позначають [ ]. Наприклад,

[2,4]= 2; [-2,4] = -3;

{2,4}=2,4– [2,4]=2,4–2=0,4; {-2,4}=-2,4–[- 2,4]=-2,4– (-3)=3–2,4=0,6.

3. Додаткове обмеження після зведення його до канонічної форми приєднується до останньої симплекс-таблиці, яка містить умовно-оптимальний розв'язок задачі. Отриману розширену задачу розв'язують, а потім перевіряють її розв'язок на цілочисловість. Якщо він не цілочисловий, то повертаються до пункту 2. Процедуру повторюють до тих пір, доки не буде знайдено цілочислового оптимального розв'язку або доведено, що задача не має допустимих розв'язків у множині цілих значень.

Досвід показує, що процес розв'язування задач великої розмірності методом Гоморі повільно збіжний.

Метод «віток і меж»

Ефективнішим за метод Гоморі розв'язування задач цілочислового програмування є метод “*віток і меж*”. Спочатку, як і в методі Гоморі, симплексним методом розв'язується послаблена задача (з відкиданням умов цілочисловості). Нехай в оптимальному плані послабленої задачі значення невідомої x_j дробове і рівне x_j^*. Тоді можна стверджувати, що в інтервалі $\left([x_j^*];[x_j^*]+1\right)$ цілих значень немає.

Наприклад, якщо x_j^*=3,6, то маємо інтервал (3;4), де, очевидно, немає цілого числа. Значенню x_j^*=–3,6 відповідає інтервал (–4, –3), де також не існує цілого числа.

Отже, допустиме ціле значення має задовольняти одну з нерівностей:

$$x_j \le [x_j^*] \quad \text{або} \quad x_j \ge [x_j^*]+1.$$

Дописуємо кожну з цих умов до обмежень задачі з послабленими умовами і отримуємо дві не пов'язані між собою задачі:

- перша задача:

$$Z = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \qquad \max(\min), \tag{4.5}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \{\le, =, \ge\} b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \{\le, =, \ge\} b_2, \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \{\le, =, \ge\} b_m, \\ x_j \le [x_j^*], \\ x_j \ge 0, \qquad j = \overline{1,n}, \end{cases} \tag{4.6}$$

$$x_j \quad - \quad цілі, \quad j = \overline{1,n}, \tag{4.7}$$

- друга задача:

$$Z = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \qquad \max(\min), \tag{4.8}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \{\le, =, \ge\} b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \{\le, =, \ge\} b_2, \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \{\le, =, \ge\} b_m, \\ x_j \ge [x_j^*]+1, \\ x_j \ge 0, \qquad j = \overline{1,n}, \end{cases} \tag{4.9}$$

$$x_j \quad - \quad цілі, \quad j = \overline{1,n}, \tag{4.10}$$

де x_j^* – дробовий компонент розв'язку задачі (4.1)-(4.2).

Далі симплексним методом розв'язуємо послаблені задачі (4.5)-(4.6) та (4.8)-(4.9), тобто з відкиданням обмежень (4.7) та (4.10). Якщо знайдені оптимальні розв'язки задовольняють вимоги цілочисловості, то ці плани є розв'язками задачі (4.1)-(4.3), в протилежному випадку пошук розв'язку задачі триває. Для подальшого розгалуження беремо задачу з найбільшим значенням цільової функції, якщо мова йде про максимізацію, і з найменшим значенням цільової функції при її мінімізації. Таке розгалуження виконується до тих пір, поки не буде знайдено оптимальний цілочисловий розв'язок задачі або встановлено, що цілочислового розв'язку задачі не існує.

Прикладні моделі задач цілочислового лінійного програмування

Задача про призначення

Припустимо, що для виконання n робіт фірма має n працівників. Позначимо: i – індекс претендента на виконання певної роботи, $i = \overline{1,n}$; c_{ij} – сумарні витрати на виконання i-го виду роботи j-тим працівником; j – індекс виду роботи, $j = \overline{1,n}$. Приймемо таку умову: кожний претендент може бути призначеним тільки на одну роботу, а кожна робота може бути виконаною тільки одним працівником.

Невідомою величиною в задачі буде

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \textit{якщо } i - \textit{й кандидат виконує } j - \textit{ту роботу;} \\ 0, & \textit{в протилежному випадку.} \end{cases}$$

Необхідно розрахувати оптимальну стратегію призначення кандидатів на виконання обсягу робіт, при якій сумарні витрати на виконання були би мінімальними.

Тоді економіко-математична модель задачі матиме вигляд.

Знайти

$$Z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij} \to min \tag{4.18}$$

при виконанні таких умов:

1) кожним кандидатом виконується тільки одна робота

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = \overline{1,n}; \tag{4.19}$$

2) кожна робота може виконуватися одним працівником

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1\ , j = \overline{1,n}\ ; \tag{4.20}$$

3) відносно двійкових змінних

$$x_{ij} \in \{0;1\}\ , i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,n}\ ; \tag{4.21}$$

Тема 5. Динамічне програмування в інжинірингу

Постановка задачі динамічного програмування. Методи розв’язування задач динамічного програмування. Прикладні моделі динамічного програмування. Модель оптимального розподілу фінансових ресурсів між проектами. Модель оптимальної заміни устаткування.

Динамічне програмування – це математичний апарат, який дозволяє швидко знаходити оптимальне рішення у випадку, коли ситуація, що вивчається, має велику кількість варіантів поведінки, які дають різні результати і серед них треба вибрати найкращий. Динамічне програмування використовують при розв’язуванні певного типу задач шляхом їх розкладу на менші та простіші підзадачі. Розв’язок такого виду задачі можна знайти шляхом перебору всіх можливих варіантів і вибору серед них найкращого, але в більшості випадків такий перебір є досить трудомістким. Тому процес прийняття оптимального рішення розбивається на етапи (кроки) і досліджується з допомогою методу динамічного програмування.

Динамічне програмування використовується для розв’язання таких задач: розподіл дефіцитних капітальних вкладень між новими напрямками їх використання; розробка сценаріїв управління попитом чи запасами; розробка принципів календарного планування виробництва і вирівнювання зайнятості в умовах нестабільного попиту на продукцію; складання календарних планів поточного та капітального ремонту устаткування та його заміни; формування послідовності розвитку комерційної операції і т.д.

Розглянемо деякий керований процес. Припустимо, що керування можна розбити на n кроків, тобто рішення приймається послідовно на кожному кроці, а процедура, яка переводить систему з початкового стану в кінцевий, є сукупністю n покрокових керувань. В результаті керування система переходить із стану S_0 в S_n.

Позначимо через $x_k \in U_k$ керування на k-му кроці ($k = \overline{1,n}$), де U_k – множина допустимих керувань на k-му кроці.

Нехай $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ – керування, яке переводить систему з стану S_0 в S_n. Позначимо через S_k стан системи після k-го кроку керування. Отримуємо послідовність станів $S_0, S_1, ..., S_{k-1}, S_k, S_{k+1}, ..., S_n$ (рис.5.1.1).

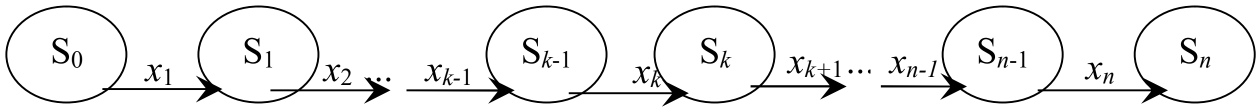


Рисунок 5.1.1. Схематичне зображення процесу керування

Показник ефективності процесу керування залежить від початкового стану системи і керованої змінної:

$$Z = F(S_0, x). \tag{5.1}$$

Власне, задача динамічного програмування формулюється таким чином: знайти таке значення керованої змінної $\overline{x}^*$, яке переводить систему з початкового стану S_0 в кінцевий S_n, при якому цільова функція (5.1) набуває найбільшого (найменшого) значення.

Розглянемо характерні особливості математичної моделі динамічного програмування:

1) задача оптимізації формулюється як скінчений багатокроковий процес управління;
2) цільова функція (5.1) є адитивною від показника ефективності кожного кроку, тобто виграш від всієї операції складається з виграшів, отриманих на кожному кроці.

$$Z = F(S_0, x) = \sum_{k=1}^{n} F_k(S_{k-1}, x_k), \tag{5.2}$$

де $F_k(S_{k-1}, x_k) = Z_k -$ показник ефективності на k-му кроці;

3) вибір керування x_k на кожному кроці залежить тільки від стану системи до цього кроку і не впливає на попередні кроки (немає зворотного зв'язку);
4) стан системи S_k після кожного кроку керування залежить тільки від попереднього стану системи S_{k-1} і керуючої дії x_k на k-му кроці та не залежить від попередніх станів системи і керувань (відсутність післядії):

$$S_k = \varphi_k(S_{k-1}, x_k), \qquad k = \overline{1, n}, \tag{5.3}$$

де φ_k – оператор переходу;

5) на кожному кроці керування x_k залежить від скінченого числа керованих змінних, а стан системи S_k залежить від скінченого числа параметрів;
6) оптимальним керуванням є вектор $\overline{x}^*$, який знаходиться шляхом послідовних оптимальних покрокових керувань: $\overline{x}^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_k^*, ..., x_n^*)$, кількість яких і визначає число кроків задачі.

Модель оптимальної заміни устаткування

На початку планового періоду, який складається з кількох років, виробничий підрозділ має одну одиницю устаткування фіксованої кількості років експлуатації. У процесі експлуатації устаткування дає щорічний прибуток, потребує експлуатаційних витрат і має відповідну залишкову вартість, причому всі згадані характеристики залежать від віку устаткування.

У довільний рік устаткування можна зберегти чи продати по залишковій вартості й купити замість нього нове устаткування за відомою ціною, котра може змінюватися в часі. Задача полягає в тому, що для планового періоду необхідно знайти оптимальну тактику (загальний прибуток за період) заміни (збереження) устаткування, тобто для кожного року в плановому періоді треба прийняти рішення: зберігати наявне устаткування у конкретний момент або продати його й придбати нове, щоб загальний прибуток за весь плановий період був максимальним.

Для побудови математичної моделі введемо позначення: t – вік устаткування, $t = 0, 1, 2, \ldots$ (t=0 відповідає використанню нового устаткування; t=1 відповідає використанню устаткування віком один рік тощо); $x(t)$ – вартість продукції, виготовленої протягом одного року на устаткуванні віком t; $S(t)$ – залишкова вартість устаткування віком t; τ – проміжний час у плановому періоді; P – ціна нового устаткування; $u(t)$ – експлуатаційні витрати за один рік на устаткування віком t; t_0 – початковий вік устаткування; N – плановий період.

Позначимо через $f_n(t)$ сумарний прибуток за останні n років планового періоду при умові, що на початку цього періоду з n років є устаткування віком t, і ми дотримуємося оптимальної політики в заміні. При цьому, n=1 позначає останній рік планового періоду (до кінця планового періоду залишився один рік); n=2 – останніх два роки планового періоду (до кінця планового періоду залишилося два роки); n=N – останніх N років планового періоду, тобто відповідає всьому плановому періоду.

Припустимо, що рішення приймається в момент часу $\tau = 0, 1, 2, \ldots, N-1$ (при системі відліку відносно параметра n це означає n=(N, N–1,…,1). Отже, плановий період ділиться на інтервали довжиною один рік, у кожному з яких приймається рішення – зберігати чи замінити устаткування.

Якщо в момент $\tau=i$ (початок i-го року, тут $n=\tau-i$) система перебуває в стані t (вік устаткування t) і прийнято рішення «зберігати устаткування», то це означає, що це устаткування, пропрацювавши один рік, «постаріє» й опиниться на момент $\tau=i+1$ (на початок наступного року) в стані t+1 і буде мати вік $t+1$. Якщо на момент $\tau=i$ устаткування знаходилося в стані t і прийнято рішення «замінити устаткування», то це означає, що в момент t наявне устаткування продається, а натомість купують нове (вік 0 років); воно працює один рік і до моменту $i+1$ система виявиться в стані 1 (устаткування віком один рік).

Заміна існуючого устаткування віком t на нове доцільна в тому випадку, коли прибуток від нового устаткування більший від старого, тобто

$$S(t) - p + x(0) - u(0) > x(t) - u(t).$$

Якщо $S(t) - p + x(0) - u(0) \le x(t) - u(t)$, то наявне устаткування слід зберегти.

Відповідно до алгоритму динамічного програмування спочатку планується останній крок, для якого приймається рішення таким чином, щоб отримати максимальний прибуток. Виходячи з того, що $f_1(t)$ - прибуток, який на останньому етапі буде дорівнювати найбільшому значенню цих двох виразів, дістанемо:

$$f_1(t) = max \begin{cases} x(t) - u(t) & \text{зберегти} \\ S(t) - p + x(0) - u(0) & \text{замінити.} \end{cases} \tag{5.8}$$

Оптимальним рішенням за останні (n+1) роки, при умові, що на початку цього періоду з (n+1) року є устаткування віком t, буде рішення, яке забезпечить за останніх (n+1) роки максимальний прибуток, який визначається з виразу

$$f_{n+1}(t) = \max \begin{cases} x(t) - u(t) + f_n(t+1) & \text{зберегти} \\ S(t) - p + x(0) - u(0) + f(1) & \text{замінити.} \end{cases} \tag{5.9}$$

Співвідношення (5.8) і (5.9) встановлюють зв’язок між виразами t_n та t_{n+1}. Це рекурентні співвідношення, за якими можна знайти розв’язок задачі методом динамічного програмування.

Тема 6. Основи теорії ймовірностей і математичної статистики

Основи теорії ймовірностей. Необхідні відомості з теорії випадкових подій. Випадкові величини і закони їх розподілу. Граничні теореми теорії ймовірностей. Основи математичної статистики. Відбір інформації. Вимоги до точкових оцінок і обсягів вибірок. Перевірка статистичних гіпотез. Точність оцінки. Довірчий інтервал.

У щоденному житті людину супроводжують різноманітні випробування, події, випадковості, закономірності. Теорія ймовірностей вивчає закономірності, що мають місце при масових, однорідних випадкових явищах, вивчає математичні моделі, які описують з деякою ступінню точності випробування (експерименти, спостереження, вимірювання, досліди), результати яких неоднозначно визначаються умовами випробування.

Основними поняттями теорії ймовірностей є випробування та подія.

Випробування – це спостереження, експеримент, дослід. Результатом випробування є подія.

Події класифікуються на вірогідні (достовірні), неможливі та випадкові. Випадкові події бувають: сумісні та несумісні, рівноможливі та нерівноможливі.

Сукупність несумісних подій у випробуванні, з яких одна обов’язково відбудеться називається повною групою подій.

Імовірність подій – це основна характеристика міри можливостей настання цієї події у випробуванні.

