АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ

ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНЫХ ПРОБЛЕМ МЕХАНИКИ И МАТЕМАТИКИ

НА ПРАВАХ РУКОПИСИ

Б О Д Н А Р   Д М И Т Р И Й   И Л Ь И Ч

ВОПРОСЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ВЕТВЯЩИХСЯ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ

01.01.01 - МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Д И С С Е Р Т А Ц И Я

НА СОИСКАНИЕ УЧЕНОЙ СТЕПЕНИ ДОКТОРА ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

ЛЬВОВ - 1989

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Один из основателей теории цепных дробей Л.Эйлер [144] о предмете своих исследований сказал: "Хотя этот род выражений до настоящего времени разработан мало, мы не сомневаемся, что когда-нибудь применение его весьма широко распространится в анализе бесконечных".

В последнее время интерес к цепным (непрерывным) дробям значительно возрос, о чем свидетельствуют многочисленные международные конференции, посвященные непрерывным дробям или тесно связанным с ними аппроксимациям Паде, а также выход нескольких монографий по данной тематике [2,45,65,96,98,122,151,159,188 и др.].

Говоря о непрерывных дробях, сравниваем их с такими средствами представления аналитических функций, как ряды или бесконечные произведения. Если степенной ряд, представляющий голоморфную функцию, сходится в круге, радиус которого определяется расстоянием до ближайшего полюса и расходится вне этого круга, то разложения основных элементарных и специальных функций в цепные дроби, как правило, сходятся во всей комплексной плоскости за исключением некоторых лучевых разрезов или полюсов функции. Непрерывные дроби являются также эффективным аппаратом вычислительной математики благодаря свойству малого накопления погрешности в процессе вычислений.

В современной литературе непрерывные дроби определяются с помощью композиций дробно-линейных отображений

$$t_0(z) = b_0 + z,\ \ t_k(z) = \frac{a_k}{b_k + z},\ \ k = 1,2,..., \tag{В.1}$$

где a_i, b_j, $i = 1,2,...$, $j = 0,1,2,...$, – комплексные числа, z – комплексная переменная, причем $a_i \neq 0$, $i = 1,2,...$. Пусть

$$T_0(z) = t_0(z), \qquad T_k(z) = T_{k-1}(t_k(z)), \qquad k = 1,2,... . \tag{В.2}$$

Цепная дробь представляет собой последовательность $\{T_k(0)\}$ [65] или выражение вида [137]

$$b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 \ddots + \cfrac{a_k}{b_k + \ddots}}}. \qquad (В.3)$$

Для удобной и экономной записи (В.3) будем в дальнейшем применять сокращенные обозначения, предложенным Роджерсом,

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 +} \frac{a_2}{b_2 +} \cdots + \frac{a_k}{b_k +} \cdots, \qquad (В.4)$$

а также обозначения

$$b_0 + \overset{\infty}{\underset{k=1}{D}} \frac{a_k}{b_k}, \qquad (В.5)$$

сходные с теми, которые применяются для рядов. Конечные непрерывные дроби

$$f_n = b_0 + \overset{n}{\underset{k=1}{D}} \frac{a_k}{b_k} = b_0 + \frac{a_1}{b_1 +} \frac{a_2}{b_2 +} \cdots + \frac{a_n}{b_n}, \quad n = 1,2,..., \qquad (В.6)$$

называются n-ми подходящими дробями или n-ми аппроксимантами цепной дроби (В. 5). Непрерывная дробь (В.5) сходится, если существует конечный предел f_n при $n \to \infty$. Каждую n-ю аппроксиманту можно представить в виде $f_n = \frac{A_n}{B_n}$, причем для вычисления A_n и B_n и n-го числителя и знаменателя справедливы рекуррентные формулы [65,137]

$$A_n = b_n A_{n-1} + a_n A_{n-2}, \; B_n = b_n B_{n-1} + a_n B_{n-2}, \; n = 1,2,..., \qquad (В.7)$$

при начальных условиях: $A_0 = b_0, \; A_{-1} = -1, \; B_0 = 1, \; B_{-1} = 0.$

Наряду с числовыми рассматриваются различные типы функциональных цепных дробей

$$b_0(z) + \overset{\infty}{\underset{k=1}{D}} \frac{a_k(z)}{b_k(z)}, \qquad (В.8)$$

где, как правило, $a_k(z)$, $b_k(z)$ – полиномы степени не выше второй. Они представляют различные классы аналитических функций [65,86,125,160,161, 167,173,202 и др.].

В теории непрерывных дробей существуют два направления: теоретико-числовое и аналитическое. Первое направление занимается изучением правильных цепных дробей, которые образуются при разложении действительных чисел по алгоритму Евклида [65,135,180]. В этом случае в (В.3) $b_0 \in \mathbf{Z}$, $b_i \in \mathbf{N}$, $a_i = 1$, $i = 1,2,...$. Так как правильные непрерывные дроби всегда сходятся, то более важными здесь являются вопросы о степени приближения с помощью подходящих дробей, а также оценки или асимптотики для коэффициентов b_i, $i = 1,2,...$, поскольку в общем случае их явный вид далеко не всегда можно установить. В теоретико-числовом направлении рассматриваются также приложения цепных дробей для решения диофантовых уравнений. Большой раздел представляет основанная А.Я.Хинчиным [135] метрическая теория непрерывных дробей.

Второе направление занимается изучением таких вопросов, как разложение функций в цепные дроби, оценки погрешности приближения с помощью n-ых аппроксимант, исследование свойств функций, представляемых соответствующими типами непрерывных дробей, установление общих признаков сходимости и вычислительной устойчивости как числовых, так и функциональных цепных дробей. Кроме того, здесь рассматриваются различные применения непрерывных дробей в анализе для аналитического продолжения функций, при исследовании устойчивости полиномов, для установления связей с проблемой моментов, с ортогональными полиномами и т.д. Соответствующие исследования подытожены в монографиях [65,137,181,202].

Подробный исторический обзор, посвященный цепным дробям, изложен в монографии [65], где отмечается большой вклад русских математиков П.Л.Чебышева [138,139] и А.А.Маркова [86] в создании аналитической теории непрерывных дробей. Основным вопросом данного направления, которому посвящена значительная часть опубликованных работ, является установление общих признаков сходимости непрерывных дробей [65,136,160-162, 165,166,168,181,197,202] и многие другие.

Исходя из целей диссертационной работы, сформулируем наиболее употребительные признаки сходимости непрерывных дробей как числовых, так и функциональных. Для большинства из них будут установлены многомерные аналоги.

До середины XIX века вопрос сходимости бесконечных цепных дробей общего вида вообще не рассматривался, хотя такие дроби возникали в работах многих математиков. В частности, в бесконечные цепные дроби разлагались иррациональные числа, степенные рады и интегралы, элементарные и гипергеометрические функции. Однако еще в 1768г. Ламберт [172] разложил в непрерывные дроби $\ln(1+x)$, $arctg\, x$ и $tg\, x$ и исследовал сходимость этих формальных разложений к соответствующим функциям. Лагранж по-видимому, первым обратил внимание на сходимость цепных дробей с произвольными элементами. В 1774г. в добавлении к переводу начал алгебры Эйлера он заметил, что дроби вида

$$b_0 + \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \ldots + \frac{1}{b_n}, \tag{B.9}$$

где b_i, $(i = 0,1,2,\ldots)$ – натуральные числа, сходятся. В 1775г. Бернулли [149] исследовал сходимость однозвенной периодической цепной дроби, $\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_1}{b_2} + \frac{a_1}{b_1 + \ldots}$, где $a_1, b_1 \in \mathbf{C}$. Штерн в работе [193], опубликованной в 1832г. попытался дать строгое определение сходимости и расходимости произвольных цепных дробей. Однако, исходя из его определения, цепные дроби, подходящие дроби которых колеблются в конечных пределах, следует рассматривать как сходящиеся. Так, он считал, что дроби вида (B.9), где b_i, $(i = 0,1,2,\ldots)$ – произвольные действительные положительные числа, всегда сходятся. Первые строго обоснованные достаточные признаки сходимости непрерывных дробей с положительми элементами появились только в 1845г. в работах Шльомильха и Арндта. Среди них наиболее общим признаком сходимости является

Теорема В.1.(Арндт[148]). Цепная дробь (В.4) с действительными положительными членами сходится, если расходится ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(1+\frac{a_n}{b_n b_{n-1}}\right)^{-1}=\infty .$$

Вопрос сходимости цепных дробей с положительными элементами полностью решил Зейдель в 1846г.

Теорема В.2 (Зейдель [189]). Цепная дробь (В.9) с действительными положительными b_i, $i=1,2,...$, сходится тогда и только тогда, когда расходится ряд n

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k=\infty . \tag{B.10}$$

Теорема В.3 (Зейдель[189]). Цепная дробь (В.4) с действительными положительными элементами сходится тогда и только тогда когда по крайней мере один из рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_1 a_3 \ldots a_{2k-1}}{a_2 a_4 \ldots a_{2k}} b_{2k}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_2 a_4 \ldots a_{2k}}{a_3 a_5 \ldots a_{2k+1}} b_{2k+1} \tag{B.11}$$

расходится.

К этому же результату независимо от Зейделя пришел Штерн [194] в 1848г. Им получено также усиление теоремы Арндта.

Теорема В.4 (Штерн[194]). Цепная дробь (В.4) с положительными элементами сходится, если расходится ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{b_n b_{n-1}}{a_n}=\infty . \tag{B.12}$$

Критерий сходимости дроби (В.9), эквивалентный теореме В.2, был установлен Опперманом .

Теорема В.5 (Опперман [178]). Цепная дробь (В.9), где

$b_i > 0,\ (i = 0,1,2,...)$, сходится тогда и только тогда, когда $\prod_{i=1}^{\infty}\left(1 + b_i\right) = \infty$.

Применение теоремы В.3 часто бывает неудобным так как вид общих членов рядов (В.11) с ростом K очень усложняется. Поэтому целесообразно использовать в этом случае более эффективные достаточные признаки сходимости. К таковым относятся , например, теоремы В.1, В.4, также следующие утверждения.

Теорема В.6 (А.А.Марков [86]). Непрерывная дробь (В.4), где все $a_i,\ i = 1,2,...,\quad b_j,\ j = 0,1,2,...,$ – целые положительные числа сходятся,если $b_i > a_i,\ i = 1,2,...$.

Теорема В.7 (Прингсгейм [186]). Цепная дробь (В.4) с действительными положительными элементами сходится, если расходится ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty}\sqrt{\frac{b_n b_{n-1}}{a_n}} = \infty .$$

Броман (см. [181]) показал, что цепная дробь (В.4), у которой $b_{2k-1} = 0,\ k = 1,2,...,$ расходится. Следовательно, критерий Зейделя для непрерывных дробей с действительными неотрицательными элементами не справедлив. Однако теоремы В.2 и В.3 остаются верными и в этом этом случае при условии, что не все b_{2k-1}, равны нулю. Теоремы В.1, В.4, В.7 справедливы для цепных дробей с неотрицательными элементами без каких-либо дополнительных ограничений [181]. Обзор исследований, посвященных сходимости цепных дробей с положительными членами, изложен в работе В.Слешинского [123].

Трон, Джоунс в монографии [65] отметили, что самыми известными и наиболее употребительными признаками сходимости непрерывных дробей являются признаки Ворпицкого, Прингсгейма, Ван Флека и параболические теоремы. Часто применяются также необходимый признак сходимости Кох и критерий сходимости периодических цепных дробей.

Теорема В.8 (Ворпицкий [204]). Если для цепной дроби

$$\left(1+\underset{k=2}{\overset{\infty}{D}}\frac{c_k(z)}{1}\right)^{-1}, \tag{B.13}$$

где $c_k(z)$ – комплексные функции, заданные в области $D \subset \mathbf{C}$, выполняются условия

$$|c_k(z)| \le \frac{1}{4},\ k = 2,3,\ldots \tag{B.14}$$

то ***i***) дробь (В.13) равномерно сходится в D;

ii) областью значений, т.е. областью совпадающей со значениями подходящих дробей и бесконечной дроби (В.13), является круг

$$\left|z-\frac{4}{3}\right| \le \frac{2}{3}; \tag{B.15}$$

iii) константа $\frac{1}{4}$ в (В.14) и область (В.15) являются наилучшими, т.е. константу нельзя увеличить, а область уменьшить.

Следующее утверждение известно в литературе как теорема Прингсгейма [185], хотя было установлено Слешинским [185] на 9 лет раньше. Аналогичная теорема рассматривалась также А.А.Марковым [86] для цепных дробей с действительными элементами.

Теорема В.9 (Слешинский–Прингсгейм [123,185]). Цепная дробь (В.4) с комплексными членами сходится, если

$$|b_n| \ge |a_n| + 1, \qquad n = 1,2,\ldots\ . \tag{B.16}$$

Для n-х аппроксимант справедливо неравенство

$$|f_n| < 1, \qquad n = 1,2,\ldots\ . \tag{B.17}$$

Дальнейшее усиление теоремы В.9 связано либо с переходом в действительную область (теорема Тице[181]), либо с изучением цепных дробей (В.4), удовлетворяющих условиям (В.16) и значения которых принадлежат кругу $|z| = 1$.

Теорема В.10 (Ван Флек [198]). Пусть для элементов цепной дроби (В.9) выполняются условия

$$b_i \neq 0, \quad |\arg b_i| < \frac{\pi}{2} - \varepsilon, \qquad i = 0,1,2,..., \tag{B. 18}$$

где ε – произвольное как угодно малое действительное число ($0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$). Тогда $\boldsymbol{i}$) n-я аппроксиманта f_n дроби (В.9) удовлетворяет условию

$$f_n \neq 0, \quad |\arg b_i| < \frac{\pi}{2} - \varepsilon, \quad i = 0,1,2,...;$$

$\boldsymbol{ii}$) существуют конечные пределы четных и нечетных аппроксимант;

$\boldsymbol{iii}$) для сходимости цепной дроби (В.9) необходимо и достаточно, чтобы расходился ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} |b_i| \tag{B.19}$$

Подробный обзор по одному из очень важных направлений в исследовании сходимости цепных дробей, так называемым параболическим теоремам, изложен в [65]. Сформулируем первый полученный в этом направлении результат. Предварительно дадим определение. Множество S называется областью сходимости цепной дроби (В.9), если из условия $b_i \in S$, $i \geq 1$, следует, что (В.9) сходится.

Теорема В.11 (Скотт–Уолл [202]). Множество точек $S \in \mathbf{C}$, симметричное относительно действительной оси, является областью сходимости цепной дроби

$$\left(1 + \underset{k=2}{\overset{\infty}{D}} \frac{a_k}{1}\right)^{-1} \tag{B.20}$$

тогда и только тогда, когда S – ограниченное множество, принадлежащее параболической области

$$P = \left\{ z \in \mathbf{C} : |z| - \operatorname{Re} z \leq \frac{1}{2} \right\}. \tag{B.21}$$

Более того, если $a_k \in P$, $k = 2,3,...$, то дробь (В.20) сходится тогда и только тогда, когда

i) существует индекс p такой, что $a_p = 0$;

ii) все $a_p \neq 0$ и ряд (В.19) расходится, где

$$b_1 = 1, \quad a_{p+1} = \left(b_p b_{p+1}\right)^{-1}, \quad p = 1, 2, \ldots . \tag{В.22}$$

Обобщение этого результата на случай повернутой параболической области [196] будет использовано нами в § 3 гл. 3.

Теорема В.12 (Кох [171]). Если ряд (В.19) сходится, то цепная дробь (В.9) с комплексными элементами расходится. Более того, существуют конечные пределы числителей и знаменателей подходящих дробей

$$\lim_{k\to\infty} A_{2k} = F_0,\ \lim_{k\to\infty} A_{2k+1} = F_1,\ \lim_{k\to\infty} B_{2k} = G_0,\ \lim_{k\to\infty} B_{2k+1} = G_1,$$

и выполняется соотношение $F_1 G_0 - F_0 G_1 = 1$.

Теорема В.13 [202]. Однозвенная периодическая цепная дробь $\frac{a}{1} \, \frac{a}{+1} \, \frac{a}{+1} + \cdots$ сходится для каждого $a \in \mathbf{C}$, за исключением точек $a = -\frac{1}{4} - c$, где c – произвольное действительное положительное число.

Рассмотрим некоторые типы функциональных цепных дробей.

Непрерывная дробь

$$\left(b_1 + z_1 + \mathop{D}_{i=2}^{\infty} \frac{-a_{i-1}^2}{b_i + z_i} \right)^{-1}, \tag{В.23}$$

где $a_i, b_i \in \mathbf{C}$, z_i – комплексные, переменные, называется положительно определенной, если неотрицательно определены действительные квадратичные формы

$$\sum_{k=1}^{n} \beta_k \xi_k^2 - 2\sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k \xi_k \xi_{k+1} \geq 0,\ n = 1, 2, \ldots,$$

где $\beta_k = \operatorname{Im} b_k$, $\alpha_k = \operatorname{Im} a_k$, ξ_k, $k = 1, 2, \ldots$, – произвольные действительные числа.

Теорема В.14 (Уолл–Венцель [202]). Цепная дробь (В.23) положительно определена тогда и только тогда, когда

i) $\beta_k \geq 0,\ k = 1, 2, \ldots$;

ii) существуют действительные числа $g_i : 0 \le g_i \le 1,\ i = 1,2,...$, такие, что

$$\alpha_k^2 = \beta_k \beta_{k+1}(1 - g_{k-1}) g_k,\ k = 1,2,... \ .$$

Теорема В.15 [202]. Если цепная дробь положительно определена, тогда n-е знаменатели $B_n \ne 0,\ n = 1,2,...,$ в области $\operatorname{Im} z_i > 0,\ i = 1,2,...$.

Цепная дробь (В.23) называется *J*-дробью, если все $z_i = \varsigma,\ i = 1,2,...,$ где $\varsigma \in \mathbf{C}$.<С Подробный обзор, посвященный положительно определенным и *J*-дробям, изложен в монографии [202]. Большое внимание изучению действительных *J*-дробей уделяли П.Л.Чебышев [139] и А.А.Марков[86].

Цепная дробь

$$1 + \mathop{D}_{k=1}^{\infty} \frac{a_k z}{1}, \tag{В.24}$$

где $a_k \ne 0,\ k = 1,2,...,$ – комплексные числа, $z \in \mathbf{C}$, или обратная к ней называется регулярной *С*-дробью. Если все $a_k > 0,\ k = 1,2,...,$ то дробь (В.24) или обратная к ней называется S-дробью. S-дробь, у которой $a_k = g_k(1 - g_{k-1})$, где $0 \le g_k \le 1$, называется g-дробью. Пусть W – класс аналитических в области $G = \{z \in \mathbf{C} : z \ne -1, |\arg(z+1)| < \pi\}$ функций f, таких, что $\operatorname{Re}\left(\sqrt{1+z}\, f(z)\right) > 0$ и $f(x \in R)$, если $-1 < x < \infty$. Характеристика класса W дается с помощью g-дробей, а именно: $f(x) \in W$ тогда и только тогда, когда

$$f(z) = \frac{s_0}{1} \mathop{}_{+} \frac{g_1 z}{1} \mathop{}_{+} \frac{(1-g_1) g_2 z}{1} \mathop{}_{+} \frac{(1-g_2) g_3 z}{1} \mathop{}_{+} \cdots,$$

где $s_0 > 0,\ 0 < g_i < 1,\ i = 1,2,...$ [160,202].

Наиболее характерными и употребительными признаками сходимости С-дробей является теорема Ван Флека о предельно-периодических цепных дробях и кардиоидная теорема [65].

Теорема В.16 (Ван Флек [200]). Пусть (В.24) – регулярная *С*-дробь, такая, что $\lim\limits_{k \to \infty} a_k = a \ne 0$ и пусть

$$R_\alpha = \left\{ z \in \mathbf{C} : \left| \arg\left(az + \frac{1}{4} \right) \right| < \pi \right\}.$$

Тогда непрерывная дробь (В.24) сходится к функции f, мероморфной в R_α, либо тождественно равной бесконечности

Для S-дробей характерной является теорема Стилтьеса.

Теорема В.17 (Стилтьес) [125]. Для S-дроби (В.24) справедливы утверждения:

i) четные и нечетные аппроксиманты (В.24) равномерно сходятся на каждом компакте области $G = \{ z \in \mathbf{C} : |\arg z| < \pi \}$ к функции, голоморфной в G;

ii) цепная дробь (В.24) сходится к голоморфной функции в G тогда и только тогда, когда расходится ряд (В.10), где b_i, $i = 1, 2, \ldots$, определяются согласно (В.22);

iii) если S-дробь (В.24) сходится в какой либо точке области G, то она сходится в каждой точке этой области.

Кроме перечисленных существуют и другие типы функциональных цепных дробей: Т-дроби [65], дроби, в которые разлагаются функции класса Герглотца [134,202], Р-дроби [175], δ-дроби [173] , РС-дроби [167] и др.

Доказательство сходимости как числовых, так и функциональных непрерывных дробей базируется на установлении различных оценок для модуля разности их подходящих дробей с существенным использованием рекуррентных соотношений (В.7), или путем применения особых свойств сходимости голоморфных функций [57,87,110]. Если, например, подходящие дроби являются голоморфными функциями в области D, то для доказательства равномерной сходимости внутри D достаточно доказать равномерную ограниченность внутри этой области и исследовать сходимость на некотором подмножестве D. У Стилтьеса [125] в качестве подмножества рассматривается круг, у Витали – бесконечное множество точек, имеющее предельную точку внутри области D. Дальнейшим развитием вопросов сходимости голоморфных функций является введение Монтелем так называемого нормального семейства аналитических функций [90]. В последней работе рассмотрены также нормальные семейства аналитических функций двух переменных. В настоящее время в теории цепных дробей широко применяется следующая интерпретация этих теорем

Теорема В.18(Стилтьес-Витали [65]). Пусть $\{ F = f_m(z), z \in D, m = 1,2,... \}$ – семейство голоморфных функций в области $D \subset \mathbf{C}$, таких, что $f_m(z) \neq a$, $f_m(z) \neq b$ для всех $z \in D$, $m = 1,2,...$, где a и b – комплексные числа, $a \neq b$. Пусть $\Delta \subset D$ – бесконечное множество точек, имеющих, по крайней мере, одну предельную точку, принадлежащую D. Если последовательность F сходится к конечному значению для всех $z \in \Delta$, то она равномерно сходится на каждом компакте области D к голоморфной функции в D.

Подходящие дроби функциональных непрерывных дробей дают рациональные приближения для соответствующих функций. Поэтому представляет интерес исследования в области рациональных приближений со свободными полюсами, в первую очередь, по аппроксимациям Паде.

Пусть $f(z)$ – функция, голоморфная в точке $z = 0$. Рациональный полином $\pi_{m,n} = \left[m/n \right] = \dfrac{P_m}{Q_n}$, где $\deg P_m \leq m$, $\deg Q_n \leq n$, называется аппроксимантой Паде типа (m,n) функции f, если

$$(f\,Q_n - P_m)(z) = Az^{m+n+1} + ...$$

или

$$f(z) - \frac{P_m(z)}{Q_n(z)} = Bz^{m+n+1} + ... \tag{В.25}$$

в случае $Q_n(z) \neq 0$ [2].

Соотношения (В.25), где $f(z)$ – формальный степенной ряд, m равно n, если n – четное или $n+1$ в противном случае, применяются для построения соответствующей к заданному ряду непрерывной дроби вида (В.24). В этом случае $\left[m/n \right]$ – n-я подходящая дробь (В.24) Преобразование ряда в соответствующую цепную дробь является одним из наиболее общих подходов, применяемых для разложения функции в непрерывную дробь.

Интерес для рассматриваемой тематики представляют вопросы сходимости $\pi_{n,m}$, близких к диагональным, а также построение аппроксимаций Паде для конкретных элементарных и специальных функций и исследование асимптотики погрешности приближения.

Установлены сходимость парадиагональных, т.е. $\left[M+J \middle/ M \right]$ аппроксимаций Паде при $M \to \infty$, $J \geq -1$ для функций Стилтьеса, сходимость подпоследовательности $\left[M-1 \middle/ M \right]$ для функций Гамбургера [2], доказана сходимость и исследованы свойства полюсов диагональной последовательности Паде для функции $f(z) = \hat{\mu}(z) + r(z)$, где $\hat{\mu}(z)$ – функция Маркова, $r(z)$ – рациональная функция, такая, что $r(\infty) = 0$ и полюса $r(z)$ расположены вне носителя меры μ функции $\hat{\mu}(z)$ [112]. Известный контрпример Гаммеля [2] показывает, что существует целая функция, полюса диагональной последовательности $\pi_{n,n}$, $n = 0,1,\ldots$, которой образуют всюду плотное множество в $\mathbf{C}$. Аналогичные примеры указаны и для других последовательностей, близких к диагональной. Поэтому при исследовании сходимости аппроксимаций Паде для голоморфных или мероморфных функций существенно используется сходимость по мере или по емкости. Первые результаты в этом были получены Наталлом [177] и Поммеранке [185]. Они рассматривали функции, мероморфные в $\mathbf{C}$ или в области $\mathbf{C} - e, cap\, e = 0$. А.А.Гончар в [83] показал, что единственным препятствием для сходимости аппроксимаций Паде $\pi_{n,n}$ в некоторой области Ω являются предельные точки их полюсов, принадлежащие Ω. Условия, которым должна удовлетворять область Ω, выполняются, в частности, и для областей, часто встречающихся в теории цепных дробей. В работах [51,52,61-63,113,126 и др.] А. А. Гончара и его учеников были существенно развиты исследования по сходимости аппроксимаций Паде для голоморфных и мероморфных функций. Более полный перечень соответствующих работ приведен в [2].

Одним из основных источников получения дробно-рациональных приближений является разложение функций в цепные дроби [65]. Более общий подход дают аппроксимации Паде. Однако, как отмечается в монографии [96], отыскание явного вида и исследование аппроксимаций Паде является в каждом конкретном случае не простым делом и требует своей догадки.

Аппроксимации Паде для e^z вычислил в явном виде еще Шарль Эрмит в 1873г. [163]. Асимптотика приближения $e^z - \pi_{n,n}(z)$ была установлена Ю.Люком [85], который использовал результаты Перрона, и независимо другим методом В.К.Дзядыком и Л.И.Философом [69]. В последней работе установлено также асимптотическое равенство для $(1+z)^{\alpha} - \pi_{n,n}(z)$, где $\alpha \in \mathbf{R}$. Ю. Люк [85] исследовал асимптотическое поведение погрешности приближения с помощью аппроксимаций Паде гипергеометрических функций. Эффективным средством вычисления и исследования аппроксимаций Паде является, предложение В.К.Дзядыком в 1974 г. α-метод решения линейных дифференциальных уравнений на случай рациональной аппроксимации [68]. Именно таким образом В.К.Дзядыком [66] были впервые установлены асимптотики диагональных аппроксимаций Паде для функций $\sin z$, $\cos z$, $sh z$, $ch z$. Ранее в работах Армса,Эдрея (см., например, [155]) были исследованы только вопросы сходимости $\pi_{n,m}$ в случае, когда $n \cdot m$ – четное, для функций $(\cos z)^k$, $\left(\frac{\sin z}{z}\right)^k$, $\left(\frac{tg z}{z}\right)^k$, $k \in \mathbf{Z}$. Используя обобщенную проблему моментов, А.П.Голуб и М.Н.Чип получили асимптотические равенства приближения гипергеометрических функций ${}_2F_1(\nu - \sigma, 1; \nu + 1; -z)$, ${}_1F_1(1; \nu + 1; z)$, $\operatorname{Re}\nu > -1$ с помощью парадиагональных аппроксимаций Паде $[M + N/N]$, $M \geq 0$ [56], а также нечетной части логарифмической производной гамма-функций с помощью диагональных аппроксимаций Паде [140]. Е.М.Никишин в [95] исследовал аппроксимации Паде $\pi_{n,n}$ и $\pi_{n,n+1}$ для функции $\sqrt{Q(x)}$, где $Q(x)$ – действительный полином третьей степени с действительными и различными корнями. А.А.Аптекарев в [1] рассмотрел вопросы равномерной сходимости на компактах в $\mathbf{C}$ строк таблицы Паде функции $\sum_{i=1}^{k} e^{\lambda_i z}$, $\lambda_i \in \mathbf{C}$.

Известная теорема Уолша показывает, что аппроксимации Паде являются локально наилучшими рациональными приближениями.

Теорема В.19 [203]. Пусть $f(z)$ аналитична в начале координат и $R_{n,m}(\varepsilon, z)$ – наилучшая рациональная аппроксимация в чебышевской норме алгебраическими рациональными функциями $p_n(z)/q_m(z)$ ($\deg p_n(z) \leq n$, $\deg q_m(z) \leq m$) в круге $|z| \leq \varepsilon$. Пусть $P_n(z)/Q_m(z)$ – аппроксимация Паде $f(z)$ типа (n, m). Если $Q_m(0) \neq 0$, то при $\varepsilon \to 0$ $R_{n,m}(\varepsilon, z) \to [n/m]_f(z)$ равномерно на компактных подмножествах, не содержащих полюсов $[n/m]_f$.

Таблицу, составленную из наилучших рациональных приближений $R_{n,m}(f)$ будем называть рациональной таблицей Чебышева. В работе В.Н.Русака [148] изучено поведение строк таблицы Чебышева для тригонометрических, гиперболических и цилиндрических функций. Л.Л.Березкина [3] исследовала сходимость строк тригонометрической таблицы Паде для некоторых функций, аналитических в горизонтальной полосе, коэффициенты которых удовлетворяют подходящим рекуррентным соотношениям.

Систематическое изучение связей между структурными свойствами функций и скоростью стремления к нулю их наилучших рациональных приближений было начато в работах С.Н.Мергеляна, А.А.Гончара (см.[58,60]), Е.П.Долженко [71,72]. Эти исследования были развиты в работах Ю.А.Брудного [49], В.В.Пеллера [105, 106], А.А.Пекарского[103], Е.А.Севастьянова [117,118] и др. Исследованию скорости рациональных приближений некоторых классов функций в различных метриках, а также выделению классов функций, для которых рациональные приближения существенно лучше полиномиальных, посвящены работы А.П.Буланова[153], А.А.Гончара[59], А.А.Пекарского [102], В.А.Попова [106], В.А.Попова и П.П.Петрушева [109], В.Н.Русака [114,116], А.П.Старовойтова [124], П.Турана [132], Г.Фройда [158] и др.

Первые попытки обобщения алгоритма цепных дробей принадлежат Л.Эйлеру [156]. В простейшей форме он применил матричный итерационный процесс к данному вектору. Дальнейшее развитие этот метод получил в монографии А.Н.Хованского [137] и был использован для вычисления $\alpha^{p/q}$, $p,q \in \mathbf{Z}$, $\alpha \in \mathbf{R}$. Еще в 1839г. Эрмит в письме к Якоби обратился к крупнейшим математикам XIX века с задачей: дать полную арифметическую характеристику алгебраических иррациональностей n-го порядка. Как известно [135], алгебраические иррациональности второго порядка описываются периодическими цепными дробями. В 1868г. Якоби [164] предложил алгоритм, обобщающий алгоритм Евклида, и применил его для решения линейных неопределенных уравнений и представления кубических иррациональностей. О.Перрон [179] обосновал сходимость этого алгоритма. Рассматриваемой проблеме посвящены работы многих отечественных и зарубежник математиков, в частности, Г.Ф.Вороного [54], Я.А.Габовича [55], А.В.Озерского [98], Е.В.Подсыпанина [107], Шекереса [195] и др. Одним из наиболее удачных обобщений является алгоритм Якоби-Перрона, который успешно применяется также и в анализе для приближения вектор-функций одного переменного или так называемых совместных приближений [64,76,96,100,147,152 и др.]

Используя интерпретацию цепной дроби в виде графа и рассматривая более общие графы типа дерева, В.Я.Скоробогатько дал определение многомерного аналога непрерывной дроби, который в первых публикациях [73, 119] получил название ветвящейся цепной дроби (ВЦД). Некоторые частные случаи ветвящихся цепных дробей встречались и ранее. В работе И.Пратье [184] ВЦД возникли при рассмотрении композиций отображений Жуковского $w_n = \dfrac{a_n}{2}\left(\dfrac{w_{n+1}}{a_{n+1}} + \dfrac{a_{n+1}}{w_{n+1}}\right)$, $n = 1,2,\ldots$. В.П.Терских на протяжении 50 лет применял цепные дроби в области исследований механических колебаний в валопроводах различных энергетических установок в судостроении. В расчетах, кроме конечных непрерывных дробей, использовались также конечные ветвящиеся цепные дроби [130].

Пусть $b_0 \in \mathbf{C}$, $\{a_{i(k)}\}$, $\{b_{i(k)}\}$ – заданные последовательности комплексных чисел, $i(k) = i_1 i_2 ... i_k$ – сокращенное обозначение мультииндексов $1 \le i_p \le N$, $p = \overline{1,k}$, $k = 1,2,...$, $N \in \mathbf{N}$ – фиксировано. Ветвящейся цепной дробью с N ветками ветвления называется последовательность подходящих дробей $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, где

$$f_n = b_0 + \sum_{i_1=1}^{N} \cfrac{a_{i(1)}}{b_{i(1)} + \sum\limits_{i_1=2}^{N} \cfrac{a_{i(2)}}{b_{i(2)} + \ddots + \sum\limits_{i_n=1}^{N} \cfrac{a_{i(n)}}{b_{i(n)}}}}. \qquad \text{(В.26)}$$

По аналогии с одномерным случаем (В.2) П.И.Боднарчук (см. [45]) определил ВЦД как композицию многомерных дробно-линейных отображений, Говорят, что ВЦД сходится, если существует конечный предел f_n при $n \to \infty$. Для записи бесконечной ВЦД по аналогии с (В.5) будем использовать обозначение

$$b_0 + \mathop{D}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}}. \qquad \text{(В.27)}$$

Величины $a_{i(k)}$ называются частными числителями, $b_{i(k)}$ – частными знаменателями. Свернув дробь (В.26) без каких-либо сокращений, получим $f_n = \dfrac{A_n}{B_n}$. A_n и B_n называются соответственно числителем и знаменателями n-й подходящей дроби.

Фундаментальное значение в одномерном случае ($N = 1$) имеют рекуррентные формулы (В.7). Поэтому вполне естественно, что первые шаги в теории ВЦД были направлены на поиски аналогичных соотношений для ВЦД. В работах [119,120] был предложен первый вариант формул для A_n и B_n (см. (1.2.8)). Второй, по видимому еще более сложный вариант, использующий пространственные матрицы, был установлен И.Ф.Клюйником и И.П.Пустомельниковым (см. [45, стр. 51–55]). В работе [79] указаны формулы для A_2 и B_2 в случае $N=2$ в виде определителей. Общие формулы (1.2.27) для ВЦД (В.27) были обоснованы в монографии [20]. Более симметричный вариант соответствующих формул (1.2.35) для ВЦД вида (1.2.28) был использован при изучении свойств и исследовании сходимости некоторых типов функциональных ВЦД [20]. Простые формулы типа (В.7) для ВЦД, по видимому, не справедливы. Так, в работе [4] показано, что отношение двух линейно независимых решений рекуррентных уравнений (1.1.12) является ВЦД специального вида.