Означення. Класичною *імовірністю* події A називається відношення числа елементарних рівноможливих подій, що сприяють появі події A, до загального числа елементарних рівноможливих подій, що утворюють повну групу.

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Властивості:

1) $P(A)=1$, якщо A подія достовірна;
2) $P(A) = 0$, якщо A подія неможлива;
3) $0< P(A)<1$, якщо A випадкова подія.

Означення. Умовною ймовірністю $P_A(B)$ називається ймовірність події B при умові, що подія A відбулася.

Означення. Дві події називаються незалежними, якщо ймовірність однієї з них не змінюється від того, відбулася чи ні інша.

$P_A(B) = P_{\overline{A}}(B)$,

де $\overline{A}$ - подія, яка полягає в тому, що при випробуванні подія A не відбувається, відбувається подія, протилежна до події A.

Означення. Дві події називаються залежними, якщо ймовірність однієї з них змінюється внаслідок відбуття іншої, тобто

$P_A(B) \neq P_{\overline{A}}(B)$

Теорема додавання ймовірностей сумісних подій

Ймовірність появи хоч би однієї з двох сумісних подій дорівнює сумі ймовірностей тих подій без ймовірності їх сумісної появи:

$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

Теорема має місце і для довільного скінченого числа сумісних подій.

<u>Теорема</u> множення ймовірностей

Ймовірність сумісної появи двох подій дорівнює добутку ймовірностей однієї з них на умовну ймовірність другої, обчислену в припущенні, що перша подія вже відбулася:

$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A),$,

а для незалежних подій

$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$, тобто

ймовірність сумісної появи двох незалежних подій дорівнює добутку ймовірностей цих подій.

<u>Наслідок.</u> Ймовірність сумісної появи декількох подій дорівнює добутку ймовірностей однієї з них на умовну ймовірність всіх інших, причому ймовірність кожної наступної події обчислюється в припущенні, що всі попередні події вже відбулися.

$$P(A_1 A_2 A_3 ... A_n) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 A_2}(A_3) \cdot ... \cdot P_{A_1 A_2 ... A_{n-1}}(A_n),$$

а також ймовірність сумісної появи декількох подій, незалежних в сукупності, дорівнює добутку ймовірностей тих подій:

$$P(A_1 A_2 A_3 ... A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdot ... \cdot P(A_n).$$

Теорема. Сума ймовірностей подій, які утворюють повну групу подій, дорівнює одиниці:

$P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + ... + P(A_n) = 1$, а сума ймовірностей події A і протилежної події $\overline{A}$ дорівнює 1,

тобто $P(A) + P(\overline{A}) = 1$ або $p + q = 1$.

Ймовірність події A, яка може відбутися лише при появі однієї з несумісних подій B_1, B_2 ,..., B_n, що утворюють повну групу, дорівнює сумі добутків ймовірностей кожної з них на відповідну умовну ймовірність події A. Отже,

$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + ... + P(B_n)P_{B_n}(A)$ – формула повної ймовірності, де $P(B_1) + P(B_2) + ... + P(B_n) = 1$.

Нехай подія A може відбутися лише при умові появи однієї з несумісних гіпотез B_1, B_2, ..., B_n, які утворюють повну групу подій. Якщо подія A вже відбулася, то ймовірності гіпотез можуть бути переоцінені за формулою Байєса

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i)\cdot P_{B_i}(A)}{P(A)}\ (i=\overline{1,n})$$, де $P(A)$ – імовірність настання події A, обчислена за формулою повної ймовірності.

Величина, яка в результаті випробування залежно від випадкових обставин може прийняти те чи інше числове значення, називається *випадковою величиною*.

Випадкові величини поділяють на дискретні і неперервні.

Дискретною називається випадкова величина, можливі значення якої є окремі ізольовані числа, яких ця величина набуває з визначеними ймовірностями.

Законом розподілу дискретної випадкової величини називається перелік її можливих значень і відповідних їм ймовірностей, де $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

Закон розподілу дискретної випадкової величини можна зобразити таблицею, аналітично ($P(X = x_i) = \varphi(x_i)$) та графічно (многокутник розподілу).

Ймовірність можливих значень $X=k$ (числа k появи подій) при біномінальному законі розподілу дискретної випадкової величини X – числа появи подій в n незалежних випробуваннях, в кожному з яких імовірність появи події дорівнює p, обчислюється за формулою Бернуллі

$$P_n(k) = C_n^k\, p^k q^{n-k},$$

а якщо число випробувань велике, і ймовірність p появи події в кожному випробуванні мала, то використовують формулу Пуассона

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!},\ \text{де}\ \lambda = np.$$

Потоком подій називається послідовність подій, які появляються у випадкові моменти часу.

Інтенсивністю потоку λ, називається середнє число подій, які появляються за одиницю часу.

Ймовірність появи k подій найпростішого потоку за проміжок часу t можна знайти за формулою Пуассона

$$P_t(k) = \frac{(\lambda t)^k \cdot e^{-\lambda t}}{k!}$$

Числові характеристики дискретних випадкових величин

<u>**Означення.**</u> *Математичним сподіванням* дискретної випадкової величини X називається сума добутків усіх її можливих значень на відповідні ймовірності

$$M(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n.$$

Властивості:

1) $M(C) = C$;

2) $M(CX) = CM(X)$;

3) $M(X+Y) = M(X) + M(Y)$

Означення. *Дисперсією* випадкової величини X називається математичне сподівання квадрата відхилення X від $M(X)$, тобто

$$D(X) = M\,(X - M(X))^2$$

Використовується розрахункова формула для обчислення дисперсії

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$$

Властивості:

1) $D(C) = 0$;

2) $D\,(CX) = C^2D(X)$;

3) $D\,(X \pm Y) = D\,(X) + D\,(Y)$.

Корінь квадратний із дисперсії називається *середнім квадратичним відхиленням*

$$\delta(X) = \sqrt{D(X)}$$

Числові характеристики біноміально розподіленої величини X з параметрами n та p знаходяться за формулами

$$M\,(X) = np,\ D\,(X) = npq, \text{ а } \sigma(X) = \sqrt{D(X)}\,.$$

Неперервною називається випадкова величина, можливі значення якої заповнюють суцільно деякий скінчений або нескінченний проміжок.

Функцією розподілу (*інтегральною функцією*) *ймовірностей* називається функція $F(x)$ невипадкового аргумента x, яка чисельно дорівнює ймовірності того, що в результаті випробування випадкова величина X набере значення, меншого від x, тобто

$$F(x) = P(X < x)\,.$$

ВЛАСТИВОСТІ ФУНКЦІЇ РОЗПОДІЛУ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Властивість 1. Область визначення функції розподілу $(-\infty;\infty)$, множина значень – $[0;1]$.

Властивість 2. Функція $F(x)$ неспадна, тобто для довільної пари чисел x_1, x_2 з нерівності $x_2>x_1$ випливатиме нерівність $F(x_2) \geq F(x_1)$.

Наслідки:

1) ймовірність того, що випадкова величина при випробовуванні набере можливого значення з проміжку $[a;b]$, дорівнює приросту функції розподілу на цьому проміжку

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a).$$

2) Ймовірність того, що неперервна випадкова величина X набере при випробуванні одне конкретне можливе значення, дорівнює нулю.

Властивість 3. Якщо всі можливі значення випадкової величини належать відрізку $[a;b]$, то $F\,(x) = 0$, для всіх $x \leq a$ і $F\,(x) = 1$ для всіх $x>b$.

Наслідок. Якщо можливими значеннями неперервної випадкової величини є всі дійсні числа, тоді мають місце такі граничні співвідношення:

$$\lim_{x\to\infty} F(x)=0,\quad \lim_{x\to\infty} F(x)=1.$$

ГУСТИНА (ЩІЛЬНІСТЬ) РОЗПОДІЛУ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА ЇЇ ВЛАСТИВОСТІ

Означення. *Густиною розподілу* (*диференціальною* функцією) ймовірностей неперервної величини X називається функція $f(x)$, яка дорівнює похідній першого порядку від функції розподілу $F(x)$:

$$f(x)=F'(x).$$

Властивість 1. Область визначення функції $f(x)$ – R, а множиною значень – проміжок $[0;\infty)$.

Властивість 2. Невласний інтеграл від густини розподілу в межах від $-\infty$ до ∞ дорівнює одиниці:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1.$$

ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕПЕРЕРВНИХ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Означення. *Математичним сподіванням* неперервної випадкової величини X називається невласний інтеграл

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx,$$

а якщо всі можливі значення неперервної випадкової величини належать відрізку $[a;b]$, то $$M(X)=\int_a^b xf(x)dx.$$

Означення. *Дисперсією* неперервної випадкової величини називається математичне сподівання квадрата її відхилення від математичного сподівання

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-M(X))^2 f(x)dx, \text{ або}$$

$$D(X)=\int_a^b (x-M(X))^2 f(x)dx,$$ якщо всі можливі значення X належать відрізку $[a;b]$.

Розрахункові формули для обчислення дисперсії

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx-(M(X))^2 \text{ і}$$

$$D(X)=\int_a^b x^2 f(x)dx-(M(X))^2.$$

Середнє квадратичне відхилення

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}.$$

Означення. *Рівномірним* розподілом називається розподіл ймовірностей неперервної випадкової величини X, якщо на інтервалі (a;b), якому належать всі можливі значення X, щільність зберігає стале значення $f(x)=\dfrac{1}{b-a}$, а поза тим інтервалом $f(x) = 0$.

Математичне сподівання рівномірно розподіленої величини $M(x)=\dfrac{b+a}{2}$, дисперсія – $D(x)=\dfrac{(b-a)^2}{12}$.

Означення. *Нормальним* розподілом ймовірності неперервної випадкової величини X називається такий, щільність(густина) якого має вигляд

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

де a – математичне сподівання, σ – середнє квадратичне відхилення X.

Ймовірність того, що X набуде значення, яке попадає в заданий інтервал ($\alpha;\beta$), обчислюється за формулою

$$P(\alpha<x<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)$$

де $\Phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{x^2}{2}}dx$ – функція Лапласа.

Ймовірність того, що відхилення нормально розподіленої випадкової величини від a за абсолютною величиною менше від заданого додатного числа ε і знаходиться за формулою

$$P(|X-a|<\varepsilon)=2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)$$

Якщо $a = 0$, то справедливою буде рівність $P(|X|<\varepsilon)=2\Phi\left(\dfrac{\varepsilon}{\sigma}\right)$.

Якщо у формулі $P(|X-a|<\varepsilon)=2\Phi\left(\dfrac{\varepsilon}{\sigma}\right)$ надамо значення $\varepsilon=\sigma t$, то матимемо $P(|X-a|<\sigma t)=2\Phi(t)$.

Якщо t =3, тобто $\sigma t=3\sigma$, то

$P(|X-a|<3\sigma)=2\Phi(3)$, що і є правилом трьох сигм:

якщо випадкова величина розподілена нормально, то абсолютна величина її відхилення від математичного сподівання не перевищує потроєного середнього квадратичного відхилення.

ЗАКОН ВЕЛИКИХ ЧИСЕЛ

Ніколи наперед не можна передбачити, яке в можливих значеннях набуде випадкова величина в підсумку випробування, бо це залежить від багатьох випадкових причин, врахувати яких неможливо.

Але при деяких порівняно різних умовах сумарна поведінка досить великого числа випадкових величин майже втрачає випадковий характер і стає закономірною.

Ці умови висвітлені в темах під назвою "Закони великих чисел"

Нерівність Чебишева. Яке б не було додатне число ε, імовірність того, що випадкова величина X відхилиться від свого математичного сподівання за абсолютною величиною не більше, ніж на ε, не менша, ніж на $1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$, тобто

$$P(\left|X-M(X)\right|\le\varepsilon)\ge 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Якщо випадкова величина X розподілена за біноміальним законом (X – число появи подій в n повторних незалежних випробовуваннях), тоді нерівність Чебишева набере такого вигляду

$$P(\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon)\ge 1-\frac{pq}{n\varepsilon^2}.$$

Теорема Бернуллі.

Якщо в кожному з n незалежних випробувань ймовірність p появи події A стала, то як завгодно близька до одиниці ймовірність того, що відхилення відносної частоти від ймовірності p за абсолютною величиною буде як завгодно малим, якщо число випробувань досить велике.

$$P(\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon)=1.$$

МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

ВИБІРКОВИЙ МЕТОД

Означення. *Генеральною сукупністю* називається сукупність всіх елементів, які досліджуються на кількісну або якісну ознаки. Їх кількість називається обсягом (N) генеральної сукупності.

Означення. *Вибірковою сукупністю* (*вибіркою*) називаються ті елементи генеральної сукупності, які відібрані для дослідження на кількісну чи якісну ознаки. Їх кількість – це обсяг (n) вибірки.

Статистичний розподіл частот вибірки (відносних частот вибірки) подають у вигляді таблиць

x_i	x_1	x_2	…	x_k
n_i	n_1	n_2	…	n_k

де $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$, а відносних частот

x_i	x_1	x_2	…	x_k
w_i	w_1	w_2	…	w_k

де $\sum_{i=1}^{k} w_i = 1$, x_i – значення ознак, n_i ($i = \overline{1,k}$) – частоти ознак, n – обсяг вибірки, $w_i = \frac{n_i}{n}$ $(i = 1,2,\ldots,k)$ – відносні частоти.

Якщо ознаки (подані в таблиці) розташовані в порядку зростання чи спадання, то вони складають варіаційний ряд і називаються *варіантами*.

Варіаційний ряд має такі характеристики:

1) мода (M_0) – це варіанта, яка має найбільшу частоту;
2) медіана (m_e) – це варіанта, що ділить варіаційний ряд пополам;
3) розмах варіації (R) – це різниця між найбільшою та найменшою варіантою ($R = x_{\max}-x_{\min}$);
4) середнє вибіркове ($\overline{x}_в$) обчислюється за формулою $\overline{x}_в = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i n_i}{n}$
5) для обчислення вибіркової дисперсії використовують формулу

$$D_в = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}_в)^2 \cdot n_i}{n}$$

або зручну розрахункову

$$D_в = \overline{x^2} - (\overline{x}_в)^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 n_i - (\overline{x}_в)^2}{n}.$$

6) середнє квадратичне (вибіркове) відхилення $\sigma_в = \sqrt{D_в}$
7) коефіцієнт варіації (ν) знаходиться за формулою

$$\nu = \frac{\sigma_в}{\overline{x}_в} \cdot 100\%$$

Статистичний розподіл має графічне зображення за допомогою полігону та гістограми.

<u>Означення.</u> *Полігоном* частот (відносних частот) називається ламана, прямолінійні відрізки якої з’єднують сусідні точки

(x_1, n_1), (x_2, n_2), …, (x_k,n_k),

а для полігону відносних частот

(x_1, w_1), (x_2, w_2), …, (x_k,w_k)

Для побудови полігону частот (відносних частот) на осі абсцис відкладають варіанти, на осі ординат – відповідні їм частоти (відповідні їм відносні частоти w_i).

<u>Означення.</u> *Гістограмою* частот називається сходинкова фігура, яка складається із прямокутників, основами яких є частинні інтервали довжиною h, а висоти дорівнюють відношенню $\frac{n_i}{h}$ (густина частоти).

Для побудови гістограми частот на осі абсцис відкладаються частинні інтервали, а над ними проводяться прямолінійні відрізки, паралельні осі абсцис на віддалі $\frac{n_i}{h}$. Площа гістограми частот дорівнює сумі всіх частот вибірки n.

<u>Означення.</u> *Емпіричною функцією розподілу* (вибірки) називається функція $F^*(x) = \frac{n_x}{n}$, , де n_x – число варіант, менших за x, а n – обсяг вибірки.

Властивості емпіричної функції :

1) значення емпіричної функції належить відрізку [0;1];
2) функція неспадна;
3) якщо x_1 – найменша варіанта, а $x_к$ – найбільша, то $F^*(x) = 0$ при $x \le x_1$ і $F^*(x) = 1$ при $x > x_k$.

СТАТИСТИЧНІ ОЦІНКИ

Нехай досліджується випадкова величина X, закон розподілу якої містить невідомий параметр θ. Для оцінювання цього параметру є n незалежних дослідів, в яких випадкова величина X набула значень

$$X_1,\ X_2,\ \dots,\ X_n.$$

Будь-яка оцінка параметру θ, яка обчислюється на основі деяких статистичних даних, буде функцією статистичних даних, тобто

$$\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, ..., X_n),$$

а, отже, і випадковою величиною. Закон розподілу $\hat{\theta}$ залежить від закону розподілу величини X і від обсягу вибіркових даних n.

Щоб оцінка $\hat{\theta}$ була „доброю” потрібно щоб вона була:

1) *спроможною*, тобто при збільшенні обсягу вибірки n, вона по імовірності як завгодно близько наближалася до параметру θ;
2) *незміщеною*, тобто щоб математичне сподівання оцінки дорівнювало оцінюваному параметру

$$M(\hat{\theta}) = \theta.$$

Іншими словами, щоб використовуючи величину $\hat{\theta}$ замість θ, ми не робили систематичної похибки в сторону заниження або завищення;

3) *ефективною*, тобто щоб вибрана незміщена оцінка мала найменшу дисперсію в порівнянні з іншими

$$D(\hat{\theta}) = \min.$$

Оскільки перераховані оцінки задаються одним числом, то в математичній статистиці їх називають *точковими*.

Крім точкових оцінок існують ще *інтервальні* оцінки. *Інтервальною* оцінкою оцінюваного параметра називається інтервал, в межах якого з наперед заданою імовірністю лежить істинне значення параметра. Якщо $\hat{\theta}$ – точкова оцінка параметра θ, ε – деяке додатне число, то інтервал

$$\hat{\theta} - \varepsilon < \theta < \hat{\theta} + \varepsilon$$

називають *довірчим* інтервалом.

Оцінка $\hat{\theta}$ є „кращою”, чим менше число ε. Тому ε називають *точністю* оцінки.

Імовірність, з якою виконується нерівність

$$P(|\hat{\theta}-\theta|<\varepsilon)=\gamma$$

називають надійністю (довірчою ймовірністю).

Для нормального розподілу при побудові довірчого інтервалу для математичного сподівання a, точність оцінки визначається за формулою:

$$\varepsilon=\frac{t\sigma}{\sqrt{n}},$$

а довірчий інтервал:

$$(\bar{x}_в-\varepsilon;\quad \bar{x}_в+\varepsilon),$$

де $\bar{x}_в$ – середнє вибіркове, σ – вибіркове середнє квадратичне відхилення, n – обсяг вибірки, t – параметр, що визначається з рівності

$$2\Phi(t)=\gamma,$$

де $\Phi(t)$ – функція Лапласа, γ – надійність.

При дослідженні кількісної або якісної ознаки, що характеризує множину однорідних об’єктів, найчастіше використовують вибірку з цієї множини. Для вибірки обчислюють параметри розподілу: $\bar{x}_в$, $D_в$, $\sigma_в$, по яких судять про відповідні значення параметрів генеральної сукупності: $\bar{x}_г$, $D_г$, $\sigma_г$. Тому $\bar{x}_в$, $D_в$, $\sigma_в$ називають статистичними оцінками величин $\bar{x}_г$, $D_г$, $\sigma_г$.

$\bar{x}_в$ є незміщеною і спроможною оцінкою середньої генеральної $\bar{x}_г$ для *повторної* вибірки. Якщо n досить велике, тоді $\bar{x}_в$ з достатнім ступенем точності розподілена за нормальним законом з параметрами:

$$a=\bar{x}_г,\ \sigma=\sqrt{D_г/n}.$$

$\bar{x}_в$ є незміщеною оцінкою середньої генеральної $\bar{x}_г$ для *безповторної* вибірки. Якщо n досить велике, тоді $\bar{x}_в$ з достатнім ступенем точності розподілена за нормальним законом з параметрами:

$$a=\bar{x}_г,\quad \sigma=\sqrt{\frac{D_г}{n}\cdot\frac{N-n}{N-1}},$$

де N – обсяг генеральної сукупності.

Зауваження. Оскільки N найчастіше велике число, то величина σ суттєво не зміниться при заміні $N-1$ на N. Тому на практиці використовують формулу:

$$\sigma=\sqrt{\frac{D_г}{n}\cdot(1-\frac{n}{N})}$$

Генеральною часткою називається відношення числа M об’єктів генеральної сукупності, що володіють ознакою α, до обсягу N генеральної сукупності:

$$p=\frac{M}{N}.$$

Точковою статистичною оцінкою p є відносна частота w випадкової події A – навмання відібраний об’єкт із генеральної сукупності має ознаку α.

Якщо n досить велике, тоді w з достатнім ступенем точності розподілена за нормальним законом з параметрами:

$$a = p,\ \ \sigma = \sqrt{\frac{pq}{n}} \text{ – для повторної вибірки,}$$

$$a = p,\ \ \sigma = \sqrt{\frac{pq}{n} \cdot \frac{N-n}{N-1}} \text{ – для безповторної вибірки,}$$

де $q = 1 - p$.

Середня квадратична помилка середньої вибіркової:

$$\overline{\sigma}_{\overline{x}} = \sqrt{\frac{D_г}{n}} \text{ – для повторної вибірки,}$$

$$\overline{\sigma}_{\overline{x}'} = \sqrt{\frac{D_г}{n}(1-\frac{n}{N})} \text{ – для безповторної вибірки.}$$

Середня квадратична помилка вибіркової частки:

$$\overline{\sigma}_{w} = \sqrt{\frac{pq}{n}} \text{ – для повторної вибірки,}$$

$$\overline{\sigma}_{w'} = \sqrt{\frac{pq}{n}(1-\frac{n}{N})} \text{ – для безповторної вибірки.}$$

Формули граничної помилки:

- середньої вибіркової

$$\Delta = t\sqrt{D_в / n} \text{ – для повторної вибірки,}$$

$$\Delta = t\sqrt{\frac{D_в}{n}(1-\frac{n}{N})} \text{ – для безповторної вибірки;}$$

- частки вибіркової

$$\Delta = t\sqrt{w(1-w)/n} \text{ – для повторної вибірки,}$$

$$\Delta = t\sqrt{\frac{w(1-w)}{n}(1-\frac{n}{N})} \text{ – для безповторної вибірки.}$$

$(\overline{x}_в - \Delta; \overline{x}_в + \Delta)$ – довірчий інтервал, який з надійністю γ покриває середню генеральну $\overline{x}_г$;

$(w - \Delta; w + \Delta)$ – довірчий інтервал, який з надійністю γ покриває генеральну частку p.

Тема 7. Основи багатомірного статистичного аналізу

Класифікація задач багатомірного статистичного аналізу. Регресійний аналіз. Кореляційний аналіз. Дисперсійний аналіз. Статистична перевірка адекватності математичних моделей.

Класифікація завдань багатовимірного статистичного аналізу

На практиці часто зустрічаються об'єкти з двома і більше випадковими величинами, і при розробці моделей складних систем необхідність багатовимірного статистичного аналізу стає очевидною. У таких моделях доводиться вивчати не тільки характерні особливості окремих випадкових чинників, але і їх взаємодія. При цьому можливі різні підходи до виявлення та оцінки такої взаємодії.

Об'єкт дослідження можна представити у вигляді "чорного ящика" з "входами" і "виходами", серед яких розрізняють:

X = (x1, x2, ..., xk) - вектор вхідних контрольованих змінних, якими можна управляти в дослідженні;

Z = (z1, z2, ..., zp) - вектор вхідних контрольованих змінних, якими неможливо управляти в дослідженні;

E = (e1, e2, ..., ef) - вектор вхідних неконтрольованих і некерованих змінних (шум);

Y = (y1, y2, ..., yg) - вектор вихідних змінних.

Змінні X, Z і Y називаються факторами. Якщо фактор приймає фіксовані, детерміновані значення, то вони називаються рівнями фактора. Фактори Z можуть бути випадковими. Змінні E теж випадкові, хоча можуть і не описуватися законами розподілу (можуть бути не стохастичного, що не імовірнісного виду), але походження їх не є предметом дослідження, вони виникають через похибки експериментальних та чи моделювання. Якщо фактори Z випадкові, то і вихідні змін ні Y необхідно розглядати як випадкові. Зокрема, такого роду випадковості можуть виникати через накладення шуму E.

Розглянемо деякі види завдань статистичного аналізу, які можуть виникнути при вивченні складних багатофакторних систем:

1 Чи існує зв'язок між окремими факторами.

2 Якщо між факторами є зв'язок, то наскільки він тісний.

3 Якщо між якимись факторами є зв'язок, то якою функцією його можна уявити.

4 Які вхідні фактори роблять на певні вихідні найбільший вплив.

5 Які вхідні фактори можна відкинути з процесу вивчення на підставі їх слабкого, який можна порівняти з шумом, впливу.

6 Чи існують неврахованi фактори, які необхідно розглядати з огляду на їх істотного впливу на вихідні.

7 Чи існують узагальнені фактори, якими можна замінити кілька розглянутих.

8 Як пов'язані між собою зашумлені чинники.

9 Які характеристики шуму.

10 Як виділити "корисну" інформацію з зашумленной.

Всі ці завдання можна вирішити за допомогою методів багатовимірного статистичного аналізу, що включає в себе:

- кореляційний аналіз (КА);
- регресійний аналіз (РА);
- конфлюентний аналіз;
- дисперсійний аналіз (ТАК),
- факторний аналіз (ФА);
- теорію фільтрації.

Кожен з цих розділів - сукупність методів і прийомів математичної статистики. Історично так склалося, що чіткого розмежування зазначених розділів і методів між розділами не існує. Вибір методів диктується лише конкретним практичним завданням.

ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ КОРЕЛЯЦІЇ

Теоретичні положення

Дві випадкові величини можуть бути або незалежними, або зв'язані функціональною, або стохастичною залежністю.

Для означення кореляційної залежності необхідно знати про умовну середню.

<u>Означення.</u> $\overline{y_x}$ називається умовною середньою величини Y, якщо це середнє арифметичне значень Y, підраховане при умові, що величина X прийняла можливе значення x (аналогічне поняття умовної середньої $\overline{x_y}$).

<u>Означення.</u> Кореляційною залежністю Y від X (або X від Y) називають функціональну залежність умовної середньої $\overline{y_x}$ від x (або $\overline{x_y}$ від y). Отже, матимуть місце рівняння

$$\overline{y_x} = f(x);$$

$$\overline{x_y} = \varphi(y)$$

При лінійній залежності маємо

$$\overline{y}_x = k_1 x + b_1 \quad \text{та}$$

$$\overline{x}_y = k_2 y + b_2,$$

які називаються *рівняннями регресії*. Якщо рівняння регресій лінійні, то кореляція називається теж лінійною і лінією регресії (графіком) є пряма.

В іншому випадку кореляція є нелінійною (криволінійною).

Теорія кореляції розглядає 2 задачі:

1) за даними дослідів над величинами Y та X визначити форму кореляційного зв'язку та розрахувати параметри рівнянь регресій;

2) за даними дослідів встановити суттєвість ("силу") кореляційного зв'язку.

Вибіркове рівняння прямої лінії регресії Y на X за даними n спостережень має вигляд

$\overline{y_x} = k_1 x + b_1$, де k_1 – вибірковий коефіцієнт регресії Y на X. Параметри k_1 та b знаходяться за формулами

$$k_1 = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{n\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2}, \qquad b_1 = \frac{\sum x^2 \sum y - \sum x \sum xy}{n\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2}$$

Аналогічно знаходиться вибіркове рівняння прямої лінії регресії X на Y

$\overline{x}_y = k_2 y + b_2$, де k_2 – вибірковий коефіцієнт регресії X на Y.

Кореляцією між двома величинами називають *парною*, а якщо величин більше, то кореляція *множинна*.

Для парної лінійної кореляції параметри рівнянь регресії знаходять на основі нормальних рівнянь методом найменших квадратів (МНК) вигляду

$$\begin{cases} \overline{x^2}k_1 + \overline{x}b_1 = \overline{xy} \\ \overline{x}k_1 + b_1 = \overline{y} \end{cases},$$

де $\overline{x} = \dfrac{\sum_{j=1}^{k} x_j n_x}{n}$; $\overline{x^2} = \dfrac{\sum_{j=1}^{k} x_j^2 n_x}{n}$; $\overline{y} = \dfrac{\sum_{i=1}^{k} y_i n_y}{n}$; $\overline{xy} = \dfrac{\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{k} x_j y_i n_{xy}}{n}$.

Параметри (коефіцієнти) прямої регресії знаходять за формулами

$$k_1 = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y}}{\overline{x^2} - (\overline{x})^2}; \qquad b_1 = \overline{y} - k_1\overline{x};$$

$$k_2 = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y}}{\overline{y^2} - (\overline{y})^2}; \qquad b_2 = \overline{x} - k_2\overline{y}.$$

Вибірковим рівнянням прямої лінії Y на X має вигляд

$\overline{y_x} - \overline{y} = r_b \dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \overline{x})$, аналогічно вибіркове рівняння прямої лінії регресії X на Y

$\overline{x_y} - \overline{x} = r_b \dfrac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - \overline{y})$, де $\overline{y_x}; \overline{x_y}$ - умовні середні;

$\overline{x}, \overline{y}$ – вибіркові середні;

$\sigma_x = \sqrt{\overline{x^2} - (\overline{x})^2}$ і $\sigma_y = \sqrt{\overline{y^2} - (\overline{y})^2}$ – вибіркові середні квадратичні відхилення та $r_b = \dfrac{\sum n_{xy} x_i y_j - n\overline{x}\,\overline{y}}{n\sigma_x \sigma_y}$ – вибірковий коефіцієнт кореляції, або

$r_b = \pm\sqrt{k_1 k_2}$.