В первых работах, посвященных ветвящимся цепным дробям, были сформулированы первые признаки их сходимости. Соответствующие исследования подытожены в монографии [45]. Было установлено, что периодическая ВЦД с положительными компонентами, являющаяся разложением алгебраических иррациональностей, сходится [45,101]. В работе В.Я.Скоробогатько[121] на основании формулы (1.2.8) были обоснованы два признака сходимости произвольных ВЦД с положительными элементами, а именно:

Теорема В.20[121]. ВЦД (В.27) с действительными положительными членами сходится, если выполняются неравенства

$$\prod_{i(n)} b'_{i(n)} > 1 + \frac{1}{B_n}\sum_{j(r)} B_n\begin{pmatrix} 0 \\ j_1, j_2, \dots, j_r \end{pmatrix}\prod_{i(n)} c_{i(n)}, \tag{В.28}$$

где суммирование производится по возможным r $(1 \le r \le N^n)$ и $j_1, j_2, \dots, j_r$ $(1 \le j_1 < j_2 < j_3 < \dots < j_r \le N^n)$ произведения берутся по всевозможным мульти-индексам при фиксированном n, B_n – знаменатель n-ой подходящей дроби ВЦД (В.27), $B_n\begin{pmatrix} 0 \\ j_1, j_2, \dots, j_r \end{pmatrix}$–знаменатель n-подходящей дроби ВЦД

(В.27), у которой n-ые звенья, имеющие порядковые номера $j_1, j_2, ..., j_r$ в (1.2.7), заменены на $\frac{0}{1}$, $c_{i(r)} = a'_{i(r)}$, если $i(r)$ в (1.2.7) имеет один из порядковых номеров $j_1, j_2, ..., j_r$. $c_{i(r)} = b'_{i(r)}$ в противном случае и с учетом (1.2.3). $a'_{i(r)}, b'_{i(r)}$ определяются согласно (1.2.9).

Следствие В.1 [121]. ВЦД (В. 27) с действительными положительными элементами сходится, если с учетом принятых в теореме В.20 обозначений,

$$b'_{i(n)} > 1 + a'_{i(n)} \quad n = 1,2,..., \quad i_k = \overline{1,N}, \quad k = \overline{1,n},$$

$$B_n < KB_{n+1}, \quad n = 1,2,..., \qquad \prod_{i(n)} b'_{i(n)} > 1 + K \sum_{j(r)} \prod_{i(n)} c_{i(n)},$$

где K – некоторая константа, не зависящая от n .

Из-за своей громоздкости формула (1.2.8) оказалась малоэффективным средством при исследований сходимости ВЦД. Поэтому вопрос сходимости ветвящихся цепных дробей общего вида долгое время оставался открытым. В то же время велись разработки по применению аппарата ВЦД в теории чисел и вычислительной математике, в анализе и электротехнике. Отметим некоторые с нашей точки зрения наиболее интересные результаты.

В виде периодических ВЦД представлены алгебраические иррациональности высших порядков [45,101].

П.И.Боднарчуком [45], а затем Х.И.Кучминской [44,81] изучены вопросы интерполяции функций многих переменных ветвящимися цепными дробями вида (В.26), где $a_{i(k)} = x_{i_k,k}$ $(k = \overline{1,n},\quad i_p = \overline{1,N},\quad p = \overline{1,k})$, $P_k = (x_{1,k}, x_{2,k}, ..., x_{N,k})$, $k = \overline{1,n+1}$ – узлы интерполяции.

Пример [81]. Пусть функция $f(x,y) = (x^2 + y^2 - 1{,}5)^{-1}$ задана в точках (i,j), $i,j = 0,1,2$, среди которых $(0,0)$, $(2,1)$, $(1,2)$ – основные. Интерполяционная дробь запишется в виде

$$-\frac{2}{3}+\cfrac{x}{\cfrac{105}{88}-\cfrac{x-2}{\cfrac{1672}{5601}}+\cfrac{y-1}{\cfrac{209}{162}}}+\cfrac{y}{-\cfrac{105}{76}-\cfrac{x-2}{\cfrac{209}{162}}-\cfrac{y-1}{\cfrac{1672}{5601}}}.$$

Вычисляя значение функции, интерполяционной дроби , полинома Лагранжа 4-й степени, построенного по тем же основным и промежуточным точкам, в точке $(1/2,1/2)$, получим; точное значение равно -1, по дроби – 0,90368, по полиному – 0,18242.

С целью уменьшения выполняемых арифметических операций М.М.Пагиря [99] исследовал вопрос оптимизации интерполяционной формулы Х.И.Кучминской. Другой вид интерполяционной ВЦД

$$b_0+\mathop{D}_{k=1}^{n}\frac{(x-x_k)(y-y_k)}{b_{k,k}+\Phi_k(x,y)},\ \Phi_k(x,y)=\mathop{D}_{i=k+1}^{n}\frac{x-x_i}{b_{i,k}}+\mathop{D}_{i=k+1}^{n}\frac{y-y_i}{b_{k,i}},$$

где $\Phi_n(x,y)=0$, был рассмотрен в работах [80,154,176]. Для этой дроби приведен остаточный член в удобной для исследования форме [81], построены многочисленные примеры, иллюстрирующие эффективность алгоритма [154]. В.Семашко [192] применил интерполяционную ВЦД вида

$$b_0+\mathop{D}_{k=1}^{n}\frac{(x-x_k)}{b_{k,k}+F_k(y)},\ \ F_k(y)=\mathop{D}_{i=k+1}^{n}\frac{(y-y_k)}{b_{i,k}},\ \ k=\overline{1,n-1},\ \ F_n(y)=0$$

для конкретных инженерных расчетов. В работе [190] он предложил еще один вид интерполяционной ветвящейся цепной дроби, установил формулу остаточного члена.

Путем предельного перехода, когда узлы интерполяции стягиваются в одну точку и путем введения частных обратных производных в [45,46,81, 122,192] установлены аппроксимационные формулы разложения функций многих переменных в ВЦД в окрестности заданной точки, являющиеся многомерным обобщением дроби Тиле – дробного аналога ряда Тейлора

$$f(x)=f(x_0)+\cfrac{x-x_0}{[{}^{\prime}f(x)]_{x=x_0}+\cfrac{x-x_0}{2[{}^{\prime\prime}f(x)]_{x=x_0}+\cdots+\cfrac{x-x_0}{n[{}^{(n-1)}f(x)]_{x=x_0}+\cdots}}},$$

где обратные производные ${}^{(n)}f(x)$ вычисляются рекуррентно

$$^{(n)}f(x) = {}^{(n-2)}f(x) + n[^{(n-1)}f(x)], \ n \ge 2, \qquad `f(x) = \frac{1}{f'(x)}, \ ^{(0)}f(x) = f(x).$$

Одним из наиболее эффективных методов разложения функции (формального степенного ряда) в ВЦД является построение дроби, соответствующей заданному ряду. Большое число работ, как у нас, так и за рубежом, посвящено построению и исследованию различных типов соответствующих двумерных цепных дробей (см., например, [33,80,154,176,190,192]). Пусть задан формальный степенной ряд

$$\sum_{i,j=0}^{\infty} q_{ij} x^i y^j \tag{В.29}$$

ВЦД называется соответствующей к ряду (В. 29), если разложение её каждой n-й подходящей дроби f_n, $n = 1,2,...,$ в формальный степенной ряд

$$\sum_{i,j=0}^{\infty} q_{ij}^{(n)} x^i y^j$$

удовлетворяет условию

$$q_{ij}^{(n)} = q_{ij}, \quad i,j = 0,1,...,n, \quad i + j \le n. \tag{В.30}$$

В работах [80,154,176] была рассмотрена соответствующая ВЦД в виде

$$1 + \Phi_0 + \mathop{D}_{i=1}^{\infty} \frac{c_{ii}xy}{1 + \Phi_i}, \qquad \Phi_i + \mathop{D}_{p=1}^{\infty} \frac{c_{p+i,i}x}{1} + \mathop{D}_{p=1}^{\infty} \frac{c_{i,p+i}y}{1}. \tag{В.31}$$

Другая модель соответствующей дроби была предложена в [190]

$$1 + F_{00} + \mathop{D}_{i=1}^{\infty} \frac{b_{i,0}x}{1 + F_{i,0}} + \mathop{D}_{p=1}^{\infty} \frac{c_{0,i}y}{1 + F_{0,i}}, \qquad F_{ij} + \mathop{D}_{p=1}^{\infty} \frac{b_{p+i,p+j}xy}{1}. \tag{В.32}$$

n-ой подходящей дроби ВЦД (В.31) или (В.32) является конечная ВЦД, являющаяся частью (В.31) или (В.32) и содержащая только те элементы c_{ij} или b_{ij}, для которых $i + j \le n$. Двумерные соответствующие ВЦД (В.31) или (В.32) существенно отличаются от соответствующей непрерывной дроби (В.24) тем, что некоторые их частные числители являются полиномами второй степени. Требование линейности частных числителей естественным образом приводит к следующей конструкции соответствующей ВЦД

$$b_0 + \mathop{D}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{2} \frac{b_{i(k)} z_{i_k}}{1}. \tag{B.33}$$

Условий (В.30) недостаточно для определения коэффициентов $b_{i(k)}$. Естественными представляются два пути образования недостающих уравнений: положить определенное количество элементов $b_{i(k)}$ равными нулю или равными друг другу. В первом случае приходим к соответствующей ВЦД с неравноправными переменными x и y вида [122,192]

$$1 + F_0(y) + \mathop{D}_{k=1}^{\infty} \frac{b_{k,0} x}{1 + F_k(y)}, \quad F_k(y) = \mathop{D}_{i=1}^{\infty} \frac{b_{k,i} y}{1}.$$

Во втором случае о целью минимизации количества различных коэффициентов $b_{i(k)}$, можем положить [25,30]

$$b_{i(k)} = a_{2k-|i(k)|,|i(k)|-k}, \tag{B.34}$$

где $|i(k)| = i_1 + i_2 + \ldots + i_k$. Если ряд (В.29) является формальным разложением функции $f(x+y)$, то естественно ожидать, что тогда соответствующие ВЦД выродятся в непрерывную дробь (В.24), где вместо каждого x положено $x + y$. Однако последнее утверждение справедливо лишь для ВЦД (В.33) с коэффициентами $b_{i(k)}$ вида (В.34) [33,36].

Одним из достоинств аппарата непрерывных дробей является то, что они дают простые разложения для гипергеометрических функций или их отношений, сходящиеся во всей области определения соответствующих функций. Аппель в [145] определил гипергеометрические ряды от двух переменных

$$F_1(a,b,b';c;z_1,z_2) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(a)_{m+n}(b)_m(b')_n}{(c)_{m+n}} \frac{z_1^m z_2^n}{m!n!}, \tag{B.35}$$

$$F_2(a,b,b';c,c';z_1,z_2) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(a)_{m+n}(b)_m(b')_n}{(c)_m(c')_n} \frac{z_1^m z_2^n}{m!n!}, \tag{B.36}$$

$$F_3(a,a',b,b';c;z_1,z_2)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a)_m(a')_n(b)_m(b')_n}{(c)_{m+n}}\frac{z_1^m z_2^n}{m!n!}, \tag{В.37}$$

$$F_4(a,b;c,c';z_1,z_2)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a)_{m+n}(b)_{m+n}}{(c)_m(c')_n}\frac{z_1^m z_2^n}{m!n!}, \tag{В.38}$$

где a,a',b,b',c,c' – комплексные константы $c,c'\neq 0,-1,-2,...,$ и $\alpha_k=\alpha(\alpha+1)...(\alpha+k-1)$ – символ Похгаммера. В работе [73] Н.С.Дронюк разложила отношение функций Аппеля $\dfrac{F_1(a+1,b,b';c;z_1,z_2)}{F_1(a,b,b';c;z_1,z_2)}$ в ВЦД. Однако это разложение оказалось очень специфичным. Ни в одном из частных случаев, когда $F_1(a,b,b';c;z_1,z_2)$ вырождается в ряд Гаусса, оно не совпадает с известными. В работах [28,29,35] построены разложения отношения функций (В.36), (В.38) в ВЦД, являющиеся двумерными обобщениями дроби Гаусса. Доказано, что дроби являются соответствующими ВЦД.

П р и м е р. Сравним вычисления функции Аппеля $F_2(1,b,b';c,c';z_1,z_2)$ с помощью ряда (В.36) и ВЦД

$$\left(1-\sum_{i_1=1}^{2}\frac{u_{i(1)}z_{i_1}}{1}-\frac{v_{i(1)}z_{i_1}}{1}-\sum_{i_2=1}^{2}\frac{u_{i(2)}z_{i_2}}{1}-\frac{v_{i(2)}z_{i_2}}{1}-...-\sum_{i_n=1}^{2}\frac{u_{i(n)}z_{i_n}}{1}-\frac{v_{i(n)}z_{i_n}}{1}-...\right)^{-1},$$

где

$$v_{i(n)}=\begin{cases} b_{pq}, & \text{если } i_n=1, \\ b'_{pq}, & \text{если } i_n=2, \end{cases}$$

$u_1=a_{0,0},\ u_2=a'_0$ и

$$u_{i(n+1)}=\begin{cases} a_{pq}, & \text{если } i_n=i_{n+1}=1, \\ a'_{pq}, & \text{если } i_n=i_{n+1}=2, \\ a_p, & \text{если } i_n=2,\ i_{n+1}=1, \\ a'_q, & \text{если } i_n=1,\ i_{n+1}=2, \end{cases}$$

p обозначает количество единиц в мультииндексе $i(n)$, $q=n-p$,

$$a_{pq}=\frac{(c+p-q-1)(b+p)}{(c+2p-1)(c+2p)},\ b_{pq}=\frac{(p+q)(c-b+p-1)}{(c+2p-2)(c+2p-1)},\ a_p=\frac{b+p}{c+2p},$$

a'_{pq},b_{pq},a'_q, определяются с помощью аналогичных формул, где вместо c,b,p и q соответственно взято c',b',q и p.

k	S_k	$S_k - S_{k-1}$	f_k	$f_k - f_{k-1}$
1	1,7125	1,7125	3,4782608	2,4782608
2	2,2270201	0,5145201	3,5641805	0,0859197
3	2,6027715	0,3757514	3,6845861	0,1204056
4	2,8798225	0,277051	3,6918051	0,0072190
5	3,0858759	0,2060534	3,7008239	0,0090188
6	3,2401492	0,1543733	3,7015568	0,0007329
7	3,3564287	0,1162795	3,702194	0,0006372
8	3,444583	0,0881543	3,7022392	0,0000452

Предполагается, что $b = 7, c = 8, b' = 5, c' = 10, z_1 = 0{,}7, z_2 = 0{,}2$, $S_0 = f_0 = 1$, S_k – частная сумма двойного ряда (В.36), где $m + n \le k$, f_k – k-я подходящая дробь.

Эффективность применения цепных и ветвящихся цепных дробей в вычислительной математике, в частности, связана со свойством их вычислительной устойчивости. Имеется сравнительно немного работ, где излагаются результаты по данному вопросу [5,20,91,93, 97,122,150,169] и др. Важное значение здесь играют формулы типа (3.5.22), выражающие абсолютную или относительную погрешность при вычислении ВЦД через абсолютные или относительные погрешности ее компонент. Впервые формула такого типа была установлена в [5], другие варианты были рассмотрены в работах [91,93,97] . Исследованы вопросы вычислительной устойчивости ВЦД с положительными элементами, а также с элементами, удовлетворяющими условиям многомерных аналогов теорем Ворпицкого, Слешинского–Прингсгейма и др.

С помощью дробно-рациональных выражений, образованных, в частности, на основании разложений в цепные или ветвящиеся цепные дроби, построены численные нелинейные (дробно-рациональные) методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. Эта методы оказались эффективными при решении жестких систем дифференциальных уравнений (см., например, [43]). Возможность применения ВЦД в численном анализе иллюстрирует подход, предложенный в [101].

Рассмотрим нестационарную задачу математической физики

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}a_i\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right)+a_0\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right)+f(x,t), \tag{B.39}$$

$$u\big|_s=0,\ u(x,0)=u_0(x),\ (x,t)\in Q,\ x=(x_1,x_2,...,x_n), \tag{B.40}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\left(\frac{\partial u}{\partial x_1},...,\frac{\partial u}{\partial x_n}\right),\ Q=\Omega\times(0,T),\ s=\Gamma\times[0,T],$$

Γ – граница $\Omega=\left\{0<x_i<1,\ i=\overline{1,n}\right\}$. К решению таких задач приводят проблемы построения математических моделей физико-механических процессов, задачи многомерной оптимизации, электроники, индукционного нагрева.

Для простоты рассмотрим случай $n=2$. Используя ВЦД, найдем нелинейные выражения для первых разностных производных. Исходя из разложения $u=(x,y)$ в окрестности точки $(x_p,y_q)=:(p,q)$ в ряд Тейлора

$$u=(x,y)=\sum_{i,j=0}^{\infty}\frac{1}{i!\,j!}\left(\frac{\partial^{i+j}u}{\partial x^i\partial y^j}\right)_{(p,q)}(x-x_p)^i(y-y_q)^j,$$

построим соответствую ВЦД ж этому ряду. Взяв два этажа дроби, получим

$$u=(x,y)\approx u_{p,q}\left(1-\frac{x-x_p}{u_{pq}}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{(p,q)}-\frac{y-y_q}{u_{pq}}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{(p,q)}\right)^{-1}, \tag{B.41}$$

где $u_{pq}=(x_p,y_q)$. Положив в (В.41) сначала $x=x_{p+1},\ y=y_q$, а затем $x=x_p,\ y=y_{q+1}$, находим

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{(p,q)}\approx\frac{u_{p,q}}{u_{p+1,q}}\frac{u_{p+1,q}-u_{p,q}}{x_{p+1}-x_p},\quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{(p,q)}\frac{u_{p,q}}{u_{p+1,q}}\frac{u_{p,q+1}-u_{p,q}}{y_{q+1}-y_q}.$$

На основании полученных формул построены разностная схема, и при выполнении некоторых условий на функции $f,\ a_i,\ i=\overline{0,n}$, доказана и ее сходимость к решению задачи (В.39), (В.40).

С помощью ВЦД построены экономичные численно устойчивые методы решения систем линейных алгебраических уравнений [92,122,128]. Эффективность методов проверена на матрицах Гильберта. О возможности применения ВЦД для решения таких систем свидетельствует следующий простой алгоритм. Пусть

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\, x_j = a_{i,n+1}, \quad i = \overline{1,n} \ -$$

заданная система линейных алгебраических уравнений с $\det\left\| a_{ij} \right\| \neq 0$. Не ограничивая общности, предположим, что все алгебраические дополнения отличны от нуля. Используя правило Крамера, представим x_1 в виде отношения определителей. Раскрывая эти определители по столбцам, которыми они отличаются, получим

$$x_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_{i,n+1} A_{i,1}}{\sum_{i=1}^{n} a_{i,n} A_{i,1}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_{i,n+1}}{a_{i,1} + \sum\limits_{k=1,k\neq i}^{n} \dfrac{a_{k,1}}{\dfrac{A_{i,1}}{A_{k,1}}}}.$$

Алгебраические дополнения $A_{i,1}$ и $A_{k,1}$ отличаются только одной строкой. Именно по этой строке сделаем, как и раньше, разложение отношения определителей $\dfrac{A_{i,1}}{A_{k,1}}$.

Ветвящиеся цепные дроби получили также применение в электротехнике для синтеза многополюсников [74,153], для построения математических моделей транзисторов [77], в теоретической физике: в виде ВЦД, которую автор почему-то называет интегральной цепной дробью, представлен массовый оператор квазичастиц, взаимодействующих с фононами [131], ВЦД с операторными элементами были применены при решении уравнения Шредингера [182].

Первые признаки сходимости были не эффективными, их формулировки очень громоздкими. Новый подход при исследовании сходимости ветвящихся цепных дробей, использующий формулу (1.3.4), предложен в работах [4,39,40], в которых было установлено, что ВЦД

$$b_0 + \underset{k=1}{\overset{\infty}{D}} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{1}{b_{i(k)}} \tag{B.42}$$

с действительными неотрицательными $b_{i(k)}$, $k=1,2,...,$ $i_p = \overline{1,N}$, $p=\overline{1,k}$, сходится, если расходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k \alpha_{k+1}$, где

$$\alpha_k = \min\left(b_{i(k)} : i_p = \overline{1,N},\ p = \overline{1,k}\right) - \tag{B.43}$$

минимальный частный знаменатель дроби (B.42) на k-м этаже. В дальнейшем эти исследования были развиты в кандидатской диссертации [6], где были доказаны утверждение 1.4.1, следствия 2.3.1, 2.3.4, пункты 1),3) и 4) теоремы 3.2.1 с более грубой, чем (3.2.10), оценкой скорости сходимости при условии, что $\alpha < (4N)^{-1}$, а также установлен необходимый и достаточный признак сходимости N-мерного обобщения ВЦД (4.4.8) с положительными элементами.

Теорема B.21. Если ВЦД (B.42) с действительными положительными частными знаменателями сходится, то последовательность

$$L_m = \sum_{k=2}^{2m+1} \left(Q_{i(k)}^{(s)} Q_{i(k-1)}^{(s)} - 1\right),\ m = 1,2,...,$$

где $s = 2m + k - 2[k/2]$, $Q_{i(k)}^{(s)}$ определяются согласно (1.3.1), для каждого фиксированного набора индексов $i_1, i_2, ...,$ не ограничена.

Теорема B.22. ВЦД (B.27) с положительными членами сходится, если расходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \min\left(b_{i(k)} \left(\sum\limits_{i_{k+1}=1}^{N} \frac{a_{(k+1)}}{b_{i(k+1)}} \right)^{-1} : i_p = \overline{1,N},\ p = \overline{1,k+1} \right)$.

Теорема B.23. Пусть для ВЦД (B.42) с действительными положитель-ными частными знаменателями существует набор индексов $\{\tau_k\}_{k=1}^{\infty}$, $1 \le \tau_k \le N$, $k=1,2,...,$ и константа $M > 0$, что для каждого $m \in \mathbf{N}$ с учетом обозначений (1.3.1) выполняются условия

$$\sum_{k=2}^{2m+1}\left(\sum_{j=1}^{N}\frac{b_{\tau(k-1)}}{Q^{(s)}_{\tau(k-1)j}}+\sum_{j=1}^{N}\frac{Q^{(s)}_{\tau(k)}}{Q^{(s)}_{\tau(k-1)j}}-1\right)\le M,$$

$$b_{\tau(k)}b_{\tau(k+1)}=\min\left(b_{i(k)}b_{i(k+1)}:i_p=\overline{1,N},\ p=\overline{1,k+1}\right),$$

где $s=2m+k-2[k/2]$. Тогда ВЦД (В.42) сходится тогда и только тогда, когда расходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}b_{\tau(k)}b_{\tau(k+1)}$.

Среди других работ, посвященных вопросам сходимости ВЦД, отметим [83], где доказана часть теоремы 4.1.2, при условии, что параметр t, фигурирующий в $iii)$, удовлетворяет условию $\left(0\le t<\frac{1}{2}\right)$, а также [91,93], где были установлены два признака сходимости для ВЦД типа Прингсгейма. Нами получено усиление одного из этих признаков (см. теоремы 3.2.2, 3.4.2, 3.4.10, 3.4.12, пункт 1). В работах [37,38,41,82,84,127 и др.] рассмотрены вопросы сходимости двумерных соответствующих цепных дробей вида (В.31), в работе [191] – вида (В.32).

В работах [20,22,46–48] исследованы круговые области сходимости для ВЦД. Одним из первых результатов, касающихся спаренных областей сходимости для непрерывных дробей, является

Теорема В.24 (Лейтон-Уолл [202]). Цепная дробь $\mathop{D}\limits_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{1}$ с комплексными числовыми элементами сходится, если

$$|a_{2k-1}|\le\frac{1}{4},\ |a_{2k}|\ge\frac{25}{4},\ k=1,2,\ldots\ .$$

В естественной формулировке, а именно

$$\left|a_{i(2k-1)}\right|<\varepsilon,\quad \left|a_{i(2k)}\right|\ge M,\quad k=1,2,\ldots,\quad i_p=\overline{1,M},\quad p=1,k, \qquad (В.44)$$

где $\varepsilon>0, M>0$ – некоторые действительные положительные числа, эта теорема не переносится на ВЦД вида

$$\mathop{D}\limits_{k=1}^{\infty}\sum_{i_k=1}^{N}\frac{a_{i(k)}}{1}. \qquad (В.45)$$

Для произвольных, как угодно малого ε и как угодно большого M можно построить расходящуюся ВЦД вида (В.45), удовлетворяющую условиям (В.44).

Пример [47]. Рассмотрим ВЦД (В.45), где $N=2$,

$$a_1 = a_{i(2k)1} = \varepsilon,\ a_2 = a_{i(2k)2} = -\frac{\varepsilon}{4},\ a_{i(2k-1)1} = M,\ a_{i(2k)12} = a_{12} = 1-M,$$

$a_{i(2k)22} = a_{22} = -\frac{1}{2} - M$, $k = 1,2,\ldots,\ i_p = \overline{1,2},\ p = \overline{1,k}$. Тогда все четные подходящие дроби ВЦД (В.45) равны ∞. Тем не менее удовлетворяются условия (В.44), где вместо M необходимо взять $\min\left(M,\left|M-1\right|\right)$.

В работе [47] рассмотрен многомерный аналог теоремы В.24.

Континуальным аналогом ВЦД является интегральная цепная дробь (см.[122, 128]). Пусть $b_0 \in \mathbf{C}$, $a_r\left(t^{(r)}\right), b_r\left(t^{(r)}\right), r=1,2,$ – непрерывные комплексные функции, заданные в r-мерном гиперкубе

$K_r = \left[a,b\right]^r$, $t^{(r)} = \left(t_1, t_2, \ldots, t_r\right)$. Бесконечную интегральную цепную дробь определим как предел выражений

$$b_0 + \mathop{D}_{r=1}^{k} \int_a^b \frac{a_r\left(t^{(r)}\right)dt_r}{b_r\left(t^{(r)}\right)} = b_0 + \int_a^b \cfrac{a_1\left(t^{(1)}\right)dt_1}{b_1\left(t^{(1)}\right) + \int_a^b \cfrac{a_2\left(t^{(2)}\right)dt_2}{b_2\left(t^{(2)}\right) + \ddots + \int_a^b \cfrac{a_k\left(t^{(k)}\right)dt_k}{b_k\left(t^{(k)}\right)}}} \qquad \text{(В.46)}$$

при $k \to \infty$. Для записи бесконечной интегральной цепной дроби будем использовать обозначение

$$b_0 + \mathop{D}_{r=1}^{\infty} \int_a^b \frac{a_r\left(t^{(r)}\right)dt_r}{b_r\left(t^{(r)}\right)}. \qquad \text{(В.47)}$$

В виде (В.47) представлены решения интегральных уравнений Вольтерра, Фредгольма второго рода, Винера- Хопфа, Амбарцумяна–Чандрасекхара и др. [128]. В первой публикации [127] сделана неудачная попытка установить признаки сходимости дробей (В.47). Метод доказательства оказался ошибочным. Р.И.Михальчук [89], а затем М.С.Сявавко (см., например, [128]) по аналогии с ВЦД установили различные признаки сходимости интегральных цепных дробей. Методика исследования сходимости ВЦД легко перенеслась на их континуальные аналоги.

Целью настоящей диссертационной работы является разработка основ аналитической теории ветвящихся цепных дробей: исследование элементарных свойств ВЦД, установление общих признаков сходимости и расходимости ВЦД, являющихся многомерными обобщениями наиболее известных и употребительных признаков сходимости непрерывных дробей, определение и исследование свойств различных типов функциональных ВЦД, разложение функций, заданных формальными степенными двойными рядами в соответствующую ВЦД с линейными числителями, разложение в ВЦД отношения гипергеометрических функций двух переменных.

Актуальность рассматриваемой тематики обусловлена тем, что ВЦД являются многомерными аналогами цепных дробей, их подходящие дроби дают дробно-рациональные приближения для функций многих переменных. ВЦД получили применение в вычислительной математике и анализе, в теоретической физике и электротехнике. Однако теория ВЦД развита недостаточно. Здесь возникают значительные трудности, связанные с тем, что методы, которые применяются при исследовании сходимости непрерывных дробей, явно используют рекуррентные соотношения (В.2), для которых нет аналогов в многомерном случае. Вторая трудность связана с тем, что совокупность многомерных дробно-линейных отображений не образуют группы, как это имеет место в одномерном случае, если в качестве групповой операции рассматривать композицию отображений.

Диссертация состоит из введения и 4 глав, которые разбиты на 21 параграф.

В первой главе дано определение ВЦД, указана связь с композицией многомерных дробно-линейных отображений, определены различные виды подходящих дробей, установлены формулы для числителей и знаменателей подходящих дробей в виде определителей, определены различные виды сходимости ВЦД, исследованы эквивалентные преобразования для ветвящихся цепных дробей, установлен многомерный аналог тождеств Эйлера преобразования ВЦД в "усредненный" ряд. Сформулируем некоторые результаты, сохраняя приведенную в диссертации нумерацию.

Следствие 1.2.2. Для числителей A_k и знаменателей B_k подходящей дроби ВЦД

$$b_0 + \underset{k=1}{\overset{\infty}{D}} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{-a_{i(k)}^2}{b_{i(k)}} \tag{B.48}$$

с комплексными элементами справедливы формулы

$$A_k = \det D_{0l},\ B_k = \det D_{1l},\ k = 1,2,\ldots,$$

где $l = N + N^2 + \ldots + N^k$, элементы симметричных матриц

$$D_{i,n} = \begin{Vmatrix} d_{i,i} & d_{i,i+1} & \ldots & d_{i,n} \\ d_{i+1,i} & d_{i+1,i+1} & \ldots & d_{i+1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ d_{n,i} & d_{n,i+1} & \ldots & d_{n,n} \end{Vmatrix}, \qquad i = 0,1;\quad n = 1,2,\ldots, \tag{B.49}$$

определяются следующим образом. Если $p \in \mathbf{N}$, $(p \le n)$, то, найдя индексы $j_1, j_2, \ldots, j_m$ из разложения

$$p = j_1 N^{m-1} + j_2 N^{m-2} + \ldots + j_m,\ 1 \le j_r \le N,\ r = \overline{1,m}, \tag{B.50}$$

имеем $d_{0,0} = b_0$, $d_{pp} = b_{j(m)}$, $p = \overline{1,n}$, $d_{0i_1} = -a_{i_1}$,

$$d_{pq} = -a_{j(m)i_{m+1}},\ \text{если}\ q = Np + i_{m+1},\ 1 \le i_1, i_{m+1} \le N,$$

$$d_{pq} = 0\ \text{во всех остальных случаях, когда}\ p > q.$$

Ветвящиеся цепные дроби (B.27) и

$$b_0 + \underset{k=1}{\overset{\infty}{D}} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{a_{i(k)}^*}{b_{i(k)}^*} \tag{B.51}$$

называются эквивалентными, если

$$\tilde{f}_n = \tilde{f}_n^*, \qquad n = 1,2,\ldots, \tag{B.52}$$

где $\widetilde{f}_n, \widetilde{f}_n^*$ – их n-е фигурные подходящие дроби вида (1.1.15), число s, индексы $k_1, k_2, ..., k_s$ находятся из разложения k по алгоритму (В 50), порядок на множестве мультииндексов определяется согласно (1.1.14).

Теорема 1.51. ВЦД (В.27) и (В.51) с отличными от нуля частными числителями эквивалентны тогда и только тогда, когда существуют отличные от нуля константы $\rho_{i(k)}$, $k = 1,2,...,$ $i_p = \overline{1,N}$, $p = \overline{1,k}$, $\rho_{i(0)} = \rho_0 = 1$, такие, что

$$a_{i(k)}^* = a_{i(k)}\rho_{i(k)}\rho_{i(k-1)},\ b_{i(k)}^* = b_{i(k)}\rho_{i(k)}\ k = 1,2,...,\ i_p = \overline{1,N},\ p = \overline{1,k}.$$

Если условие (В.52) заменить просто равенством обычных подходящих дробей, то теорема 1.5.1 неверна.

Вторая глава посвящена вопросам сходимости ВЦД с действительными неотрицательными элементами. Основным методом исследования сходимости таких дробей является применение специальных неравенств , которым посвящен первый параграф.

Теорема 2.1.8. Пусть $\delta \geq 0, \gamma \geq 0, \mu \geq 0, x_i \geq 0, y_i \geq 0$, $i = \overline{1,n}$, принадлежат области $D = \left\{ 0 < x \leq x_i \leq X, 0 < y \leq y_i \leq Y, i = \overline{1,n} \right\}$. Тогда

$$\sum_{j=1}^{n}\left(1 + \delta\sum_{i=1}^{n}\frac{x_j}{x_i} + \sum_{i=1}^{n}\frac{y_j}{y_i} + \mu\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{x_j}{x_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{y_j}{y_i}\right)\right)^{-1} \leq \left(\frac{1}{n} + \delta + \gamma + n_D\mu\right)^{-1},$$

где

$$n_D = \frac{((n-n_\varepsilon)X + n_\varepsilon x)((n-n_\varepsilon)Y + n_\varepsilon y)}{(n-n_\varepsilon)XY + n_\varepsilon xy}, \tag{В.53}$$

n_ε – наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству

$$n_\varepsilon \geq \frac{n}{1-\varepsilon} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{4n^2\varepsilon}{(1-\varepsilon)^2}\right)^{1/2},\ \ \varepsilon = \frac{xy}{XY}.$$

В последующих параграфах установлены соответственно необходимые, достаточные, необходимые и достаточные признаки сходимости ВЦД с действительными положительными элементами. Главная цель этих исследований – максимальным образом приблизиться к многомерному аналогу теоремы Зейделя (теорема В.2), который сформулируем в виде гипотезы: ВЦД (В.42) с действительными положительными членами сходится, если ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k$ расходится, дробь (В.42) расходится, если ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k$ сходится, где α_k определяются согласно (В.43),

$$\beta_k = \max\left(b_{i(k)} : i_p = \overline{1,N},\ p = \overline{1,k}\right). \tag{В.54}$$

Теорема 2.2.1. ВЦД (В.42) с элементами $b_{i(k)} > 0,\ k = 1,2,...,$ $i_p = \overline{1,N},\ \ p = \overline{1,k}$, расходится, если

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{k=2}^{2m+1}\beta_{k-1}\left(\beta_k + \frac{N}{\alpha_{k+1}} \genfrac{}{}{0pt}{}{}{+} \frac{N}{\beta_{k+2}} \genfrac{}{}{0pt}{}{}{+} \frac{N}{\alpha_{k+3}} \genfrac{}{}{0pt}{}{}{+\cdots+} \frac{N}{\beta_s}\right) < \infty,$$

где α_k, β_k определяются согласно (В.43), (В.54), $s = 2m + k - 2[k/2]$, $[k/2]$ – целая часть числа $k/2$.

Теорема 2.3.1. В обозначениях предыдущей теоремы ВЦД (В.42) сходится, если

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{k=2}^{2m+1}\alpha_{k-1}\left(\alpha_k + \frac{N}{\beta_{k+1}} \genfrac{}{}{0pt}{}{}{+} \frac{N}{\alpha_{k+2}} \genfrac{}{}{0pt}{}{}{+} \frac{N}{\beta_{k+3}} \genfrac{}{}{0pt}{}{}{+\ldots+} \frac{N}{\alpha_s}\right) = \infty.$$

Теорема 2.2.4. В обозначениях теоремы 2.2.1 независимо от сходимости ВЦД (В.42) всегда выполняется условие

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{k=2}^{2m+1}\beta_{k-1}\left(\beta_k + \frac{N}{\alpha_{k+1}} \genfrac{}{}{0pt}{}{}{+} \frac{N}{\beta_{k+2}} \genfrac{}{}{0pt}{}{}{+} \frac{N}{\alpha_{k+3}} \genfrac{}{}{0pt}{}{}{+\ldots+} \frac{N}{\beta_s^*}\right) < \infty,$$

где $\beta_{2m}^* = \beta_{2m}$, $\beta_{2m+1}^* = \beta_{2m+1} + N/\alpha_{2m+2}$.

Теорема 2.2.2. В обозначениях теоремы 2.2.1 ВЦД (В.42) расходится, если сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k\,. \tag{В.55}$$

Теорема 2.3.7. Пусть для ВЦД (В.42) с элементами $b_{i(k)} > 0,$ $k = 1,2,...,\ i_p = \overline{1,N},\ \ p = \overline{1,k}$, выполняется условие: существует натуральное число M, что для всех индексов i и m, таких, что $2(m-i) \ge M - 1$

$$\frac{N_{2i+1}}{N}+\frac{2\alpha_{2i}}{N}\left(\alpha_{2i+1}+\alpha_{2i+3}+\ldots+\alpha_{2m+1}\right)\geq 1,$$
$$\frac{N_{2i+2}}{N}+\frac{2\alpha_{2i+1}}{N}\left(\alpha_{2i+2}+\alpha_{2i+4}+\ldots+\alpha_{2m}\right)\geq 1,$$

где α_i, β_i определяются согласно (В.43), (В.54), N_i – согласно (В.53), в предположении, что $n=N$, $x=\alpha_i^{(2m)}$, $y=\alpha_i^{(2m+1)}$, $X=\beta_i^{(2m)}$, $Y=\beta_i^{(2m+1)}$ и

$$\alpha_i^{(s)}=\alpha_i+\frac{N}{\beta_{i+1}}+\frac{N}{\alpha_{i+2}}+\frac{N}{\beta_{i+3}}+\cdots+\frac{N}{\gamma_s},\ \beta_i^{(s)}=\beta_i+\frac{N}{\alpha_{i+1}}+\frac{N}{\beta_{i+2}}+\frac{N}{\alpha_{i+3}}+\cdots+\frac{N}{\gamma_s^*},$$

$i=\overline{2,s-1}$, $s=2m,2m+1$; $\gamma_s=\alpha_s$, если $s-i$ – четное и β_s в противном случае, $\gamma_s^*=\alpha_s\beta_s/\gamma_s$. Тогда ВЦД (В.42) сходится, если ряд $\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i$ расходится.

Теорема 2.4.3. Если для ВЦД (В.42) с действительными положительными частными знаменателями существует константа $M>0$, что

$$\beta_k\leq M\alpha_k,\ k=1,2,..., \tag{В.56}$$

где α_k, β_k определяются согласно (В.43) и (В.54), то ВЦД (В.42) сходится тогда и только тогда, когда ряд (В.55) расходится.

Теорема 2.4.5. Справедливо утверждение предыдущей теоремы, если условие (В.56) заменить на

$$\beta_k\leq M\alpha_{k+1},\ \beta_{k+1}\leq M\alpha_k,\qquad k=1,2,\ldots .$$

В последнем параграфе данной главы рассмотрены вопросы сходимости ВЦД с неотрицательными элементами.

Глава 3 посвящена сходимости ВДЦ с комплексными компонентами. Здесь установлены многомерные аналоги наиболее известных признаков сходимости непрерывных дробей: признаков Ворпицкого, Прингсгейма, Ван Флека, параболических теорем и др. При доказательстве сходимости ВЦД в этом случае используется применительно к ВЦД метод мажорант, теорема Стилтьеса-Витали.

Теорема 3.1.1 Пусть все частные знаменатели ВЦД (В.42) принадлежат области $G_\varepsilon = \{z \in \mathbf{C}: z \neq 0, \ |\arg z| < \pi/2 - \varepsilon\}$, где ε – как угодно малое действительное положительное число, $0 < \varepsilon < \pi/2$. Тогда

i) $f_m \in G_\varepsilon$, $m = 1,2,...$;

ii) существуют конечные пределы f_{2i} и f_{2i+1} при $i \to \infty$;

iii) ВЦД (В.42) сходится, если при введении обозначений

$$\alpha_k = \left(\min b_{i(k)} : i_p = \overline{1,N},\ p = \overline{1,k}\right),\ \beta_k = \left(\max b_{i(k)} : i_p = \overline{1,N},\ p = \overline{1,k}\right), \quad (В.57)$$

выполняется либо условие теоремы 3.2.1, либо расходится ряд

$$\sum_{k=2}^{\infty} \alpha_k S_{k-1}, \text{ где } S_k = \alpha_k + \alpha_{k-2}N^{-1} + \alpha_{k-4}N^{-2} + ... + \alpha_{k-2r}N^{-r},$$

$r = \left[\dfrac{k-1}{2}\right]$ – целая часть $\dfrac{k-1}{2}$.

Теорема 3.1.3. Пусть для ВЦД (В.42) $b_0 = 0$, $b_{i(k)} \in \mathbf{C}$, $k = 1,2,...$, $i_p = \overline{1,N},\ p = \overline{1,k}$, ряд (В.55) сходится, где β_k определяются согласно (В.57). Тогда m-е числители A_m и знаменатели B_m ВЦД (В.42) стремятся к нулю при $m \to \infty$.

Установлены оценки скорости стремления к нулю A_m и B_m, построен контрпример, показывающий, что в отличие от одномерного случая расходимость ряда (В.55) не является необходимым условием сходимости ВЦД (В.42) с комплексными частными знаменателями.

Теорема 3.2.1. Если для ВЦД

$$\left(1 + \underset{k=1}{\overset{\infty}{D}} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{c_{i(k)}}{1}\right)^{-1} \quad (В.58)$$

с комплексными элементами выполняются условия

$$\left|c_{i(k)}\right| \le \alpha = \frac{t(1-t)}{N},\ 0 \le t \le \frac{1}{2},\ k = 1,2,...,\ i_p = \overline{1,N},\ p = \overline{1,k} \quad (В.59)$$

то ***i***) ВЦД (В.58) абсолютно сходится;

$\boldsymbol{ii}$) справедливы неулучшаемые оценки скорости сходимости

$$f_n - f_m \le \frac{(1-2t)t^m(1-t)^m\left((1-t)^{n-m} - t^{n-m}\right)}{\left((1-t)^{n+1} - t^{n+1}\right)\left((1-t)^{m+1} - t^{m+1}\right)}, \text{ если } 0 \le t < \frac{1}{2},$$

$$\text{или } f_n - f_m \le \frac{2(n-m)}{(n+1)(m+1)}, \text{ если } t = \frac{1}{2},$$

где $n > m$, f_k – k-я подходящая дробь ВЦД (В.58);

$\boldsymbol{iii}$) наилучшей областью значений, соответствующей области элементов (В.59) является круг $\left|z - 1/\left(1-t^2\right)\right| \le t/\left(1-t^2\right)$;

$\boldsymbol{iiii}$) предельная константа $\alpha = 1/(4N)$ является наилучшей, ее нельзя увеличить, сохраняя при этом сходимость ВЦД (В.58).

Теорема 3.2.5. ВЦД (В.58) с комплексными частными числителями сходится, если для произвольного натурального n и произвольного набора индексов $\{i_k\}_{k=1}^{\infty}$, $1 \le i_k \le N$, $k = 1, 2, \ldots$, выполняется условие $\sum\limits_{k=1}^{n} \left| c_{i(k)} \right| < \dfrac{1}{N}$.

Теорема 3.3.2. Пусть элементами ВЦД (В.58) $c_{i(k)}$, $k = 1, 2, \ldots$, $i_p = \overline{1, N}$, $p = \overline{1, k}$, являются комплексные числа, принадлежащие области

$$P_{\varepsilon,\gamma} = \left\{ z \in \mathbf{C} \colon |z| - \operatorname{Re} z \exp(-2\gamma i) \le 2(1-\varepsilon)\cos^2\gamma / N \right\},$$

где $-\pi/2 < \gamma < \pi/2$, ε – как угодно малое действительное число, $0 < \varepsilon < 1$. Тогда

$\boldsymbol{i}$) существуют конечные пределы четных и нечетных подходящих дробей;

$\boldsymbol{ii}$) ВЦД (В. 58) сходится, если выполняется одно из двух условий: либо существует такой номер k, что все $c_{i(k)} = 0$, $i_p = \overline{1, N}$, $p = \overline{1, k}$, либо расходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \min\left(\left| c_{i(k)}^{-1} \right| \colon i_p = \overline{1, N},\ p = \overline{1, k} \right)$;

$\boldsymbol{iii}$) область значений ВЦД (В.58) принадлежит кругу

$$\left| z - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\cos\gamma\right)^{-1} \exp(-i\gamma) \right| \le \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\cos\gamma\right)^{-1}.$$

Теорема 3.4.6. Пусть членами звеньев ВЦД (В.27) являются комплексные числа, удовлетворяющие условиям

$$\left|b_{i(k)}\right| \geq N\left|a_{i(k)}\right| + 1,\ k = 1, 2, \ldots,\quad i_p = \overline{1, N},\ p = \overline{1, k}. \tag{В.60}$$

Тогда ***i***) ВЦД (В.27) абсолютно сходится;

ii) наилучшей областью значений этой дроби является круг $|z| \leq 1$;

iii) значение ВЦД (В.27) принадлежит окружности $|z| = 1$ тогда и только тогда, когда существует угол $\varphi,\ -\pi < \varphi \leq \pi$, что

$$\left|b_{i(1)}\right|\left|a_{i(1)}\right|^{-1} b_{i(1)}^{-1} a_{i(1)} = e^{i\varphi},\ i_1 = \overline{1, N},\ \left|b_{i(k)}\right| = N\left|a_{i(k)}\right| + 1,$$

$$a_{i(k+1)} b_{i(k)}^{-1} b_{i(k+1)}^{-1} < 0,\quad k = 1, 2, \ldots,\ i_p = \overline{1, N},\ p = \overline{1, k}\ \text{ и }$$

$$\lim_{k \to \infty} \left[1 + Na'_{i(1)}\left[1 + Na'_{i(2)}\left[1 + \ldots + Na'_{i(k-1)}\left[1 + Na'_{i(k)}\right]\ldots\right]\right]\right] = \infty,$$

где $a'_{i(k)} = \left|a_{i(k)}\right|$, каждое выражение в квадратных скобках обозначает среднее гармоническое $\left[c_{i(k)}\right] = N\left(\sum_{i_k=1}^{N} \frac{1}{c_{i(k)}}\right)^{-1}$.

Получено усиление теоремы 3.4.6 как при переходе в действительную область (теорема 3.4.4), так и с учетом пункта ***iii***) теоремы 3.4.6 заменой условия (В.60) на

$$\left|b_{i(1)}\right| \geq 1,\ i_1 = \overline{1, N}, \qquad \left|b_{i(k)}\right| \geq N\left|a_{i(k)}\right| + 1,\ k \geq 2,$$

в предположении, что хотя бы при одном наборе индексов одно из этих неравенств строгое (теорема 3.4.11).

В последнем параграфе данной главы рассмотрен вопрос об областях сходимости и областях устойчивости для ВЦД.

В главе 4 рассмотрены различные типы функциональных ветвящихся цепных дробей. В § 1 исследована равномерная сходимость функциональных ВЦД общего вида, доказан многомерный аналог теоремы Стилтьеса-Витали.

Теорема 4.1.2. Пусть элементами ВЦД

$$b_0(z) + \underset{k=1}{\overset{\infty}{D}} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{a_{i(k)}(z)}{b_{i(k)}(z)} \tag{В.61}$$

являются действительные функции, заданные в некоторой области $D \in \mathbf{C}^n$ и удовлетворяющие условиям

i) существует константа $M > 0$, что для всех $z \in D$

$$\left|a_{i(1)}(z)\right|\left|b_{i(1)}^{-1}(z)\right| \le M,\ i_1 = \overline{1,N}\ ;$$

ii) $b_{i(k)}(z) \ne 0, \quad k = 1,2,\ldots,\ i_p = \overline{1,N},\ p = \overline{1,k},\ z \in D$;

iii) существует константа $t,\ 0 \le t \le \frac{1}{2}$, что для всех $z \in D$

$$d_{i(k+1)}(z) + N^{-1}t(1-t) \ge 0,\ k = 1,2,\ldots,\ i_p = \overline{1,N},\ p = \overline{1,k}.$$

Тогда ВЦД (В.61) равномерно сходится в области D, если выполняется одно из условий: либо существует такой номер k, что все $a_{i(k)}(z) \ne 0,\ i_p = \overline{1,N}$, $p = \overline{1,k},\ z \in D$, либо расходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\delta_k$, если $t,\ 0 \le t < \frac{1}{2}$, либо $\lim\limits_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{m-1}\frac{\delta_k}{m-\delta_k} = \infty$, если $t = \frac{1}{2}$, где

$$\delta_k = \inf\left(\left|d_{i(k+1)}^{-1}(z)\right| : i_p = \overline{1,N},\ p = \overline{1,k+1},\ z \in D\right),\ d_{i(k+1)}(z) = \frac{a_{i(k+1)}(z)}{b_{i(k)}(z)b_{i(k+1)}(z)},$$

причем те наборы индексов и те значения z, при которых $a_{i(k+1)}(z) = 0$ при минимизации не рассматриваются.

В последующих параграфах исследованы свойства, установлены признаки сходимости различных типов функциональных ВЦД: положительно определенных ВЦД, многомерных аналогов *J*-, C-, S- и g-дробей.

Ветвящаяся цепная дробь

$$\left(b_0 + z_0 + \mathop{D}_{k=1}^{\infty}\sum_{i_k=1}^{N}\frac{-a_{i(k)}^2}{b_{i(k)} + z_{i(k)}}\right)^{-1}, \tag{В.62}$$

где $b_0, b_{i(k)}, a_{i(k)}$ – комплексные числа, $z_{i(k)}$ – комплексные переменные, $k = 1,2,\ldots,\ i_p = \overline{1,N},\ p = \overline{1,k}$, называется положительно определенной, если неотрицательно определены действительные квадратичные формы

$$\Phi(\xi) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i_k=1}^{N} b_{i(k)}\xi_{i(k)}^2 - 2\sum_{k=1}^{n}\ \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_k=1}^{N}\alpha_{i(k)}\xi_{i(k)}\xi_{i(k-1)}, \tag{В.63}$$

где $n=1,2,\ldots,$ $\alpha_{i(k)}=\operatorname{Im}a_{i(k)},\ \beta_{i(k)}=\operatorname{Im}b_{i(k)},\ \xi_{i(k)}\in\mathbf{R}$.

Теорема 4.2.1. Если ВЦД (В.62) положительно определена, то все знаменатели подходящих дробей $B_n(z)\neq 0,\ n=1,2,\ldots,$ в областях $\operatorname{Im}z_{i(k)}>0$, $k=1,2,\ldots,\ i_p=\overline{1,N},\ p=\overline{1,k}$.

Теорема 4.2.2. ВЦД (В.62) положительно определена, если

i) $\beta_{i(k)}\geq 0$, $k=1,2,\ldots,\ i_p=\overline{1,N},\ p=\overline{1,k}$;

ii) существуют такие числа $g_{i(k)}\in[0,1]$, что

$$\alpha_{i(k)}^2\leq N^{-1}\beta_{i(k-1)i(k)}\left(1-g_{i(k-1)}\right)g_{i(k)},\ \ k=1,2,\ldots,\ i_p=\overline{1,N},\ p=\overline{1,k}.$$

ВЦД (В.62), у которой $z_{i(k)}=\varsigma_{i_k}\in\mathbf{C}$, $k=0,1,2,\ldots,$ называется многомерной *J*-дробью. Если последовательности $\{a_{i(k)}\}$ и $\{b_{i(k)}\}$ ограничены, то многомерная *J*-дробь называется ограниченной.

Теорема 4.2.8. Многомерная ограниченная *J*-дробь равномерно сходится на каждом ограниченном множестве из $\mathbf{C}^{N+1}$ расстояние которого до множества K_0 положительно, где

$$z=\Big\{(z_0,z_1,\ldots,z_N)\in\mathbf{C}^{N+1}: z_k=x_k+iy_k,$$
$$x_k\sin\theta+y_k\cos\theta\in Y_0(\theta),\ 0\leq\theta\leq 2\pi,\ k=\overline{0,N}\ \Big\},$$
$$Y_0(\theta)=\inf\left(\Phi(\xi,\theta):\ \|\xi\|=1,\ n\geq 1\right),$$

$\Phi(\xi,\theta)$ – квадратичная форма вида (В.63), где вместо $\beta_{i(k)},\ \alpha_{i(k)}$ положено соответственно $\operatorname{Im}\left(b_{i(k)}e^{i\theta}\right),\ \operatorname{Im}\left(a_{i(k)}e^{i\theta}\right)$.

Ветвящаяся цепная дробь

$$1+\mathop{D}_{k=1}^{\infty}\sum_{i_k=1}^{N}\frac{a_{i(k)}z_{i_k}}{1},\qquad\text{(В.64)}$$

где $a_{i(k)}\neq 0$, $k=1,2,\ldots,\ i_p=\overline{1,N},\ p=\overline{1,k}$, – комплексные числа, $z=(z_1,\ldots,z_N)\in\mathbf{C}^N$ называется многомерной регулярной *C*-дробью. Если все

$a_{i(k)} > 0$, то (В.64) называется многомерной S-дробью, если же $a_{i(k)} = g_{i(k)}\left(1 - g_{i(k-1)}\right)$, где $0 \le g_{i(k)} \le 1$, то (В.64) называется многомерной g-дробью. В каждом из этих случаев наряду с (В.64) можно рассматривать ВЦД, обратные к ней.

Теорема 4.3.2. Пусть (В.64) – многомерная C-дробь, такая, что $\lim\limits_{k\to\infty} a_{i(k)} = a \ne 0$ и $\Omega^{(N)} = \bigcup\limits_{\gamma \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)} \Omega_{\alpha,\gamma}^{(N)}$, где $\Omega_{\alpha,\gamma}^{(N)} = \Omega_{\alpha,\gamma} \times \Omega_{\alpha,\gamma} \times \ldots \times \Omega_{\alpha,\gamma}$ – декартово произведение N областей

$$\Omega_{\alpha,\gamma} = \left\{ w \in \mathbf{C}\colon |w| - \operatorname{Re}\left(w \exp\left(\arg\left(\alpha - 2\gamma\right) i\right)\right) < \frac{\cos^2 \gamma}{2N|a|} \right\}.$$

Тогда ВЦД (В.64) сходится к функции f, мероморфной в $\Omega^{(N)}$ или тождественно равной бесконечности.

Теорема 4.3.4. ВЦД

$$\left(1 + \mathop{D}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{a_{i(k)} z_{i_k} z_{i_{k-1}}}{1}\right)^{-1},$$

где $z_{i_0} = 1$, $z \in \mathbf{C}^N$, $a_{i(k)} > 0$, $k = 1,2,\ldots$, $i_p = \overline{1,N}$, $p = \overline{1,k}$, равномерно сходится на каждом компакте области $\operatorname{Re} z_i > 0$, $i_p = \overline{1,N}$, если расходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \min\left(a_{i(k)}^{-1}\colon i_p = \overline{1,N},\ p = \overline{1,k}\right)$.

Теорема 4.3.8. Многомерная g-дробь (В.64) абсолютно сходится, если для произвольного набора индексов

$$\sum_{i_k=1}^{N} \left| z_{i(k)} \right| \le 1, \qquad k = 1,2,\ldots .$$

Сходимость будет абсолютной и равномерной, если, кроме того,

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1 - m_k}{m_k} = 0, \text{ где } m_k = \min\left(g_{i(k)}\colon i_p = \overline{1,N},\ p = \overline{1,k}\right).$$

Теорема 4.3.10 ВЦД

$$\left(1+\underset{k=1}{\overset{\infty}{D}}\sum_{i_k=1}^{N}\frac{-a_{i(k)}^2 z_{i_k} z_{i_{k-1}}}{1}\right)^{-1},$$

где $a_{i(k)}\in\mathbf{R}$ и $a_{i(k)}^2\le N^{-1}g_{i(k)}\left(1-g_{i(k-1)}\right)$, $0\le g_{i(k)}\le 1$, $k=1,2,\ldots$, $i_p=\overline{1,N}$, $p=\overline{1,k}$, равномерно сходится в каждой ограниченной замкнутой области из $\mathbf{C}^{N+1}$, расстояние которой до области

$$D=\left\{z\in\mathbf{C}^{N+1}:\ \operatorname{Im}z_i=0,\left|\operatorname{Re}z_i\right|<1,\ i=\overline{0,N}\ \right\}$$

положительно.

В § 4 построены и исследованы соответствующие ВЦД к двойному степенному ряду с линейными частными числителями вида (В.33) с условиями (В.34) на коэффициенты. В последнем параграфе разложены отношения гипергеометрических функций Аппеля (В.35), (В.36), (В.38) в соответствующие ветвящиеся цепные дроби.

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ДИССЕРТАЦИИ, КОТОРЫЕ ВЫНОСЯТСЯ НА ЗАЩИТУ

1) Изучены свойства ветвящихся цепных дробей: обоснованы формулы для числителей и знаменателей подходящих дробей в виде определителей, дано полное описание класса эквивалентных ВЦД, установлен многомерный аналог тождеств Эйлера равноценных преобразований цепных дробей в ряды и др.

2) Разработана методика исследования сходимости ветвящихся цепных дробей с положительными и комплексными компонентами. В первом случае используется метод специальных неравенств типа средних гармонических, во втором, в основном, – применительно к ВЦД метод мажорант.

3) Получены многомерные аналоги наиболее известных и часто используемых признаков сходимости непрерывных дробей: теоремы Зейделя,

Прингсгейма, Ворпицкого, Ван Флека, параболических теорем и многие другие.

4) Построены и исследованы многомерные аналоги некоторых типов функциональных непрерывных дробей: положительно определенных ВЦД, многомерных аналогов *J*-, *C*-, *S*-, *g*-дробей, двумерных соответствующих непрерывных дробей с линейными частными числителями.

5) Разложены отношения гипергеометрических функций Аппеля в ветвящиеся цепные дроби.

ГЛАВА 1. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ СВОЙСТВА ВЕТВЯЩИХСЯ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ

§ 1. Определение ветвящейся цепной дроби. Подходящие дроби

Термин ветвящаяся цепная дробь впервые встречается в двух работах [73,119], опубликованных в материалах второй научной конференции молодых математиков Украины, прошедшей в Киеве в 1965г. Ветвящаяся цепная дробь (ВЦД) является многомерным обобщением непрерывной дроби. Идея обобщения состояла в использовании интерпретации цепной дроби в виде графа и рассмотрении более общих графов типа дерева. По аналогии с одномерным случаем для определения ветвящейся цепной дроби П.И.Боднарчук (см. [45]) применил композицию многомерных дробно-линейных отображений.

Пусть $b_0 \in \mathbf{C}$, $\{a_{i_1 i_2 \ldots i_k}\}$, $\{b_{i_1 i_2 \ldots i_k}\}$, $k = 1,2,\ldots$, $i_p = \overline{1,N}$, $p = \overline{1,k}$, – заданные последовательности комплексных чисел. Ветвящейся цепной дробью с N ветками ветвления $N \in \mathbf{N}$ называется последовательность подходящих дробей $\{f_n\}$, где

$$f_n = b_0 + \sum_{i_1=1}^{N} \cfrac{a_{i_1}}{b_{i_2} + \sum\limits_{i_2=1}^{N} \cfrac{a_{i_1 i_2}}{b_{i_1 i_2} + \ddots + \sum\limits_{i_n=1}^{N} \cfrac{a_{i_1 i_2 \ldots i_n}}{b_{i_1 i_2 \ldots i_n}}}}, \qquad n = 1,2,\ldots. \tag{1.1.1}$$

Компонентами ВЦД могут также быть независимые переменные, функции многих переменных, операторы, элементы нормированных полей или других абстрактных пространств, в которых определены арифметические операции и предельный переход (см., например, в случае $N = 1$ [141, 157, 187], [65, стр. 167–178]).

К конструкции (1.1.1) естественным образом приходим, рассматривая композиции многомерных дробно-линейных отображений. Сначала приведем некоторые обозначения. С целью сокращения записи мульти-индексов обозначим

$$i(k) = i_1 i_2 \ldots, i_k, \qquad k \in \mathbf{N},\ i_p = \overline{1,N},\ p = \overline{1,k}, \tag{1.1.2}$$

Пусть $\overline{x}_{i(k)}^{(r)}$ или $\overline{x}^{(r)}$ – вектор из $\mathbf{C}^{N^r}$, $r,k \in \mathbf{N}$, вида

$$\overline{x}_{i(k)}^{(r)} = \left(x_{i(k)\underbrace{11\ldots1}_{r}}, x_{i(k)\underbrace{11\ldots2}_{r}}, \ldots, x_{i(k)\underbrace{NN\ldots N}_{r}} \right), \tag{1.1.3а}$$

$$\overline{x}^{(r)} = \left(x_{\underbrace{11\ldots1}_{r}}, x_{\underbrace{11\ldots2}_{r}}, \ldots, x_{\underbrace{NN\ldots N}_{r}} \right) \tag{1.1.3б}$$

где компоненты вектора $x_{i(k)j(r)}$, или соответственно $x_{j(r)}$ $j_s = \overline{1,N},\ s = \overline{1,r}$, естественным образом упорядочены, т.е. $x_{i(k)n(r)} \prec x_{i(k)m(r)}$, если $n_1 < m_1$ или существует такой индекс s, $1 \le s < r$, что $n_p = m_p$, $p = \overline{1,s}$, $n_{s+1} < m_{s+1}$ и $j(r), n(r), m(r)$ определяются аналогично (1.1.2), например, $j(r) = j_1 j_2 \ldots j_r$. Пусть b_0, $b_{i(k)}$, $a_{i(k)}$ – комплексные числа, $z_{i(k)}$ – комплексные переменные, причем все $a_{i(k)} \ne 0$, $k \in 1,2,\ldots$, $i_p = \overline{1,N}$, $p = \overline{1,k}$. Рассмотрим последовательность N-мерных дробно-линейных отображений

$$w_0 = t_0\left(\overline{z}^{(1)}\right) = t_0(z_1, z_2, \ldots, z_N) = b_0 + z_1 + z_2 + \ldots + z_N,$$

$$w_{i(k)} = t_{i(k)}\left(\overline{z}_{i(k)}^{(1)}\right) = t_{i(k)}\left(z_{i(k)1}, z_{i(k)2}, \ldots, z_{i(k)N}\right) = \frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)} + z_{i(k)1} + z_{i(k)2} + z_{i(k)N}},$$

$$k \in 1,2,\ldots,\ i_p = \overline{1,N},\ p = \overline{1,k}, \tag{1.1.4}$$

Пусть $\overline{w}_{i(k)}^{(r)}$ – вектор, определяемый согласно (1.1.3), а его компоненты $w_{i(k)j(r)}$ – согласно (1.1.4). Тогда по аналогии с (В.2) рассмотрим композиции N-мерных дробно-линейных отображений (1.1.4)

$$T_0\left(\overline{z}^{(1)}\right) = t_0\left(\overline{z}^{(1)}\right),\ T_k\left(\overline{z}^{(k+1)}\right) = T_{k-1}\left(\overline{w}^{(k)}\right),\ k = 1,2,\ldots, \tag{1.1.5}$$

и последовательность $\{T_k(0)\}$, где 0 – вектор из $\mathbf{C}^{N^k}$ с нулевыми компонентами. Вычислим явные выражения для $T_k(0)$, $k = 1,2,\ldots$. Имеем

$$T_0\left(\bar{z}^{(1)}\right)=t_0\left(\bar{z}^{(1)}\right)=b_0+\sum_{i_1=1}^{N} z_{i_1}.$$

Поэтому $T_0(0)=b_0$. Так как

$$T_1\left(\bar{z}^{(2)}\right)=T_0\left(\overline{w}^{(1)}\right)=b_0+\sum_{i_1=1}^{N} w_{i_1}=b_0+\sum_{i_1=1}^{N}\cfrac{a_{i_1}}{b_{i_1}+\sum\limits_{i_2=1}^{N} z_{i_1 i_2}},.$$

то $T_1(0)=b_0+\sum\limits_{i_1=1}^{N}\frac{a_{i_1}}{b_{i_1}}$. Далее,

$$T_2\left(\bar{z}^{(3)}\right)=T_1\left(\overline{w}^{(2)}\right)=b_0+\sum_{i_1=1}^{N}\cfrac{a_{i_1}}{b_{i_1}+\sum\limits_{i_2=1}^{N} w_{i_1 i_2}}=b_0+\sum_{i_1=1}^{N}\cfrac{a_{i_1}}{b_{i_1}+\sum\limits_{i_2=1}^{N}\cfrac{a_{i_1 i_2}}{b_{i_1 i_2}+\sum\limits_{i_3=1}^{N} z_{i_1 i_2 i_3}}}.$$

Таким образом, $T_2(0)=b_0+\sum\limits_{i_1=1}^{N}\cfrac{a_{i_1}}{b_{i_1}+\sum\limits_{i_2=1}^{N}\cfrac{a_{i_1 i_2}}{b_{i_1 i_2}}}$.

и т.д. Продолжая этот процесс, методом математической индукции с учетом обозначений (1.1.2), легко доказать, что

$$T_k(0)=b_0+\sum_{i_1=1}^{N}\cfrac{a_{i(1)}}{b_{i(1)}+\sum\limits_{i_2=1}^{N}\cfrac{a_{i(2)}}{b_{i(2)}+\ddots+\sum\limits_{i_k=1}^{N}\cfrac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}}}}. \qquad (1.1.6)$$

Цепные дроби, как известно [65, 202], определяются с помощью композиций одномерных дробно-линейных отображений. Поэтому из описанных выше построений следует, что ВЦД является многомерным обобщением непрерывных дробей. Продолжая аналогию, заключаем также, что бесконечную ветвящуюся цепную дробь естественно рассматривать, как предел $T_k(0)$ при $k\to\infty$.

По аналогии с (В. ?) и (В. ?) бесконечную ВЦД

$$T_k(0)=b_0+\sum_{i_1=1}^{N}\cfrac{a_{i(1)}}{b_{i(1)}+\sum\limits_{i_2=1}^{N}\cfrac{a_{i(2)}}{b_{i(2)}+\ddots+\sum\limits_{i_k=1}^{N}\cfrac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}}\ddots}} \qquad (1.1.7)$$

будем компактно записывать в виде

$$T_k(0)=b_0+\sum_{i_1=1}^{N}\frac{a_{i(1)}}{b_{i(1)}}+\sum_{i_2=1}^{N}\frac{a_{i(2)}}{b_{i(2)}}+\cdots+\sum_{i_k=1}^{N}\frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}}+\cdots \qquad (1.1.8)$$

или в виде

$$b_0+\mathop{D}_{k=1}^{\infty}\sum_{i_k=1}^{N}\frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}}. \qquad (1.1.9)$$

Замечание 1.1.1. Определяя ВЦД с N ветками ветвления, как композицию N-мерных дробно-линейных отображений (1.1.4), мы естественно предполагали, так же как это делается в одномерном случае [65], что все

$$a_{i(k)}\neq 0, \quad k=1,2,\ldots,\ i_p=\overline{1,N},\ p=\overline{1,k}\ . \qquad (1.1.10)$$

Впредь, рассматривая ВДЦ (1.1.7), будем допускать и вырожденные случаи, когда ограничения (1.1.10) снимаются.

Элементы дроби (1.1.7) $a_{i(k)}$ называются k-ми частными числителями, $b_{i(k)}$ – k-ми частными знаменателями, b_0 – свободным членом, отношения $a_{i(k)}/b_{i(k)}$ называются k-ми частными звеньями Совокупность всех k-х звеньев образует k-й этаж ветвящейся цепной дроби (1.1.7). Конечные ВЦД вида

$$f_0=b_0,\quad f_m=b_0+\mathop{D}_{k=1}^{m}\sum_{i_k=1}^{N}\frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}} \qquad m=1,2,\ldots, \qquad (1.1.11)$$

называются m-ми подходящими дробями или m-ми аппроксимантами дроби (1.1.7). Пусть $\{i_k\}$ – фиксированный набор индексов $k=1,2,\ldots,\ i_p=\overline{1,N}$. Непрерывная дробь

$$\mathop{D}_{k=1}^{\infty}\frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}}=\frac{a_{i(1)}}{b_{i(1)}}+\frac{a_{i(2)}}{b_{i(2)}}+\cdots\frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}}+\cdots$$

называется $(i_1, i_2, ..., i_k, ...)$ веткой ветвящейся цепной дроби (1.1.7). Под длиной конечной ветки, т.е. конечной цепной дроби, подразумеваем количество имеющихся у нее этажей. Характерной особенностью m-й подходящей дроби (1.1.11) является то, что все её ветки имеют m этажей. Формально аппроксиманту можно конструировать и так, чтобы её различные ветки имели не обязательно одинаковую длину. Фигурной подходящей дробью ВЦД (1.1.7) называется конечная ветвящаяся цепная дробь, являющаяся частью (1.1.7) и имеющая по крайней мере две ветки различной длины. Последние звенья, на которых обрывается фигурная или обычная подходящая дробь (1.1.11) ВЦД (1.1.7), называются тупиковыми звеньями. Фигурные аппроксиманты можно конструировать по разному. В некоторых задачах он возникают вполне естественно. Известно [181], что отношение двух линейно независимых решений системы уравнений

$$y_n = a_n y_{n-1} + b_n y_{n-2}, \quad a_n, b_n \in \mathbf{C}, \quad n = 1, 2, ...,$$

приводит к конструкции цепной дроби. Рассматривая же отношение двух линейно независимых решений

$$y_n = a_n y_{n-1} + b_n y_{n-2} + c_n y_{n-3}, \qquad a_n, b_n, c_n \in \mathbf{C}, \quad n = 1, 2, ..., \tag{1.1.12}$$

получим ВЦД с двумя ветками ветвления, причем подходящие дроби необходимо рассматривать как фигурные такого же типа, который будет определён ниже в примере 1.1.2 [4]. К этому же типу фигурных подходящих дробей приводят нас построения ВЦД, соответствующих двукратному степенному ряду [80, 154, 176, 190]. При обосновании формул для числителей и знаменателей подходящих дробей в виде определителей, а также при изучении эквивалентных преобразований ВЦД нам будут необходимы фигурные подходящие дроби, описанные ниже в примере 1.1.1.