Якщо $|r|$=1 – зв’язок функціональний, найтісніший; якщо $|r|$=0 – зв’язок відсутній і, якщо $|r|$ зростає від 0 до 1, то зв’язок тіснішає.

При знаходженні r знак “+” беруть, якщо k_1 та k_2 додатні, знак “–”, якщо k_1 та k_2 від’ємні.

Кореляція називається *параболічною* (другого порядку), якщо вибіркове рівняння лінії регресії Y на X має вигляд

$$\overline{y}_x = ax^2 + bx + c$$

або X на Y

$$\overline{x}_y = a_1 y^2 + b_1 y + c_1$$

Щоб знайти відповідні параметри, необхідно розв’язати систему рівнянь

$$\begin{cases} a\sum x_i^2 + b\sum x_i + cn = \sum y_i \\ a\sum x_i^3 + b\sum x_i^2 + c\sum x_i = \sum y_i x_i \\ a\sum x_i^4 + b\sum x_i^3 + c\sum x_i^2 = \sum y_i x_i^2 \end{cases}$$

Дисперсійний аналіз

Дисперсійний аналіз (ANOVA, Analysis of Variations) – це сукупність статистичних методів, які призначені для оцінки впливу факторів на результат досліджень, які можна використати для наступних планувань експериментів. В дисперсійному аналізі можна досліджувати залежність кількісної ознаки від однієї чи багатьох ознак-факторів.

За допомогою дисперсійного аналізу перевіряють статистичні гіпотези про рівність середніх значень декількох нормально розподілених генеральних сукупностей. Перевірку гіпотез проводять на основі поділу загальної дисперсії залежної змінної на дві складові: внутрішньогрупову дисперсію та міжгрупову дисперсію.

Внутрішньогрупова дисперсія – це дисперсія, зумовлена випадковою помилкою, тобто є наслідком дії неврахованих у дослідженні факторів.

Міжгрупова дисперсія – це дисперсія, зумовлена відмінністю середніх значень, і є наслідком ймовірного впливу фактору.

Чим більшою є міжгрупова дисперсія за внутрішньогрупову, тим більш значущою буде відмінність між середніми залежної змінної у групах. В такому випадку нульову гіпотезу про рівність середніх значень відкидають на обраному рівні значущості, а, отже, вплив фактору буде більшим. Значущість перевіряється за допомогою F-тесту.

Дисперсійний аналіз дозволяє оцінити внесок окремих факторів у загальну дисперсію результуючої змінної в тих випадках, коли побудувати регресійну модель неможливо, бо фактори є атрибутивними ознаками.

Основні передумови застосування дисперсійного аналізу:

- вибірки беруться з генеральних сукупностей з нормальним законом розподілу;
- дисперсія, обумовлена неврахованими факторами, однорідна.

Дослідження впливу одного чи декількох факторів проводиться однофакторним чи багатофакторним дисперсійним аналізом [].

Однофакторний дисперсійний аналіз застосовують у випадку, коли припускають, що головною причиною мінливості досліджуваної результативної ознаки є один фактор. Відповідно до цього фактору загальна вибірка розбивається на кілька вибірок і оцінюється однорідність середніх отриманих вибірок.

Двофакторний дисперсійний аналіз застосовується у випадку, коли припускають, що головною причиною мінливості досліджуваної результативної ознаки є два фактори *A* та *B*. Він дає змогу не тільки виявити вплив кожного з факторів, а й оцінити їхню взаємодію.

Існує два різновиди методу залежно від того, чи проводилися повторні вимірювання при кожному поєднанні значень двох послідовних факторів. У нашому дослідженні немає повторних вимірювань.

Дані подають у вигляді таблиці 1. У рядках стовпчиках приведені дані, що відповідають певному рівню фактору *A*, а в стовпчиках – дані, що відповідають рівням *B*. Таблиця даних має розмірність $n \times m$, де n і m – кількість рівнів фактору *A* та *B*, відповідно.

Таблиця 1 – Таблиця даних двофакторного дисперсійного аналізу

Рівні фактору *A*	Рівні фактору *B*			
	1	2	…	m
1	x_{11}	x_{12}	…	x_{1m}
2	x_{21}	x_{22}	…	x_{2m}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n	x_{n1}	x_{n2}	…	x_{nm}

Двофакторний дисперсійний аналіз можна провести за наступним алгоритмом:

1. Обчислити:

$\overline{\overline{x}} = \frac{1}{nm}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_{ij}$ – загальне середнє за всіма спостереженнями,

$\overline{x}_i = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} x_{ij}$ – середнє спостережень в кожному рівні фактору *A*,

$\overline{x}_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{ij}$ – середнє спостережень в кожному рівні фактору *B*,

$SS = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left(x_{ij} - \overline{\overline{x}}\right)^2$ – загальну суму квадратів відхилень,

$SS_A = m\sum_{i=1}^{n}\left(\overline{x}_i - \overline{\overline{x}}\right)^2$ – суму квадратів відхилень, що пояснена впливом фактору *A*,

$SS_B = n\sum_{j=1}^{m}\left(\overline{x}_j - \overline{\overline{x}}\right)^2$ – суму квадратів відхилень, що пояснена впливом фактору *B*,

$SS_e = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left(x_{ij} - \overline{x}_i - \overline{x}_j + \overline{\overline{x}}\right)^2$ – непояснену суму квадратів відхилень чи суму квадратів відхилень помилки,

$\sigma_A^2 = \dfrac{SS_A}{n-1}$ – дисперсію, що пояснена впливом фактору A,

$\sigma_B^2 = \dfrac{SS_B}{m-1}$ – дисперсію, що пояснена впливом фактору B,

$\sigma_e^2 = \dfrac{SS_e}{(n-1)(m-1)}$ – непояснену дисперсію чи дисперсію помилки,

де $v_A = n - 1$, $v_B = m - 1$, $v_e = (n - 1)(m - 1)$ – число ступенів вільності дисперсії, що пояснена впливом фактору A, впливом фактору B, дисперсії помилки відповідно, $v = nm - 1$ – загальне число ступенів вільності.

2. Провести перевірку нульових гіпотез:

– рівність середніх при різних рівнях фактору A (відсутність впливу фактору A):

H_{0A}: $\mu_{1A} = \mu_{2A} = \ldots = \mu_{nA}$,

H_{1A}: не всі μ_{iA} рівні;

– рівність середніх при різних рівнях фактору B (відсутність впливу фактору B):

H_{0B}: $\mu_{1B} = \mu_{2B} = \ldots = \mu_{mB}$,

H_{1B}: не всі μ_{jB} рівні.

Обчислюємо емпіричні відношення Фішера $F_A = \dfrac{\sigma_A^2}{\sigma_e^2}$ і $F_B = \dfrac{\sigma_B^2}{\sigma_e^2}$ порівнюємо їх з критичними відношеннями F_{α,ν_A,ν_e} і F_{α,ν_B,ν_e}. Якщо емпіричне відношення Фішера більше критичного відношення Фішера, то нульову гіпотезу відхиляємо з рівнем значущості α. Це означає, що фактор істотно впливає на дані: дані залежать від фактору з ймовірністю $p = 1 - \alpha$. В протилежному випадку приймаємо нульову гіпотезу з рівнем значущості α. Це означає, що фактор не робить істотного впливу на дані з ймовірністю $p = 1 - \alpha$.

Тема 8. Моделі теорії масового обслуговування

Основні елементи системи масового обслуговування та кількісні характеристики. Кількісні оцінки одно- та багатоканальних систем обслуговування з обмеженим числом вимог. Оптимізація системи масового обслуговування із змінним числом каналів.

У виробничій діяльності підприємств, організацій та фірм часто трапляються такі випадки, коли виникає потреба в обслуговуванні вимог або заявок, що надходять до певної системи. Іноді системи обслуговування мають обмежені можливості для задоволення попиту, що призводить до утворення черг, наприклад, технічне обслуговування та ремонт обладнання та механізмів, завантаження транспортних засобів готовою продукцією тощо.

Завданнями теорії масового обслуговування є аналіз і дослідження явищ і процесів, що відбуваються в системах масового обслуговування (СМО). Одним із основних завдань теорії є визначення таких характерних ознак системи, які забезпечують задану якість ефективного функціонування: мінімальний час очікування, мінімальна середня довжина черги тощо.

Довільна СМО складається з вхідного потоку, черги, обслуговуючих пристроїв (каналів) і вихідного потоку (рис. 8.1). Наприклад, надходження заявок на ремонт обладнання є вхідним потоком; очікування ремонту – черга; ремонтні бригади – обслуговування приладів; відремонтоване обладнання є вихідним потоком.

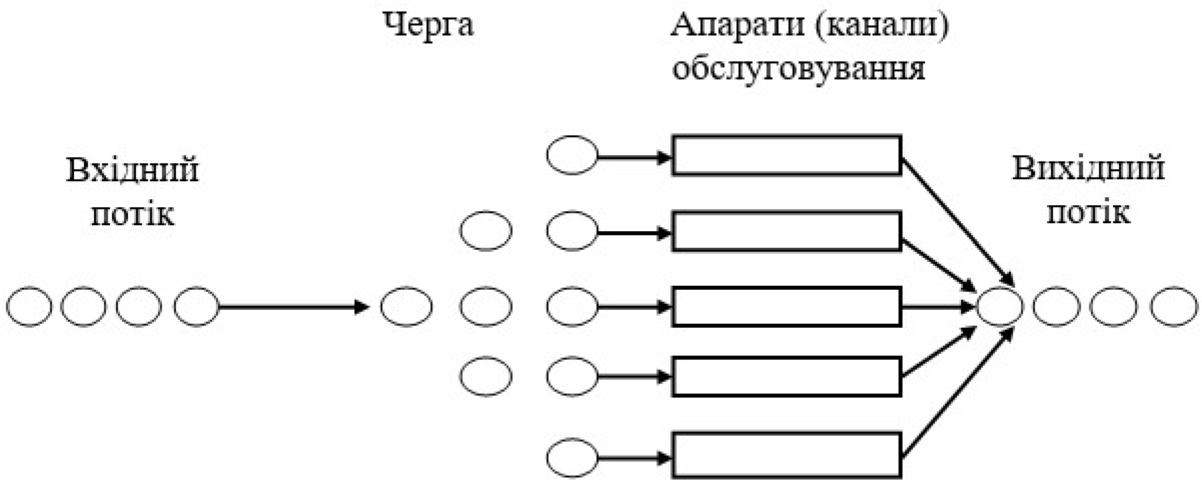


Рис. 8.1.

Економічна ефективність СМО залежить від вхідного потоку, кількості обслуговуючих пристроїв (каналів) та організації системи обслуговування. Якщо, наприклад, будівельна фірма має в своєму розпорядженні 5 екскаваторів та 15 автомашин для транспортування землі, то маємо декілька варіантів вивезення землі із будівельних об’єктів. Можна зосередити всі екскаватори на одному об'єкті, тоді техніка буде використовуватися ефективно, але буде втрачено час на переміщення екскаваторів з одного об'єкта на інший. Якщо існуючий парк екскаваторів рівномірно розподілити по будівельних майданчиках, то екскаватори будуть простоювати в очікуванні техніки. Тому в кожному конкретному випадку необхідно обирати ту чи іншу форму організації обслуговування. Дуже часто в якості критерію ефективності використовується мінімальна сумарна вартість очікування запитів у черзі та час простою каналів обслуговування.

Нехай система має S каналів обслуговування.

Введемо позначення: T – інтервал часу, M_1 – середнє число вимог в черзі; M_2 – середнє число вільних каналів обслуговування; C_1 – вартість очікування однієї вимоги за одиницю часу; C_2 – вартість простою одного каналу за одиницю часу. Згідно позначень, повна вартість витрат, пов’язаних з очікуванням і простоєм за час T, буде:

$$F(S) = (C_1 M_1 + C_2 M_2)T \to \min \tag{8.1}$$

СМО класифікують за:

- кількістю каналів;
- часом перебування вимог у системі до початку обслуговування.

Довільна СМО за своєю кількістю каналів може бути одно- або багатоканальною. Наприклад, автозаправна станція має одну колонку – система одноканальна; три колонки – система багатоканальна.

Тема 9. Прийняття рішень в умовах ризику

Система кількісного оцінювання факторів ризику. Оцінювання абсолютного та відносного вимірювання розміру ризикованих ситуацій. Постановка задачі прийняття рішень в умовах ризику. Основні етапи прийняття рішень. Критерій сподіваного значення. Критерій "сподіване значення – дисперсія". Критерій граничного рівня. Експериментальні дані при прийнятті рішень в умовах ризику. Аналіз прийняття рішень методом дерева цілей.

Система кількісного оцінювання факторів ризику

Для кількісного визначення величини ризику, необхідно знати всі можливі наслідки якої-небудь окремої події і ймовірність її настання. Під ймовірністю слід розуміти можливість отримання певного результату. Щодо економічних задач методи теорії ймовірностей зводяться до визначення ймовірності настання події і до вибору з можливих подій найоптимальніших (найраціональніших) подій (результатів, рішень, проектів, стратегій).

Ймовірність настання події може бути визначена об'єктивним і суб'єктивним методами.

Об'єктивний метод визначення ймовірності базується на обчисленні частоти, з якою відбувається подія (статистична ймовірність). Припустимо відомо, що при вкладенні капіталу в який-небудь захід прибуток в сумі 20 тис. грн. отримано в 40 випадках із 100, тоді ймовірність отримання такого прибутку дорівнює 0,4:

$$W(A) = \frac{M}{N} = \frac{40}{100} = 0{,}4,$$

де A – випадкова подія, яка полягає у тому, що при вкладанні капіталу в захід буде отримано прибуток в сумі 20 тис. грн.; M – число всіх фактичних появ події A; N – число усіх випадків вкладень капіталу.

Ця ймовірність є об'єктивною, тому що вона визначена на підставі фактичних даних.

Якщо не існує подібної статистики в минулому, тоді неможливо розрахувати ймовірність об'єктивним методом і необхідними є суб'єктивні критерії.

Суб'єктивна ймовірність є припущенням щодо певного результату. Це припущення базується на міркуваннях або особистому досвіді експерта з оцінки. Коли ймовірність визначається суб'єктивно, то різні люди можуть встановлювати різне її значення для однієї і тієї ж події і, таким чином, робити різний вибір. Наприклад, якщо певний захід має проводитися перший раз у відповідному районі, тоді суб'єктивній ймовірності можна надати занадто велике значення. Різна інформація або різні можливості оперувати з однією і тією ж інформацією можуть пояснити, чому суб'єктивні ймовірності варіюють.

Як об'єктивна, так і суб'єктивна ймовірності використовуються при визначенні показників абсолютного та відносного вимірювання ризику.