Предварительно рассмотрим алгоритм разложения произвольного натурального числа k по степеням $N > 1$ с натуральными, не превосходящими N коэффициентами, т.е.

$$k = k_1 N^{s-1} + k_2 N^{s-2} + ... + k_s, \qquad 1 \le k_j \le N, \ j = \overline{1, s}. \tag{1.1.13}$$

Докажем, что для каждого натурального k разложение вида (1.1.13) существует и единственно. Действительно, для каждого k существует единственное число s, такое, что

$$N^{s-1}+N^{s-2}+\ldots+N+1\le k<N^{s}+N^{s-1}+\ldots+N+1.$$

Представим в N-ичной системе счисления число

$$k-\left(N^{s-1}+N^{s-2}+\ldots+N+1\right)=\alpha_1 N^{s-1}+\alpha_2 N^{s-2}+\ldots+\alpha_s,$$

где $0\le\alpha_i\le N-1$, откуда

$$k=(\alpha_1+1)N^{s-1}+(\alpha_2+1)N^{s-2}+\ldots+(\alpha_s+1)=k_1N^{s-1}+k_2N^{s-2}+\ldots+k_s.$$

Пример 1.1.1 [20]. Предположим, что каждая последующая фигурная подходящая дробь образуется добавлением очередного звена в естественной записи ВЦД (1.1.7), т.е.

$$\widetilde{f}_0=b_0,\ \widetilde{f}_1=b_0+\frac{a_1}{b_1},\ \widetilde{f}_2=b_0+\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2},\ldots,\ \widetilde{f}_N=b_0+\sum_{i_1=1}^{N}\frac{a_{i(1)}}{b_{i(1)}},$$

$$\widetilde{f}_{N+1}=b_0+\cfrac{a_1}{b_1+\cfrac{a_{11}}{b_{12}}}+\sum_{i_2=1}^{N}\frac{a_{i(1)}}{b_{i(1)}},\ldots.$$

Чтобы получить выражение для произвольной k-й фигурной подходящей дроби $\widetilde{f}_k$ разложим число k согласно описанному выше алгоритму (1.1.13). Покажем, что k-я фигурная аппроксиманта $\widetilde{f}_k$ – это s-я обычная подходящая дробь, в которой все s-е звенья, следующие за $\dfrac{a_{k(s)}}{b_{k(s)}}$, заменены на $\dfrac{0}{1}$, где число s, индексы $k_1,k_2,\ldots,k_s$ определяются из упомянутого выше разложения числа k. Действительно, рассмотрим множество $I(N)$ наборов мультииндексов $i(p),\ p=1,2,3,\ i_r=\overline{1,N},\ r=\overline{1,p}$, и упорядочим его следующим образом

$$i(p)\prec j(q),\ \text{если}\ \ p<q,$$

$$i(p)\prec j(q),\ \text{если}\ \ i_1<j_1, \tag{1.1.14}$$

$$i(p)\prec j(q),\ \text{если существует}\quad r,\ 1\le r<p,$$

$$\text{что}\qquad i_k=j_k,\ k=\overline{1,r}\ \text{и}\ i_{r+1}<j_{r+1}.$$

Пронумеруем элементы множества $I(N)$ с учетом введенного выше порядка и вычислим, какой номер получит элемент $k(s)$. Количество элементов

$j(s) \in I(N)$, предшествующих $k(s)$, разделим на группы: I группа – это $k(s-1)j_s$, где $j_s < k_s$, II группа – это $k(s-2)j_{s-1}j_s$, где $j_{s-1} < k_{s-1}$, j_s произвольное и т.д., s-я группа – это $j(s)$, где $j_1 < k_1$, а все остальные j_p произвольные. Количество элементов в каждой группе будет соответственно $k_s - 1$, $N(k_{s-1} - 1), \ldots, N^{s-1}(k_1 - 1)$. Следовательно, элемент с индексом $k(s)$ получит номер

$$N + N^2 + \ldots + N^{s-1} + (k_s - 1) + N(k_{s-1} - 1) + \ldots + N^{s-1}(k_1 - 1) + 1 =$$
$$= k_1 N^{s-1} + k_2 N^{s-2} + \ldots + k_s = k.$$

Мы приходим к разложению (1.1.13). Таким образом,

$$\widetilde{f}_k = b_0 + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{a_{i(1)}}{b_{i(1)}} + \ldots + \sum_{i_{s-1}=1}^{N} \frac{a_{i(s-1)}}{b_{i(s-1)}} + \sum_{i_s=1}^{N} \delta_k \left(\frac{a_{i(s)}}{b_{i(s)}} \right), \tag{1.1.15}$$

где

$$\delta_k \left(\frac{a_{i(s)}}{b_{i(s)}} \right) = \begin{cases} \dfrac{a_{i(s)}}{b_{i(s)}}, & \text{если} \;\; i(s) \prec k(s) \;\; \text{или} \;\; i(s) \prec k(s), \\ \dfrac{0}{1}, & \text{если} \;\; i(s) \succ k(s). \end{cases}$$

Пример 1.1.2 [20]. Определим k-ю фигурную подходящую дробь $\widetilde{F}_k$ ветвящейся цепной дроби (1.1.7), как конечную ВЦД, являющуюся частью (1.1.7) и содержащую все те элементы $a_{i(p)}, b_{i(p)}$, сумма индексов которых $i_1 + i_2 + \ldots + i_p \le k$, т.е.

$$\widetilde{F}_k = b_0 + \mathop{D}_{p=1}^{k} \sum_{i_p=1}^{N} \gamma_k \left(\frac{a_{i(p)}}{b_{i(p)}} \right), \tag{1.1.16}$$

где

$$\gamma_k \left(\frac{a_{i(p)}}{i(p)} \right) = \begin{cases} \dfrac{a_{i(p)}}{b_{i(p)}}, & \text{если} \;\; i_1 + i_2 + \ldots + i_p \le k, \\ \dfrac{0}{1}, & \text{если} \;\; i_1 + i_2 + \ldots + i_p > k. \end{cases}$$

§ 2. Формулы для числителей и знаменателей подходящих дробей в виде определителей.

Как известно [65, 137], числитель A_n и знаменатель B_n n-й подходящей дроби $f_n = A_n / B_n$ непрерывной дроби

$$b_0 + \mathop{D}_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{b_k} \tag{1.2.1}$$

определяются с помощью рекуррентных соотношений

$$\begin{cases} A_n = b_n A_{n-1} + a_n A_{n-2}, \\ B_n = b_n B_{n-1} + a_n B_{n-2}, \end{cases} \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{1.2.2}$$

при начальных условиях: $A_0 = b_0$, $A_{-1} = 1$; $B_0 = 1$, $B_{-1} = 0$. Эти формулы существенно используются при установлении признаков сходимости непрерывных дробей, при построении различных алгоритмов вычисления их подходящих дробей, при оценках скорости сходимости и т. д. Поэтому вполне естественно, что все поиски в начальной стадии развития теории ВЦД как многомерных обобщений цепных дробей были направлены на установление для них аналогичных формул. По-видимому для общих ветвящихся цепных дробей (1.1.9) простых рекуррентных соотношений типа (1.2.2) не существует. В работе [4] было показано, что отношение двух линейно независимых решений более сложных рекуррентных уравнений (1.1.12) является ветвящейся цепной дробью с двумя ветками ветвления специального вида.

Поэтому возникает задача, как определить числитель и знаменатель $n-$й подходящей дроби ВДЦ (1.1.9)? Для этой цели опишем сначала алгоритм вычисления n-й подходящей дроби (1.1.9) снизу вверх. Впредь запись $\frac{a}{b} \equiv \frac{c}{d}$ будет обозначать равенство двух дробей и выполнение условия $a = c$, $c = d$. Тождество

$$\frac{a}{b} \equiv \frac{b_0 \prod_{k=1}^{n} b_k + \sum_{i=1}^{n} a_i \prod_{k=1, k\neq i}^{n} b_k}{\prod_{k=1}^{n} b_k}$$

запишем в сокращенном виде

$$\frac{a}{b} \equiv b_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{b_i}. \qquad (1.2.3)$$

Процесс вычисления k-й подходящей дроби (1.1.11) ВЦД (1.1.9) производится по следующему рекуррентному алгоритму

$$f_k = \frac{A_k}{B_k}, \qquad \frac{A_k}{B_k} \equiv b_0 + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{a'_{i(1)}}{b'_{i(1)}} \qquad (1.2.4)$$

и

$$\frac{a'_{i(m)}}{b'_{i(m)}} \equiv \sum_{i_{m+1}=1}^{N} \frac{a_{i(m+1)} b'_{i(m+1)}}{b_{i(m+1)} b'_{i(m+1)} + a'_{i(m+1)}}, \qquad (1.2.5)$$

$$m = k-1, k-2, \ldots, 1, \quad i_p = \overline{1,N},\ p = \overline{1,m},$$

$$\frac{a'_{i(k)}}{b'_{i(k)}} \equiv \frac{0}{1}, \qquad i_p = \overline{1,N},\ p = \overline{1,k}\ . \qquad (1.2.6)$$

Числитель A_k и знаменатель B_k отношения (1.2.4) называется числителем и соответственно знаменателем k-й подходящей дроби ВЦД (1.1.9). Это определение приведено в работе [20]. В случав непрерывных дробей оно эквивалентно традиционному.

Замечание 1.2.1. При вычислении конечной цепной дроби с комплексными элементами

$$f_n = b_0 + \mathop{D}_{k=1}^{n} \frac{a_k}{b_k}$$

часто необходимо рассматривать арифметические операции в замкнутой комплексной плоскости $\overline{\mathbf{C}}$, предполагая, что $b + \frac{a}{0} = \infty$, $\frac{b}{\infty} = 0$, где $a, b \in \mathbf{C}$ и $a \neq 0$. Естественно ограничение $a_k \neq 0$, $k = \overline{1,n}$, гарантирует что $f_n \neq 0$.

При вычислении конечной ВЦД

$$f_n = b_0 + \overset{n}{\underset{k=1}{D}} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}}$$

с комплексными элементами возникают и другие трудности. Выполнение условия $a_{i(p)} \neq 0$, $p = \overline{1,n}$, $i_s = \overline{1,N}$, $s = \overline{1,p}$, недостаточно, чтобы исключить неопределенность $\frac{0}{0}$. В частности, из алгоритма (1.2.4)–(1.2.6) вычисления конечной подходящей дроби следует, что

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{a_i}{0} = \frac{0}{0}, \text{ если } r > 1 \text{ и } a_i \in \mathbf{C}.$$

Считаем, что ВЦД (1.1.11) не имеет смысла, если, свернув дробь по предложнному выше алгоритму, получим неопределенность $0/0$.

В работах [119, 120] был предложен первый вариант формул для числителей A_n и знаменателей B_n n-й подходящей дроби ВЦД (1.1.9). Сформулируем эти результаты, используя другие, по сравнению с принятыми в указанных работах, обозначениями. Заметим также, что доказательства данных формул нигде до сих пор не опубликованы. Упорядочим согласно (1.1.14) последние тупиковые звенья m-й подходящей дроби ВЦД (1.1.9)

$$\frac{a_{\underbrace{11\ldots1}_{m}}}{b_{\underbrace{11\ldots1}_{m}}}, \frac{a_{\underbrace{11\ldots2}_{m}}}{b_{\underbrace{11\ldots2}_{m}}}, \ldots, \frac{a_{\underbrace{NNN\ldots N}_{m}}}{b_{\underbrace{NNN\ldots N}_{m}}}. \tag{1.2.7}$$

Пусть r – произвольное целое число $0 \le r \le N^m$ и $j_1, j_2, \ldots, j_r$ – произвольный набор натуральных чисел, таких что $1 \le j_1 < j_2 < \ldots < j_r \le N^m$, если $r \ge 1$. Рассмотрим фигурную подходящую дробь ВЦД (1.1.9), совпадающую с ее m-й аппроксимантой, у которой все m-е звенья, имеющие в (1.2.7) порядковые номера $j_1, j_2, \ldots, j_r$, заменены на $\frac{0}{1}$. Обозначим через

$$A_m\begin{pmatrix} 0 \\ j_1, j_2, \ldots, j_r \end{pmatrix} \text{ и } B_m\begin{pmatrix} 0 \\ j_1, j_2, \ldots, j_r \end{pmatrix}$$

ее числитель и знаменатель соответственно.

Теорема 1.2.1 [45]. Для числителей и знаменателей $(m+1)$-й подходящей дроби ВЦД (1.1.9) справедливы рекуррентные соотношения

$$\begin{cases} A_{m+1} = \sum\limits_{j(r)} A_m \begin{pmatrix} 0 \\ j_1, j_2, \ldots, j_r \end{pmatrix} \prod\limits_{i(m)} c_{i(m)}, \\ B_{m+1} = \sum\limits_{j(r)} B_m \begin{pmatrix} 0 \\ j_1, j_2, \ldots, j_r \end{pmatrix} \prod\limits_{i(m)} c_{i(m)}, \end{cases} \tag{1.2.8}$$

где произведение берется по всевозможным наборам индексов $i_1, i_2, \ldots, i_m$, суммирование производится по всевозможным r, $0 \le r \le N^m$, и $j_1, j_2, \ldots, j_r$, $1 \le j_1 < j_2 < \ldots < j_r \le N^m$, если $r \ge 1$; $c_{i(m)} = a'_{i(m)}$, если $i(m)$ в (1.2.7) имеют один из порядковых номеров $j_1, j_2, \ldots, j_r$, $c_{i(m)} = b'_{i(m)}$. В противном случае и с учетом (1.2.3)

$$\frac{a'_{i(m)}}{b'_{i(m)}} \equiv \sum_{i_{m+1}=1}^{N} \frac{a_{i(m+1)}}{b_{i(m+1)}}. \tag{1.2.9}$$

Второй, по видимому еще более сложный, вариант формул A_n и B_n для ветвящейся цепной дроби с двумя ветками ветвления, использующий пространственные матрицы, был установлен И.Ф.Клюйником и И.П.Пустомельниковым (см. [45], стр. 51–55). Данные формулы не получили пока дальнейшего развития и применения. Однако при их установлении авторами были впервые предложены сокращенные обозначения (1.1.1) для записи ВЦД.

В работе [79] указаны формулы для числителя и знаменателя второй подходящей дроби ВЦД с двумя ветками ветвления в виде определителей. Общие формулы были установлены для цепных дробей с ветвлениями вверх и вниз в работе [78]. При исследовании сходимости некоторых типов функциональных ВЦД, а именно многомерных аналогов $g-$ и $J-$дробей возникла необходимость установления и строгого обоснования общих формул для числителя и знаменателя произвольной подходящей дроби ВЦД с N ветками ветвления. Поэтому в монографии [20] были доказаны соответствующие формулы для ветвящихся цепных дробей общего вида (1.1.9), являющиеся многомерными обобщениями известных в теории непрерывных дробей формул [180, 202] .

Пусть Δ_{kn}, $k=0,1$; $n=1,2,...,$ – трехдиагональные определители, составленные из элементов цепной дроби (1.2.1)

$$\Delta_{kn} = \begin{vmatrix} b_k & a_{k+1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & b_{k+1} & a_{k+2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & b_{k+2} & a_{k+3} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & b_{n-1} & a_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & b_n \end{vmatrix}. \qquad (1.2.10)$$

Тогда для числителей A_n и знаменателей B_n n-й подходящей дроби непрерывной дроби (1.2.1) справедливы такие формулы [180]:

$$A_n = \Delta_{0n}, \quad B_n = \Delta_{1n}, \qquad n=1,2,\dots . \qquad (1.2.11)$$

Так как подходящие дроби (1.1.11) и (1.1.15) ветвящейся цепной дроби (1.1.9) связаны соотношением

$$f_k = \widetilde{f}_l, \qquad (1.2.12),$$

где $l = N + N^2 + \dots + N^k$, то с целью избежания громоздких выкладок и формулировок под k-й подходящей дробью ВЦД (1.1.9) в данном параграфе будем понимать фигурную подходящую дробь $\widetilde{f}_k$.

Аналогично (1.2.4) определим числитель $\widetilde{A}_k$ и знаменатель $\widetilde{B}_k$ k-й фигурной подходящей дроби (1.1.15). Имеем $\widetilde{f}_k = \dfrac{\widetilde{A}_k}{\widetilde{B}_k}$, где

$$\frac{\widetilde{A}_k}{\widetilde{B}_k} \equiv b_0 + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{a'_{i(1)}}{b'_{i(1)}} \qquad (1.2.13)$$

и

$$\frac{a'_{i(m)}}{b'_{i(m)}} \equiv \sum_{i_{m+1}=1}^{N} \frac{a_{i(m+1)} b'_{i(m+1)}}{b_{i(m+1)} b'_{i(m+1)} + a'_{i(m+1)}}, \qquad (1.2.14)$$

$m = s-2, s-3, \ldots, 1$, $\quad i_p = \overline{1,N}$, $p = \overline{1,m}$,

$$\frac{a'_{i(s-1)}}{b'_{i(s-1)}} \equiv \begin{cases} \dfrac{0}{1}, & \textit{если} \;\; i(s-1) \succ k(s-1), \\ \displaystyle\sum_{i_s=1}^{k_s} \frac{a_{i(s)}}{b_{i(s)}}, & \textit{если} \;\; i(s-1) = k(s-1), \\ \displaystyle\sum_{i_s=1}^{N} \frac{a_{i(s)}}{b_{i(s)}}, & \textit{если} \;\; i(s-1) \prec k(s-1). \end{cases} \qquad (1.2.15)$$

Индексы $k_1, k_2, \ldots, k_s$ определяются из разложения числа k по алгоритму (1.1.13), порядок на множестве индексов – согласно (1.1.14).

Замечание 1.2.2. Фактически алгоритм (1.2.13)–(1.2.15) вычисления подходящей дроби (1.1.15) эквивалентен сворачиванию этой дроби снизу вверх без каких-либо сокращений. Если же при этом вместо $a'_{i(m)}$ и $b'_{i(m)}$ (или $a_{i(s)}$ и $b_{i(s)}$) взять числа $\rho a'_{i(m)}$ и $\rho b'_{i(m)}$ (или $\rho a_{i(s)}$ и $\rho b_{i(s)}$), где $\rho \neq 0$ только при одном допустимом наборе индексов, то, как легко подсчитать, получим $\widetilde{f}_k = \left(\rho \widetilde{A}_k\right) / \left(\rho \widetilde{B}_k\right)$.

Установим многомерные аналоги формул (1.2.10), (1.2.11). Пусть

$$C_{ik} = \begin{Vmatrix} c_{i,i} & c_{i,i+1} & \cdots & c_{i,k} \\ c_{i+1,i} & c_{i+1,i+1} & \cdots & c_{i+1,k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{k,i} & c_{k,i+1} & \cdots & c_{k,k} \end{Vmatrix}, \quad i = 0,1, \;\; k = 1,2,\ldots, \; – \qquad (1.2.16)$$

матрицы, элементы которых связаны с компонентами ВЦД (1.1.9) следующим образом. Если

$$p = j_1 N^{m-1} + j_2 N^{m-2} + \ldots + j_m N, \quad 1 \le j_n \le N, \;\; n = \overline{1,m}, \; – \qquad (1.2.17)$$

разложение числа p по алгоритму (1.1.13), то

$$c_{pp} = b_{j(m)}, \qquad p = \overline{1,k}, \qquad (1.2.18)$$

$$c_{pq} = a_{j(m) i_{m+1}}, \quad c_{qp} = -1, \qquad (1.2.19)$$

если $q = Np + i_{m+1}$, $\;1 \le i_{m+1} \le N$, $\;p = \overline{1,k}$,

$$c_{00} = b_0, \quad c_{0q} = a_q, \quad c_{q0} = -1, \quad q = \overline{1,N}, \tag{1.2.20}$$

$$c_{pq} = 0 \quad \text{во всех остальных случаях.}$$

Пример 1.2.1. В качестве иллюстрации рассмотрим случай $N = 2$, $k = 7$. Тогда согласно (1.1.13) находим $7 = 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 1$ и $c_{77} = b_{111}$. и

$$C_{07} = \begin{Vmatrix} b_0 & a_1 & a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & b_1 & 0 & a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & b_2 & 0 & 0 & a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & b_{11} & 0 & 0 & 0 & a_{111} \\ 0 & -1 & 0 & 0 & b_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & b_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & b_{111} \end{Vmatrix}$$

Отметим некоторые конструктивные особенности матриц C_{0k}, непосредственно следующие из определения.

Свойство 1. Каждый q-й столбец матрицы C_{0k} (нумерация столбцов начинается с нуля) имеет выше главной диагонали самое большее один отличный от нуля элемент c_{pq}, где p находится из разложения

$$q = pN + i_{m+1}, \quad 1 \le i_{m+1} \le N. \tag{1.2.21}$$

Свойство 2. Каждый q-й столбец матрицы C_{0k}, содержащий частные знаменатели последних тупиковых звеньев $\widetilde{f}_k$, т.е.

$$k_1 N^{s-2} + k_2 N^{s-3} + \ldots + k_{s-1} < q < k_1 N^{s-1} + k_2 N^{s-2} + \ldots + k_s, \tag{1.2.22}$$

имеет ниже главной диагонали все элементы равные нулю, где индексы $k_1, k_2, \ldots, k_s$ определяются из разложения (1.1.13).

Действительно, если $r < p$, то $r + 1 \le p$ и $Nr + N \le Np$. Поэтому $q = pN + i_{m+1} > Nr + N$ и $c_{rq} = 0$. Аналогично проверяется случай $p < r \le k$ и второе свойство.

Теорема 1.2.2 [19,20]. Для числителей $\widetilde{A}_k$ и знаменателей $\widetilde{B}_k$ k-й фигурной подходящей дроби (1.1.15) ВЦД (1.1.9) с комплексными компонентами справедливы формулы

$$\widetilde{A}_k = \det C_{0k},\ \widetilde{B}_k = \det C_{1k},\ k = 1,2,..., \qquad (1.2.24)$$

где C_{ik}, $i = 0, 1$, – матрицы вида (1.2.16).

Доказательство. Используем метод математической индукции. При $k = 1,2$ с учетом (1.2.13)–(1.2.15) имеем

$$\frac{\widetilde{A}_1}{\widetilde{B}_1} \equiv b_0 + \frac{a_1}{b_1} \equiv \frac{b_0 b_1 + a_1}{b_1} \equiv \frac{\begin{vmatrix} b_0 & a_1 \\ -1 & b_1 \end{vmatrix}}{b_1},$$

$$\frac{\widetilde{A}_2}{\widetilde{B}_2} \equiv b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} \equiv \frac{b_0 b_1 b_2 + a_1 b_2 + a_2 b_1}{b_1 b_2} \equiv \frac{\begin{vmatrix} b_0 & a_1 & a_2 \\ -1 & b_1 & 0 \\ -1 & 0 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{vmatrix}}.$$

Предположим, что $\widetilde{A}_n = \det C_{0n}$ и $\widetilde{B}_n = \det C_{1n}$ для $n \le k$. Докажем справедливость соответствующих формул для $n = k + 1$. Разложим по алгоритму (1.1.13). Тогда

а) $k + 1 = k_1 N^{s-1} + k_2 N^{s-2} + ... + k_s + 1$, если $k_s < N$;

б) $k + 1 = k_1 N^{s-1} + k_2 N^{s-2} + ... k_{m-1} N^{s-m+1} + (k_m + 1) N^{s-m} +$
$+ N^{s-m-1} + N^{s-m-2} + ... + N + 1$, если существует m, такое, что
$k_p = N,\ p = \overline{m+1, s},\ k_m < s$;

в) $k + 1 = N^s + N^{s-1} + ... + N + 1$, если $k_p = N,\ p = \overline{1, s}$.

Доказательство во всех трех случаях проводится аналогично. Для определенности рассмотрим в техническом плане наиболее сложный случай а).

Пусть $c_{k+1,k+1} \ne 0$. Введем обозначение $b^*_{k(s-1)} = b_{k(s-1)} + \dfrac{a_{k(s-1),k_s+1}}{b_{k(s-1),k_s+1}}$.

Рассмотрим ветвящуюся цепную дробь (1.1.15), у которой $b_{k(s-1)}$ заменены на $b^*_{k(s-1)}$, все остальные элементы оставлены без изменения, и обозначим через A^*_k и B^*_k числитель и соответственно знаменатель данной дроби.

Аппроксиманту $\widetilde{f}_{k+1}$ можно записать в виде (1.1.15), если вместо дроби $\dfrac{a_{k(s-1)}}{b^*_{k(s-1)}+\sum\limits_{j=1}^{k_s}\dfrac{a_{k(s-1)j}}{b_{k(s-1)j}}}$ взять ей равное отношение

$$\frac{a_{k(s-1)}b_{k(s-1),k_s+1}}{b^*_{k(s-1)}b_{k(s-1),k_s+1}+\sum\limits_{j=1}^{k_s}\dfrac{a_{k(s-1)j}b_{k(s-1),k_s+1}}{b_{k(s-1)j}}}.$$

Это сразу следует из алгоритма (1.2.13)–(1.2.15) вычисления ВЦД (1.1.15) и замечания 1.2.2. Поэтому

$$\widetilde{A}_{k+1}=b_{k(s-1),k_s+1}\widetilde{A}^*_k, \quad \widetilde{B}_{k+1}=b_{k(s-1),k_s+1}\widetilde{B}^*_k, \tag{1.2.25}$$

так как по предположению $b_{k(s-1),k_s+1}=c_{k+1,k+1}\neq 0$. Для большей наглядности дальнейших рассуждений запишем

$$\det C_{0,k+1}=\begin{Vmatrix} b_0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & a_{k(s-1)} & a_{k(s-2),k_{s-1}+1} & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & b_{k(s-1)} & 0 & \ldots & a_{k(s)} & a_{k(s-1),k_s+1} \\ 0 & \ldots & 0 & b_{k(s-2),k_{s-1}+1} & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & -1 & 0 & \ldots & b_{k(s)} & \ldots \\ 0 & \ldots & -1 & 0 & \ldots & 0 & b_{k(s-1),k_s+1} \end{Vmatrix}. \tag{1.2.26}$$

Из свойств 1,2 матриц $C_{0,k+1}$ и $C_{1,k+1}$ следует, что их последний столбец содержит самое большее два отличных от нуля элемента $a_{k(s-1),k_s+1}$ и $b_{k(s-1),k_s+1}$. Это же самое относится и к последней строке. Вынесем из последнего столбца отличный от нуля множитель $b_{k(s-1),k_s+1}$. Если к столбцу, содержащему элемент $b_{k(s-1)}$ прибавить последний столбец, предварительно разделенный на $b_{k(s-1),k_s+1}$, и раскрыть полученный определитель $C_{0,k+1}$ или $C_{1,k+1}$ по последней строке, то согласно предположению индукции получим $b_{k(s-1),k_s+1}\widetilde{A}_k^*$ или $b_{k(s-1),k_s+1}\widetilde{B}_k^*$, что соответственно равно $\widetilde{A}_{k+1}$ или $\widetilde{B}_{k+1}$ в силу (1.2.25).

Если же $c_{k+1,k+1} = b_{k(s-1),k_s+1} = 0$, то, свернув дробь $\dfrac{a_{k(s-1)}}{b_{k(s-1)} + \sum\limits_{j=1}^{k_s+1} \dfrac{a_{k(s-1)j}}{b_{k(s-1)j}}}$ по алгоритму (1.2.13)–(1.2.15), получим

$$\frac{0}{a_{k(s-1),k_s+1}\prod\limits_{j=1}^{k_s} b_{k(s-1)j}} \equiv \frac{0\cdot L}{1\cdot L},\ \text{где } L = a_{k(s-1),k_s+1}\prod_{j=1}^{k_s} b_{k(s-1)j}\,.$$

Предположим, что $L \neq 0$. Пусть $m = k - k_s$. Рассмотрим k-ю фигурную подходящую дробь $\widetilde{g}_m$ ВЦД (1.1.9) в смысле определения (1.1.15), в которой $a_{k(s-1)} = 0$, $b_{k(s-1)} = 1$ и обозначим $\widetilde{C}_m, \widetilde{D}_m$ ее числитель и знаменатель соответственно, а через S_{im}, $i = 0, 1$, матрицы вида (1.2.16), составленные из элементов данной дроби. Тогда, согласно замечанию 1.2.2, имеем $\widetilde{A}_{k+1} = L\widetilde{C}_m$, $\widetilde{B}_{k+1} = L\widetilde{D}_m$. С учетом предположения индукции $\widetilde{C}_m = \det S_{0m}$, $\widetilde{D} = \det S_{1m}$. Поскольку $\dfrac{a_{k(s-1)}}{b_{k(s-1)}} \equiv \dfrac{0}{1}$ – последнее тупиковое звено ВЦД $\widetilde{g}_m$, то из свойств 1, 2 матрицы S_{0m} следует, что $\widetilde{C}_m = \det S'_{0m}$, $\widetilde{D} = \det S'_{1m}$, где S'_{0m}, S'_{1m} соответственно матрицы S_{0m}, S_{1m} без строки и столбца, содержащих элемент $b_{k(s-1)} = 1$. Раскрывая определитель (1.2.26), где $b_{k(s-1),k_s+1} = 0$, по последнему столбцу, последней строке и оставшимся k_s столбцам с учетом свойств 1,2 матрицы $C_{0,k+1}$, имеем

$$\det C_{0,k+1} = L\det S'_{0m} = L\widetilde{C}_m = \widetilde{A}_{k+1}.$$

Аналогичным образом устанавливается формула и для знаменателя $\widetilde{B}_k$ подходящей дроби (1.1.15).

Если же $L = a_{k(s-1),k_s+1}\prod\limits_{j=1}^{k_s} b_{k(s-1)j} = 0$, то, как легко заметить, ВЦД $\widetilde{f}_{k+1}$ не имеет смысла, т.е. $\widetilde{A}_{k+1} = 0$, $\widetilde{B}_{k+1} = 0$. В этом случае из (1.2.26) следует, что $\det C_{0,k+1} = \det C_{1,k+1} = 0$.

Если $k+1$ определяется согласно б) или в), то доказательство теоремы значительно упрощается. ■

Следствие 1.2.1. Для числителей A_k и знаменателей B_k подходящей дроби (1.1.11) ВЦД (1.1.9) с комплексными элементами справедливы формулы

$$A_k = \det C_{0l}, \qquad B_k = \det C_{1l}, \qquad k = 1, 2, \ldots, \tag{1.2.27}$$

где $l = N + N^2 + \ldots + N^k$, C_{il}, $i = 0,1$, – матрицы вида (1.2.16).

В дальнейшем нам будут необходимы другие формулы для числителей и знаменателей подходящих дробей, которые удобно записать для ВЦД

$$b_0 + \mathop{D}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{-a_{i(k)}^2}{b_{i(k)}}, \tag{1.2.28}$$

где $a_{i(k)}, b_{i(k)}, b_0$, $k = 1, 2, \ldots$, $i_p = \overline{1,N}$, $p = \overline{1,k}$ – произвольные комплексные числа. ВЦД (1.1.9) всегда можно записать в виде (1.2.28).

Рассмотрим симметричные матрицы

$$D_{ik} = \begin{Vmatrix} d_{ii} & d_{i,i+1} & \ldots & d_{ik} \\ d_{i+1,i} & d_{i+1,i+1} & \ldots & d_{i+1,k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ d_{ki} & d_{k,i+1} & \ldots & d_{kk} \end{Vmatrix}, \qquad i = 0, 1; \qquad k = 1, 2, \ldots, \tag{1.2.29}$$

т.е. матрицы, удовлетворяющие условию $d_{pq} = d_{qp}$, $p, q = \overline{1,k}$, элементы которых связаны с компонентами ВЦД (1.2.28) следующим образом. Если p – произвольное натуральное число $1 \le p \le k$, и индексы $j_1, j_2, \ldots, j_m$ определяются из разложения числа p по алгоритму (1.1.13), т.е.

$$p = j_1 N^{m-1} + j_2 N^{m-2} + \ldots + j_m, \quad 1 \le j_n \le N, \quad n = \overline{1,m}, \tag{1.2.30}$$

то

$$d_{00}=b_0,\quad d_{pp}=b_{j(m)},\quad p=\overline{1,k}, \tag{1.2.31}$$

$$d_{0i_1}=-a_{i_1},\ d_{pq}=-a_{j(m)i_{m+1}},\ \text{если } q=Np+i_{m+1},\ 1\le i_1, i_{m+1}\le N, \tag{1.2.32}$$

$d_{pq}=0$ во всех остальных случаях, когда $q>p$.

Пример 1.2.2. В качестве иллюстрации рассмотрим случай $N=2,\ k=6$. Тогда $k=2\cdot 2+2$, $d_{66}=b_{22}$ и

$$D_{06}=\begin{Vmatrix} b_0 & -a_1 & -a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a_1 & b_1 & 0 & -a_{11} & -a_{12} & 0 & 0 \\ -a_2 & 0 & b_2 & 0 & 0 & -a_{21} & -a_{22} \\ 0 & -a_{11} & 0 & b_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_{12} & 0 & 0 & b_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_{21} & 0 & 0 & b_{21} & 0 \\ 0 & 0 & -a_{22} & 0 & 0 & 0 & b_{22} \end{Vmatrix}.$$

Теорема 1.2.3 [20]. Для числителя $\widetilde{A}_k$ и знаменателя $\widetilde{B}_k$ k-й фигурной подходящей дроби вида (1.1.15) ветвящейся цепной дроби (1.2.28) с комплексными элементами справедливы формулы

$$\widetilde{A}_k=\det D_{0k},\ \widetilde{B}_k=\det D_{1k},\quad k=1,2,..., \tag{1.2.33}$$

где D_{ik} – матрицы вида (1.2.29).

Доказательство. Из теоремы 1.2.2 следует, что $\widetilde{A}_k=\det C_{0k}$, $\widetilde{B}_k=\det C_{1k}$, $k=1,2,...,$ где в матрицах C_{ik}, $i=0,1,$ вида (1.2.16) вместо каждого $a_{j(m)}$ положено $-a^2_{j(m)}$ соответственно. Элементы матрицы C_{ik}, $i=0,1,$ в этом случае обозначим c_{pq}. Покажем, что

$$\det D_{0k}=\det C_{0k},\quad k=1,2,\dots . \tag{1.2.34}$$

Пусть d_{pq} – произвольный фиксированный элемент матрицы D_{0k}, $0\le p<q\le k$. Если $q\ne Np+r$ ни при каком r, $1\le r\le N$, то, согласно определению матриц D_{0k} и C_{0k}, имеем $d_{pq}=d_{qp}=c_{pq}=c_{qp}=0$. Предположим, что $q=Np+r$ при некотором r, $1\le r\le N$, и $d_{pq}\ne 0$. Рассмотрим

квадратную матрицу D'_{0k} порядка $k+1$, для элементов d'_{ij} которой справедливы соотношения: $d'_{ij} = d_{ij}$ при всех наборах индексов, кроме $d'_{pq} = c_{pq}$, $d'_{qp} = c_{qp} = -1$. Докажем, что $\det D'_{0k} = \det D_{0k}$. С помощью элементарных преобразований матрицы D_{0k}, не изменяющих величины $\det D_{0k}$, осуществим в несколько этапов переход от D_{0k} к D'_{0k}.

Предполагая, что нумерация строк и столбцов начинается с нуля, на первом шаге разделим q-ю строку и умножим q-й столбец матрицы D_{0k} на $d = -d_{pq}$. Если q удовлетворяет условию (1.2.22), т.е. $k - k_s < Nq$, то в силу свойств 1,2 матрицы D_{0k}, имеющей такую же структуру, как и матрица C_{0k}, при этом сразу получим матрицу D'_{0k}. Если же $Nq \le k - k_s$, то получим матрицу $D_{0k}^{(1)}$, элементы $d_{ij}^{(1)}$ которой совпадают с соответствующими элементами матрицы D_{0k}, кроме

$$d_{pq}^{(1)} = c_{pq},\ d_{qp}^{(1)} = -1,\ d_{r_1 q}^{(1)} = d \cdot d_{r_1 q},\ d_{q r_1}^{(1)} = d^{-1} \cdot d_{q r_1},$$

где $r_1 \in I_1$ и $I_1 = \{ r_1 \colon r_1 = Nq + i_1 \le k,\ 1 \le i_1 \le N \}$.

На втором шаге умножим каждый r_1-й столбец и разделим каждую r_1 строку матрицы $D_{0k}^{(1)}$ на d, где $r_1 \in I_1$. Получим матрицу $D_{0k}^{(2)}$, совпадающую с матрицей D_{0k}, если $N^2 q + N > k - k_s$, так как в этом случае $N r_1 > k - k_s$ для произвольного $r_1 \in I_1$. В противном случае, обозначив через $d_{ij}^{(2)}$ элементы матрицы $D_{0k}^{(2)}$, имеем $d_{ij}^{(2)} = d_{ij}$ при всех наборах' индексов, кроме

$$d_{pq}^{(2)} = c_{pq},\ d_{qp}^{(2)} = -1,\ d_{r_2 q}^{(2)} = d \cdot d_{r_2 q},\ d_{q r_2}^{(2)} = d^{-1} \cdot d_{q r_2},$$

где $r_2 \in I_2$ и $I_2 = \left\{ r_2 \colon r_2 = N^2 q + N i_1 + i_2 \le k,\ 1 \le i_1 \le N,\ 1 \le i_2 \le N \right\}$.

Очевидно, что для произвольных элементов $r_1 \in I_1$, $r_2 \in I_2$ справедливо неравенство $r_2 > r_1$, если $I_2 \ne \varnothing$. Определим

$$I_p = \left\{ r_p \colon r_p = N^p q + N^{p-1} i_1 + N^{p-2} i_2 + \ldots + i_p \le k,\ 1 \le i_m \le N,\ m = \overline{1,p} \right\}.$$

Так как для произвольных элементов $r_p \in I_p$, $r_{p+1} \in I_{p+1}$ в предполжении, что $I_{p+1} \neq \varnothing$, справедливо неравенство $r_{p+1} > r_p$, $p = 1,2,\ldots$, то для заданного числа k существует номер n, что $I_{n+1} = \varnothing$, $I_n = \varnothing$. Тогда на n-м шаге, умножив все r_n-е столбцы и разделив все r_n-е строки матрицы $D_{0k}^{(n-1)}$ на d, где $r_n \in I_n$, получим матрицу D'_{0k}.

Если же при некотором p и $q = Np + i_1$, $1 \le i_1 \le N$, $d_{pq} = d_{qp} = 0$, то, положив в D_{0k} вместо d_{pq} и d_{qp} некоторое число $x \neq 0$, получим матрицу $D_{0k}(x)$, определитель которой непрерывно зависит от x. Поэтому

$$\det D_{0k} = \lim_{x \to 0} \det D_{0k}(x).$$

Для $D_{0k}(x)$, повторяя процедуру, описанную выше, получим матрицу $D'_{0k}(x)$, у которой $d'_{ij}(x) = d_{ij}$ для всех i, j, кроме $d'_{pq}(x) = -x^2$, $d'_{qp}(x) = -1$. Устремляя $x \to 0$, получим $d'_{pq}(0) = -x^2$, $d'_{qp}(0) = -1$. Проделав соответствующую процедуру для каждого элемента d_{pq}, $0 \le p \le q \le k$, матрицы D_{0k}, легко убеждаемся в справедливости (1.2.34).■

С л е д с т в и е 1.2.2. Для числителей A_k и знаменателей B_k k-й подходящей дроби ВЦД (1.2.28) с комплексными элементами справедливы формулы

$$A_k = \det D_{0l},\ \ B_k = \det D_{1l},\ \ k = 1,2,\ldots, \tag{1.2.35}$$

где $l = N + N^2 + \ldots + N^k$, и матрицы D_{il}, $i = 0,1$, имеют вид (1.2.29).

В случае $N = 1$ формулы (1.2.35) совпадают с известными.

У т в е р ж д е н и е 1.2.1. Пусть компонентами ВЦД

$$b_0 + \mathop{D}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}} \tag{1.2.36}$$

являются комплексные числа. Тогда

1) фигурная подходящая дробь $\widetilde{f}_k$, $k = 1,2,\ldots$, вида (1.1.15) ВЦД (1.2.36) имеет смысл, т.е. не вырождается в отношение 0/0 тогда и только тогда,

когда

$$\left|\det C_{0k}\right| + \left|\det C_{1k}\right| \neq 0; \tag{1.2.37}$$

2) подходящая дробь f_k, $k = 1,2,...,$ вида (1.1.11) данной дроби имеет смысл тогда и только тогда, когда

$$\left|\det C_{0l}\right| + \left|\det C_{1l}\right| \neq 0, \tag{1.2.38}$$

где $l = N + N^2 + ... + N^k$, C_{ij}, $i = 0,1$; $j = 1,2,...,$ – матрицы вида (1.2.16), составленные из элементов ВЦД (1.2.36).

§ 3. Формула разности двух подходящих дробей

Чтобы исследовать сходимость ВЦД, необходимо установить формулу разности двух ее подходящих дробей $f_n - f_m$. Эту формулу можно получить, используя рекуррентные соотношения для числителей и знаменателей подходящих дробей, рассмотренные в предыдущем параграфе. Однако этот путь ведет к очень громоздким выражениям, исходя из которых трудно получить эффективные признаки сходимости. Совершенно другой подход будет рассмотрен в настоящем параграфе.

Для ветвящейся цепной дроби

$$b_0 + \mathop{D}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}} \tag{1.3.1}$$

введем рекуррентно сокращенные обозначения

$$Q_{i(s)}^{(s)} = b_{i(s)}, \quad Q_{i(p)}^{(s)} = b_{i(p)} + \sum_{i_{p+1}=1}^{N} \frac{a_{i(p+1)}}{Q_{i(p+1)}^{(s)}}, \tag{1.3.2}$$

где $s = 1, 2, \ldots,\ p = s-1, s-2, \ldots, 1,\ i_k = \overline{1, N},\ k = \overline{1, s},\ i_0 = 0$.

Пусть $n > m$, тогда, учитывая (1.3.2), на первом шаге получим

$$f_n - f_m = b_0 + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{a_{i(1)}}{Q_{i(1)}^{(n)}} - \left(b_0 + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{a_{i(1)}}{Q_{i(1)}^{(m)}} \right) = -\sum_{i_1=1}^{N} \frac{a_{i(1)}}{Q_{i(1)}^{(n)} Q_{i(1)}^{(m)}} \left(Q_{i(1)}^{(n)} - Q_{i(1)}^{(m)} \right).$$

Аналогично для произвольного $r < m$ устанавливается соотношение

$$Q_{i(r)}^{(n)} - Q_{i(r)}^{(m)} = -\sum_{i_{r+1}=1}^{N} \frac{a_{i(r+1)}}{Q_{i(r+1)}^{(n)} Q_{i(r+1)}^{(m)}} \left(Q_{i(r+1)}^{(n)} - Q_{i(r+1)}^{(m)} \right). \tag{1.3.3}$$

Последовательно применяя соотношение (1.3.3) и учитывая, что

$$Q_{i(m)}^{(n)} - Q_{i(m)}^{(m)} = -\sum_{i_{m+1}=1}^{N} \frac{a_{i(m+1)}}{Q_{i(m+1)}^{(n)}},$$

после $(m+1)$-го шага окончательно имеем

$$f_n - f_m = (-1)^m \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_{m+1}=1}^{N} \frac{\prod_{r=1}^{m+1} a_{i(r)}}{\prod_{r=1}^{m+1} Q_{i(r)}^{(n)} \prod_{r=1}^{m} Q_{i(r)}^{(m)}}, \tag{1.3.4}$$

где суммирование ведется по всевозможным наборам индексов $i_1, i_2, \ldots, i_{m+1}$, каждый из которых независимо пробегает значения от 1 до N. При выводе формулы (1.3.4) естественно предполагается, что все $Q_{i(r)}^{(s)} \neq 0$, $s = n,\ m$, $r = \overline{1,s}$, $i_k = \overline{1,N}$, $k = \overline{1,r}$. Формула типа (1.3.4) впервые была опубликована в работе [4], хотя первыми посланными к печати были работы [39, 40]. Эта формула будет в дальнейшем существенно использоваться при исследовании сходимости ветвящихся цепных дробей.

Утверждение 1.3.1. Пусть элементами ВЦД (1.3.) являются действительные положительные числа. Тогда справедливо свойство вилки, выраженное системой неравенств

$$f_{2k} < f_{2k+2} < f_{2j+1} < f_{2j-1}. \tag{1.3.5}$$

Доказательство. Так как все $a_{i(r)} > 0, Q_{i(r)}^{(s)} > 0$, $s = n, m$, $r = \overline{1,s}$, $i_k = \overline{1,N}$, $k = \overline{1,r}$, то, положив в формуле (1.3.4) $n = 2k+2,\ m = 2k$ или $n = 2j+1,\ m = 2j-1$, убеждаемся в том, что чётные подходящие дроби монотонно возрастают, нечетные монотонно убывают. Если в (1.3.4) положить $n = 2j+1,\ m = 2k$ или $n = 2k,\ m = 2j+1$ в зависимости от того $2j+1 > 2k$ или $2j+1 < 2k$, то убеждаемся в том, что $f_{2j+1} > f_{2k}$ для произвольных натуральных j и k. ■

Для оценок скорости сходимости ветвящихся цепных дробей с положительными компонентами, кроме свойства вилки, будем применять также следующее утверждение.

Утверждение 1.3.2. Пусть

$$f_n = b_0 + \mathop{D}_{k=1}^{n} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}} \text{ или } f_n = \hat{b}_0 + \mathop{D}_{k=1}^{n} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{a_{i(k)}}{\hat{b}_{i(k)}} -$$

конечные ВЦД с действительными положительными элементами, такими, что при некотором $r, 1 \le r \le n$, $\hat{b}_{i(r)} \ge b_{i(r)}$ при всех допустимых наборах мультииндексов и $\hat{b}_{i(r)} = b_{i(r)}$ во всех остальных случаях. Тогда

$$(-1)^r\left(\hat{f}_n - f_n\right) \geq 0.$$

Доказательство. Для дроби $\hat{f}_n$ аналогично (1.3.2) определим $\hat{Q}_{i(p)}^{(n)}$. Тогда

$$f_n - \hat{f}_n = b_0 + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{a_{i(1)}}{Q_{i(1)}^{(n)}} - \left(b_0 + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{a_{i(1)}}{\hat{Q}_{i(1)}^{(n)}} \right) = -\sum_{i_1=1}^{N} \frac{a_{i(1)}}{Q_{i(1)}^{(n)} \hat{Q}_{i(1)}^{(n)}} \left(Q_{i(1)}^{(n)} - \hat{Q}_{i(1)}^{(n)} \right).$$

Продолжая выкладки аналогично тому, как была доказана формула (1.3.4) и учитывая, что $Q_{i(r)}^{(n)} - \hat{Q}_{i(r)}^{(n)} = b_{i(r)} - \hat{b}_{i(r)}$, получим

$$f_n - \hat{f}_n = (-1)^{r+1} \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_r = 1}^{N} \frac{\prod\limits_{k=1}^{r} a_{i(k)}}{\prod\limits_{r=1}^{r} Q_{i(k)}^{(n)} \prod\limits_{r=1}^{r} \hat{Q}_{i(k)}^{(n)}} \left(\hat{b}_{i(r)} - b_{i(r)} \right),$$

откуда следует справедливость утверждения. ■

§ 4. Сходимость ВЦД. Максимантная и мажорантная ветвящиеся цепные дроби

Говорят, что ВЦД (1.3.1), элементами которой являются комплексные числа или функции, сходится, если существует и конечен предел последовательности ее подходящих дробей f_m вида (1.1.11) при $m \to \infty$.

Следуя О.Перрону [181], скажем, что ВЦД (1.3.1) сходится в широком смысле, если существует конечный или бесконечный $\lim\limits_{m\to\infty} f_m$.

Известно, что начальные члены ряда на его сходимость не влияют. Это неверно для цепных дробей и их многомерных обобщений. Поэтому будем говорить, что ВЦД (1.3.1) сходится безусловно, если сама дробь (1.3.1) и все ее m-е остатки, т.е. выражения вида

$$r_{i(m)} = b_{i(m)} + \underset{k=m+1}{\overset{\infty}{D}} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}}, \tag{1.4.1}$$

$m = 1,2,...,\ i_p = \overline{1,N},\ p = \overline{1,m}$, сходятся. Если же ветвящаяся цепная дробь (1.3.1) сходится, а некоторые ее остатки $r_{i(m)}$ расходятся, то она называется условно сходящейся.

Утверждение 1.4.1 [20]. Для ВЦД (1.3.1) с действительными положительными элементами безусловная сходимость эквивалентна обычной сходимости.

Доказательство. Необходимо только доказать, что из сходимости ВЦД (1.3.1) следует сходимость всех ее m-х остатков (1.4.1). Рассмотрим ВЦД

$$b_{i(1)} + \underset{k=2}{\overset{\infty}{D}} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}}, \qquad i_1 = \overline{1,N}, \tag{1.4.2}$$

и обозначим ее n-е аппроксиманты $f_{i(1)}^{(n)}$. Из свойства вилки (1.3.5) для ВЦД (1.4.2) следует, что существуют пределы

$$\lim_{m\to\infty} f_{i(1)}^{(2m)} = G_{i(1)}, \quad \lim_{m\to\infty} f_{i(1)}^{(2m+1)} = F_{i(1)},$$

и выполняются неравенства

$$G_{i(1)} \le F_{i(1)}, \qquad i_1 = \overline{1,N}. \tag{1.4.3}$$

Так как ВЦД (1.3.1) сходится, то $b_0 + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{a_{i(1)}}{F_{i(1)}} = b_0 + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{a_{i(1)}}{G_{i(1)}}$.

Следовательно, в силу (1.4.3) для произвольного i_1, $i_1 = \overline{1,N}$; $F_{i(1)} = G_{i(1)}$, что эквивалентно сходимости ВЦД (1.4.2). Аналогично доказывается сходимость дроби (1.4.1) для произвольного мультииндекса $i(m)$. ■

Говорят, что ВЦД (1.3.1) абсолютно сходится, если сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} | f_{k+1} - f_k |, \tag{1.4.4}$$

составленный из ее апроксимант вида (1.1.11).

Пусть $\{ \widetilde{\Phi}_k \}$ – некоторым образом упорядоченная последовательность произвольных фигурных подходящих дробей ВЦД (1.3.1). Обозначим m_k длину минимальной ветки $\widetilde{\Phi}_k$. Предполагается, что $m_k \to \infty$ при $k \to \infty$. Говорят, что ВЦД (1.3.1) сходится фигурно, если существует и конечен $\lim_{k \to \infty} \widetilde{\Phi}_k$.

У т в е р ж д е н и е 1.4.2 [20]. Если ВЦД (1.3.1) с действительными положительными компонентами сходится, то она сходится фигурно и к тому же пределу.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\{ \widetilde{\Phi}_k \}$ – произвольная последовательность фигурных подходящих дробей ВЦД (1.3.1) такая что минимальная длина веток ее k-х аппроксимант $m_k \to \infty$ при $k \to \infty$. Поэтому для каждого достаточно большого k существует натуральное число p, что

$$2p + 1 \le \min(m_n : n \ge k) \le 2p + 2$$

и $p \to \infty$ при $k \to \infty$. Пусть $n \in \mathbf{N}$ такое, что $n \ge k$. Запишем $\widetilde{\Phi}_n$ в виде

$$\widetilde{\Phi}_n = b_0 + \mathop{D}_{k=1}^{2p+1} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{a_{i(k)}}{b'_{i(k)}},$$

где $b'_{i(k)} = b_{i(k)}$, если $k \le 2p$ и $b'_{i(2p+1)} \ge b_{i(2p+1)}$ $i_k = \overline{1,N}$, $k = \overline{1,2p+1}$. Из свойства вилки (1.3.5) следует, что $\widetilde{\Phi}_n > f_{2p}$, а из утверждения (1.3.2) – что $\widetilde{\Phi}_n \le f_{2p+1}$, где f_m – m-я аппроксиманта вида (1.1.11) ВЦД (1.3.1). Для завершения доказательства необходимо воспользоваться сходимостью ВЦД (1.3.1).■

Обратное утверждение, вообще говоря, неверно. Достаточно взять расходящуюся ВЦД, фигурные подходящие дроби которой совпадают с её частными аппроксимантами. Однако, если $\widetilde{\Phi}_k = \widetilde{f}_k$, $k = 1, 2, \ldots$, где $\widetilde{f}_k$ определяются согласно (1.1.15), то в этом случае для ВЦД с положительными членами фигурная сходимость эквивалентна обычной.

Пусть $b_0(z), a_{i(k)}(z), b_{i(k)}(z)$, $k = 1, 2, \ldots$, $i_p = \overline{1, N}$, $p = \overline{1, k}$, – комплексные функции, определенные в области $D \subset \mathbf{C}^n$, $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$. Рассмотрим функциональную ВЦД

$$b_0(z) + \mathop{D}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{a_{i(k)}(z)}{b_{i(k)}(z)}. \tag{1.4.5}$$

Говорят, что ВЦД (1.4.5) равномерно сходится на некотором множестве $E \subset D$, если последовательность ее подходящих дробей $f_n(z)$ вида (1.1.11) равномерно сходится на E. Если же (1.4.5) равномерно сходится на каждом множестве $E \subset D$, таком, что $\overline{E} \subset D$, то будем говорить, что ВЦД (1.4.5) равномерно сходится внутри области D.

При исследовании сходимости ВЦД с комплексными компонентами существенно используются мажорантные ветвящиеся цепные дроби, впервые определенные в работе [13]. По существу, этот подход применялся ранее в работе [7].

О п р е д е л е н и е 1.4.1. Ветвящаяся цепная дробь

$$d_0 + \mathop{D}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N_1} \frac{c_{i(k)}}{b_{i(k)}} \tag{1.4.6}$$

с числовыми комплексными компонентами называется максимантой (минимантой) ВЦД (1.4.5), если для каждого $k \in \mathbf{Z}_+$ справедливо соотношение

$$|f_k(z)| \le |g_k| \qquad\qquad (|f_k(z)| \ge |g_k|)$$

где $N_1 \in \mathbf{N}$ не обязательно равно N, g_k – k-я подходящая дробь ВЦД (1.4.6).

Пример 1.4.1. Несложно проверить, используя утверждение 1.3.2, что максимантой и соответственно минимантой ВЦД

$$b_0 + \mathop{D}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{1}{b_{i(k)}} \tag{1.4.7}$$

с действительными положительными частными знаменателями являются цепные дроби $(N_1 = 1)$

$$b_0 + \frac{N}{\alpha_1} + \frac{N}{\beta_2} + \frac{N}{\alpha_3} + \frac{N}{\beta_4} + \cdots, \qquad b_0 + \frac{N}{\beta_1} + \frac{N}{\alpha_2} + \frac{N}{\beta_3} + \frac{N}{\alpha_4} + \cdots,$$

где N – число веток ветвления дроби (1.4.7) и

$$\alpha_k = \min\left(b_{i(k)} \colon i_p = \overline{1,N},\ p = \overline{1,k}\right),\ \beta_k = \max\left(b_{i(k)} \colon i_p = \overline{1,N},\ p = \overline{1,k}\right) –$$

минимальный и максимальный частные знаменатели на k-м этаже.

Определение 1.4.2. Ветвящаяся цепная дробь (1.4.6) называется мажорантой (минорантой) ВЦД (1.4.5), если существуют $n_0 \in \mathbf{Z}_+$ и действительная константа $M > 0$, что для всех $n, m \ge n_0$ справедливы неравенства

$$|f_n(z) - f_m(z)| \le M|g_n(z) - g_m(z)| \quad (|f_n(z) - f_m(z)| \ge M|g_n(z) - g_m(z)|),$$

где g_k – k-е аппроксиманта ВЦД (1.4.6).

Если в последних неравенствах вместо n взять $m+1$ и под f_m и g_m подразумевать частные суммы функционального и числового рядов соответственно, то определение 1.4.2 эквивалентно определению мажорантного ряда. Заметим, что в определениях 1.4.1 и 1.4.2 вместо функциональной дроби (1.4.5) можно рассматривать ВЦД (1.3.1).

Пример 1.4.2. Покажем, что мажорантной ВЦД для дроби (1.3.1) с комплексными элементами, удовлетворяющими условиям

$$\left|b_{i(k)}\right| \ge N\left|a_{i(k)}\right| + 1, \qquad k = 1,2,\ldots,\ i_p = \overline{1,N},\ p = \overline{1,k}, \tag{1.4.8}$$

является ветвящаяся цепная дробь

$$b_0 + \underset{k=1}{\overset{\infty}{D}} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{-\left|a_{i(k)}\right|}{\left|b_{i(k)}\right|}. \tag{1.4.9}$$

Действительно, если для ВЦД (1.4.9) по аналогии с (1.3.2) ввести рекуррентно сокращенные обозначения,

$$\hat{Q}_{i(s)}^{(s)} = \left|b_{i(s)}\right|, \;\; \hat{Q}_{i(p)}^{(s)} = \left|b_{i(p)}\right| - \sum_{i_{p+1}=1}^{N} \frac{\left|a_{i(p+1)}\right|}{\left|\hat{Q}_{i(p+1)}^{(s)}\right|},$$

$$s = 1, 2, \ldots, \;\; p = s-1, s-2, \ldots, 1, \; i_p = \overline{1, N}, \;\; p = \overline{1, k},$$

то методом математической индукции легко доказать, что

$$\left|Q_{i(k)}^{(s)}\right| = \hat{Q}_{i(k)}^{(s)} \geq N\left|a_{i(k)}\right|, \qquad k = s, s-1, \ldots, 1, \quad i_p = \overline{1, N}, \;\; p = \overline{1, k}. \tag{1.4.10}$$

Действительно, при $k = s$ имеем

$$\left|Q_{i(s)}^{(s)}\right| = \left|b_{i(s)}\right| = \hat{Q}_{i(s)}^{(s)} \geq N\left|a_{i(s)}\right| + 1 > N\left|a_{i(s)}\right|.$$

Предполагая, что неравенство (1.4.10) справедливо при $n = k+1$, докажем его справедливость при $n = k+1$. Имеем

$$\left|Q_{i(k)}^{(s)}\right| \geq = \left|b_{i(k)}\right| - \sum_{i_{k+1}=1}^{N} \frac{\left|a_{i(k+1)}\right|}{\left|Q_{i(k+1)}^{(s)}\right|} \geq \left|b_{i(k)}\right| - \sum_{i_{k+1}=1}^{N} \frac{\left|a_{i(k+1)}\right|}{\hat{Q}_{i(k+1)}^{(s)}} =$$

$$= \hat{Q}_{i(k)}^{(s)} \geq \left|b_{i(k)}\right| - 1 \geq N\left|a_{i(k)}\right|,$$

Следовательно, $Q_{i(k)}^{(s)} \neq 0$, $\hat{Q}_{i(k)}^{(s)} > 0$. Поэтому для разности двух подходящих дробей ВЦД (1.3.1) и (1.4.9) $f_n - f_m$ и $g_n - g_m$ соответственно, где $n > m$, можно воспользоваться формулой (1.3.4). Имеем

$$\left|f_n - f_m\right| \leq \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_{m+1}=1}^{N} \frac{\prod_{k=1}^{m+1}\left|a_{i(k)}\right|}{\prod_{k=1}^{m+1}\left|Q_{i(k)}^{(n)}\right| \prod_{k=1}^{m}\left|Q_{i(k)}^{(m)}\right|} \leq$$

$$\leq (-1)^{m+1} \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_{m+1}=1}^{N} \frac{\prod_{k=1}^{m+1}\left(-\left|a_{i(k)}\right|\right)}{\prod_{k=1}^{m+1}\hat{Q}_{i(k)}^{(n)} \prod_{k=1}^{m}\hat{Q}_{i(k)}^{(m)}} = -\left(g_n - g_m\right).$$

§ 5. Эквивалентные ветвящиеся цепные дроби.

Непрерывные дроби (1.2.1) и

$$b_0 + \underset{k=1}{\overset{\infty}{D}} \frac{a_k^*}{b_k^*} \tag{1.5.1}$$

с n-и подходящими дробями f_n и f_n^* соответственно называются эквивалентными, если $f_n = f_n^*$, $n = 1, 2, \ldots$. Известно (см.[81]), что непрерывные дроби (1.2.1) и (1.5.1), у которых все $a_k \neq 0$, $a_k^* \neq 0$, $k = 1, 2, \ldots$, эквивалентны тогда и только тогда, когда существуют отличные от нуля константы ρ_k, $k = 1, 2, \ldots$, и $\rho_0 = 1$, такие что

$$a_k^* = a_k \rho_k \rho_{k-1}, \; b_k^* = b_k \rho_k , \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{1.5.2}$$

Кроме того, если A_n, B_n и A_n^*, B_n^* – соответственно числитель и знаменатель n-й подходящей дроби (1.2.1) и (1.5.1), то

$$A_n^* = \rho_1 \rho_2 \ldots \rho_n A_n, \quad B_n^* = \rho_1 \rho_2 \ldots \rho_n B_n, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{1.5.3}$$

Легко проверить, что ВЦД

$$b_0 + \underset{k=1}{\overset{\infty}{D}} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{a_{i(k)} \rho_{i(k-1)} \rho_{i(k)}}{a_{i(k)} \rho_{i(k)}}, \tag{1.5.4}$$

где $\rho_{i(0)} = \rho_0 = 1$, $\rho_{i(k)} \neq 0$, $k = 1, 2, \ldots$, $i_p = \overline{1, N}$, $p = \overline{1, k}$, – произвольные комплексные числа, эквивалентна ветвящейся цепной дроби (1.3.1).

Если обозначить n-е подходящие дроби (1.3.1) и (1,5.4) через f_n и f_n^* соответственно, то выполняются тождества

$$f_n = f_n^*, \; n = 0, 1, 2, \ldots . \tag{1.5.5}$$

Но не всякую ВЦД, эквивалентную (1.3.1), можно записать в виде (1.5.4) при некоторых $\rho_{i(k)}$, если требовать только выполнения тождества (1.5.5).

В качестве контрпримера достаточно рассмотреть цепную дробь

$$\frac{a}{1} + \frac{a}{1} + \frac{a}{1} + \cdots,$$

где $a \neq 0$. Если каждое a расписать в виде суммы $a = \frac{1}{3}a + \frac{2}{3}a$ или $a = \frac{1}{4}a + \frac{3}{4}a$, то получим две эквивалентные ветвящиеся цепные дроби с двумя ветками ветвления

$$\cfrac{\frac{1}{3}a}{1+\cfrac{\frac{1}{3}a}{1+\ddots}+\cfrac{\frac{2}{3}a}{1+\ddots}} + \cfrac{\frac{2}{3}a}{1+\cfrac{\frac{1}{3}a}{1+\ddots}+\cfrac{\frac{2}{3}a}{1+\ddots}},$$

$$\cfrac{\frac{1}{4}a}{1+\cfrac{\frac{1}{4}a}{1+\ddots}+\cfrac{\frac{3}{4}a}{1+\ddots}} + \cfrac{\frac{3}{4}a}{1+\cfrac{\frac{1}{4}a}{1+\ddots}+\cfrac{\frac{3}{4}a}{1+\ddots}}.$$

Ни одну из этих дробей нельзя преобразовать в другую, используя эквивалентные преобразования (1.5.4) Действительно, в этом случае должны выполняться, например, противоречивые равенства

$$\begin{cases} \frac{1}{3}a = \frac{1}{4}a\rho_{i(0)}\rho_1, \\ 1 = 1 \cdot \rho_1, \end{cases} \qquad \text{или} \qquad \begin{cases} \frac{1}{4}a = \frac{1}{3}a\rho_{i(0)}\rho_1, \\ 1 = 1 \cdot \rho_1, \end{cases}$$

где $\rho_{i(0)} = \rho_0 = 1$, $a \neq 0$.

Поэтому необходимо уточнить понятие эквивалентности для ВЦД. Ветвящиеся цепные дроби (1.3.1) и

$$b_0 + \mathop{D}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{a^*_{i(k)}}{b^*_{i(k)}} \tag{1.5.6}$$

называются эквивалентными, если

$$\tilde{f}_n = \tilde{f}^*_n, \qquad n = 1,2,\dots, \tag{1.5.7}$$

где $\tilde{f}_n, \tilde{f}^*_n$ – n-е фигурные подходящие дроби ВЦД (1.3.1) и (1.5.6) соответственно вида (1.1.5).

Теорема 1.5.1[20]. Ветвящиеся цепные дроби (1.3.1) и (1.5.6), у которых $a_{i(k)} \neq 0$, $a^*_{i(k)} \neq 0$, $k = 1, 2, \ldots$, $i_p = \overline{1, N}$, $p = \overline{1, k}$, эквивалентны тогда и только тогда, когда существуют отличные от нуля константы $\rho_{i(k)}$, $k = 1, 2, \ldots$, $i_p = \overline{1, N}$, $p = \overline{1, k}$, $\rho_{i(0)} = \rho_0 = 1$, такие, что

$$a^*_{i(k)} = a_{i(k)}\rho_{i(k)}\rho_{i(k-1)},\ b^*_{i(k)} = b_{i(k)}\rho_{i(k)},\ k = 1, 2, \ldots,\ i_p = \overline{1, N},\ p = \overline{1, k}. \quad (1.5.8)$$

Доказательство. Если элементы ВЦД (1.5.6) имеют вид (1.5.8), то, выполняя постепенное сокращение сверху вниз или снизу вверх ее n-й фигурной подходящей дроби $\tilde{f}^*_n$ на отличные от нуля числа $\rho_{i(k)}$, получим $\tilde{f}_n$. Таким образом, выполняются равенства (1.5.7).

Докажем обратное, т.е. что элементы ВЦД (1.3.1) и (1.5.6) связаны соотношениями (1.5.8) при некоторых отличных от нуля $\rho_{i(k)}$ в предположении, что выполняются равенства (1.5.7). Действительно, из равенства $\tilde{f}_1 = \tilde{f}^*_1$ следует, что $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a^*_1}{b^*_1}$ или $\frac{b^*_1}{b_1} = \frac{a^*_1}{a_1} = \rho_1$, откуда $\rho_1 = \frac{a^*_1}{a_1} \neq 0$. Поэтому $a^*_1 = a_1\rho_1\rho_0$, $b^*_1 = b_1\rho_1$, где $\rho_0 = 1, \rho_1 \neq 0$. Из равенства $\tilde{f}_2 = \tilde{f}^*_2$ и уже доказанного следует, что $a^*_2 = a_2\rho_1\rho_2$, $b^*_2 = b_2\rho_2$, где $\rho_2 \neq 0$, и т.д. Таким образом, формулы (1.5.8) при $k = 1$ справедливы .

Используем метод математической индукции. Предполагая, что соотношения (1.5.8) верны при $k \le n$, докажем их справедливость при $k = n + 1$. Пусть $m = N + N^2 + \ldots + N^n$, $I(m) = \underbrace{11\ldots1}_{m}$.

Рассмотрим фигурную подходящую дробь $\tilde{f}^*_{m+1}$ и перепишем ее компоненты с учетом (1.5.8), где $k \le n$. Выполняя постепенное сокращение сверху вниз на отличные от нуля числа $\rho_{i(p)}$, $p = \overline{1, n}, \ldots$, $i_r = \overline{1, N}$, $r = \overline{1, p}$, и используя равенство (1.5.7) при $k = m + 1$, получим

$$\frac{a_{I(m)}}{b_{I(m)}+\dfrac{a_{I(m+1)}}{b_{I(m+1)}}}=\frac{a_{I(m)}}{b_{I(m)}+\dfrac{a^*_{I(m+1)}}{b^*_{I(m+1)}\rho_{I(m)}}},$$

откуда

$$\frac{a_{I(m+1)}}{b_{I(m+1)}}=\frac{a^*_{I(m+1)}}{b^*_{I(m+1)}\rho_{I(m)}},\quad \frac{a^*_{I(m+1)}}{a_{I(m+1)}\rho_{I(m)}}=\frac{b^*_{I(m+1)}}{b_{I(m+1)}}=\rho_{I(m+1)}.$$

Поэтому

$$a^*_{I(m+1)}=a_{I(m+1)}\rho_{I(m)}\rho_{I(m+1)},\; b^*_{I(m+1)}=b_{I(m+1)}\rho_{I(m+1)}, \text{ где } \rho_{I(m+1)}\neq 0.$$

Учитывая равенство $\widetilde{f}_{m+2}=\widetilde{f}^*_{m+2}$ и уже доказанные соотношения для $a^*_{I(m+1)}$ и $b^*_{I(m+1)}$, аналогичным образом доказываются формулы

$$a^*_{I(m)2}=a_{I(m)2}\rho_{I(m)}\rho_{I(m)2},\quad b^*_{I(m)2}=b_{I(m)2}\rho_{I(m)2},$$

и т.д. Легко завершаем доказательство теоремы, убедившись в справедливости (1.5.8), где $k=n+1$.■

Учитывая замечание 1.2.2 , несложно подсчитать, что для числителя $\widetilde{A}^*_k$ и знаменателя $\widetilde{B}^*_k$ k-й фигурной подходящей дроби вида (1.1.5) ВЦД (1.5.4) справедливы многомерные аналоги формул (1.5.3).

$$\widetilde{A}^*_k=\rho^{(1)}\cdot\rho^{(2)}...\rho^{(s)}\widetilde{A}_k,\quad \widetilde{B}^*_k=\rho^{(1)}\cdot\rho^{(2)}...\rho^{(s)}\widetilde{B}_k,\quad k=1,2,...,\qquad (1.5.9)$$

где $\widetilde{A}_k$, $\widetilde{B}_k$ – числитель и знаменатель дроби (1.1.15) и

$$\rho^{(p)}=\prod_{i(p)}\rho_{i(p)},\; p=\overline{1,s-1}\,,\quad \rho^{(s)}=\rho_{k(s)}\prod_{i(s)\prec k(s)}\rho_{i(s)},$$

причем s, $k_1,k_2,...,k_s$ определяются из разложения (1.1.13) и произведения берутся по всевозможным допустимым наборам индексов при каждом фиксированном p, $p=\overline{1,s}$. В частности, из (1.2.12) следует, что для числителей и знаменателей k-й подходящей дроби ВЦД (1.5.4) справедливы соотношения

$$A^*_k=\rho^{(1)}\cdot\rho^{(2)}...\rho^{(k)}A_k,\quad B^*_k=\rho^{(1)}\cdot\rho^{(2)}...\rho^{(k)}B_k,\quad k=1,2,...,\qquad (1.5.10)$$

где $\rho^{(p)}=\prod\limits_{i(p)}\rho_{i(p)},\; p=\overline{1,k}$.

Если в (1.5.4) числа $\rho_{i(k)}$ подобрать специальным образом, то дробь (1.3.1) можно привести к более простому виду, не изменяя величин ее аппроксимант.

Так, если все $a_{i(k)} \neq 0$, $k = 1, 2, \ldots$, $i_p = \overline{1, N}$, $p = \overline{1, k}$, то, подставляя в (1.5.4) $\rho_{i(k)}$, последовательно найденные из системы уравнений

$$a_{i(k)}\rho_{i(k)}\rho_{i(k-1)} = 1, \qquad k = 1, 2, \ldots,\ i_p = \overline{1, N},\ p = \overline{1, k}, \quad \rho_{i(0)} = 1, \tag{1.5.11}$$

получим ВЦД, эквивалентную (1.3.1), все частные числители которой равны единице [45]. Решение системы уравнений (1.5.11) запишем в виде

$$\rho_{i(k)} = \prod_{p=1}^{k} \left(a_{i(p)}\right)^{(-1)^{k+p-1}}, \qquad k = 1, 2, \ldots,\ i_p = \overline{1, N},\ p = \overline{1, k}, \tag{1.5.12}$$

Следовательно, если все $a_{i(k)} \neq 0$, то, подставляя в (1.5.4) $\rho_{i(k)}$, вычисленные по формулам (1.5.12), получим ВЦД, эквивалентную (1.3.1)

$$b_0 + \mathop{D}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{1}{d_{i(k)}} \tag{1.5.13}$$

где

$$d_{i(k)} = b_{i(k)} \prod_{p=1}^{k} \left(a_{i(p)}\right)^{(-1)^{k+p-1}} \qquad k = 1, 2, \ldots,\ i_p = \overline{1, N},\ p = \overline{1, k}, \tag{1.5.14}$$

Если же все $b_{i(k)} \neq 0$, $k = 1, 2, \ldots$, $i_p = \overline{1, N}$, $p = \overline{1, k}$, то, подставляя в (1.5.4)

$$\rho_{i(k)} = \left(b_{i(k)}\right)^{-1}, \quad k = 1, 2, \ldots,\ i_p = \overline{1, N},\ p = \overline{1, k}, \tag{1.5.15}$$

преобразуем дробь (1.3.1) к эквивалентной ВЦД с частными знаменателями, равными единице

$$b_0 + \mathop{D}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{c_{i(k)}}{1}, \tag{1.5.16}$$

где

$$c_{i(k)} = a_{i(k)} b_{i(k)}^{-1} b_{i(k-1)}^{-1}, \qquad k = 1, 2, \ldots,\ i_p = \overline{1, N},\ p = \overline{1, k}, \tag{1.5.17}$$

$b_{i(0)} = 1$.