Ризик в абсолютному виразі

В абсолютному виразі міра ризику може визначатися як добуток ймовірності невдачі (небажаних наслідків) на величину цих небажаних наслідків (збитки, платежі), які мають місце в окресленому випадку:

$$W = p_H \cdot x,$$

де W – величина ризику; p_H – ймовірність небажаних наслідків; x – величина цих наслідків.

В окремих випадках, наприклад, у страхуванні, міру ризику визначають як ймовірність настання небажаних наслідків:

$$W = p_H.$$

Середнє сподіване значення (математичне сподівання), пов'язане з невизначеною ситуацією, є середньозваженою всіх можливих результатів, де ймовірність кожного результату використовується як частота або вага відповідного значення:

$$\bar{x} = M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i, \qquad (9.1)$$

де X – економічний показник (дискретна випадкова величина); x_i – значення i-го результату; p_i – ймовірність настання i-го результату.

Середнє сподіване значення вимірює результат, який очікується в середньому.

Формула (9.1) застосовується у випадку, коли результати мають певні значення (є дискретною випадковою величиною). Проте коли результати набувають значень з інтервалу $[a,b]$ (є неперервною випадковою величиною), середнє сподіване значення обчислюється за формулою:

$$\bar{x} = M(X) = \int_a^b x f(x) dx, \qquad (9.2)$$

де X – неперервна випадкова величина; $f(x)$ – щільність розподілу ймовірності (диференціальна функція розподілу).

<u>Приклад</u> 9.1. Відомо, що при вкладанні капіталу в варіант *А* з 150 випадків прибуток 10000 грн. був в 60 випадках (ймовірність 0,4), прибуток 13400 – 78 випадках (ймовірність 0,52), прибуток 28500 грн. – в 12 випадках (ймовірність 0,08). При вкладанні капіталу в варіант *Б*: прибуток 12500 грн. був в 30 випадках із 120 (ймовірність 0,25), прибуток 14000 грн. – в 54 випадках (ймовірність 0,45), прибуток 25000 грн. – в 36 випадках (ймовірність 0,3). Визначити сподіване значення прибутку за варіантами *А* та *Б*.

♦ *Розв'язування.*

Дані занесемо у таблицю:

Варіант вкладення капіталу	Ймовірні наслідки					
	1		2		3	
	імовірність	прибуток	імовірність	прибуток	імовірність	прибуток
А	60 / 150 =	10000	78 / 150 =	13400	12 / 150 =	20500

	= 0,4		=0,52		=0,08	
Б	30 / 120 = =0,25	12500	54 / 120 = =0,45	14000	36 / 120 = =0,3	25000

Поклавши в основу розрахунків формулу (9.1) сподівані значення прибутків для варіантів *А* та *Б*:

$$x_A = 10000 \cdot 0{,}4 + 13400 \cdot 0{,}52 + 20500 \cdot 0{,}08 = 12608 \text{ грн.}$$

$$x_Б = 12500 \cdot 0{,}25 + 14000 \cdot 0{,}45 + 25000 \cdot 0{,}3 = 16925 \text{ грн.}$$

Сума сподіваного прибутку для варіанту *Б* є більшою, ніж для *А*. На перший погляд можна вибрати варіант *Б*, оскільки сума сподіваного прибутку є більшою, ніж за *А*. Але порівнюючи два варіанти, бачимо, що при вкладанні в *А* величина прибутку коливається від 10000 до 20500 грн., а в *Б* – від 12500 до 25000 грн. ♦

Середнє сподіване значення є узагальненою величиною, тому для кінцевого вибору варіанта необхідно обчислити коливання (мінливість) можливого результату.

Коливання можливого результату є мірою відхилення сподіваного значення від середньої величини. На практиці застосовують два показники: *дисперсію* (*варіацію*) і *стандартне відхилення* (*середньоквадратичне відхилення*).

Дисперсія (*варіація*, $\sigma^2(X)$) є середньою зваженою з квадратів відхилень дійсних результатів від середнього сподіваного. Вона характеризує розсіювання значення випадкового параметра від його середнього прогнозованого значення й обчислюється за формулою:

$$\sigma^2(X) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \cdot p_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot p_i - \overline{x}^2 \cdot \qquad (9.3)$$

Для неперервної величини *x* на інтервалі $[a,b]$ маємо:

$$\sigma^2(X) = \int_a^b (x - M(X))^2 f(x)dx \cdot$$

Стандартне відхилення ($\sigma(x)$) дорівнює квадратному кореню з дисперсії:

$$\sigma(X) = \sqrt{\sigma^2(X)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \cdot p_i} \cdot \qquad (9.4)$$

Стандартне відхилення показує максимально можливе коливання певного параметра від його середньо сподіваної величини та дозволяє оцінити ступінь ризику з погляду ймовірності його здійснення (чим більша величина числової характеристики, тим ризикованішим є рішення).

Якщо вважати, що є два проекти перший і другий в які можна вкласти кошти і вони у визначений момент в майбутньому забезпечують випадкові величини прибутку, то при відповідних середніх сподіваних значеннях $\overline{x_1}$ та $\overline{x_2}$ і дисперсіях σ_1 та σ_2 при $\overline{x_1} > \overline{x_2}$ і $\sigma_1 < \sigma_2$ кращим є проект перший.

В загальному випадку, коли $\overline{x_1} > \overline{x_2}$, $\sigma_1 > \sigma_2$ або $\overline{x_1} < \overline{x_2}$, $\sigma_1 < \sigma_2$ однозначного рішення немає. Інвестор може вибрати проект з більшим сподіваним прибутком, але пов’язаним із великим ризиком, або варіант з меншим сподіваним прибутком, але менш ризикованим. Досліджувану ситуацію можна показати на графіку, де кожен вид вкладень представлено точкою з координатами $(\sigma_i;\overline{x_i})$ (рис. 9.1). Чим більший сподіваний ефект, тим вище розміщена точка, чим більший ризик – тим точка розташована правіше.

Очевидно, що досвідчений інвестор віддасть перевагу проекту 1, а не 2 і 3. Також віддасть перевагу проекту 4, а не 2. Проте залежно від схильності до ризику залежить вибір проектів 1, 4 або 5.

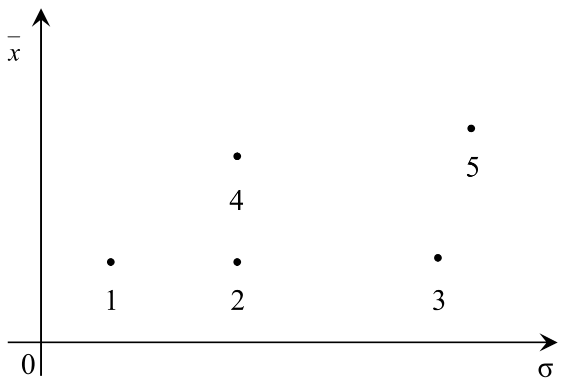


Рис. 9.1. Діаграма взаємозв'язку ризику і прибутку

<u>Приклад</u> 9.2. Для даних прикладу 11.1 необхідно оцінити ризик варіантів через дисперсію і стандартне відхилення.

♦*Розв'язування.*

Визначимо дисперсію і стандартне відхилення за формулами (9.3), (9.4).

Для варіанта *А*:

$$\sigma^2_А = (10000 - 12608)^2 \cdot 0{,}4 + (13400 - 12608)^2 \cdot 0{,}52 + (20500 - 12608)^2 \times$$
$$\times\ 0{,}08 = 2720666 + 4982693 + 326177 = 8029536 \text{ грн.}^2$$

$\sigma_А = 2834$ грн.

Для варіанта *Б*:

$$\sigma^2_Б = (12500 - 16925)^2\ 0{,}25 + (14000 - 16925)^2\ 0{,}45 + (25000 - 16925)^2 \times$$
$$\times\ 0{,}3 = 4895156 + 3850031 + 19561688 = 28306875 \text{ грн.}^2$$

$\sigma_Б = 5320$ грн.

Отже, при вкладанні капіталу у відповідні варіанти маємо:

варіант *А* – $\bar{x} = 12608$ грн., $\sigma^2 = 8029536$ грн.^{2}, $\sigma = 2834$ грн.

варіант *Б* – $\bar{x} = 16925$ грн., $\sigma^2 = 28306875$ грн.^{2}, $\sigma = 5320$ грн.

Як бачимо, варіант *Б* має більше сподіване значення прибутку, але він є ризикованішим, ніж *А*. Який варіант вибрати – це залежить від конкретної людини. Заповзятлива особа віддасть перевагу більшому сподіваному значенню прибутку і стандартному відхиленню, а консервативніша – вибере варіант *А*. ♦

Підхід, що ґрунтується на використанні дисперсії і стандартного відхилення, вважається *класичним*. У дисперсії та стандартному відхиленні ризик визначається через відхилення відповідних показників випадкової величини від їхнього середнього сподіваного значення (математичного сподівання). Зауважимо, що за такого визначення міри ризику однаково трактуються як додатні (сприятливі), так і від'ємні (несприятливі) відхилення від $\bar{x}$.

Проте, якщо існує від'ємне відхилення, тоді відповідне сподіване значення результату нижче від середнього сподіваного. Це означає несприятливу ситуацію. Додатне відхилення водночас вказує на те, що сподіване значення результату вище від середнього сподіваного. Це є сприятлива ситуація для особи, що приймає рішення.

Ризик, насамперед, пов'язаний з несприятливими ситуаціями. За цієї причини за міру ризику часто вибирають *семіваріацію* (*неокласичний* підхід до оцінювання ризику). Її обчислюють за формулою:

$$SV = \frac{1}{P^{-}}\sum_{i=1}^{n} d_i^2 p_i, \tag{9.5}$$

де p_i – ймовірність настання i-го результату; d_i – від'ємні відхилення дійсних результатів від середнього сподіваного, тобто:

$$d_i = \begin{cases} 0, & x_i \ge \bar{x}, \\ x_i - \bar{x}, & x_i < \bar{x}, \end{cases} \tag{9.6}$$

де x_i – значення i-го результату; $\bar{x}$ – середнє сподіване значення; P^{-} – сума ймовірностей, для яких d_i від'ємні.

Квадратний корінь із семіваріації називається *семіквадратичним відхиленням*:

$$SSV = \sqrt{SV}. \tag{9.7}$$

Зрозуміло, що чим більшою буде величина SV чи SSV, тим більшим буде ступінь ризику.

Ризик у відносному виразі

У відносному виразі ризик визначається, наприклад, як величина можливих збитків, віднесена до деякої бази, за яку найзручніше приймати або майно підприємця, або загальні витрати ресурсів на відповідний вид підприємницької діяльності, або ж сподіваний дохід (прибуток) від конкретного підприємництва.

Для підприємства (корпорації) за базу визначення відносної величини ризику беруть вартість основних фондів та обігових засобів або планові сумарні затрати на вказаний вид ризикової діяльності, маючи на увазі як поточні затрати, так і капіталовкладення чи розрахунковий дохід тощо.

Співвідношення максимально можливого обсягу збитків та обсягу власних фінансових ресурсів інвестора є мірою (оцінкою) ризику, що веде до банкрутства. Ризик вимірюється за допомогою коефіцієнта:

$$W = \frac{x}{K}, \tag{9.8}$$

де W – коефіцієнт ризику; x – максимально можливий обсяг збитків (грн.); K – обсяг власних фінансових ресурсів із врахуванням точно відомих надходжень коштів (грн.).

Дослідження ризикових заходів дозволяє зробити висновок, що оптимальний коефіцієнт ризику складає 0,3, а коефіцієнт ризику, який веде до банкрутства інвестора, – 0,7 і більше.

У відносному виразі ризик також вимірюють за допомогою *коефіцієнта варіації*. Він є відношенням стандартного відхилення до середнього сподіваного значення:

$$V = \frac{\sigma}{\bar{x}}. \tag{9.9}$$

Коефіцієнт варіації – відносна величина, тому на його розмір не впливають абсолютні значення досліджуваного показника. З допомогою цього показника можна порівнювати навіть коливання показників, виражених в різних одиницях виміру. Діапазон зміни V від 0 до 1. Чим більший коефіцієнт, тим більший розкид значень показників і тим ризикованішим є оцінюваний проект.

Встановлена така якісна шкала різних коефіцієнтів варіації:

до 0,1 – слабке коливання;

0,1–0,25 – помірне;

понад 0,25 – високе.

Відповідно, чим вище коливання, тим більший ризик.

Якщо, наприклад, у двох альтернативних проектів *А* і *Б* виявиться, що $V_А < V_Б$, то перевагу слід надати проекту *А*, який обтяжений меншим ризиком.

Для випадку $\overline{x_A} > \overline{x_Б}$ та $\sigma_А > \sigma_Б$, або $\overline{x_A} < \overline{x_Б}$ та $\sigma_А < \sigma_Б$, і при цьому $V_А = V_Б$, треба враховувати схильність (несхильність) суб'єкта приймати ризиковані рішення.

В неокласичному підході до оцінювання ризику за аналогією з коефіцієнтом варіації існує *коефіцієнт семіваріації*:

$$CSV = \frac{SSV}{\bar{x}}, \tag{9.10}$$

де SSV – семіквадратичне відхилення.

Коефіцієнт семіваріації у ряді випадків дозволяє краще оцінити ступінь ризику. Це доцільно, зокрема, тоді, коли зовнішнє економічне середовище, фактори ризику, характерні для аналізованого проекту, відзначаються динамізмом.

Таким чином, система показників кількісної оцінки ризику включає абсолютні і відносні величини (табл. 9.1).

Табл. 9.1. Система показників кількісної оцінки ризику

Показник	Формула
Абсолютне вимірювання ризику	
Абсолютна величина ризику	$W = p_H \cdot x$, де W – величина ризику; p_H – ймовірність небажаних наслідків, x – величина цих наслідків
Середнє сподіване значення (математичне сподівання)	$\bar{x} = M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$, де x_i – значення i-го результату; p_i – ймовірність настання i-го результату
Дисперсія (варіація)	$\sigma^2(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \cdot p_i$
Стандартне відхилення (середньоквадратичне відхилення)	$\sigma(X) = \sqrt{\sigma^2(x)}$

Семіваріація	$$SV = \frac{1}{P^{-}}\sum_{i=1}^{n} d_i^2 p_i,$$ де p_i – ймовірність настання i-го результату; d_i – від'ємні відхилення дійсних результатів від середнього сподіваного, тобто $$d_i = \begin{cases} 0, & x_i \ge \bar{x}, \\ x_i - \bar{x}, & x_i < \bar{x}, \end{cases}$$ P^{-} – сума ймовірностей, для яких d_i від'ємні
Семіквадратичне відхилення	$$SSV = \sqrt{SV}$$
Відносне вимірювання ризику	
Коефіцієнт ризику	$$W = \frac{x}{K},$$ де x – максимально можливий обсяг збитків (грн.); K – обсяг власних фінансових ресурсів з врахуванням точно відомих надходжень коштів (грн.)
Коефіцієнт варіації	$$V = \frac{\sigma}{\bar{x}}$$
Коефіцієнт семіваріації	$$CSV = \frac{SSV}{\bar{x}}$$

Критерій сподіваного значення

Використання сподіваних величин припускає можливість багаторазового розв'язку однієї і тієї ж задачі, доки не будуть отримані достатньо точні розрахункові формули. Математично це твердження виражається таким чином. Нехай x – випадкова величина з математичним сподіванням $M(x)$ і дисперсією $D(x)$. Розглянемо випадкову вибірку обсягом – $x_1, x_2 \ldots x_n$.