§ 6. Многомерный аналог тождеств Эйлера.

Одним из способов преобразования ряда в непрерывную дробь является построение дроби, равноценной к заданному ряду [65,137]. Непрерывная дробь и ряд называется равноценными, если выполняются равенства $f_n = S_n$, $n = 1,2,\ldots$, где f_n – n-я подходящая дробь, S_n - n-я частная сумма ряда. Соответствующие тождества

$$1 + \sum_{k=1}^{n} \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k = 1 + \alpha_1 (1 + \alpha_2 (1 + \ldots + \alpha_{n-1} (1 + \alpha_n) \ldots)) =$$

$$= \frac{1}{1 -} \frac{\alpha_1}{1 + \alpha_1 -} \frac{\alpha_2}{1 + \alpha_2 -} \frac{\alpha_2}{1 + \alpha_3 - \cdots -} \frac{\alpha_n}{1 + \alpha_n}, \quad n = 1, 2, \ldots, \qquad (1.6.1)$$

были установлены Эйлером [144]. Здесь $\alpha_i \neq 0$, $i = 1,2,\ldots,$ – произвольные комплексные числа.

Для кратных рядов в работе [45] был рассмотрен весьма частный случай, следующий из (1.6.1), где вместо каждого α_i положено $\sum\limits_{k=1}^{N} a_k^{(i)} z_k$.

Теорема 1.6.1 [26, 32]. Пусть $a_{i(k)} \in \mathbf{C}$, $k = 1, 2, \ldots,$ $i_p = \overline{1, N}$, $p = \overline{1, k}$. Тогда справедливы тождества

$$\left(1 + \mathop{D}_{k=1}^{n} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{-a_{i(k)}}{N a_{i(k)} + 1} \right)^{-1} = \left[1 + N a_{i(1)} \left[1 + N a_{i(2)} \left[1 + \ldots + N a_{i(n-1)} \left[1 + N a_{i(n)} \right] \ldots \right] \right] \right],$$

$$n = 1,2,\ldots \qquad (1.6.2)$$

$$N \left(N + \mathop{D}_{k=1}^{n} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{-a_{i(k)}}{a_{i(k)} + N} \right)^{-1} = \left[1 + \frac{a_{i(1)}}{N} \left[1 + \frac{a_{i(2)}}{N} \left[1 + \ldots + \frac{a_{i(n-1)}}{N} \left[1 + N \frac{a_{i(n)}}{N} \right] \ldots \right] \right] \right],$$

$$n = 1,2,\ldots, \qquad (1.6.3)$$

где каждое выражение в квадратных скобках обозначает среднее гармоническое, т.е.

$$\left[c_{i(k)} \right] = N \left(\sum_{i_k=1}^{N} \frac{1}{c_{i(k)}} \right)^{-1}. \qquad (1.6.4)$$

Доказательство. Докажем (1.6.2) методом математической индукции. При $n = 1$ в предположении, что все $Na_{i(1)} + 1 \neq 0,\ i_1 = \overline{1, N}$, имеем

$$\left(1 - \sum_{i_1=1}^{N} \frac{a_{i(1)}}{Na_{i(1)} + 1}\right)^{-1} = \left(1 + \frac{1}{N} \sum_{i_1=1}^{N} \frac{-Na_{i(1)} - 1 + 1}{Na_{i(1)} + 1}\right)^{-1} =$$

$$= N\left(\sum_{i_1=1}^{N} \frac{1}{Na_{i(1)} + 1}\right)^{-1} = \left[1 + Na_{i(1)}\right].$$

Если при некотором $i_1,\ 1 \le i_1 \le N,\ \ Na_{i(1)} + 1 = 0$, а все остальные $Na_{j(1)} + 1 \neq 0,\ \ j(1) \neq i(1)$, то левая и правая части (1.6.2) в предположении, что $n = 1$, равны 0. Во всех остальных случаях левая и правая части (1.6.2) при $n = 1$ не имеют смысла, т.е. вырождаются в неопределенность $0/0$. Формально и в этом случае можно говорить о справедливости равенства (1.6.2).

Предположим, что (1.6.2) имеет место для произвольного $n = m$. Докажем его справедливость при $n = m + 1$. Последнее следует из тождества

$$\sum_{i_m=1}^{N} \frac{-a_{i(m)}}{Na_{i(m)} + 1 - \sum\limits_{i_{m+1}=1}^{N} \frac{a_{i(m+1)}}{Na_{i(m+1)} + 1}} = \sum_{i_m=1}^{N} \frac{-a_{i(m)}}{Na_{i(m)} + \left[1 + Na_{i(m+1)}\right]^{-1}} =$$

$$= \sum_{i_m=1}^{N} \frac{-a_{i(m)}\left[1 + Na_{i(m+1)}\right]}{Na_{i(m)}\left[1 + Na_{i(m+1)}\right] + 1}.$$

Формула (1.6.3) доказывается аналогично.

В случае $N = 1$ соотношения (1.6.2) или (1.6.3) эквивалентны тождествам Эйлера (1.61).■

ГЛАВА 2. ПРИЗНАКИ СХОДИМОСТИ ВЕТВЯЩИХСЯ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ С НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫМИ КОМПОНЕНТАМИ

§ 1. Неравенства типа средних гармонических

Пусть $\mathbf{R}_+^n = \left\{ x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbf{R}^n : x_i > 0, i = \overline{1,n} \right\}$ и x_{cp} – среднее гармоническое n действительных чисел $x_1, x_2, ..., x_n$, т.е.

$$x_{cp} = n\left(x_1^{-1} + x_2^{-1} + ... + x_n^{-1}\right)^{-1}.$$

Теорема 2.1.1 [9,20]. Пусть $x, y \in \mathbf{R}_+^n$. Тогда справедливо неравенство $x_{cp} + y_{cp} \le (x + y)_{cp}$, которое можно записать в эквивалентной форме

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-1}\right)^{-1} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^{-1}\right)^{-1} \le \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^{-1}\right)^{-1}. \qquad (2.1.1)$$

Доказательство. Используем метод математической индукции. При $n = 1$ неравенство (2.1.1) очевидно, при $n = 2$ оно проверяется непосредственно. Пусть $\tilde{x}_{n-1}^{-1} = x_{n-1}^{-1} + x_n^{-1}$, $\tilde{y}_{n-1}^{-1} = y_{n-1}^{-1} + y_n^{-1}$. Тогда

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-1}\right)^{-1} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^{-1}\right)^{-1} = \left(\sum_{i=1}^{n-2} x_i^{-1} + \tilde{x}_{n-1}^{-1}\right)^{-1} + \left(\sum_{i=1}^{n-2} y_i^{-1} + \tilde{y}_{n-1}^{-1}\right)^{-1} \le$$

$$\le \left(\sum_{i=1}^{n-2} (x_i + y_i)^{-1} + (\tilde{x}_{n-1} + \tilde{y}_{n-1})^{-1}\right)^{-1} \le \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^{-1}\right)^{-1}. \quad \blacksquare$$

Последовательно применяя (2.1.1), получим следующую теорему.

Теорема 2.1.2 [9,20]. (Основное неравенство).

Пусть $x^{(j)} = \left(x_{1j}, x_{2j}, ..., x_{nj}\right) \in \mathbf{R}_+^n$, $j = \overline{1,k}$. Тогда

$x_{cp}^{(1)} + x_{cp}^{(1)} + ... + x_{cp}^{(k)} \le \left(x^{(1)} + x^{(2)} + ... + x^{(k)}\right)_{cp}$ или в эквивалентной форме

$$\sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{i=1}^{n} x_{ij}^{-1}\right)^{-1} \le \left(\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{k} x_{ij}\right)^{-1}\right)^{-1}. \qquad (2.1.2)$$

Утверждение 2.1.1. Пусть $x \in \mathbf{R}_+^n$. Тогда

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{x_j}{x_i}\right)^{-1}=1. \tag{2.1.3}$$

Теорема 2.1.3 [20]. Пусть $x,\delta \in \mathbf{R}_+^n$. Тогда

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\delta_j+\sum_{i=1}^{n}\frac{x_j}{x_i}\right)^{-1}\le\frac{n}{n+\delta_{cp}}. \tag{2.1.4}$$

Доказательство. В основном неравенстве (2.1.2) заменим k на n, n на $n+1$ и введем обозначения $x_{ij}=\dfrac{x_i}{x_j}$, $i,j=\overline{1,n}$, $x_{n+1,j}=\delta_j^{-1}$, $j=\overline{1,n}$. Используя неравенство (2.1.2) и разложение единицы (2.1.3), получим

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\delta_j+\sum_{i=1}^{n}\frac{x_j}{x_i}\right)^{-1}=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n+1}x_{ij}^{-1}\right)^{-1}\le\left(\sum_{i=1}^{n+1}\left(\sum_{j=1}^{n}x_{ij}\right)^{-1}\right)^{-1}=$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{x_i}{x_j}\right)^{-1}+\frac{\delta_{cp}}{n}\right)^{-1}=\frac{n}{n+\delta_{cp}}. \qquad \blacksquare$$

Следствие 2.1.1 [20,40]. Пусть $x \in \mathbf{R}_+^n$ и δ – неотрицательное действительное число. Тогда

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\delta+\sum_{i=1}^{n}\frac{x_j}{x_i}\right)^{-1}\le\frac{n}{n+\delta}. \tag{2.1.5}$$

Теорема 2.1.4 [11]. Пусть δ – неотрицательное действительное число, $x \in \mathbf{R}_+^n$. Тогда справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\delta+\sum_{j=1}^{n}\frac{x_i}{x_j}\right)^{-1}\ge\frac{1}{\delta+1}. \tag{2.1.6}$$

Доказательство. Сначала непосредственной проверкой убеждаемся в справедливости неравенства

$$\left(1+\delta+Ax+\frac{x}{y}\right)^{-1}+\left(1+\delta+Ay+\frac{y}{x}\right)^{-1}\ge\left(1+\delta+A\frac{xy}{x+y}\right)^{-1}, \tag{2.1.7}$$

где $\delta \ge 0$, $A \ge 0$, $x > 0, y > 0$ – произвольные действительные числа. После несложных вычислений (2.1.7) приводится к виду $\delta^2 + 2\delta + 2\delta A \dfrac{xy}{x+y} \ge 0$.

Неравенство (2.1.6) докажем методом математической индукции. При $n = 1$ это неравенство очевидно, при $n = 2$ оно следует из неравенства (2.1.7), где $A = 0$. Используя обозначение $\tilde{x}_{n-1}^{-1} = x_{n-1}^{-1} + x_n^{-1}$, т.е. $\tilde{x}_{n-1} = \dfrac{x_{n-1}x_n}{x_{n-1}+x_n}$, а также используя предположение индукции и неравенство (2.1.7), где $A = x_1^{-1} + x_2^{-1} + \ldots + x_{n-2}^{-1}$, $x = x_{n-1}$, $y = x_n$, получим

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\delta + \sum_{j=1}^{n}\frac{x_i}{x_j}\right)^{-1} = \sum_{i=1}^{n-2}\left(\delta + \sum_{j=1}^{n-2}\frac{x_i}{x_j} + \frac{x_i}{\tilde{x}_{n-1}}\right)^{-1} +$$

$$+\left(\delta + \sum_{j=1}^{n-2}\frac{x_{n-1}}{x_j} + 1 + \frac{x_{n-1}}{x_n}\right)^{-1} + \left(\delta + \sum_{j=1}^{n-2}\frac{x_n}{x_j} + \frac{x_n}{x_{n-1}} + 1\right)^{-1} \ge$$

$$\ge \sum_{i=1}^{n-2}\left(\delta + \sum_{j=1}^{n-2}\frac{x_i}{x_j} + \frac{x_i}{\tilde{x}_{n-1}}\right)^{-1} + \left(\delta + \sum_{j=1}^{n-2}\frac{\tilde{x}_{n-1}}{x_j} + \frac{\tilde{x}_{n-1}}{\tilde{x}_{n-1}}\right)^{-1} \ge \frac{1}{\delta+1}. \qquad \blacksquare$$

Рассмотрим теперь вопрос об установлении оценки сверху для выражений $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\left(\delta + \sum_{i=1}^{n}\frac{x_j}{x_i}\right)^{-1}\left(\gamma + \sum_{i=1}^{n}\frac{y_j}{y_i}\right)^{-1}$, где δ, γ – неотрицательные действительные числа, $x, y \in \mathbf{R}_+^n$. Трудности, которые здесь возникают, хорошо прослеживаются уже для $n = 2$.

С помощью элементарных вычислений легко устанавливается

Утверждение 2.1.2 [20]. Справедливо неравенство

$$(1+\delta+x)^{-1}(1+\gamma+y)^{-1} + \left(1+\delta+x^{-1}\right)^{-1}\left(1+\gamma+y^{-1}\right)^{-1} \le$$

$$\le \begin{cases} (1+\delta)^{-1}(1+\gamma)^{-1}, & \text{если } \ \delta\gamma \le 2, \\ 2(2+\delta)^{-1}(2+\gamma)^{-1}, & \text{если } \ \delta\gamma \ge 2, \end{cases} \qquad ?(2.1.8)$$

где $\delta \ge 0$, $\gamma \ge 0$, $x > 0$, $y > 0$ – произвольные действительные числа.

Неравенство вида (2.1.8) рассчитано на многократное применение. Вид параметров δ и γ очень громоздкий, и проверка условий $\delta\gamma \le 2$ или $\delta\gamma \ge 2$ для наших целей не представляется возможной. Так как двузначность правой части (2.1.8) для нас неприемлема, то необходимо ослабить это неравенство, не усложняя его вида, с целью добиться единого аналитического выражения для правой части (2.1.8). Полагая $\delta\gamma = z$, $\delta + \gamma = a$ и обозначая обратную величину к левой части (2.1.8) через w, неравенство (2.1.8) запишем в виде

$$w \ge \begin{cases} a + 1 + z, \; \textit{если} \;\; 0 \le z \le 2, \\ a + 2 + \dfrac{1}{2}z, \; \textit{если} \;\; z \ge 2. \end{cases} \qquad .(2.1.9)$$

Если в плоскости (z, w) начертить область (2.1.9), то, исходя из геометрических соображений, ясно, что наиболее простой областью, имеющей единое аналитическое выражение и содержащей (2.1.9), является угловая область

$$w \ge a + 1 + \frac{1}{2}z, \quad z \ge 0.$$

Возвращаясь к принятым ранее обозначениям, получим неравенство

$$\left(1+\delta+x\right)^{-1}\left(1+\gamma+y\right)^{-1} + \left(1+\delta+x^{-1}\right)^{-1}\left(1+\gamma+y^{-1}\right)^{-1} \le \left(1+\delta+\gamma+\frac{1}{2}\delta\gamma\right)^{-1}.$$

В следующей теореме рассмотрен многомерный аналог этого неравенства.

Т е о р е м а 2.1.5 [20]. Для произвольных неотрицательных действительных чисел δ, γ, μ и элементов $x, y \in \mathbf{R}_+^n$ справедливо неравенство

$$\sum_{j=1}^{n}\left(1+\delta\sum_{i=1}^{n}\frac{x_j}{x_i}+\gamma\sum_{i=1}^{n}\frac{y_j}{y_i}+\mu\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{x_j}{x_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{y_j}{y_i}\right)\right)^{-1} \le \left(\frac{1}{n}+\delta+\gamma+\mu\right)^{-1}. \quad (2.1.10)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В основном неравенстве (2.1.2) заменим k на n, n на 4 и введем обозначения

$$x_{1j} = 1, \qquad x_{2j} = \delta^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{x_j}{x_i}\right)^{-1}, \qquad x_{3j} = \gamma^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{y_j}{y_i}\right),$$

$$x_{4j} = \mu^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{x_j}{x_i}\right)^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{y_j}{y_i}\right), \qquad j = \overline{1,n}.$$

Используя (2.1.2) и разложение единицы (2.1.3), получим

$$\sum_{j=1}^{n}\left(1+\delta\sum_{i=1}^{n}\frac{x_j}{x_i}+\gamma\sum_{i=1}^{n}\frac{y_j}{y_i}+\mu\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{x_j}{x_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{y_j}{y_i}\right)\right)^{-1}=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{4}x_{ij}^{-1}\right)^{-1}\le$$

$$\le\left(\left(\sum_{j=1}^{n}x_{1j}\right)^{-1}+\left(\sum_{j=1}^{n}x_{2j}\right)^{-1}+\left(\sum_{j=1}^{n}x_{3j}\right)^{-1}+\left(\sum_{j=1}^{n}x_{4j}\right)^{-1}\right)^{-1}\le\left(\frac{1}{n}+\delta+\gamma+\mu\right)^{-1},$$

так как

$$\sum_{j=1}^{n}x_{4j}=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{x_j}{x_i}\right)^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{y_j}{y_i}\right)^{-1}\le\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{x_j}{x_i}\right)^{-1}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{y_j}{y_i}\right)^{-1}=1.\ \blacksquare$$

При введении дополнительных ограничений можно усилить неравенство (2.1.10).

Теорема 2.1.6 [20]. Пусть δ, γ, μ – произвольные неотрицательные действительные числа и $x, y\in\mathbf{R}_{+}^{n}$ такие, что выполняется одно из условий

а) $x_1\le x_2\le\ldots\le x_n$ и $y_1\ge y_2\ge\ldots\ge y_n$

или

б) $x_1\ge x_2\ge\ldots\ge x_n$ и $y_1\le y_2\le\ldots\le y_n$.

Тогда справедливо неравенство

$$\sum_{j=1}^{n}\left(1+\delta\sum_{i=1}^{n}\frac{x_j}{x_i}+\gamma\sum_{i=1}^{n}\frac{y_j}{y_i}+\mu\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{x_j}{x_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{y_j}{y_i}\right)\right)^{-1}\le\left(\frac{1}{n}+\delta+\gamma+n\mu\right)^{-1}. \quad (2.1.11)$$

Доказательство. Для определенности предположим, что выполняется условие а). Покажем, что в этом случае имеет место неравенство

$$n\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\le\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right), \quad (2.1.12)$$

где $a_i=\dfrac{1}{x_i}, b_i=\dfrac{1}{y_i}$, $i=\overline{1,n}$. Из условия а) теоремы следует, что существует такой номер r, $1\le r\le n$, что

$$\begin{aligned}&na_k-\sum_{i=1}^{n}a_i\ge 0,\ \ k=\overline{1,r},\\ &na_k-\sum_{i=1}^{n}a_i\le 0,\ \ k=\overline{r+1,n}.\end{aligned} \quad (2.1.13).$$

Неравенство (2.1.12) запишем в эквивалентной форме

$$\sum_{k=1}^{r} b_k \left(na_k - \sum_{i=1}^{n} a_i \right) \le \sum_{k=r+1}^{n} b_k \left(\sum_{i=1}^{n} a_i - na_k \right).$$

Так как

$$\sum_{k=1}^{r} \left(na_k - \sum_{i=1}^{n} a_i \right) = \sum_{k=r+1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i - na_k \right),$$

то из условия $b_1 \le b_2 \le \ldots \le b_n$ немедленно следует (2.1.12). Повторяя доказательство предыдущей теоремы с учетом неравенства (2.1.12), легко убеждаемся в справедливости (2.1.11). ■

Замечание 2.1.1. Из доказательства теоремы 2.1.6 следует, что условие монотонности b_i в предположении, что последовательность a_i монотонно убывает, можно заменить более слабым условием, а именно

$$\max\left(b_i : i = \overline{1,r} \right) \le \min\left(b_i : i = \overline{r+1,n} \right),$$

где r определяется таким образом, чтобы выполнялось неравенство (2.1.13). Если же последовательности a_i, b_i одновременно монотонно возрастают или убывают, то неравенство (2.1.12) необходимо заменить на противоположное.

Как видно из доказательства теоремы 2.1.5, усиление неравенства (2.1.10) возможно за счет более точной оценки сверху выражения

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_j}{x_i} \right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{y_j}{y_i} \right)^{-1} = \frac{x_1^{-1} y_1^{-1} + x_2^{-1} y_2^{-1} + \ldots + x_n^{-1} y_n^{-1}}{\left(x_1^{-1} + x_2^{-1} + \ldots + x_n^{-1} \right)\left(y_1^{-1} + y_2^{-1} + \ldots + y_n^{-1} \right)}.$$

Если $x_i > 0,\ y_i > 0$ – произвольные, то оценка сверху этого выражения единицей неулучшаемая. Усиление оценки возможно в предположении, что $n > 1$ и $\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n \right)$ принадлежит области

$$D = \left\{ 0 < x \le x_i^{-1} \le X, \quad 0 < y \le y_i^{-1} \le Y, \quad i = \overline{1,n} \right\}.$$

Такие ограничения естественны для наших целей .

Найдем наибольшее значение функции

$$f(z) = \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n}{\left(x_1 + x_2 + \ldots + x_n \right)\left(y_1 + y_2 + \ldots + y_n \right)}, \quad z = \left(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n \right), \tag{2.1.14}$$

в замкнутой области

$$D=\left\{\ 0<x\le x_i\le X,\quad 0<y\le y_i\le Y,\quad i=\overline{1,n}\ \right\} \tag{2.1.15}$$

в предположении, что $n>1$. Экстремальные точки $f(z)$ внутри D являются решением системы уравнений

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}=\frac{y_i(x_1+x_2+\ldots+x_n)-(x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n)}{(x_1+x_2+\ldots+x_n)^2(y_1+y_2+\ldots+y_n)}=0,\qquad i=\overline{1,n},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y_i}=\frac{x_i(y_1+y_2+\ldots+y_n)-(x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n)}{(x_1+x_2+\ldots+x_n)(y_1+y_2+\ldots+y_n)^2}=0,\qquad i=\overline{1,n},$$

откуда

$$y_i=\frac{x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n}{x_1+x_2+\ldots+x_n}=v,\quad x_i=\frac{x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n}{y_1+y_2+\ldots+y_n}=u,\quad i=\overline{1,n},$$

где $x<u<X$, $y<v<Y$. Пусть $z_0=\left(\underbrace{uu,\ldots,u}_{n},\underbrace{v,v,\ldots,v}_{n}\right)$. Легко вычислить, что

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\right|_{z=z_0}=\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y_i\partial y_j}\right|_{z=z_0}=0,\quad i,j=\overline{1,n},\qquad \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial y_i}\right|_{z=z_0}=\frac{n-1}{n^3uv},\quad i=\overline{1,n},$$

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial y_j}\right|_{z=z_0}=-\frac{1}{n^3uv},\quad i,j=\overline{1,n},\quad i\ne j\,.$$

Квадратическая форма, составленная из этих производных,

$$F(\xi,\eta)=\frac{n-1}{n^3uv}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\eta_i-\frac{1}{n^3uv}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\ne j}}^{n}\xi_i\eta_j \tag{2.1.16}$$

не является знакоопределенной, так как, положив $\xi_i=\eta_i=0$, $i=\overline{2,n}$, $\xi_1=\eta_1=1$, получим $F(\xi,\eta)>0$; если же $\xi_1=1$, $\xi_i=0$, $i=\overline{2,n}$, $\eta_i=0$, $i\ne 2$, $\eta_2=1$, то значение $F(\xi,\eta)<0$.

Таким образом, внутри области D функция $f(z)$ экстремума не имеет.

Для изучения поведения функции $f(z)$ на границе области D рассмотрим наборы индексов

$I_x=\left\{\ i\in\mathbf{N}: x_i=x_i^*,\ где\ x_i^*=x\ или\ X\ \right\}$,

$I_y=\left\{\ i\in\mathbf{N}: y_i=y_i^*,\ где\ y_i^*=y\ или\ Y\ \right\}$, $\quad I=\{\,1,2,\ldots,N\,\}$,

$I_1 = I_x \bigcap I_y, \;\; I_2 = I_x - \left(I_x \bigcap I_y\right), \;\; I_3 = I_y - \left(I_x \bigcap I_y\right), \;\; I_3 = I - \left(I_x \bigcap I_y\right).$

Пусть $k = \overset{\#}{I}_x + \overset{\#}{I}_y$, где $\overset{\#}{I}_t$ – количество элементов множества I_t. Значение функции $f(z)$ на $(2n-k)$-мерной грани $2n$-мерного прямоугольного параллелепипеда D (2.1.15) равно

$$g(z) = \frac{\sum\limits_{i \in I_1} x_i^* \, y_i^* + \sum\limits_{i \in I_2} x_i^* \, y_i + \sum\limits_{i \in I_3} x_i \, y_i^* + \sum\limits_{i \in I_4} x_i \, y_i}{\left(\sum\limits_{i \in I_x} x_i^* + \sum\limits_{i \notin I_x} x_i\right)\left(\sum\limits_{i \in I_y} y_i^* + \sum\limits_{i \notin I_y} y_i\right)}. \qquad (2.1.17)$$

Каждая точка $z \in \partial D$ принадлежит одной из граней

$\Gamma_1 = \{ z \in \partial D : I_2 = I_3 = \varnothing, I_4 \neq \varnothing \},$

$\Gamma_2 = \{ z \in \partial D : \; I_4 \neq \varnothing, \; I_2 \neq \varnothing \; \textit{или} \; I_3 \neq \varnothing \},$

$\Gamma_3 = \{ z \in \partial D : \; I_4 \neq \varnothing, \; I_2 \neq \varnothing, \; I_3 \neq \varnothing \},$

$\Gamma_4 = \{ z \in \partial D : \; I_4 \neq \varnothing, \; I_2 \bigcup I_3 \neq \varnothing, \;\; I_2 = \varnothing \; \textit{или} \; I_3 = \varnothing \},$

$\Gamma_2 = \{ z \in \partial D : \; I_2 = I_3 = I_4 = \varnothing \}.$

Пусть $z \in \Gamma_1$. Тогда

$$g(z) = \frac{\sum\limits_{i \in I_1} x_i^* \, y_i^* + \sum\limits_{i \in I_4} x_i \, y_i}{\left(\sum\limits_{i \in I_1} x_i^* + \sum\limits_{i \in I_4} x_i\right)\left(\sum\limits_{i \in I_1} y_i^* + \sum\limits_{i \in I_4} y_i\right)}.$$

Как и раньше, решая систему уравненений $\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x_j} = 0, \\ \dfrac{\partial g}{\partial y_j} = 0, \end{cases}$ где $j \in I_4$, находим

$$x_j = \left(\sum_{i \in I_1} x_i^* \, y_i^*\right)\left(\sum_{i \in I_1} y_i^*\right)^{-1}, \quad y_j = \left(\sum_{i \in I_1} x_i^* \, y_i^*\right)\left(\sum_{i \in I_1} x_i^*\right)^{-1}.$$

Аналогично проверяется, что квадратическая форма вида (2.1.16), составленная из вторых производных функции g, не является знакоопределенной. Поэтому внутри граней Γ_1 функция g не имеет экстремума.

Пусть $z \in \Gamma_2$ и для определенности $I_2 \neq \varnothing$.Тогда для функции g вида (2.1.17), где для сокращения записи индексы суммирования опущены, в предположении, что $j \in I_2$ и $k \in I_4$, имеем

$$\frac{\partial g}{\partial y_j} = \frac{x_j^*\left(\sum y_i^* + \sum y_i\right) - \left(\sum y_i^* y_i^* + \sum x_i^* y_i + \sum x_i y_i^* + \sum x_i y_i\right)}{\left(\sum x_i^* + \sum x_i\right)\left(\sum y_i^* + \sum y_i\right)^2} = 0,$$

$$\frac{\partial g}{\partial y_k} = \frac{x_k\left(\sum y_i^* + \sum y_i\right) - \left(\sum x_i^* y_i^* + \sum x_i^* y_i + \sum x_i y_i^* + \sum x_i y_i\right)}{\left(\sum x_i^* + \sum x_i\right)\left(\sum y_i^* + \sum y_i\right)^2} = 0,$$

откуда

$$x_k = x_j^* = x, \quad j \in I_2,\ k \in I_4, \text{ или } x_k = x_j^* = X, \quad j \in I_2,\ k \in I_4,$$

т.е. точка, подозреваемая на экстремум функции $g(z)$, должна находиться на границе рассматриваемой грани. Мы же ищем максимум функции внутри грани.

К аналогичной ситуации приходим, рассматривая $z \in \Gamma_3$. Действительно, в этом случае

$$g(z) = \frac{\sum\limits_{i \in I_1} x_i^* y_i^* + \sum\limits_{i \in I_2} x_i^* y_i + \sum\limits_{i \in I_3} x_i y_i^*}{\left(\sum\limits_{i \in I_x} x_i^* + \sum\limits_{i \in I_3} x_i\right)\left(\sum\limits_{i \in I_y} y_i^* + \sum\limits_{i \in I_2} y_i\right)},$$

и для $j \in I_2$ имеем

$$\frac{\partial g}{\partial y_j} = \frac{x_j^*\left(\sum y_i^* + \sum y_i\right) - \left(\sum x_i^* y_i^* + \sum x_i^* y_i + \sum x_i y_i^*\right)}{\left(\sum x_i^* + \sum x_i\right)\left(\sum y_i^* + \sum y_i\right)^2} = 0,$$

откуда находим, что $x_j^* = x, \quad j \in I_2$, или $x_j^* = X, \quad j \in I_2$.

Пусть для определенности $x_j^* = x, \quad j \in I_2$. Тогда

$$x\left(\sum_{i \in I_y} y_i^* + \sum_{i \in I_2} y_i\right) = \sum_{i \in I_1} x_i^* y_i^* + \sum_{i \in I_3} x_i y_i^* + x \sum_{i \in I_2} y_i$$

или

$$\sum_{i \in I_1}\left(x - x_i^*\right) y_i^* + \sum_{i \in I_3}\left(x - x_i^*\right) y_i^* = 0.$$

Так как $x - x_i^* \le 0$ и $x - x_i \le 0$, то $x_i = x$ для $i \in I_3$.Следовательно, критические точки, подозреваемые на экстремум $g(z)$, принадлежат границе рассматриваемой грани.

Пусть теперь $z \in \Gamma_4$ и для определенности $I_2 \ne \varnothing$, тогда

$$g(z) = \frac{\sum\limits_{i\in I_1} x_i^* y_i^* + \sum\limits_{i\in I_2} x_i^* y_i}{\left(\sum\limits_{i\in I} x_i^*\right)\left(\sum\limits_{i\in I_1} y_i^* + \sum\limits_{i\in I_2} y_i\right)}$$

и для $j \in I_2$ имеем

$$\frac{\partial g}{\partial y_j} = \frac{x_j^*\left(\sum y_i^* + \sum y_i\right) - \left(\sum x_i^* y_i^* + \sum x_i^* y_i\right)}{\left(\sum x_i^*\right)\left(\sum y_i^* + \sum y_i\right)^2} = 0,$$

откуда $x_j^* = x$, $j \in I_2$, или $x_j^* = X$, $j \in I_2$.

Пусть для определенности $x_j^* = x$, $j \in I_2$, тогда

$$x\left(\sum_{i\in I_1} y_i^* + \sum_{i\in I_2} y_i\right) = \sum_{i\in I_1} x_i^* y_i^* + x\sum_{i\in I_2} y_i \qquad \text{или} \qquad \sum_{i\in I_1}\left(x - x_i^*\right) y_i^* = 0,$$

так как $x_i^* \ge x$, то необходимо $x_j^* = x,\ j \in I$. В этом случае $g(z) = \frac{1}{n}$. Покажем, что в точках Γ_5 функция $f(z)$ принимает не меньшее? значение. Так как $f(z)$ непрерывна в ограниченной области, то она достигает наибольшего значения в одной из вершин (2.1.15), т.е. в случае, когда $z \in \Gamma_5$.

Найдем наибольшее значение функции дискретного аргумента

$$f\left(z^*\right) = \frac{x_1^* y_1^* + x_2^* y_2^* + \ldots + x_n^* y_n^*}{\left(x_1^* + x_2^* + \ldots + x_n^*\right)\left(y_1^* + y_2^* \ldots + y_n^*\right)},$$

где x_i^* равно либо x, либо X, а y_i^* – y или Y. Пусть u штук x_i^* равно x, v штук y_i^* – y и w – количество индексов i, таких, что одновременно $x_i^* = x$ и $y_i^* = y$. Тогда

$$f\left(z^*\right) = \frac{wxy + (u-w)xY + (v-w)Xy + (n + w - (u+v))XY}{(ux + (n-u)X)(vy + (n-v)Y)}$$

или после несложных преобразований

$$f\left(z^*\right)=\frac{w(X-x)(Y-y)-Y(X-x)u-X(Y-y)v+nXY}{uv(X-x)(Y-y)-nuY(X-x)-nvX(Y-y)+n^2XY}. \qquad (2.1.18).$$

Максимальное значение по w последнего выражения достигается тогда, когда $w=\min(u,v)$. Рассмотрим функцию (2.1.18), где вместо w взято $w=\min(u,v)$ и обозначим ее $h(u,v)$. Фиксируем u. Докажем, что $h(u,u)\geq h(u,v)$, если $v\leq u$ или $v\geq u$. При введении обозначений

$$a_1=(X-x)(Y-y),\ a_2=Y(X-x),\ a_3=X(Y-y),\ a_4=nXY$$

в случае $v\leq u$ имеем

$$h(u,v)=\frac{a_1v+(a_4-a_2u-a_3v)}{a_1uv+n(a_4-a_2u-a_3v)}=\frac{1}{n}+a_1\frac{v-\frac{uv}{n}}{a_1uv+n(a_4-a_2u-a_3v)}.$$

Поэтому неравенство $h(u,u)\geq h(u,v)$ эквивалентно неравенству

$$\left(v-\frac{u\cdot v}{n}\right)\left(a_1u^2+n(a_4-a_2u-a_3u)\right)\leq\left(u-\frac{u^2}{n}\right)\left(a_1uv+n(a_4-a_2u-a_3v)\right).$$

Раскрывая скобки и производя сокращения, получим

$$\left(a_2u^2-(na_2+a_4)u+na_4\right)(u-v)\geq 0$$

или с учетом принятых ранее обозначений

$$Y(n-u)(nX-(X-x)u)(u-v)\geq 0,$$

что всегда выполняется, так как $0\leq u\leq n$ и $v\leq u$. Аналогичным образом получим неравенство

$$(v-u)y(nX-(X-x)u)\geq 0 \text{ в случае } v\geq u.$$

Таким образом, максимальное значение функции $h(u,v)$ в квадрате $[0,n]\times[0,n]$ достигается тогда, когда $u=v$. Пусть $u=v=t$. Рассматривая

$$h(t)=h(t,t)=\frac{(a_1-(a_2+a_3))\,t+a_4}{a_1t^2+n(a_4-t(a_2+a_3))} \qquad (2.1.19)$$

как функцию непрерывного аргумента t, $0\leq t\leq n$, исследуем ее на максимум. После несложных вычислений находим, что условие $\frac{dh}{dt}=0$ эквивалентно

$$(a_2+a_3-a_1)t^2-2a_4t+na_4=0,$$

откуда с учетом ранее принятых обозначений имеем

$$t_1 = \frac{n}{1+\sqrt{\dfrac{xy}{XY}}} \quad \text{и} \quad t_2 = \frac{n}{1-\sqrt{\dfrac{xy}{XY}}} > n.$$

Так как $h(t) \geq \dfrac{1}{n}$ для $0 \leq t \leq n$ и $h(0) = h(n) = \dfrac{1}{n}$, то $t = t_1$ является точкой максимума функции $h(t)$. Пусть $n_1 = [t_1]$ и $n_2 = [t_1]+1$, где $[t_1]$ – целая часть t_1. Максимум (2.1.19), как функции дискретного аргумента t, $0 \leq t \leq n$, $t \in \mathbf{Z}$, достигается либо в точке $t = n_1$, либо в точке $t = n_2$. Чтобы установить, в какой именно точке достигается максимум, рассмотрим неравенство

$$h(s) - h(s+1) \geq 0,$$

которое после несложных вычислений приводится к виду

$$((XY - xy)s^2 - ((2n-1)XY + xy)s + n(n-1)XY \leq 0,$$

откуда $s_1 \leq s \leq s_2$, где

$$s_{1,2} = \frac{n}{1-\varepsilon} - \frac{1}{2} \mp \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{4n^2\varepsilon}{(1-\varepsilon)^2}}, \quad \varepsilon = \frac{xy}{XY}.$$

Очевидно, что $s_1 < n\left(1+\sqrt{\varepsilon}\right)^{-1} < s_2$ и $n\left(1+\sqrt{\varepsilon}\right)^{-1} - 1 < s_1$.