Вибіркове середнє $\bar{x} = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$ має дисперсію, що дорівнює $\frac{D(x)}{n}$.

Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{D(x)}{n} = 0$, то $\bar{x}$ наближається до $M(x)$.

Іншими словами, при достатньо великому обсязі вибірки різниця між вибірковим середнім і математичним сподіванням прямує до нуля. Отже, використання критерію сподіваного значення допустиме лише у випадку, коли одне і те ж рішення доводиться приймати значну кількість разів. Навпаки, якщо необхідність у прийнятті деякого рішення трапляється дуже рідко, то вибіркове середнє $\bar{x}$ може значно відрізнятися від $M(x)$.

Розглянемо виробничу ситуацію, пов'язану із проведенням профілактичного ремонту обладнань.

Необхідність у проведенні профілактичного ремонту обладнань вимагає прийняття рішень про те, коли потрібно проводити плановий ремонт якого-небудь верстата, щоб мінімізувати втрати через несправності. Якщо весь часовий інтервал розбити на рівні періоди, тоді рішення полягає у визначенні оптимального числа періодів міх двома наступними ремонтами. Якщо вони проводяться дуже часто, то витрати на обслуговування будуть великими при малих втратах через випадкові відмовлення. Компроміс між двома крайніми випадками передбачає збалансований вибір між витратами на ремонт і втратами черев випадкові відмовлення.

Оскільки неможливо передбачати наперед, коли виникає несправність, тому необхідно обчислити ймовірність того, що верстат вийде із ладу в період часу t. Тому це і є елемент ризику в процесі прийняття рішень.

Верстат із групи в n верстатів ремонтується індивідуально, якщо він зупинився через несправності. Через T інтервалів часу проводиться профілактичний ремонт всіх n верстатів. Задача полягає у визначенні оптимального значення T, при якому мінімізуються загальні витрати на ремонт верстатів, що вийшли із ладу, і проведення профілактичного ремонту в розрахунку на одиницю інтервалу часу.

Нехай P_t – імовірність виходу із ладу одного верстату в момент t, а n_t – випадкова величина, яка означає число всіх верстатів, що вийшли з ладу водночас. Припустимо, що c_1 – витрати на ремонт верстата, що вийшов із ладу, і c_2 – витрати на профілактичний ремонт одного верстата.

Використання критерію сподіваного значення в нашому випадку доцільне, якщо верстати працюють протягом великого проміжку часу. При цьому витрати на одиничному інтервалі становитимуть:

$$C\left(T\right)=\frac{\sum_{t=0}^{T-1}c_1n_t+c_2n}{T},$$

а сподівані витрати на один інтервал складуть:

$$M\left[C(T)\right]=\frac{c_1\sum_{t=0}^{T-1}M(n_t)+c_2n}{T}, \qquad (9.11)$$

де $M(n_t)$– математичне сподівання числа верстатів, що вийшли з ладу на момент t. Оскільки n_t має біноміальний розподіл із параметрами (n, P_t), то $M\left(n_t\right)=nP_t$.

Таким чином,

$$M\left[C(T)\right]=\frac{n(c_1\sum_{t=0}^{T-1}P_t+c_2)}{T}. \qquad (9.12)$$

Необхідні умови оптимальності для T^* мають вигляд:

$$\begin{cases} M\left[C\left(T^*-1\right)\right]\geq M\left[C\left(T^*\right)\right], \\ M\left[C\left(T^*+1\right)\right]\geq M\left[C\left(T^*\right)\right]. \end{cases} \qquad (9.13)$$

Отже, починаючи з малого значення T, обчислюємо $M\left[C\left(T\right)\right]$, доки не будуть виконуватися ці умови.

Припустимо, що чиста продукція в розрахунку на один верстат за одиницю часу складає *a* грн. Ставиться завдання: максимізувати прибуток, який припадає на одиницю часу. Зауважимо, що прибуток підраховується як різниця між загальною величиною чистої продукції і витратами на ремонт верстатів, що вийшли із ладу, і обслуговування. Тоді сподіваний прибуток буде:

$$M\left[\Pi(T)\right]=\frac{n(a-c_2-c_1\sum_{t=0}^{T-1}P_t)}{T}. \tag{9.14}$$

Запишемо необхідні умови максимізації для T^*:

$$\begin{cases} M\left[\ \Pi\left(T^*\right)\right]\ge M\left[\ \Pi\left(T^*-1\right)\right]; \\ M\left[\ \Pi\left(T^*\right)\right]\ge M\left[\ \Pi\left(T^*+1\right)\right]. \end{cases} \tag{9.15}$$

Критерій "сподіване значення - дисперсія"

Розглянемо модифікацію наведеного критерію в попередньому параграфі для випадків, які повторюються рідко. Якщо x – випадкова величина з дисперсією $D(x)$, то вибіркове середнє $\overline{x}$ має дисперсію $\frac{D(x)}{n}$, де n –обсяг вибірки. Звідси, якщо $D(x)$ зменшується, дисперсія $\overline{x}$ також зменшується, і ймовірність того, що $\overline{x}$ близьке до $M(x)$, збільшується. Це показує доцільність введення критерію, в якому максимізація сподіваного значення прибутку поєднується з мінімізацією її дисперсії. Можливим критерієм, що відповідає цій меті, є максимум виразу $M(x)$-$KD(x)$, де x – випадкова величина, що відображає прибуток, K – задана постійна величина (K>0).

Величину K інколи інтерпретують як рівень несхильності до ризику. Дійсно, K визначає ступінь важливості дисперсії x відносно $M(x)$**.** Наприклад, підприємець, який особливо гостро реагує на великі від'ємні відхилення прибутку вниз від $M(x)$, може взяти K набагато більше за одиницю. Це надає велику вагу дисперсії і призводить до розв'язку, що зменшує ймовірність великих втрат прибутку.

Введений критерій погоджується із використанням корисності при прийнятті рішень, оскільки параметр несхильності до ризику характеризує відношення особи, яка приймає рішення, до великих відхилень від очікуваних значень.

Використаємо критерій "сподіване значення – дисперсія" до конкретної ситуації, наведеної у прикладі 9.3. Нам необхідно обчислити дисперсію витрат за один інтервал, тобто дисперсію

$$C_T = \frac{c_1 \sum_{t=0}^{T-1} n_t + nc_2}{T}. \qquad (9.16)$$

Оскільки n_t $(t=1,2,...,T\text{-}1)$ – випадкова величина, то C_T – також випадкова, n_t має біномний розподіл із середнім значенням nP_t і дисперсією $n\,P_t\,(1-P_t\,)$.

Тоді

$$D[C_T] = \left(\frac{c_1}{T}\right)^2 \sum_{t=0}^{T-1} D(n_t) = \left(\frac{c_1}{T}\right)^2 \sum_{t=0}^{T-1} nP_t(1-P_t) =$$
$$= n\left(\frac{c_1}{T}\right)^2 \left(\sum_{t=0}^{T-1} P_t - \sum_{t=0}^{T-1} P_t^2\right) = n\left(\frac{c_1}{T}\right)^2 \sum_{t=0}^{T-1}\left(P_t - P_t^2\right). \qquad (9.17)$$

Оскільки $M[C_T]=M[C(T)]$, то критерієм буде мінімум виразу:

$$M[C(T)]+ kD\,[C_T].$$

Тепер $M[C_T]$ підсумовується з $kD[C_T]$, оскільки $M[C(T)]$ – функція витрат. При $k=1$ отримуємо завдання: мінімізувати

$$M\left[C(T)\right] + D\left[C_T\right] = n\left\{\left(\frac{c_1}{T} + \frac{c_1^2}{T^2}\right)\sum_{t=0}^{T-1} P_t - \left(\frac{c_1}{T}\right)^2 \sum_{t=0}^{T-1} P_t^2 + \frac{c_2}{T}\right\} =$$
$$= n\left\{\frac{c_1}{T}\sum_{t=0}^{T-1} P_i + \left(\frac{c_1}{T}\right)^2 \left(\sum_{t=0}^{T-1} P_t - \sum_{t=0}^{T-1} P_t^2\right) + \frac{c_2}{T}\right\} \to min. \qquad (9.18)$$

Запишемо вираз для критерію “сподіване значення – дисперсія” з урахуванням умови максимізації прибутку:

$$M\left[\varPi(T)\right] - nk\left(\frac{c_1}{T}\right)^2 \left\{\sum_{t=0}^{T-1} P_t - \sum_{t=0}^{T-1} P_t^2\right\} \to max. \qquad (9.19)$$

12.3. Критерій граничного рівня

Критерій граничного рівня не дає оптимального рішення, наприклад, максимуму прибутку або мінімуму витрат. За цим критерієм можна визначити допустимий спосіб дій.

Припустимо, що величина попиту x за одиницю часу (інтенсивність попиту) на деякий товар задається неперервною функцією розподілу $f(x)$. Якщо запаси в початковий момент невеликі і в подальшому можливий дефіцит товару. У протилежному випадку до кінця розглянутого періоду запаси нереалізованого товару можуть виявитись дуже великими. В обох випадках втрати не оминемо. У першому випадку зменшується потенційний прибуток і передбачається втрата клієнтів, у другому – збільшуються витрати відповідно на доставку та зберігання товару.

Можливий компроміс полягає у виборі рішення, яке балансує два види вказаних втрат. Оскільки визначити втрати від дефіциту дуже важко, особа, яка приймає рішення, може встановити необхідний рівень запасів таким чином, щоб величина очікуваного дефіциту не перевищувала A_1 одиниць, а величина очікуваних надлишків не перевищувала A_2 одиниці. Виразимо математично ці умови. Нехай R – граничний рівень запасів. Тоді очікуваний дефіцит

$$\psi_1(R) = \int_R^{\infty} (x - R) f(x) dx \le A_1, \tag{9.20}$$

а очікуваний надлишок

$$\psi_2(R) = \int_0^{R} (R - x) f(x) dx \le A_2. \tag{9.21}$$

При довільному виборі A_1 і A_2 вказані умови можуть виявитися суперечливими. В цьому випадку для забезпечення допустимості розв'язку необхідно послабити одне з обмежень.

Тема 10. Метод зниження ризику і способи розв’язання ризику

Метод зниження ризику пов'язаного із зупинкою виробництва із-за нестачі сировини. Об’єктивні критерії оцінювання стохастичного ризику. Середнє значення, дисперсія, середньоквадратичне відхилення, коефіцієнт варіації. Суб’єктивні критерії оцінювання стохастичного ризику. Функції корисності особи, що приймає рішення. Інваріантні способи розв’язання ризику: уникнення, попередження, прийняття, розподіл, зовнішнє страхування, лімітування, диверсифікація, створення резервів, здобуття додаткової інформації. Допустимий, критичний та катастрофічний ризики. Крива розподілу ймовірностей перевищення певного рівня випадкових збитків.

Показник	Формула
Абсолютне вимірювання ризику	
Абсолютна величина ризику	$W = p_H \cdot x$, де W – величина ризику; p_H – ймовірність небажаних наслідків, x – величина цих наслідків
Середнє сподіване значення (математичне сподівання)	$\bar{x} = M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$, де x_i – значення i-го результату; p_i – ймовірність настання i-го результату
Дисперсія (варіація)	$\sigma^2(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \cdot p_i$
Стандартне відхилення (середньоквадратичне відхилення)	$\sigma(X) = \sqrt{\sigma^2(x)}$
Семіваріація	$SV = \frac{1}{P^-} \sum_{i=1}^{n} d_i^2 p_i$, де p_i – ймовірність настання i-го результату; d_i – від’ємні відхилення дійсних результатів від середнього сподіваного, тобто $d_i = \begin{cases} 0, & x_i \geq \bar{x}, \\ x_i - \bar{x}, & x_i < \bar{x}, \end{cases}$ P^- – сума ймовірностей, для яких d_i від’ємні
Семіквадратичне відхилення	$SSV = \sqrt{SV}$
Відносне вимірювання ризику	
Коефіцієнт ризику	$W = \frac{x}{K}$, де x – максимально можливий обсяг збитків (грн.); K – обсяг власних фінансових ресурсів з врахуванням точно відомих надходжень коштів (грн.)
Коефіцієнт варіації	$V = \frac{\sigma}{\bar{x}}$

Коефіцієнт семіваріації	$CSV = \frac{SSV}{\bar{x}}$

Ризик і корисність

Під корисністю розуміють міру задоволення, яке одержує суб'єкт від споживання товару або виконання певної дії. В економіці поняття корисності найчастіше використовують для визначення пріоритетності одного набору товарів або послуг перед іншим. З допомогою функції корисності $U(x)$ кожному наборові товарів ставиться у відповідність деяке число так, що коли набір А більш пріоритетний (кращий), ніж В, то $U(A) > U(B)$. Побудову функції корисності можна здійснити експертним методом.

Взаємозв'язок функції корисності та імовірності встановлено в понятті корисності за Нейманом. При цьому використовується поняття лотереї. Лотерея $L(x_1, p, x_2)$ – це ситуація, у якій суб'єкт може одержати результат x_1 з імовірністю p, або x_2 з імовірністю $1-p$. Корисність результату x визначається імовірністю p, при якій суб'єкту однаково що вибирати: x – гарантовано або лотерею $L(x_1, p(x), x_2)$, де x_1, x_2 – вектори відповідно менш та більш пріоритетні в порівнянні з x. Розглянемо лотерею L, у якій можливі результати (виграші) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ відповідно з імовірностями $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Тоді сподіваний виграш (математичне сподівання виграшу) визначається за формулою

$$\bar{x} = M(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot x_i \,.$$

Якщо корисність виграшу x позначити $U(x)$, то сподівана корисність (математичне сподівання корисності) визначається так:

$$\bar{U} = M(U(x)) = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot U(x_i)\,.$$

Взаємозв'язок ризику і корисності досягається за допомогою поняття детермінованого еквівалента лотереї.

Детермінований еквівалент лотереї L – це гарантований результат x_0, одержання якого еквівалентне участі в даній лотереї. Величина x_0 визначається з рівняння

$$U(x_0) = \bar{U}\,.$$

Якщо виграш x є неперервною випадковою величиною, можливі значення якої знаходяться на інтервалі (a,b), то сподіваний виграш і сподівана корисність визначаються формулами:

$$\bar{x} = M(x) = \int_a^b x f(x)dx\,,$$

$$\bar{U} = M(U(x)) = \int_a^b U(x) \cdot f(x)dx\,,$$

де $f(x)$ – щільність розподілу імовірностей випадкової величини x.

Суб'єкт, який приймає рішення, називається несхильним (схильним) до ризику, якщо для нього більш (менш) пріоритетним є одержання гарантованого сподіваного виграшу у лотереї, ніж участь у ній. Умова несхильності до ризику математичного записується так:

$$U(\overline{x}) > \overline{U}.$$

Умови схильності та байдужості до ризику відповідно мають такий вигляд

$$U(\overline{x}) < \overline{U}, \quad U(\overline{x}) = \overline{U}.$$

У випадку зростаючої функції корисності можна розглянути премію за ризик, як різницю між сподіваним виграшем і детермінованим еквівалентом

$$П(x) = \overline{x} - x_0.$$

Премія за ризик – це величина, яку суб'єкт, що приймає рішення, згоден втратити із середнього виграшу за те, щоб уникнути ризику, обумовленого лотереєю.

Крива ризику

Найповніше уявлення про ризик дає так звана крива розподілу ймовірностей втрат. Ця крива є графічним зображенням залежності ймовірності втрат від їх рівня, що показує наскільки ймовірне виникнення втрат.
Розглянемо прибуток як випадкову величину і побудуємо криву розподілу ймовірностей отримання його певного рівня (рис. 10.1).

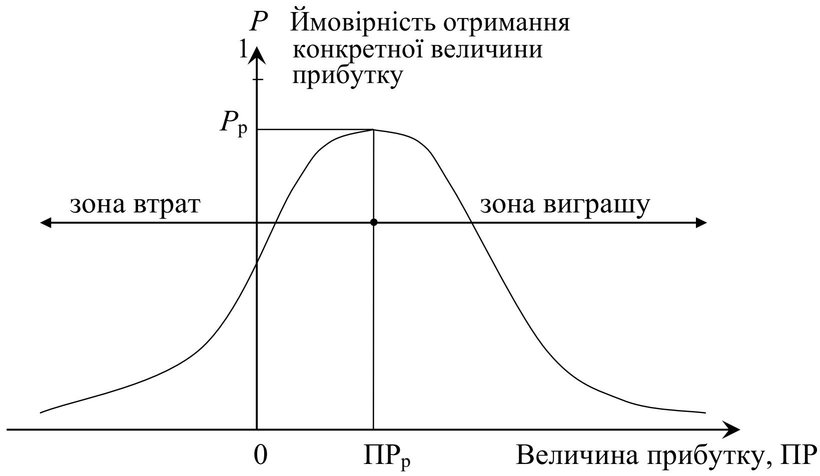


Рис. 10.1. Крива розподілу ймовірностей отримання прибутку

При побудові цієї кривої використаємо такі припущення:

1. Найімовірнішим є отримання прибутку, що дорівнює розрахунковому прибутку – $ПР_р$. Ймовірність $P_р$ отримання такого прибутку є максимальною, за цієї причиною значення $ПР_р$ можна вважати математичним сподіванням

прибутку. Значення ймовірностей відхилення від розрахункового прибутку монотонно спадають при рості відхилень, тому що ймовірність отримання прибутку, який є більшим або меншим від розрахункового, є нижчою, чим більше такий прибуток відрізняється від розрахункового.

2. Ймовірність надзвичайно великих втрат, майже дорівнює нулю, тому що реальні втрати мають верхню межу (за виключенням тих, які не оцінюються кількісно).

3. Втратами прибутку ΔПР вважається відхилення розрахункового прибутку $ПР_р$ від реального прибутку ПР:

$$\Delta ПР = ПР_р - ПР.$$

Прийняті припущення є дещо умовні, тому що вони можуть не виконуватись для всіх видів ризику. Проте загалом ці припущення правильно відображають закономірності зміни ризику, особливо в підприємництві. Базуються вони на гіпотезі, що прибуток як випадкова величина підпорядкована нормальному або близькому до нормального закону розподілу.

Маючи криву розподілу ймовірностей отримання прибутку та зони ризику, побудуємо криву розподілу ймовірностей можливих втрат прибутку. Цю криву називають *кривою ризику*. Вона є попередньою кривою, але побудованою в іншій системі координат (рис. 10.2).

На кривій розподілу ймовірностей можливих втрат прибутку виділяють чотири характерні точки.

Точка 1 відповідає ймовірності нульових втрат прибутку ($\Delta ПР = 0$ і $P = P_р$). Ймовірність нульових втрат є максимальною, що випливає з наведених вище припущень. Проте вона є меншою за одиницю.

Точка 2 відповідає ймовірності повної втрати прибутку, яку позначимо $P_д$ ($\Delta ПР = ПР_р$ і $P = P_д$).

Точки 1 і 2 є границями зони допустимого ризику.

Точка 3 відповідає ймовірності здійснення втрат, що дорівнюють сумі величини розрахункового прибутку і величини засобів, що вкладені в справу, тобто величині розрахункового виторгу ВР ($\Delta ПР = ВР$ і $P = P_{кр}$). Ймовірність таких втрат $P_{кр}$.

Точки 2 і 3 є границями зони критичного ризику.

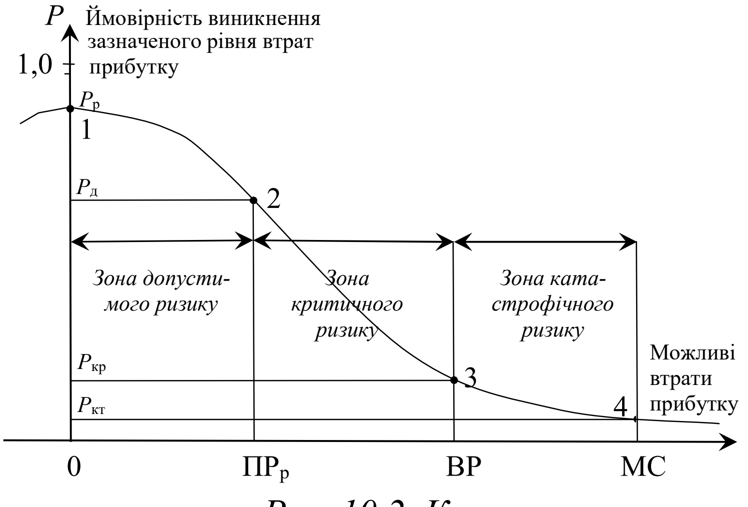


Рис. 10.2. Крива ризику

Точка 4 відповідає ймовірності здійснення втрат, що дорівнюють майновому стану суб'єкта господарювання (ΔПР=МС і $P=P_{\text{кт}}$), ймовірність яких дорівнює $P_{\text{кт}}$.

Точки 3 і 4 визначають границі зони катастрофічного ризику.

Втрати, що перевищують майновий стан, неможливо утримати, тому вони не розглядаються.

За допомогою кривої ризику можна робити висновки про сподіваний ризик. Якщо при оцінці ризику можливо побудувати не всю криву ймовірностей ризику, а лише встановити її чотири характерні точки (найімовірніший рівень ризику і ймовірності допустимої, критичної і катастрофічної втрат), то задачу такої оцінки можна вважати успішно завершеною. Проте, без сумніву, добре мати ще й проміжні значення.

За допомогою кривої ризику можна визначити ймовірність втрат, що знаходяться в певних інтервалах. Наприклад, підприємець знає, що ризик втратити 2000 грн. при підписанні контракту для нього становить 0,1, але його цікавить з якою ймовірністю він може втратити від 2000 до 3000 грн.

За існування кривої ймовірності втрат прибутків можна відповісти на це запитання шляхом знаходження середнього значення ймовірності в заданому інтервалі.

За допомогою кривої ризику можна також визначити ймовірність втрат, що знаходяться в певних «напівінтервалах». Досить часто, в процесі прийняття рішень про допустимість і доцільність ризику, необхідно знати не тільки ймовірність певного рівня втрат, але і ймовірність того, що втрати не перевищать деякий рівень. Ймовірність того, що витрати не перевищать певний рівень, називається показником *надійності*, *впевненості*. Між показниками ризику й надійності існує зв'язок.

Показники ризику $P_{\text{р}}$, $P_{\text{д}}$, $P_{\text{кр}}$ та $P_{\text{кт}}$ дозволяють виробляти судження й приймати рішення про здійснення підприємництва. Але для такого рішення недостатньо оцінити значення показників (ймовірностей) допустимого, критичного й катастрофічного ризику. Наприклад, підприємець знає, що він втратить 20 тис. грн. з імовірністю 0,15, то це ще не означає, що можна йти чи не йти на ризик.

Для прийняття остаточного рішення треба ще встановити або прийняти граничні величини цих показників, вище яких вони не повинні підніматися, щоб не потрапити в зону надмірного, неприйнятного ризику.

Позначимо граничні значення ймовірностей виникнення допустимого, критичного й катастрофічного ризику відповідно $\Gamma_{\text{д}}$, $\Gamma_{\text{кр}}$ та $\Gamma_{\text{кт}}$. Визначення величин граничних рівнів ризику є досить складною проблемою. Величини цих показників, звичайно, має встановлювати й рекомендувати прикладна теорія підприємницького ризику, але й сам підприємець має право визначати свої власні граничні рівні ризику, які він не має наміру перевищувати.

Можна орієнтуватися на граничні значення показників ризику $\Gamma_{\text{д}}=0,1$, $\Gamma_{\text{кр}}=0,01$ та $\Gamma_{\text{кт}}=0,001$. З цього випливає, що якщо в 10 випадках зі 100 можна втратити весь прибуток, в одному випадку зі ста втратити виторг, а в одному випадку з тисячі втратити майно, то потрібно відмовитися від підприємницького проекту, комерційної угоди, вкладання коштів.

Таким чином, суб'єкту діяльності можна ризикувати у таких випадках:

1. Якщо показник допустимого ризику не перевищує граничного значення ($P_{д} < Г_{д}$).
2. Якщо показник критичного ризику менший від аналогічного граничного показника ($P_{кр} < Г_{кр}$).
3. Якщо показник катастрофічного ризику не перевищує граничного значення ($P_{кт} < Г_{кт}$).

Отже, за оцінки ризику важливо побудувати криву ймовірностей можливих втрат або хоча б визначити зони й показники допустимого, критичного і катастрофічного ризику.

Для побудови кривої ймовірностей можливих втрат використовують найчастіше способи, про які йшлося раніше: *статистичний*, *експертний*, *аналітичний.*

При статистичному способі збирається статистика втрат, яка мала місце в аналогічних видах діяльності, встановлюється частота появ певних рівнів втрат. Цю частоту, якщо зібраний масив даних достатній, прирівнюємо до ймовірності появ втрат і на їх підставі будуємо криву ризику. Частоту виникнення деякого рівня втрат обчислюємо шляхом ділення числа відповідних випадків на загальне число випадків, в які включаються і ті випадки, в яких втрат не було, а були прибутки. Якщо випадки з прибутками ми опустимо, то показники ймовірностей втрат будуть завищені.

При експертному способі експерти дають оцінки ймовірностей виникнення певних рівнів втрат, за якими знаходяться середні значення експертних оцінок, на підставі яких будується крива розподілу ймовірностей.

Інколи обмежуються експертними оцінками ймовірностей виникнення певного рівня втрат в чотирьох характерних точках, тобто визначаються показники найбільш можливих, допустимих, критичних і катастрофічних втрат (їх рівні та ймовірності). За цими чотирма точками орієнтовно будують всю криву розподілу втрат.

При аналітичному методі побудова кривої розподілу ймовірностей втрат і оцінки на цій підставі показників ризику базуються на теоретичних уявленнях.

Тема 11. Прийняття рішень в умовах невизначеності

Постановка задачі прийняття рішень в умовах невизначеності. Основні причини невизначеності. Критерії прийняття рішень в умовах невизначеності: Лапласа, Вальда, Севіджа, Гурвіца, Бейєса, мінімум середнього та Ходжеса-Лемана.

Ситуація прийняття рішення в умовах невизначеності та породженого нею ризику передбачає наявність трьох елементів:

1. Концептуальної інформаційної моделі;
2. Ідентифікованої інформаційної ситуації;
3. Критерію (чи системи критеріїв) прийняття рішення.

Одним з підходів є концепція на базі застосування теоретико-ігрової моделі.

Під теорією гри розуміють теорію математичних моделей та методів, пов'язаних з прийняттям раціональних рішень в умовах конфлікту та невизначеності.

Згідно з концепцією теорії гри ситуація прийняття рішення характеризується множиною $\{X;\theta;F\}$ де

X – множина рішень (стратегій) суб'єкта керування (1-го гравця)

θ– множина станів (стратегій) економічного середовища (EC) (2-го гравця).

$F=\{f(x,\theta); x\epsilon X;\theta\epsilon\theta\}$ - функціонал оцінювання (ФО), визначений на множині $X\times\theta$, і ф-ція $f(x,\theta)$ - ф-ція виграшу 1-го гравця (суб'єкта керування).

Під економічним середовищем (ЕС) надалі будемо розуміти сукупність невизначених чинників (у тому числі й економічних), які впливають на ефективність рішення, що приймається.

У дискретному випадку ЕС являє собою повну групу взаємовиключаючих та взаємодоповнюючих випадкових подій:

$$\theta=\{\theta_1;\theta_2;\cdots;\theta_n\} \quad \theta=\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n$$

$$P(\theta)=P(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)=P(\theta_1)+P(\theta_2)+\cdots+P(\theta_n)=$$
$$=p_1+p_2+\cdots+p_n=1$$

Завдання прийняття рішень в умовах невизначеності виникає при необхідності діяти в ситуації, яка відома не повністю. Її формулюють переважно як задачу пошуку окремого найкращого (в певному розумінні) рішення на наперед заданій множині допустимих рішень. Основна проблема полягає в тому, що наслідки, пов'язані з прийняттям будь-якого рішення, залежать від невідомої ситуації. Ступінь неприйнятності цих наслідків прийнято вимірювати умовними одиницями – втратами, яких за припущенням може зазнати активна особа (той, хто приймає рішення). Основною вхідною інформацією, необхідною для розв'язання задач такого типу, є функція втрат, яка являє собою залежність втрат від двох аргументів: рішення та ситуації. Основний крок при розв'язуванні задачі полягає в перетворенні функції втрат на функцію ризику, яка відображає залежність ступеня ризику, на який іде активна особа. Спосіб такого перетворення неоднозначний і залежить від критерію ризику, який вибрала активна особа.