Следовательно, $h(t)$ как функция дискретного аргумента t, $0 \leq t \leq n$, $t \in \mathbf{Z}$, достигает наибольшего значения в точке n_ε, являющейся наименьшим целым числом, удовлетворяющим неравенству $n_\varepsilon \geq s_1$.

Таким образом , доказана

Теорема 2.1.7 [27]. Справедливо неравенство

$$\frac{x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n}{(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)(y_1 + y_2 + \ldots + y_n)} \leq \frac{(n-n_\varepsilon)XY + n_\varepsilon xy}{((n-n_\varepsilon)X + n_\varepsilon x)((n-n_\varepsilon)Y + n_\varepsilon y)}, \tag{2.1.20}$$

где $n > 1$, $0 < x \leq x_i \leq X$, $0 < y \leq y_i \leq Y$, $i = \overline{1,n}$, и n_ε – наименьшее целое число, такое, что

$$n_\varepsilon \geq \frac{n}{1-\varepsilon} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{4n^2\varepsilon}{(1-\varepsilon)^2}}, \quad \varepsilon = \frac{xy}{XY}. \tag{2.1.21}$$

Повторяя доказательство теоремы 2.1.5 с учетом неравенства (2.1.20), имеем

Теорема 2.1.8. Для произвольных неотрицательных действительных чисел δ, γ, μ и x_i, y_i, $i=\overline{1,n}$, принадлежащих области

$$D = \left\{\, 0 < x \le x_i \le X, \quad 0 < y \le y_i \le Y, \quad i=\overline{1,n} \,\right\}, \tag{2.1.22}$$

справедливо неравенство

$$\sum_{j=1}^{n}\left(1+\delta\sum_{i=1}^{n}\frac{x_j}{x_i}+\gamma\sum_{i=1}^{n}\frac{y_j}{y_i}+\mu\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{x_j}{x_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{y_j}{y_i}\right)\right)^{-1} \le \left(\frac{1}{n}+\delta+\gamma+n_D\mu\right)^{-1}, \tag{2.1.23}$$

где

$$n_D = \frac{\left((n-n_\varepsilon)X+n_\varepsilon x\right)\left((n-n_\varepsilon)Y+n_\varepsilon y\right)}{(n-n_\varepsilon)XY+n_\varepsilon xy}, \tag{2.1.24}$$

n_ε – наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству (2.1.21).

§ 2. Необходимые признаки сходимости ВЦД с положительными действительными компонентами.

Как и в одномерном случае, более компактно выглядят формулировки признаков сходимости ВЦД с частными числителями, равными единице

$$b_0 + \mathop{D}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{1}{b_{i(k)}}. \tag{2.2.1}$$

Произвольную ветвящуюся цепную дробь с положительными действительными элементами

$$b_0 + \mathop{D}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}} \tag{2.2.2}$$

можно привести к виду (2.2.1), используя эквивалентные преобразования (1.5.4), где $\rho_{i(k)}$ определяются согласно (1.5.12).

Теорема 2.2.1[17,20]. ВЦД (2.2.1) с положительными действительными частными знаменателями $b_{i(k)} > 0$, $k = 1,2,...,$ $i_p = \overline{1,N}$, $p = \overline{1,k}$ расходится, если

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{k=2}^{2m+1} \beta_{k-1} \left(\beta_k + \frac{N}{\alpha_{k+1}} \dotplus \frac{N}{\beta_{k+2}} \dotplus \frac{N}{\alpha_{k+3}} \dotplus \cdots \dotplus \frac{N}{\beta_s} \right) < \infty, \tag{2.2.3}$$

где N – число веток ветвления дроби (2.2.1),

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \min\left(b_{i(k)} : i_p = \overline{1,N},\ p = \overline{1,k} \right), \\ \beta_k &= \max\left(b_{i(k)} : i_p = \overline{1,N},\ p = \overline{1,k} \right), \end{aligned} \quad k = 1,2,..., \tag{2.2.4}$$

– минимальный и соответственно максимальный частный знаменатель этой дроби на k-м этаже,

$$s = s(k,m) = 2m + k - 2\left[\frac{k}{2}\right], \quad k = \overline{2, 2m+1}, \tag{2.2.5}$$

$\left[\frac{k}{2}\right]$ – целая часть $\frac{k}{2}$.

Доказательство. Из формулы (1.3.4) и рекуррентных соотношений

$$Q_{i(n)}^{(n)} = b_{i(n)}, \quad Q_{i(k)}^{(n)} = b_{i(k)} + \sum_{i_{k+1}=1}^{N} \frac{1}{Q_{i(k+1)}^{(n+1)}}, \tag{2.2.6}$$

$$n = 1, 2, \ldots, \quad k = \overline{1, n-1}, \quad i_p = \overline{1, N}, \quad p = \overline{1, n},$$

следует, что разность двух соседних подходящих дробей $f_{2m+1} - f_{2m}$ равна

$$f_{2m+1} - f_{2m} = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_{2m+1}=1}^{N} \left(\prod_{r=1}^{2m+1} Q_{i(r)}^{(2m+1)} \right)^{-1} \left(\prod_{r=1}^{2m} Q_{i(r)}^{(2m)} \right)^{-1} =$$

$$= \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_{2m+1}=1}^{N} \left(Q_{i(1)}^{(2m+1)} \right)^{-1} \prod_{r=1}^{m} \left(Q_{i(2r)}^{(2m+1)} Q_{i(2r+1)}^{(2m+1)} \right)^{-1} \prod_{r=1}^{m} \left(Q_{i(2r-1)}^{(2m)} Q_{i(2r)}^{(2m)} \right)^{-1} =$$

$$= \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_{2m+1}=1}^{N} \frac{1}{Q_{i(1)}^{(2m+1)}} \prod_{k=2}^{2m+1} \left(b_{i(k-1)} Q_{i(k)}^{(s)} + \sum_{j=1}^{N} \frac{Q_{i(k)}^{(s)}}{Q_{i(k-1)j}^{(s)}} \right)^{-1}.$$

Здесь с учетом (2.2.6) расписаны все $Q_{i(2r)}^{(2m+1)}$, $Q_{i(2r-1)}^{(2m+1)}$, а s определено согласно (2.2.5). Пусть

$$L_k = \max \left(b_{i(k-1)} Q_{i(k)}^{(s)} : \quad i_p = \overline{1, N}, \ p = \overline{1, k} \right), \quad . \qquad k = \overline{2, 2m+1}. \tag{2.2.7}$$

Для получения оценки снизу разности $f_{2m+1} - f_{2m}$ оценим снизу выражения

$$\sum_{i_k=1}^{N} \left(L_k + \sum_{j=1}^{N} \frac{Q_{i(k)}^{(s)}}{Q_{i(k-1)j}^{(s)}} \right)^{-1}, \qquad k = \overline{2, 2m+1}.$$

Используя неравенство (2.1.6), получим

$$\sum_{i_k=1}^{N} \left(L_k + \sum_{j=1}^{N} \frac{Q_{i(k)}^{(s)}}{Q_{i(k-1)j}^{(s)}} \right)^{-1} \geq \frac{1}{1 + L_k}, \quad k = \overline{2, 2m+1}. \tag{2.2.8}$$

Последовательно применяя (2.2.8), имеем

$$f_{2m+1} - f_{2m} \geq \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_{2m+1}=1}^{N} \frac{1}{Q_{i(1)}^{(2m+1)}} \prod_{k=2}^{2m+1} \left(L_k + \sum_{j=1}^{N} \frac{Q_{i(k)}^{(s)}}{Q_{i(k-1)j}^{(s)}} \right)^{-1} \geq$$

$$\geq \sum_{i_1=1}^{N} \frac{1}{Q_{i(1)}^{(2m+1)}} \prod_{k=2}^{2m+1} \frac{1}{1 + L_k} \geq C \prod_{k=2}^{2m+1} \frac{1}{1 + L_k},$$

где C – положительная константа, такая, что $C \leq \sum_{i_1=1}^{N} \left(Q_{i(1)}^{(2m+1)} \right)^{-1}$. В частности, как следует из свойства вилки (1.3.5), в качестве C можно взять вторую подходящую дробь ВЦД (2.2.1) без свободного члена.

Вычислим максиманту (см. определение 1.4.1) для ВЦД. С учетом утверждения 1.3.2 и обозначений (1.1.8) имеем

$$Q_{i(k)}^{(s)} = b_{i(k)} + \sum_{i_{k+1}=1}^{N} \frac{1}{b_{i(k+1)}} + \sum_{i_{k+2}=1}^{N} \frac{1}{b_{i(k+2)}} + \cdots + \sum_{i_s=1}^{N} \frac{1}{b_{i(s)}} \le$$

$$\le \beta_k + \sum_{i_{k+1}=1}^{N} \frac{1}{\alpha_{k+1}} + \sum_{i_{k+2}=1}^{N} \frac{1}{\beta_{k+2}} + \sum_{i_{k+3}=1}^{N} \frac{1}{\alpha_{k+3}} + \cdots + \sum_{i_s=1}^{N} \frac{1}{\beta_s} =$$

$$= \beta_k + \frac{N}{\alpha_{k+1}} + \frac{N}{\beta_{k+2}} + \frac{N}{\alpha_{k+3}} + \cdots + \frac{N}{\beta_s}.$$

Таким образом,

$$f_{2m+1} - f_{2m} \ge C \prod_{k=2}^{2m+1} (1 + L_k)^{-1} \ge C \exp\left(- \sum_{k=2}^{2m+1} L_k \right) =$$

$$= C \exp\left(- \sum_{k=2}^{2m+1} \max\left(b_{i(k-1)} Q_{i(k)}^{(s)} \right) \right) \ge$$

$$\ge C \exp\left(- \sum_{k=2}^{2m+1} \beta_{k-1} \left(\beta_k + \frac{N}{\alpha_{k+1}} + \frac{N}{\beta_{k+2}} + \frac{N}{\alpha_{k+3}} + \cdots + \frac{N}{\beta_s} \right) \right).$$

Введем обозначение

$$\gamma_{2m+1} = \sum_{k=2}^{2m+1} \beta_{k-1} \left(\beta_k + \frac{N}{\alpha_{k+1}} + \frac{N}{\beta_{k+2}} + \frac{N}{\alpha_{k+3}} + \cdots + \frac{N}{\beta_s} \right), \quad k = \overline{2, 2m+1}. \qquad (2.2.9)$$

Последовательность $\{\gamma_{2m+1}\}$ монотонно возрастает, так как согласно (2.2.5) $s(k, m+1) = s(k, m) + 2 = s + 2$ и с учетом свойства вилки (1.3.5)

$$\beta_k + \frac{N}{\alpha_{k+1}} + \frac{N}{\beta_{k+2}} + \frac{N}{\alpha_{k+3}} + \cdots + \frac{N}{\beta_{s+2}} > \beta_k + \frac{N}{\alpha_{k+1}} + \frac{N}{\beta_{k+2}} + \frac{N}{\alpha_{k+3}} + \cdots + \frac{N}{\beta_s},$$

$k = \overline{2, 2m+1}$. Поэтому предел (2.2.9) при $m \to \infty$ всегда существует. В силу условия (2.2.3) он конечен. Пусть $\gamma = \lim\limits_{m \to \infty} \gamma_{2m+1}$, тогда

$$f_{2m+1} - f_{2m} \ge C \exp(-\gamma) > 0,$$

и поэтому ВЦД (2.2.1) расходится. ■

Замечание 2.2.1. Оценку (2.2.8) можно получить и без применения неравенства (2.1.6). Достаточно заметить, что

$$\sum_{i_k=1}^{N}\left(b_{i(k-1)}Q_{i(k)}^{(s)}+\sum_{j=1}^{N}\frac{Q_{i(k)}^{(s)}}{Q_{i(k-1)j}^{(s)}}\right)^{-1}=\left(\sum_{i_k=1}^{N}\frac{1}{Q_{i(k)}^{(s)}}\right)\left(b_{i(k-1)}+\sum_{i_k=1}^{N}\frac{1}{Q_{i(k)}^{(s)}}\right)^{-1}\geq$$

$$\geq\frac{1}{1+M_k}\geq\frac{1}{1+L_k},$$

где

$$M_k=\max\left(\frac{b_{i(k-1)}}{\sum_{i_k=1}^{N}\frac{1}{Q_{i(k)}^{(s)}}}:\ i_p=\overline{1,N},\ p=\overline{1,k-1}\right)\tag{2.2.10}$$

а L_k определяется согласно (2.2.7).

Теорема 2.2.2. ВЦД (2.2.1) с действительными положительными частными знаменателями расходится, если ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k\tag{2.2.11}$$

сходится, где β_k, $k=1,2,\ldots,$ определяются согласно (2.2.4) [11,20].

Доказательство. Утверждение теоремы 2.2.2 является следствием теоремы 2.2.1. Достаточно доказать, что из сходимости ряда (2.2.11) следует выполнение условия (2.2.3). С учетом утверждения 1.3.2 имеем

$$\sum_{k=2}^{2m+1}\beta_{k-1}\left(\beta_k+\frac{N}{\alpha_{k+1}}+\frac{N}{\beta_{k+2}}+\frac{N}{\alpha_{k+3}}+\cdots+\frac{N}{\beta_s}\right)\leq$$

$$\leq\sum_{k=2}^{2m+1}\beta_{k-1}\left(\beta_k+\frac{N}{0}+\frac{N}{\beta_{k+2}}+\frac{N}{0}+\cdots+\frac{N}{\beta_s}\right)=$$

$$=\sum_{k=2}^{2m+1}\beta_{k-1}(\beta_k+\beta_{k+2}+\ldots+\beta_s)<\left(\sum_{k=2}^{\infty}\beta_k\right)^2=C<\infty.$$

Так как предел последовательности (2.2.9) всегда существует (см. конец доказательства теоремы 2.2.1), то отсюда следует, что он ограничен, т.е. выполняется условие (2.2.3). ■

Можно сформулировать необходимые признаки сходимости ВЦД общего вида (2.2.2), аналогичные теоремам 2.2.1 и 2.2.2, если предварительно, используя эквивалентные преобразования (1.5.4), привести ее к виду (2.2.1). Однако, как показывают формулы (1.5.14), вид коэффициентов $\alpha_{i(k)}$ дроби (1.5.13), эквивалентной (2.2.2), с ростом k очень усложняется. Поэтому целесообразно, используя другие подходы, сформулировать более простые признаки сходимости для ВЦД (2.2.2) общего вида. Аналогичная задача рассматривалась и в теории непрерывных дробей. Так, для цепной дроби общего вида (1.2.1) с положительными действительными элементами по сравнению с критерием Зейделя более эффективными является достаточные признаки сходимости Штольца, Прингсгейма, Арндта и др.

Теорема 2.2.3. ВЦД (2.2.2) с положительными элементами расходится, если

$$\sum_{k=2}^{2m+1}\frac{1}{\nu_k}\left(1+\frac{N\mu_{k+1}}{1}\underset{+}{}\frac{N\nu_{k+2}}{1}\underset{+}{}\frac{N\mu_{k+3}}{1}\underset{+\cdots+}{}\frac{N\nu_s}{1}\right)<\infty, \qquad (2.2.12)$$

где N – число веток ветвления дроби (2.2.2),

$$c_{i(k)}=\frac{a_{i(k)}}{b_{i(k-1)}b_{i(k)}}, \qquad k=2,3,\ldots,\quad i_p=\overline{1,N},\ p=\overline{1,k}, \qquad (2.2.13)$$

$$\begin{cases}\nu_k=\min\left(c_{i(k)}:\ i_p=\overline{1,N},\ p=\overline{1,k},\right),\\ \mu_k=\max\left(c_{i(k)}:\ i_p=\overline{1,N},\ p=\overline{1,k},\right),\end{cases}\quad k=2,3,\ldots, \qquad (2.2.14)$$

а s определяется согласно (2.2.5).

Доказательство аналогично изложенному в теореме 2.2.1. Поэтому остановимся лишь на отличительных особенностях В нашем случае для разности двух соседних подходящих дробей ВЦД (2.2.2) согласно (1.3.4) справедлива формула

$$f_{2m+1}-f_{2m}=\sum_{i_1,i_2,\ldots,i_{2m+1}=1}^{N}\frac{\prod_{r=1}^{2m+1}a_{i(r)}}{\prod_{r=1}^{2m+1}Q_{i(r)}^{(2m+1)}\prod_{r=1}^{2m}Q_{i(r)}^{(2m)}}=$$

$$= \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_{2m+1}=1}^{N} \frac{a_{i(1)}}{Q_{i(1)}^{(2m+1)}} \prod_{k=2}^{2m+1} \left(\frac{b_{i(k-1)}}{a_{i(k)}} Q_{i(k)}^{(s)} + \sum_{j=1}^{N} \frac{Q_{i(k)}^{(s)}}{a_{i(k)}} \frac{a_{i(k-1)j}}{Q_{i(k-1)j}^{(s)}} \right),$$

где s определяется согласно (2.2.5). Пусть

$$L_k = \max \left(\frac{b_{i(k-1)}}{a_{i(k)}} Q_{i(k)}^{(s)} : \ i_p = \overline{1,N}, \ p = \overline{1,k} \right), \qquad k = \overline{2, 2m+1}.$$

Тогда используя эквивалентные преобразования (1.5.4) и (1.5.15), обозначения (2.2.13) и (2.2.14), получим

$$L_k = \max \left(\frac{1}{c_{i(k)}} \left(1 + \sum_{i_{k+1}=1}^{N} \frac{c_{i(k+1)}}{1} \mathop{+}\limits \sum_{i_{k+2}=1}^{N} \frac{c_{i(k+2)}}{1} + \cdots + \sum_{i_s=1}^{N} \frac{c_{i(s)}}{1} \right) \right) \le$$

$$\le \frac{1}{\nu_k} \left(1 + \frac{N\mu_{k+1}}{1} + \frac{N\nu_{k+2}}{1} + \frac{N\mu_{k+3}}{1} + \cdots + \frac{N\nu_s}{1} \right).$$

Т е о р е м а 2.2.4. Для ВЦД (2.2.1), где $b_{i(k)} > 0$, $k = 1, 2, \ldots$, $i_p = \overline{1,N}$, $p = \overline{1,k}$, независимо от того, сходится она или расходится

$$\lim_{m \to \infty} \sum_{k=2}^{2m+1} \beta_{k-1} \left(\beta_k + \frac{N}{\alpha_{k+1}} + \frac{N}{\beta_{k+2}} + \frac{N}{\alpha_{k+3}} + \cdots + \frac{N}{\alpha_{s-1}} + \frac{N}{\beta_s^*} \right) = \infty, \qquad (2.2.15)$$

и

$$\lim_{m \to \infty} \sum_{k=2}^{2m+1} \beta_{k-1} \left(\beta_k + \frac{N}{\alpha_{k+1}} + \frac{N}{\beta_{k+2}} + \frac{N}{\alpha_{k+3}} + \cdots + \frac{N}{\alpha_{r-1}} + \frac{N}{\beta_r^{**}} \right) = \infty, \qquad (2.2.16)$$

где α_k, β_k, $k = 1, 2, \ldots$, определяются согласно (2.2.4), s – согласно (2.2.5),

$$r = r(m,k) = 2m + k - 2\left[\frac{k+1}{2} \right], \qquad (2.2.17)$$

$$\begin{cases} \beta_{2m}^{*} = \beta_{2m}, \ \beta_{2m+1}^{*} = \beta_{2m+1} + N\alpha_{2m+2}^{-1}, \\ \beta_{2m-1}^{**} = \beta_{2m-1}, \ \beta_{2m}^{**} = \beta_{2m} + N\alpha_{2m+1}^{-1}. \end{cases} \qquad (2.2.18)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Оценим снизу разность $f_{2m+2} - f_{2m}$. С учетом формулы (1.3.4) имеем

$$f_{2m+2} - f_{2m} = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_{2m+1}=1}^{N} \frac{1}{Q_{i(1)}^{(2m+2)}} \prod_{k=2}^{2m+1} \left(b_{i(k-1)} Q_{i(k)}^{(p)} + \sum_{j=1}^{N} \frac{Q_{i(k)}^{(p)}}{Q_{i(k-1)j}^{(p)}} \right)^{-1},$$

где $p = 2m$, если k четное и $p = 2m+2$ в противном случае. Пусть, как и раньше, $L_k = \max\left(b_{i(k-1)} Q_{i(k)}^{(s)} : \ i_p = \overline{1,N},\ p = \overline{1,n} \right)$, $k = \overline{2,2m+1}$. Тогда, повторяя доказательство теоремы 2.2.1, получим

$$f_{2m+2} - f_{2m} \geq C \exp\left(-\sum_{k=2}^{2m+1} L_k \right).$$

Из (1.3.5) следует, что $f_{2m+2} - f_{2m} \to 0$ при $m \to \infty$. Поэтому $\sum_{k=2}^{2m+1} L_k \to \infty$ при $m \to \infty$. Оценим сверху L_k, $k = \overline{2,2m+1}$. Имеем

$$L_{2k+1} = \max\left(b_{i(2k)} Q_{i(2k+1)}^{(2m+2)} \right) \leq$$

$$\leq \beta_{2k} \left(\beta_{2k+1} + \frac{N}{\alpha_{2k+2}} \mathop{+}_{} \frac{N}{\beta_{2k+3}} \mathop{+}_{} \frac{N}{\alpha_{2k+4}} + \cdots + \frac{N}{\beta_{2m+1}} \mathop{+}_{} \frac{N}{\alpha_{2m+2}} \right),\ k = \overline{1,m},$$

$$L_{2k} = \max\left(b_{i(2k-1)} Q_{i(2k)}^{(2m)} \right) \leq$$

$$\leq \beta_{2k-1} \left(\beta_{2k} + \frac{N}{\alpha_{2k+1}} \mathop{+}_{} \frac{N}{\beta_{2k+2}} \mathop{+}_{} \frac{N}{\alpha_{2k+3}} + \cdots + \frac{N}{\alpha_{2m-1}} \mathop{+}_{} \frac{N}{\beta_{2m}} \right),\ k = \overline{2,m}.$$

Следовательно, выполняется условие (2.2.15).Аналогично, при оценке снизу разности $f_{2m-1} - f_{2m+1}$ с учетом того, что нечетные подходящие дроби ВЦД (2.2.1) сходятся, получим условие (2.2.16). Таким же образом для ВЦД (2.2.2) общего вида устанавливается

Т е о р е м а 2.2.5 Для ветвящейся цепной дроби (2.2.2) с положительными действительными элементами независимо от того, сходится она или расходится, выполняются условия

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{k=2}^{2m+1} \frac{1}{\nu_k} \left(1 + \frac{N\mu_{k+1}}{1} \mathop{+}_{} \frac{N\nu_{k+2}}{1} \mathop{+}_{} \frac{N\mu_{k+3}}{1} + \cdots + \frac{N\mu_{s-1}}{1} \mathop{+}_{} \frac{N\nu_s^*}{1} \right) = \infty, \quad (2.2.19)$$

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{k=2}^{2m+1} \frac{1}{\nu_k} \left(1 + \frac{N\mu_{k+1}}{1} \mathop{+}_{} \frac{N\nu_{k+2}}{1} \mathop{+}_{} \frac{N\mu_{k+3}}{1} + \cdots + \frac{N\mu_{r-1}}{1} \mathop{+}_{} \frac{N\nu_r^{**}}{1} \right) = \infty, \quad (2.2.20)$$

где ν_k, μ_k, $k = 2,3,\ldots$, определяются согласно (2.2.14), s – согласно (2.2.5), r – согласно (2.2.17) и

$$\begin{cases} \nu_{2m}^* = \nu_{2m},\ \nu_{2m+1}^* = \dfrac{\nu_{2m+1}}{1 + N\mu_{2m+2}}, \\ \nu_{2m-1}^{**} = \nu_{2m-1},\ \nu_{2m}^{**} = \dfrac{\nu_{2m}}{1 + N\mu_{2m+1}}. \end{cases} \quad (2.2.21)$$

§ 3. Достаточные признаки сходимости ветвящихся цепных дробей с положительными действительными членами

Теорема 2.3.1 [12,20]. Ветвящаяся цепная дробь

$$b_0 + \underset{k=1}{\overset{\infty}{D}} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{1}{b_{i(k)}} \tag{2.3.1}$$

с положительными действительными частными знаменателями $b_{i(k)} > 0$, $k = 1, 2, \ldots, \;\; i_p = \overline{1,N}, \;\; p = \overline{1,k}$, сходится, если

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{k=2}^{2m+1} \alpha_{k-1} \left(\alpha_k + \frac{N}{\beta_{k+1} + \frac{N}{\alpha_{k+2} + \frac{N}{\beta_{k+3} + \cdots + \frac{N}{\alpha_s}}}} \right) = \infty, \tag{2.3.2}$$

где N – число веток ветвления дроби (2.3.1), α_k, β_k определяются согласно (2.2.4), s – согласно (2.2.5).

Доказательство. Повторяя начало доказательства теоремы 2.2.1, получим

$$f_{2m+1} - f_{2m} = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_{2m+1}=1}^{N} \frac{1}{Q_{i(1)}^{(2m+1)}} \prod_{k=2}^{2m+1} \left(b_{i(k-1)} Q_{i(k)}^{(s)} + \sum_{j=1}^{N} \frac{Q_{i(k)}^{(s)}}{Q_{i(k-1)j}^{(s)}} \right)^{-1},$$

где s определяется согласно (2.2.5). Пусть

$$l_k = \min\left(b_{i(k-1)} Q_{i(k)}^{(s)} : i_p = \overline{1,N}, \;\; p = \overline{1,k} \right), \qquad k = \overline{2,2m+1}. \tag{2.3.3}$$

Для оценки сверху разности $f_{2m+1} - f_{2m}$ оценим сверху выражения

$$\sum_{i_k=1}^{N} \left(l_k + \sum_{j=1}^{N} \frac{Q_{i(k)}^{(s)}}{Q_{i(k-1)j}^{(s)}} \right)^{-1}, \qquad k = \overline{2,2m+1},$$

Используя неравенство (2.1.5), получим

$$\sum_{i_k=1}^{N} \left(l_k + \sum_{j=1}^{N} \frac{Q_{i(k)}^{(s)}}{Q_{i(k-1)j}^{(s)}} \right)^{-1} \le \frac{N}{N + l_k}, \qquad k = \overline{2,2m+1}. \tag{2.3.4}$$

Последовательно применяя неравенство (2.3.4), имеем

$$f_{2m+1}-f_{2m}\le \sum_{i_1,i_2,\dots,i_{2m+1}=1}^{N}\frac{1}{Q_{i(1)}^{(2m+1)}}\prod_{k=2}^{2m+1}\left(l_k+\sum_{j=1}^{N}\frac{Q_{i(k)}^{(s)}}{Q_{i(k-1)j}^{(s)}}\right)^{-1}\le$$

$$\le\sum_{i_1=1}^{N}\frac{1}{Q_{i(1)}^{(2m+1)}}\prod_{k=2}^{2m+1}\frac{N}{N+l_k}\le C\prod_{k=2}^{2m+1}\frac{N}{N+l_k},$$

где C – положительная константа, такая, что $C\ge\sum_{i_1=1}^{N}\left(Q_{i(1)}^{(2m+1)}\right)^{-1}$. В частности, как следует из свойство вилки (1.3.5), в качестве C можно взять первую подходящую дробь ВЦД (2.3.1) без свободного члена.

Вычислим миниманту (см. определение 1.4.1) для ВЦД $Q_{i(k)}^{(s)}$. С учетом утверждения 1.3.2 и обозначений (1.1.8) имеем

$$Q_{i(k)}^{(s)}=b_{i(k)}+\sum_{i_{k+1}=1}^{N}\frac{1}{b_{i(k+1)}}+\sum_{i_{k+2}=1}^{N}\frac{1}{b_{i(k+2)}}+\cdots+\sum_{i_s=1}^{N}\frac{1}{b_{i(s)}}\ge$$

$$\ge\alpha_k+\sum_{i_{k+1}=1}^{N}\frac{1}{\beta_{k+1}}+\sum_{i_{k+2}=1}^{N}\frac{1}{\alpha_{k+2}}+\sum_{i_{k+3}=1}^{N}\frac{1}{\beta_{k+3}}+\cdots+\sum_{i_s=1}^{N}\frac{1}{\alpha_s}=$$

$$=\alpha_k+\frac{N}{\beta_{k+1}}+\frac{N}{\alpha_{k+2}}+\frac{N}{\beta_{k+3}}+\cdots+\frac{N}{\alpha_s}.$$

Пусть

$$\gamma_k(m)=\alpha_{k-1}\left(\alpha_k+\frac{N}{\beta_{k+1}}+\frac{N}{\alpha_{k+2}}+\frac{N}{\beta_{k+3}}+\cdots+\frac{N}{\alpha_s}\right),\qquad(2.3.5)$$

тогда для разности двух соседних подходящих дробей ВЦД (2.3.1) получим оценку

$$f_{2m+1}-f_{2m}\le C\prod_{k=2}^{2m+1}\frac{N}{N+\gamma_k(m)}.\qquad(2.3.6)$$

Рассмотрим два возможных случая:

а) существует бесконечное количество членов последовательности $\gamma_k(m)$, $m=1,2,\dots,$ $k=\overline{2,2m+1}$, ограниченных снизу некоторым числом $\gamma>0$;

б) $\lim\limits_{k\to\infty}\lim\limits_{m\to\infty}\gamma_k(m)=0$.

В случае а) имеем $f_{2m+1} - f_{2m} \le C\left(\dfrac{N}{N+\gamma}\right)^{g(m)}$,

где $g(m) \to \infty$ при $m \to \infty$. Следовательно, ВЦД (2.3.1) сходится.

В случае б) последовательность $\gamma_k(m)$ ограничена сверху некоторым числом $\Gamma > 0$, так что

$$\frac{N}{N+\gamma_k(m)} = 1 - \frac{\gamma_k(m)}{N+\gamma_k(m)} \le 1 - \frac{\gamma_k(m)}{N+\Gamma} \le \exp\left(-\frac{\gamma_k(m)}{N+\Gamma}\right).$$

Тогда

$$f_{2m+1} - f_{2m} \le C\exp\left(-\frac{1}{N+\Gamma}\sum_{k=2}^{2m+1}\gamma_k(m)\right).$$

Аналогично, как и при доказательства теоремы 2.2.1, легко убеждаемся в том, что последовательность $\sum\limits_{k=2}^{\infty}\gamma_k(m)$ монотонно возрастает. Поэтому предел (2.3.2) всегда существует. Из условия (2.3.2) теоремы и свойства вилки (1.3.5) следует, что ВЦД (2.3.1) сходится. ■

Замечание 2.3.1. Оценку (2.3.4) можно получить и без применения неравенства (2.1.5). Действительно, используя аналогичные, как в замечании 2.2.1, соображения, имеем

$$\sum_{i_k=1}^{N}\left(b_{i(k-1)}Q_{i(k)}^{(s)} + \sum_{j=1}^{N}\frac{Q_{i(k)}^{(s)}}{Q_{i(k-1)j}^{(s)}}\right)^{-1} \le \frac{1}{1+m_k} \le \frac{N}{N+l_k},$$

где

$$m_k = \min\left(\frac{b_{i(k-1)}}{\sum\limits_{i_k=1}^{N}\left(Q_{i(k)}^{(s)}\right)^{-1}} : \ i_p = \overline{1,N}, \ \ p = \overline{1,k-1}\right), \tag{2.3.7}$$

а l_k определяются согласно (2.3.3).

Теорема 2.3.2 [12,20]. Ветвящаяся цепная дробь (2.3.1) с положительными действительными частными знаменателями сходится, если расходятся ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\alpha_{2k}+\beta_{2k+1}\right)=\infty, \tag{2.3.8}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\beta_{2k}+\alpha_{2k+1}\right)=\infty, \tag{2.3.9}$$

$$\sum_{k=2}^{\infty}\alpha_{k-1}\left(\alpha_k+\frac{N}{\beta_{k+1}+}\,\frac{N}{\alpha_{k+2}+}\,\frac{N}{\beta_{k+3}+\cdots}\right)=\infty \tag{2.3.10}$$

где α_k, β_k, $k=1,2,\ldots$, определяются согласно (2.2.4).

Доказательство. В силу критерия Зейделя (теорема В.2) условия (2.3.8) и (2.3.9) являются необходимыми и достаточными для того, чтобы члены ряда (2.3.10) имели смысл, т.е. соответствующие непрерывные дроби сходились. Покажем, что расходимость ряда (2.3.10) эквивалентна выполнению условия (2.3.2) теоремы 2.3.1. Для этой цели введем сокращенные обозначения

$$\gamma_k=\alpha_{k-1}\left(\alpha_k+\frac{N}{\beta_{k+1}+}\,\frac{N}{\alpha_{k+2}+}\,\frac{N}{\beta_{k+3}+\cdots}\right), \tag{2.3.11}$$

и

$$\gamma_k(m)=\alpha_{k-1}\left(\alpha_k+\frac{N}{\beta_{k+1}+}\,\frac{N}{\alpha_{k+2}+}\,\frac{N}{\beta_{k+3}+\cdots+}\,\frac{N}{\alpha_s}\right), \tag{2.3.12}$$

где $s=s(m,k)=2m+k-2\,[\,k/2\,]$.