Основними причинами невизначеності є:

- невизначений характер науково-технічного процесу;
- динамічні зміни внутрішніх і зовнішніх умов розвитку економіки;
- неминучі похибки при аналізі складних систем;
- імовірнісний характер основних економічних параметрів;
- розвиток і розширення творчої активності працездатного населення;
- необхідність проектування потужних інформаційних потоків на комп'ютерній базі.

Як ризик розглядаємо такі ситуації, при яких настання невідомих подій дуже ймовірне і може бути знайденим. У той же час ситуація, при якій імовірність настання невідомих подій завчасно не може бути нами встановленою, чи не може бути встановленою традиційними засобами, називається невизначеністю.

Поняття господарського ризику та умови його виникнення тісно пов'язані з поняттям невизначеності й ефективності. Ось чому процесу знаходження найбільш ефективного варіанта розвитку деякої виробничої системи властивий господарський ризик. Отже, раціональні методи прийняття рішень в умовах ризику пов'язані з множиною допустимих (збалансованих) планів і їх ефективностями, які є складовими оптимального планування. Тобто раціональні рішення в умовах ризику є оптимальними.

За наявності ризику, а отже, й невизначеності, під збалансованим планом уже недостатньо розуміти план, узгоджений із внутрішніми та зовнішніми параметрами лише за усередненими очікуваними об'ємними показниками, оскільки їх дійсні значення можуть істотно відрізнятися від очікуваних. Тут необхідно враховувати варіацію невизначених параметрів і частоти, з якими вони потрапляють певний інтервал.

Одним із основних способів підвищення ступеня збалансованості плану в умовах невизначеності є формування необхідних резервів.

Для прийняття рішень в умовах невизначеності вхідна інформація задається у вигляді матриці, стрічки якої відповідають можливим альтернативам, а стовпці – станам систем.

Кожній альтернативі та кожному стану системи відповідає результат (наслідок), який визначає виграш (або втрати) при виборі альтернативи й реалізації стану. Отже, якщо a_i представляє альтернативу i $(i=\overline{1,n})$, S_j представляє можливий стан j $\left(j=\overline{1,m}\right)$, то $V\left(a_i,S_j\right)$ описує відповідний результат. У загальному випадку $V\left(a_i,S_j\right)$ може бути неперервною функцією аргументів a_i і S_j.

У дискретному випадку вказані дані представляються матрицею:

	S_1	…	S_m
a_1	$V(a_1, S_1)$	…	$V(a_1, S_m)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a_m	$V(a_n, S_1)$	…	$V(a_n, S_m)$

Така форма представлення в подальшому буде використовуватися при розгляді критеріїв прийняття рішень в умовах невизначеності.

Критерій Лапласа

Критерій Лапласа використовується при умові, коли ймовірності можливих станів систем невідомі, тобто в умовах повної невизначеності. Він базується на використанні принципу недостатнього обґрунтування, який стверджує, що стани системи $S_1, S_2, ..., S_m$ мають рівні ймовірності. Враховуючи вищесказане, початкову задачу можна розглядати як задачу прийняття рішень в умовах ризику, коли вибирається альтернатива a_i, яка дає найбільш очікуваний виграш R_1 (коли $V(a_i, S_j)$ моделює прибуток) або найменший очікуваний програш R_1 (коли $V(a_i, S_j)$ моделює витрати). Отже, для знаходження величини R_1 має місце:

$$R_1 = \begin{cases} \max\limits_i \left\{ \dfrac{1}{m} \sum\limits_{j=1}^{m} V\left(a_i, S_j\right) \right\}, \text{якщо} \quad V\left(a_i, S_j\right) - \text{прибуток}, \\ \min\limits_i \left\{ \dfrac{1}{m} \sum\limits_{j=1}^{m} V\left(a_i, S_j\right) \right\}, \text{якщо} \quad V\left(a_i, S_j\right) - \text{витрати}, \end{cases} \qquad (11.1)$$

де $\dfrac{1}{m}$ – імовірність реалізації стану S_j $\left(j = \overline{1, m}\right)$.

Критерій Лапласа доцільно використовувати в тих випадках, коли різниця між окремими станами системи велика, тобто велика дисперсія значень.

Критерій Вальда

Критерій є найбільш обережним, оскільки він ґрунтується на виборі альтернативи з усіх найгірших можливих. У зв’язку з цим його часто називають максиміном (мінімаксним).

Якщо результат $V(a_i, S_j)$ відображає втрати особи, що приймає рішення, то для альтернативи a_i найбільші втрати, незалежно від можливого стану S_j, будуть рівними $\max_j \{V(a_i, S_j)\}$. Відповідно до мінімаксного критерію найкращою вибирається альтернатива a_i, яка дає $R_2 = \min_i \max_j \{V(a_i, S_j)\}$. Аналогічно в тому випадку, коли $V(a_i, S_j)$ відображає виграш відповідно до максимінного критерію, вибирається альтернатива a_i, яка дає $R_2 = \max_i \min_j \{V(a_i, S_j)\}$.

Критерій Севіджа

Використання критерію Вальда інколи приводить до суперечливих висновків. Розглянемо таку матрицю втрат (грн.).

$V(a_i, S_j)=$		S_1	S_2	$\max_j$	$\leftarrow \min_i$
	a_1	50	210	210	
	a_2	150	200	200	

Користуючись критерієм Вальда, приходимо до вибору альтернативи a_2. Інтуїтивно проситься вибрати a_1, оскільки не виключено, що $S = S_1$. Тоді втрати складуть тільки 50 грн. При виборі альтернативи a_2 втрати завжди будуть не меншими 150 грн.

Розглянемо критерій Севіджа, який ґрунтується на принципі мінімакса наслідків прийнятого помилкового рішення і старається мінімізувати втрачену вигоду. Його зміст полягає у формуванні нової матриці втрат $W(a_i, S_j)$ з допомогою такої формули:

$$W(a_i, S_j) = \begin{cases} \max_k \{V(a_k, S_j)\} - V(a_i, S_j), \text{якщо } V(a_i, S_j) - \text{прибуток}, \\ V(a_k, S_j) - \min_k \{V(a_i, S_j)\}, \text{якщо } V(a_i, S_j) - \text{втрати}. \end{cases} \quad (11.2)$$

Отримані значення показують величину ризику, тому критерій Севіджа називають критерієм мінімального ризику. У першому випадку $W(a_i, S_j)$ є різницею найкращого значення в стовпці S_j і значенням $V(a_i, S_j)$. За змістом, $W(a_i, S_j)$ виражає «співчуття» особі, що приймала рішення, у зв'язку з тим, що вона не вибрала найкращої дії відносно стану S_j.

У другому випадку $W(a_i, S_j)$ відображає різницю $V(a_i, S_j)$ та найгірше значення в стовпці S_j.

Незалежно від того, чи $V\left(a_i, S_j\right)$ є прибутком або втратами, функція $W\left(a_i, S_j\right)$ в обох випадках визначає втрати. Тому до $W\left(a_i, S_j\right)$ слід використовувати тільки мінімаксний критерій.

Отже, формула для вибору оптимальної альтернативи з допомогою критерію мінімального ризику набуває вигляду:

$$R_3 = \min_i \max_j W\left(a_i, S_j\right).$$

Розглянутий критерій досить часто використовується в практичній діяльності при прийнятті управлінських рішень на тривалий період. Наприклад, при розподілі капітальних вкладень на перспективу він дає добрі результати.

Критерій Гурвіца (критерій оптимізму-песимізму)

Критерій Гурвіца в своєму алгоритмі охоплює декілька підходів до прийняття рішень: від найбільш оптимістичного до найбільш песимістичного.

При найбільш оптимістичному підході можна вибрати альтернативу, яка дає $\max_i \max_j \left\{V\left(a_i, S_j\right)\right\}$, де $V\left(a_i, S_j\right)$ є виграшем (прибутком).

Аналогічно для найбільш песимістичних припущень вибрана альтернатива відповідає

$$\max_i \min_j \left\{V\left(a_i, S_j\right)\right\}. \tag{11.3}$$

Критерій Гурвіца встановлює баланс між випадками крайнього оптимізму й крайнього песимізму, порівнюючи обидві альтернативи з допомогою відповідних коефіцієнтів α, та (α–1), де 0≤ α ≤1. Якщо $V\left(a_i, S_j\right)$ представляє прибуток, то вибираємо альтернативу, яка дає

$$R_4 = \max_i \left[\alpha \max_j \left\{V\left(a_i, S_j\right)\right\} - (1-\alpha) \min_j \left\{V\left(a_i, S_j\right)\right\}\right]. \tag{11.4}$$

У випадку, коли $V\left(a_i, S_j\right)$ представляє втрати, критерій вибирає альтернативу, яка дає

$$R_4 = \min_i \left[\alpha \min_j \left\{V\left(a_i, S_j\right)\right\} + (1-\alpha) \max_j \left\{V\left(a_i, S_j\right)\right\}\right]. \tag{11.5}$$

Параметр α є показником оптимізму (ступенем впевненості): при α=1, критерій дуже оптимістичний; при α = 0 – дуже песимістичний. Значення α(0 ≤α ≤ 1) може визначитися залежно від характеру особи, яка приймає рішення, тобто що їй більш характерно: песимізм чи оптимізм. Чим складніша господарська ситуація, чим більше в ній хоче підстрахуватись ОПР, тим ближче до нуля вибирається α. Якщо α наближається до нуля, то збільшується невпевненість при досягненні успіху. Використання окресленого критерію ускладнюється при відсутності достатньої інформації про величину параметра α, який в силу суб'єктивних причин при різних рішеннях і в різних ситуаціях набуває різних значень. При відсутності інформації про яскраво виражений характер особи α приймається рівним 0,5.

Припустимо, що α = 0, тобто ОПР має мало надії на сприятливий наслідок, тоді отримаємо:

$$R_4 = \max_i \left\{ 0 \cdot \max_j V\left(a_i, S_j\right) + \left(1-0\right) \cdot \min_j V\left(a_i, S_j\right) \right\} = \max_i \min_j \left\{ V\left(a_i, S_j\right) \right\} = R_2 .$$

При абсолютній впевненості в досягненні успіху (значення α приймаємо за 1) маємо крайній оптимізм:

$$R_4 = \max_i \left\{ 1 \cdot \max_j V\left(a_i, S_j\right) + \left(1-1\right) \cdot \min_j V\left(a_i, S_j\right) \right\} = \max_i \max_j \left\{ V\left(a_i, S_j\right) \right\} .$$

За умови, що ОПР не має змоги визначити коефіцієнт α, а компроміс між оптимістичним і песимістичним рішеннями бажаний використовуємо вираз:

$$R_4 = \begin{cases} \max_i \left[\dfrac{\max_j \left\{ V\left(a_i, S_j\right) \right\} + \min_j \left\{ V\left(a_i, S_j\right) \right\}}{2} \right], \text{ якщо } V\left(a_i, S_j\right) - \text{прибуток,} \\ \min_i \left[\dfrac{\max_j \left\{ V\left(a_i, S_j\right) \right\} + \min_j \left\{ V\left(a_i, S_j\right) \right\}}{2} \right], \text{ якщо } V\left(a_i, S_j\right) - \text{втрати.} \end{cases} \quad (11.6)$$

Критерій мінімуму середнього ризику

Припустимо, що ОПР володіє інформацією про закон розподілу ймовірностей $\left\{ p_j,\ j = \overline{1,m} \right\}$ настання станів системи $\left\{ S_j,\ j = \overline{1,m} \right\}$ і ставить перед собою завдання мінімізувати середній ризик. У цьому випадку критерій матиме вигляд:

$$R_6 = \min_i \sum_{j=1}^{m} p_j W\left(a_i, S_j\right) = \min_i \begin{cases} \sum_{j=1}^{m} P_j \left[\max_k \left[V\left(a_k, S_j\right) \right] - V\left(a_i, S_j\right) \right], \text{ якщо } V\left(a_i, S_j\right) - \text{прибуток,} \\ \sum_{j=1}^{m} P_j \left[V\left(a_i, S_j\right) - \min_k \left[V\left(a_k, S_j\right) \right] \right], \text{якщо } V\left(a_i, S_j\right) - \text{випрати.} \end{cases} \quad (11.8)$$

Критерій Ходжеса-Лемана

Критерій Ходжеса-Лемана використовує два суб'єктивних показники: закон розподілу ймовірностей $\{p_j,\ j=\overline{1,m}\}$ настання станів системи $\{S_j,\ j=\overline{1,m}\}$ і параметр оптимізму α для критерію Гурвіца.

Для загального випадку критерій Ходжеса-Лемана визначається виразом:

$$R_7 = \begin{cases} \max\limits_i \left[\alpha \sum\limits_{j=1}^{m} p_j V(a_i, S_j) + (1-\alpha) \min\limits_j V(a_i, S_j) \right], \text{ якщо } V(a_i, S_j) - \text{прибуток}, \\ \min\limits_i \left[\alpha \sum\limits_{j=1}^{m} p_j V(a_i, S_j) + (1-\alpha) \max\limits_j V(a_i, S_j) \right], \text{ якщо } V(a_i, S_j) - \text{витрати}, \end{cases} \tag{11.9}$$

де $0 \le \alpha \le 1$, $0 \le p_j \le 1$, $\sum\limits_{j=1}^{m} p_j = 1$.

Список використаних джерел

1. Економіко-математичне моделювання: Навч. посібник / За ред. О.Т. Іващука. Тернопіль: ТНЕУ, Економічна думка, 2008. 704 с.
2. Практикум з дисципліни «Дослідження операцій» для студентів денної фоми навчання / Укладачі О.Т. Іващук, Г. В. Сенів. Тернопіль: ТАНГ, 2003. 140 с.
3. Павленко В., Тимошенко А., Бескровний О. Дослідження операцій і методи прийняття технічних рішень. К.: Університет "Україна", 2019. 420 с.
4. Математичні методи дослідження операцій : підручник / Є. А. Лавров, Л. П. Перхун, В. В. Шендрик та ін. Суми : Сумський державний університет, 2017. 212 с.
5. Вітлінський В.В., Наконечний С.І. Ризик у менеджменті. К.: ТОВ “Борисфен-М”, 1996, 336 с.
6. Іващук О.Т. Економетричні методи та моделі: Навч. посібник. ТАНГ, Економічна думка, 2002. 348 с.
7. Єрьоменко В. О., Шинкарик М. І. Теорія ймовірностей. Навчальний посібник для студентів економічних спеціальностей. Тернопіль: Економічна думка, 2000. 176 с.
8. Єрьоменко В. О., Шинкарик М. І. Математична статистика. Навчальний посібник для студентів економічних спеціальностей. Тернопіль: Економічна думка, 2002. 248 с.
9. Ковальчук О. Я. Математичне моделювання та прогнозування в міжнародних відносинах: Підручник. Тернопіль: ТНЕУ, 2019. 412 с.
10. Програма та комплексні практичні індивідуальні завдання з дисципліни «Математичні методи в інжинірингу» / Березька К. М. Тернопіль: ЗУНУ, 2021.