Пусть выполняется условие (2.3.2). Тогда на основании утверждения 1.3.2 имеем

$$\sum_{k=2}^{2m+1}\gamma_m(k)=\sum_{k=2}^{2m+1}\alpha_{k-1}\left(\alpha_k+\frac{N}{\beta_{k+1}+}\,\frac{N}{\alpha_{k+2}+}\,\frac{N}{\beta_{k+3}+\cdots+}\,\frac{N}{\alpha_s}\right)\le$$
$$\le\sum_{k=2}^{2m+1}\alpha_{k-1}\left(\alpha_k+\frac{N}{0}\,\frac{N}{+\alpha_{k+2}+}\,\frac{N}{0}\,\frac{N}{+\cdots+\alpha_s}\right)=$$
$$=\sum_{k=2}^{2m+1}\alpha_{k-1}\left(\alpha_k+\alpha_{k+2}+\ldots+\alpha_s\right)\le\left(\sum_{k=2}^{2m+1}\alpha_k\right)^2.$$

Поэтому ряд $\sum_{k=2}^{\infty}\alpha_k$ расходится, откуда следует, что расходятся ряды (2.3.8) и (2.3.9), и члены ряда (2.3.10) имеют смысл. Учитывая свойство вилки (1.3.5), получим $\gamma_k(m) < \gamma_k$, $k = \overline{2, 2m+1}$. Таким образом, ряд (2.3.10) расходится.

Наоборот, из расходимости ряда (2.3.10) следует, что для произвольного индекса $r_0 \geq 2$ и произвольной как угодно большой положительной константы $M > 0$ существует номер n_0, что $\sum\limits_{k=r_0}^{n_0} \gamma_k \geq M$.

Из сходимости цепных дробей γ_k, $k = \overline{r_0, n_0}$ следует, что для произвольного как угодно малого $\varepsilon > 0$ существует номер m такой, что $2m > n_0$ и . $\gamma_k - \gamma_k(m) < \varepsilon$, $k = \overline{r_0, n_0}$. Следовательно,

$$\sum_{k=r_0}^{n_0} \gamma_k(m) = \sum_{k=r_0}^{n_0} \gamma_k - \sum_{k=r_0}^{n_0} (\gamma_k - \gamma_k(m)) > M - \varepsilon(n_0 - r_0) > \frac{1}{2} M,$$

если ε достаточно малое ($\varepsilon \leq \dfrac{M}{2(n_0 - r_0)}$). Поэтому $\sum\limits_{k=2}^{2m+1} \gamma_k(m) \geq \dfrac{M}{2}$, откуда в силу произвольности M заключаем, что выполняется условие (2.3.2). Поэтому в силу теоремы 2.3.1 ВЦД (2.3.1) сходится. ■

Повторяя доказательство теоремы 2.3.1 с учетом особенностей, изложенных в теореме 2.2.3, получим

Теорема 2.3.3. ВЦД

$$b_0 + \mathop{D}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}} \tag{2.3.13}$$

с положительными дейсвительными элементами сходится, если

$$\lim_{m \to \infty} \sum_{k=2}^{2m+1} \frac{1}{\mu_k} \left(1 + \frac{N\nu_{k+1}}{1} + \frac{N\mu_{k+2}}{1} + \frac{N\nu_{k+3}}{1} + \cdots + \frac{N\mu_s}{1} \right) = \infty, \tag{2.3.14}$$

где ν_k, μ_k, $k = 2, 3, \ldots$, определяются согласно (2.2.14), s – согласно (2.2.5).

Оставляя в сумме (2.3.14) только по одному слагаемому, получим аналог теоремы Штерна (теорема В.4).

Следствие 2.3.1[20]. ВЦД (2.3.13) с положительными действительными компонентами сходится, если расходится ряд

$$\sum_{k=2}^{\infty}\delta_k=\infty\,, \tag{2.3.15}$$

где

$$\delta_k=\min\left(\frac{b_{i(k-1)}b_{i(k)}}{a_{i(k)}}:\ i_p=\overline{1,N},\ p=\overline{1,k}\right),\quad k=2,3,\dots\,. \tag{2.3.16}$$

Повторяя доказательство теоремы 2.3.2 для ВЦД (2.3.13), получим

Т е о р е м а 2.3.4. ВЦД (2.3.13) с положительными действительными элементами сходится, если сходятся цепные дроби

$$1+\frac{N\nu_1}{1}\underset{+}{}\frac{N\mu_2}{1}\underset{+}{}\frac{N\nu_3}{1}\underset{+}{}\frac{N\mu_4}{1}\underset{+}{}\cdots, \tag{2.3.17}$$

$$1+\frac{N\mu_1}{1}\underset{+}{}\frac{N\nu_2}{1}\underset{+}{}\frac{N\mu_3}{1}\underset{+}{}\frac{N\nu_4}{1}\underset{+}{}\cdots, \tag{2.3.18}$$

и расходится ряд

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{k=2}^{2m+1}\frac{1}{\mu_k}\left(1+\frac{N\nu_{k+1}}{1}\underset{+}{}\frac{N\mu_{k+2}}{1}\underset{+}{}\frac{N\nu_{k+3}}{1}\underset{+}{}\frac{N\mu_{k+4}}{1}\underset{+}{}\dots\right)=\infty\,, \tag{2.3.19}$$

где ν_k, μ_k, $k=1,2,\dots$, определяются согласно (2.2.14).

Теорема 2.3.5[20,27]. Ветвящаяся цепная дробь

$$b_0+\mathop{D}_{k=1}^{\infty}\sum_{i_k=1}^{N}\frac{1}{b_{i(k)}}, \tag{2.3.20}$$

где $b_{i(k)}>0,\ k=1,2,\dots,\ i_p=\overline{1,N},\ p=\overline{1,k}$, сходится, если $a_1(m)\to\infty$ при $m\to\infty$ и

$$\frac{f_{2m+1}-f_{2m}}{f_{2m}}\le\frac{N}{a_1(m)}, \tag{2.3.21}$$

где f_k – k-я аппроксиманта ВЦД (2.3.20), $a_1(m)$ – первая компонента вектора

$$\begin{pmatrix}a_1(m)\\ b_1(m)\\ c_1(m)\\ d_1(m)\end{pmatrix}=\prod_{i=2}^{2m}\begin{pmatrix}N^{-1}\alpha_{i-1}\alpha_i+1 & 0 & N^{-1}\alpha_{i-1} & 0\\ N^{-1}\alpha_i & 0 & N^{-1} & 0\\ 0 & \alpha_{i-1}\alpha_i+N_i & 0 & \alpha_{i-1}\\ 0 & \alpha_i & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_{2m}\alpha_{2m+1}\\ \alpha_{2m+1}\\ N\alpha_{2m}\\ N\end{pmatrix}$$

(2.3.22)

α_i, β_i определяются согласно (2.2.4),

$$N_i = \frac{\left((N-n_i)\beta_i^{(2m)} + n_i\alpha_i^{(2m)}\right)\left((N-n_i)\beta_i^{(2m+1)} + n_i\alpha_i^{(2m+1)}\right)}{(N-n_i)\beta_i^{(2m)}\beta_i^{(2m+1)} + n_i\alpha_i^{(2m)}\alpha_i^{(2m+1)}}, \qquad (2.3.23)$$

n_i - наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству

$$n_i \geq \frac{N}{1-\varepsilon_i} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{4N^2\varepsilon_i}{(1-\varepsilon_i)^2}}, \qquad \varepsilon_i = \frac{\alpha_i^{(2m)}\alpha_i^{(2m+1)}}{\beta_i^{(2m)}\beta_i^{(2m+1)}} \qquad (2.3.24)$$

и

$$\begin{cases} \alpha_i^{(s)} = \alpha_i + \dfrac{N}{\beta_{i+1}} + \dfrac{N}{\alpha_{i+2}} + \dfrac{N}{\beta_{i+3}} + \dots + \dfrac{N}{\gamma_s}, \\ \beta_i^{(s)} = \beta_i + \dfrac{N}{\alpha_{i+1}} + \dfrac{N}{\beta_{i+2}} + \dfrac{N}{\alpha_{i+3}} + \dots + \dfrac{N}{\gamma_s^*}, \end{cases} \quad s = 2m, 2m+1. \qquad (2.3.25)$$

γ_s равно α_s, если $(s-i)$ – четное и β_s в противном случае, $\gamma_s^* = \dfrac{\alpha_s\beta_s}{\gamma_s}$, $i = \overline{2,2m}$.

Доказательство. Учитывая формулу разности двух подходящих дробей (1.3.4), имеем

$$f_{2m+1} - f_{2m} = \sum_{i_1,i_2,\dots,i_{2m+1}}^{N} \left(\prod_{k=1}^{2m+1}\left(Q_{i(k)}^{(2m+1)}\right)\prod_{k=1}^{2m}\left(Q_{i(k)}^{(2m)}\right)\right)^{-1}.$$

Предполагая, что везде в дальнейшем $i_1, i_2, \dots, i_{2m+1}$ – произвольный фиксированный табор индексов, $1 \leq i_k \leq N$, $k = \overline{1,2m+1}$, введем сокращенные обозначения

$$Q_{i(k)}^{(2m+1)} = Q_{i_k}, \; Q_{i(k)}^{(2m)} = Q'_{i_k}, \; b_{i(k)} = b_{i_k}, \qquad (2.3.26)$$

$$\sum_{\tau=1}^{N} \frac{Q_{i(k)}^{(2m)}}{Q_{i(k-1)\tau}^{(2m+1)}} = \sum_{\tau=1}^{N} \frac{Q_{i_k}}{Q_\tau} = \xi_{i_k} \qquad (2.3.27)$$

$$\sum_{\tau=1}^{N} \frac{Q_{i(k)}^{(2m)}}{Q_{i(k-1)\tau}^{(2m)}} = \sum_{\tau=1}^{N} \frac{Q'_{i_k}}{Q'_\tau} = \xi'_{i_k}. \qquad (2.3.28).$$

Используя метод математической индукции, докажем, что произведения $\prod_{k=1}^{2s+1} Q_{i_k}$, $1 \leq s \leq m$, являются полиномами от переменных ξ_{i_k}, $k = \overline{1,2m+1}$, и параметра $Q_{i_{2s+1}}$ вида

$$\prod_{k=1}^{2s+1} Q_{i_k} = L_{i_{2s}} \cdot Q_{i_{2s+1}} + L_{i_{2s+1}}, \qquad s=\overline{1,m} \tag{2.3.29}$$

где $L_{i_{2s}} = L_{i_{2s}}\left(\xi_{i_2}, \xi_{i_3}, ..., \xi_{i_{2s}}\right)$, $L_{i_{2s+1}} = L_{i_{2s+1}}\left(\xi_{i_3}, \xi_{i_4}, ..., \xi_{i_{2s+1}}\right)$ – полиномы от соответствующих переменных, удовлетворяющие рекуррентным соотношениям

$$\begin{cases} L_{i_{2s}} = \left(b_{i_{2s-1}} b_{i_{2s}} + \xi_{i_{2s}}\right) L_{i_{2s-2}} + b_{i_{2s}} L_{i_{2s-1}}, \\ L_{i_{2s+1}} = \xi_{i_{2s+1}}\left(b_{i_{2s-1}} L_{i_{2s-2}} + L_{i_{2s-1}}\right), \end{cases} \qquad s=1,m \tag{2.3.30}$$

при начальных условиях

$$L_{i_1} = 0, \quad L_{i_0} = 1. \tag{2.3.31}$$

Действительно, при $s=1$, учитывая (1.3.2), получим

$$Q_{i_1} Q_{i_2} Q_{i_3} = \left(b_{i_1} Q_{i_2} + \sum_{r=1}^{N} \frac{Q_{i_2}}{Q_r} \right) Q_{i_3} = \left(b_{i_1} b_{i_2} + \sum_{r=1}^{N} \frac{Q_{i_2}}{Q_r} \right) Q_{i_3} + b_{i_1} \sum_{r=1}^{N} \frac{Q_{i_3}}{Q_r} =$$

$$= \left(b_{i_1} b_{i_2} + \xi_{i_2}\right) Q_{i_3} + b_{i_1} \xi_{i_3} = L_{i_2} Q_{i_3} + L_{i_3}.$$

Предполагая, что соотношения (2.3.29), (2.3.30) выполняются при $s=n$, докажем их справедливость при $s=n+1$. Имеем

$$\prod_{k=1}^{2n+3} Q_{i_k} = \left(\prod_{k=1}^{2n+1} Q_{i_k} \right) Q_{i_{2n+2}} Q_{i_{2n+3}} = \left(L_{i_{2n}} Q_{i_{2n+1}} + L_{i_{2n+1}} \right) Q_{i_{2n+2}} Q_{i_{2n+3}} =$$

$$= \left(L_{i_{2n}} b_{i_{2n+1}} Q_{i_{2n+2}} + L_{i_{2n}} \xi_{i_{2n+2}} + L_{i_{2n+1}} Q_{i_{2n+2}} \right) Q_{i_{2n+3}} =$$

$$= \left(\left(b_{i_{2n+1}} b_{i_{2n+2}} + \xi_{i_{2n+2}} \right) L_{i_{2n}} + b_{i_{2n+2}} L_{i_{2n+1}} \right) Q_{i_{2n+3}} +$$

$$+ \xi_{i_{2n+3}} \left(b_{i_{2n+1}} L_{i_{2n}} + L_{i_{2n+1}} \right) = L_{i_{2n+2}} Q_{i_{2n+3}} + L_{i_{2n+3}}.$$

Аналогично можно доказать, что

$$\prod_{k=2}^{2s+2} Q'_{i_k} = L'_{i_{2s+1}} Q'_{i_{2s+2}} + L'_{i_{2s+2}}, \qquad s=\overline{1,m-1}, \tag{2.3.32}$$

где $L'_{i_{2s+1}} = L'_{i_{2s+1}}\left(\xi'_{i_3}, \xi'_{i_4}, ..., \xi'_{i_{2s+1}}\right)$, $L'_{i_{2s+2}} = L'_{i_{2s+2}}\left(\xi'_{i_4}, \xi'_{i_5}, ..., \xi'_{i_{2s+2}}\right)$ – полиномы от соответствующих переменных, удовлетворяющие рекуррентным соотношениям

$$\begin{cases} L'_{i_{2s+1}} = \left(b_{i_{2s+1}} b_{i_{2s}} + \xi'_{i_{2s+1}}\right) L'_{i_{2s-1}} + b_{i_{2s+1}} L'_{i_{2s}}, \\ L'_{i_{2s+2}} = \xi'_{i_{2s+2}} \left(b_{i_{2s}} L'_{i_{2s-1}} + L'_{i_{2s}}\right), \end{cases} \qquad s = \overline{1, m-1}, \qquad (2.3.33)$$

при начальных условиях

$$L'_{i_1} = 1, \qquad L'_{i_2} = 0. \qquad (2.3.34)$$

Пусть l_{i_k} и l'_{i_k} – это те же L_{i_k} и L'_{i_k} соответственно, для которых в рекуррентных соотношениях (2.3.30) и (2.3.33) вместо каждого b_{i_s} взято α_s, $s = \overline{1, 2m+1}$, где

$$\alpha_s = \min\left(b_{j(s)}:\ j_n = \overline{1, N},\ n = \overline{1, s}\right).$$

Имеем

$$\begin{cases} l_{i_{2s}} = \left(\alpha_{2s-1} \alpha_{2s} + \xi_{i_{2s}}\right) l_{i_{2s-2}} + \alpha_{2s} l_{i_{2s-1}}, \\ l_{i_{2s+1}} = \xi_{i_{2s+1}} \left(\alpha_{2s-1} l_{i_{2s-2}} + l_{i_{2s-1}}\right), \\ s = \overline{1, m},\ \ l_{i_1} = 0,\ \ l_{i_0} = 1, \end{cases} \qquad (2.3.35)$$

и

$$\begin{cases} l'_{i_{2s+1}} = \left(\alpha_{2s+1} \alpha_{2s} + \xi'_{i_{2s+1}}\right) l'_{i_{2s-1}} + \alpha_{2s+1} l'_{i_{2s}}, \\ l'_{i_{2s+2}} = \xi'_{i_{2s+2}} \left(\alpha_{2s} l'_{i_{2s-1}} + l'_{i_{2s}}\right), \\ s = \overline{1, m-1},\ \ l'_{i_1} = 1,\ \ l'_{i_2} = 0. \end{cases} \qquad (2.3.36)$$

Тогда, учитывая формулы (1.3.2), получим

$$\prod_{k=1}^{2m+1} Q_{i_k} \geq l_{i_{2m}} \alpha_{2m+1} + l_{i_{2m+1}}, \qquad \prod_{k=2}^{2m} Q'_{i_k} \geq l'_{i_{2m-1}} \alpha_{2m} + l'_{i_{2m}},$$

и, следовательно,

$$f_{2m+1} - f_{2m} \leq \sum_{i_1, i_2, .., i_{2m+1} = 1}^{N} \left(Q'_{i_1}\right)^{-1} \left(l_{i_{2m}} \alpha_{2m+1} + l_{i_{2m+1}} \right)^{-1} \left(l'_{i_{2m-1}} \alpha_{2m} + l'_{i_{2m}} \right)^{-1} =$$

$$= \sum_{i_1, i_2, .., i_{2m} = 1}^{N} \left(Q'_{i_1}\right)^{-1} \left(l'_{i_{2m-1}} \alpha_{2m} + l'_{i_{2m}} \right)^{-1} \times$$

$$\times \sum_{i_{2m+1}}^{N} \left(l_{i_{2m}} \alpha_{2m+1} + \xi_{i_{2m+1}} \left(\alpha_{2m-1} l_{i_{2m-2}} + l_{i_{2m-1}}\right)\right)^{-1}.$$

Расписав $\xi_{i_{2m+1}}$, используя обозначения (2.3.27) и применив к последней сумме неравенство (2.1.5), получим

$$f_{2m+1}-f_{2m}\le N\sum_{i_1,i_2,..,i_{2m+1}=1}^{N}\left(Q'_{i_1}\right)^{-1}\left(l'_{i_{2m-1}}\alpha_{2m}+l'_{i_{2m}}\right)^{-1}\times$$

$$\times\left(l_{i_{2m}}\alpha_{2m+1}+N\left(\alpha_{2m-1}l_{i_{2m-2}}+l_{i_{2m-1}}\right)\right)^{-1} \qquad (2.3.37).$$

Введем обозначения

$$P_{i_{2k}}=l_{i_{2k}}l'_{i_{2k-1}},\quad P_{i_{2k-1}}=l'_{i_{2k-1}}l_{i_{2k-2}},\quad R_{i_p}=l_{i_p}l'_{i_p},$$

$$S_{i_{2k}}=l_{i_{2k-1}}l'_{i_{2k}},\quad S_{i_{2k-1}}=l_{i_{2k-1}}l'_{i_{2k-2}},\quad T_{i_{2k}}=l_{i_{2k-2}}l'_{i_{2k}},\quad T_{i_{2k-1}}=l'_{i_{2k-1}}l_{i_{2k+1}},$$

$$\Omega_{i_p}=\alpha_pP_{i_p}+\beta_pR_{i_p}+c_p\left(R_{i_{p-1}}+\alpha_{p-1}P_{i_{p-1}}\right)+d_p\left(S_{i_p}+\alpha_{p-1}T_{i_p}\right),$$

где $k=\overline{1,m},\ p=\overline{2,2m}$, a_p, b_p, c_p, d_p – сокращенная запись соответствующих координат вектора

$$\bar g_p=\begin{pmatrix} a_p(m)\\ b_p(m)\\ c_p(m)\\ d_p(m)\end{pmatrix}=\prod_{j=p+1}^{2m}G_j\bar g_{2m}, \qquad p=1,2m-1, \qquad (2.3.38)$$

и

$$G_j=\begin{pmatrix} N^{-1}\alpha_{j-1}\alpha_{j+1} & 0 & N^{-1}\alpha_{j-1} & 0\\ N^{-1}\alpha_j & 0 & N^{-1} & 0\\ 0 & \alpha_{j-1}\alpha_{j+1}+N_j & 0 & \alpha_{j-1}\\ 0 & \alpha_j & 0 & N^{-1}\end{pmatrix},\quad \bar g_{2m}=\begin{pmatrix}\alpha_{2m}\alpha_{2m+1}\\ \alpha_{2m+1}\\ N\alpha_{2m}\\ N\end{pmatrix}.$$

Таким образом, (2.3.37) после элементарных преобразований примет вид

$$f_{2m+1}-f_{2m}\le N\sum_{i_1,i_2,...,i_{2m}=1}^{N}\left(Q'_{i_1}\right)^{-1}\Omega_{2m}^{-1}. \qquad (2.3.39)$$

Для оценки сверху выражения $\sum\limits_{i_{2m}=1}^{N}\Omega_{2m}^{-1}$ применим неравенство (2.1.23). Предварительна запишем значения $l_{i_{2m}}$ и $l'_{i_{2m}}$ на основании формул (2.3.35) и (2.3.36), а также $\xi_{i_{2m}}$ и $\xi'_{i_{2m}}$ согласно обозначениям (2.3.27) и (2.3.28).

Фигурирующие в неравенстве (2.1.23) переменные x_j, y_j в данном случае равны

$$x_j = Q_{i(2m-1)j}^{(2m+1)}, \quad y_j = Q_{i(2m-1)j}^{(2m)}, \quad j = \overline{1,N}.$$

Поэтому параметры x, y, X, Y, определяющие область D (2.1.22), имеют вид

$$x = \alpha_{2m} + \frac{N}{\beta_{2m+1}} \le Q_{i(2m-1)j}^{(2m+1)} \le \beta_{2m} + \frac{N}{\alpha_{2m+1}} = X,$$
$$y = \alpha_{2m} \le Q_{i(2m-1)j}^{(2m)} \le \beta_{2m} \le Y.$$

С целью избежания громоздких записей проследим, во что преобразуется каждое слагаемое в $\Omega_{i_{2m}}$ после применения неравенства (2.1.23). Выражение

$$P_{i_{2m}} = l_{i_{2m}} l'_{i_{2m-1}} = \left(\left(\alpha_{2m-1}\alpha_{2m} + \sum_{j=1}^{N} \frac{x_{i_{2m}}}{x_j} \right) l_{i_{2m-2}} + \alpha_{2m} l_{i_{2m-1}} \right) l'_{i_{2m-1}}$$

после применения (2.1.23) к сумме $\sum\limits_{i_{2m}=1}^{N} \Omega_{i_{2m}}^{-1}$ преобразуется к виду

$$\left(N^{-1}\alpha_{2m-1}\alpha_{2m} + 1 \right) P_{i_{2m-1}} + N^{-1}\alpha_{2m} R_{i_{2m-1}}.$$

Аналогично,

$$R_{i_{2m}} \to (\alpha_{2m-1}\alpha_{2m} + N_{2m})(\alpha_{2m-2}P_{i_{2m-2}} + R_{i_{2m-2}}) +$$
$$\alpha_{2m}(S_{i_{2m-1}} + \alpha_{2m-2}T_{i_{2m-1}}),$$

$$S_{i_{2m}} \to S_{i_{2m-1}} + \alpha_{2m-2}T_{i_{2m-1}}, \qquad T_{i_{2m}} \to \alpha_{2m-2}P_{i_{2m-2}} + R_{i_{2m-2}}.$$

Пусть

$$\begin{cases} a_{2m-1} = \left(N^{-1}\alpha_{2m-1}\alpha_{2m} + 1 \right) a_{2m} + \alpha_{2m-1} N^{-1} c_{2m}, \\ b_{2m-1} = N^{-1}\alpha_{2m} a_{2m} + N^{-1} c_{2m}, \\ c_{2m-1} = (\alpha_{2m-1}\alpha_{2m} + N_{2m}) b_{2m} + \alpha_{2m-1}\alpha_{2m}, \\ d_{2m-1} = \alpha_{2m} b_{2m} + d_{2m} \end{cases}$$

или с учетом обозначений (2.3.38)

$$\overline{g}_{2m-1} = G_{2m}\overline{g}_{2m}.$$

Перегруппировав слагаемые в знаменателе дроби, образовавшейся после применения неравенства (2.1.23) к сумме $\sum\limits_{i_{2m}=1}^{N} \Omega_{i_{2m}}^{-1}$, на первом шаге получим оценку $\sum\limits_{i_{2m-1}=1}^{N} \Omega_{i_{2m}}^{-1} \le \Omega_{i_{2m-1}}^{-1}$.

Пусть $x_j = Q_{i(2m-2)j}^{(2m+1)}, \quad y_j = Q_{i(2m-2)j}^{(2m)}, \quad j = \overline{1,N}$,

$$x = \alpha_{2m-1} + \cfrac{N}{\beta_{2m} + \cfrac{N}{\alpha_{2m+1}}}, \qquad X = \beta_{2m-1} + \cfrac{N}{\alpha_{2m} + \cfrac{N}{\beta_{2m+1}}},$$

$$y = \alpha_{2m-1} + \frac{N}{\beta_{2m}}, \qquad Y = \beta_{2m-1} + \frac{N}{\alpha_{2m}}.$$

Повторно применяя (2.1.23) к сумме $\sum\limits_{i_{2m-1}=1}^{N} \Omega_{i_{2m-1}}^{-1}$, на втором шаге получим неравенство $\sum\limits_{i_{2m-1}=1}^{N} \Omega_{i_{2m-1}}^{-1} \le \Omega_{i_{2m-2}}^{-1}$, где

$$\bar{g}_{2m-2} = G_{2m-1}\bar{g}_{2m-1} = G_{2m-1}G_{2m}\bar{g}_{2m} \qquad \text{и т.д.}$$

Методом математической индукции легко доказать, что последовательно применяя неравенство (2.1.23), получим оценку

$$f_{2m+1} - f_{2m} \le \sum_{i_1, i_2 = 1}^{N} N\left(Q'_{i_1}\right)^{-1} \Omega_{i_2}^{-1}.$$

С учетом начальных значений $l_{i(k)}$ и $l'_{i(k)}$ (см. (2.3.35) и (2.3.36)) имеем

$$\Omega_{i_2} = a_2 l_{i_2} l'_{i_1} + b_2 l_{i_2} l'_{i_2} + c_2\left(l_{i_1} l'_{i_1} + \alpha_1 l_{i_1} l'_{i_0}\right) + d_2\left(l_{i_1} l'_{i_2} + \alpha_1 l'_{i_2} l_{i_0}\right) =$$
$$= a_2\left(\alpha_1\alpha_2 + \xi_2\right) + \alpha_1 c_2.$$

Для оценки сверху выражения $\sum\limits_{i_2=1}^{N} \Omega_{i_2}^{-1}$ применим неравенство (2.1.5). Получим $\sum\limits_{i_2=1}^{N} \Omega_{i_2}^{-1} \le \frac{N}{a_2\left(\alpha_1\alpha_2 + N\right) + c_2\alpha_1} = \frac{1}{a_1}$. Следовательно,

$$f_{2m+1} - f_{2m} \le \sum_{i_1=1}^{N} \frac{1}{Q_{i_1}^{(2m)}} \frac{N}{a_1(m)} = f_{2m} \cdot \frac{N}{a_1(m)}$$

или $\dfrac{f_{2m+1}}{f_{2m}}-1\le\dfrac{N}{\alpha_1(m)}$. ■

Если вместо матриц G_p рассматривать более простые матрицы с не большими, чем в G_p, соответствующими элементами, то получим частные случаи теоремы 2.3.5.

Теорема 2.3.6. Ветвящаяся цепная дробь (2.3.1) с положительными действительными элементами сходится, если

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{n=0}^{m-1}\sum_{r=1}^{2(m-n)}\alpha_r\alpha_{r+2n+1}\prod_{i=1}^{n}\frac{N_{r+2i}}{N}=\infty, \qquad (2.3.40)$$

где $\prod\limits_{i=1}^{0}\dfrac{N_{r+2i}}{N}=1$, N_m и α_m определяются согласно (2.3.23) и (2.2.4), N – число веток ветвления ВЦД (2.3.1).

Доказательство. В теореме 2.3.5 вместо матриц G_p, $p=\overline{2,2m}$, рассмотрим матрицы

$$L_p=\begin{pmatrix}1 & 0 & \alpha_{p-1}N^{-1} & 0\\ 0 & 0 & N^{-1} & 0\\ 0 & N_p & 0 & \alpha_{p-1}\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\qquad p=\overline{2,2m}.$$

Пусть

$$\overline{q}_k=\begin{pmatrix}a_k(m)\\ b_k(m)\\ c_k(m)\\ d_k(m)\end{pmatrix}=\prod_{p=k+1}^{2m}L_p\overline{q}_{2m},\qquad \overline{q}_{2m}=\begin{pmatrix}\alpha_{2m+1}\alpha_{2m}\\ \alpha_{2m+1}\\ N\alpha_{2m}\\ N\end{pmatrix},\quad k=\overline{1,2m-1}.$$

Вычислим компоненты вектора $\overline{q}_1$. Для этого используем рекуррентные соотношения

$$\overline{q}_p=L_{p+1}\overline{q}_{p+1},\quad p=2m-1,2m-2,\ldots,1,$$

записанные в эквивалентной форме

$$\begin{cases} a_p = a_{p+1} + N^{-1}\alpha_p c_{p+1}, \\ b_p = N^{-1}c_{p+1}, \\ c_p = N_{p+1}b_{p+1} + \alpha_p\alpha_{p+1}, \\ d_p = d_{p+1} \end{cases}$$

откуда с учетом значений компонент вектора $\bar{q}_{2m}$ имеем

$$\begin{cases} a_p = a_{p+1} + \alpha_p b_p, \\ b_p = N^{-1}c_{p+1}, \\ c_p = N\alpha_p + N_{p+1}b_{p+1}, \\ d_p = N, \end{cases} \qquad p = 2m-1, 2m-2, \ldots, 1. \qquad (2.3.41)$$

Методом математической индукции легко доказать, что

$$a_{2p} = \sum_{n=0}^{m-p}\sum_{r=2p}^{2(m-n)}\alpha_r\alpha_{r+2n+1}\prod_{i=1}^{n}\frac{N_{r+2i}}{N}, \quad b_{2p} = \sum_{n=0}^{m-p}\alpha_{2p+2n+1}\prod_{i=1}^{n}\frac{N_{2p+2i}}{N},$$

$$c_{2p} = N\alpha_{2p} + N_{2p+1}\sum_{n=1}^{m-p}\alpha_{2p+2n}\prod_{i=2}^{n}\frac{N_{2p+2i-1}}{N},$$

где $p = \overline{1,m}$, и произведение, у которого верхний индекс меньше нижнего, считаем равным единице. Следовательно,

$$a_1 = a_2 + \alpha_1 b_2 = \sum_{n=0}^{m-1}\sum_{r=1}^{2(m-n)}\alpha_r\alpha_{r+2n+1}\prod_{i=1}^{n}\frac{N_{r+2i}}{N}.$$

Для завершения доказательства теоремы достаточно воспользоваться оценкой (2.3.21). ■

Фиксируя в (2.3.40) n и устремляя $m \to \infty$, получим

Следствие 2.3.2 [20]. ВЦД (2.3.1) с положительными действительными компонентами сходится, если существует такое целое неотрицательное число n, что ряд $\sum_{r=1}^{\infty}\alpha_r\alpha_{r+2n+1}$ расходится.

Исходя из определения n_i (2.3.24), легко проверить, что $\frac{1}{2}(N-1) \le n_i \le N-1$. Из (2.3.23) следует, что $N_i > N - n_i$. Поэтому $N_i > 1$.

С л е д с т в и е 2.3.3. ВЦД (2.3.20) с положительными действительными элементами сходится, если $a_1^*(m) \to \infty$, где $a_1^*(m)$ – первая компонента вектора, определенного согласно (2.3.22) в предположении. что $N_i = 1, \quad i \ge 2$.

Положив в формулировке теоремы 2.3.6 вместо каждого N_i единицу, получим

С л е д с т в и е 2.3.4 [9] ВДЦ (2.3.1), частными знаменателями которой являются положительные действительные числа, сходится, если

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{m-1} N^{-n} \sum_{r=1}^{2(m-n)} \alpha_r \alpha_{r+2n+1} = \infty . \tag{2.3.42}$$

Перегруппировав слагаемые в суммах под знаком предела в (2.3.42), приходим к условию, эквивалентному (2.3.42).

$$\sum_{k=2}^{\infty} \alpha_k S_{k-1} = \infty, \tag{2.3.43}$$

где $S_k = \alpha_k + N^{-1}\alpha_{k-2} + N^{-2}\alpha_{k-4} + \ldots + N^{-r}\alpha_{k-2r}$,

$r = \left[\dfrac{k-1}{2}\right]$ – целая часть $\dfrac{k-1}{2}$.

З а м е ч а н и е 2.3.2. В случае $N = 1$ следствие 2.3.4 эквивалентно достаточности критерия Зейделя. Действительно, при $N = 1$

$$\sum_{n=0}^{m-1} \sum_{r=1}^{2(m-n)} \alpha_r \alpha_{r+2n+1} = \sum_{r=1}^{2m} \alpha_r \alpha_{r+1} + \sum_{r=1}^{2m-2} \alpha_r \alpha_{r+3} + \ldots + \sum_{r=1}^{4} \alpha_r \alpha_{r+2m-3} +$$

$$+ \sum_{r=1}^{2} \alpha_r \alpha_{r+2m-1} = \alpha_1(\alpha_2 + \alpha_4 + \ldots + \alpha_{2m}) + \alpha_3(\alpha_2 + \alpha_4 + \ldots + \alpha_{2m}) + \ldots +$$

$$+ \alpha_{2m+1}(\alpha_2 + \alpha_4 + \ldots + \alpha_{2m}) = (\alpha_1 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_{2m+1})(\alpha_2 + \alpha_4 + \ldots + \alpha_{2m}).$$

Тогда условие (2.3.42) эквивалентно расходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$.

Т е о р е м а 2.3.7 [20,27]. Пусть для ВЦД (2.3.20) с положительными действительными частными знаменателями выполняется условие: существует натуральное число M, что для всех i и m таких, что $2(m-i) \ge M$,

$$\begin{cases} \dfrac{N_{2i+1}}{N} + \dfrac{2\alpha_{2i}}{N}(\alpha_{2i+1} + \alpha_{2i+3} + \ldots + \alpha_{2m+1}) \geq 1, \\ \dfrac{N_{2i+2}}{N} + \dfrac{2\alpha_{2i+1}}{N}(\alpha_{2i+2} + \alpha_{2i+4} + \ldots + \alpha_{2m}) \geq 1, \end{cases} \tag{2.3.44}$$

где α_i; определяются согласно (2.2.4), N_i – согласно (2.3.23).

Тогда дробь (2.3.20) сходится, если ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \tag{2.3.45}$$

расходится.

Доказательство. Используя обозначения (2.3.38), предложенные при доказательстве теоремы 2.3.5, приходим к рекуррентному соотношению, связывающему компоненты векторов $\bar{g}_p$ и $\bar{g}_{p+1}$.

$$\begin{cases} a_p = \left(N^{-1}\alpha_p\alpha_{p+1} + 1\right)a_{p+1} + \alpha_p N^{-1} c_{p+1}, \\ b_p = N^{-1}\alpha_{p+1}a_{p+1} + N^{-1}c_{p+1}, \\ c_p = \left(\alpha_p\alpha_{p+1} + N_{p+1}\right) + \alpha_p d_{p+1}, \\ d_p = \alpha_{p+1}b_{p+1} + d_{p+1}, \end{cases} \qquad p = 2m, 2m-1, \ldots, 1, \tag{2.3.46}$$

при начальных условиях

$$a_{2m+1} = 0,\ b_{2m+1} = 0,\ c_{2m+1} = N\alpha_{2m+1},\ d_{2m+1} = N. \tag{2.3.47}$$

Вычитая из первого уравнения системы (2.3.46) второе, умноженное на α_p, получим

$$a_p = \alpha_p b_p + a_{p+1}, \tag{2.3.48}$$

откуда

$$a_p = \sum_{i=p}^{2m} \alpha_i b_i. \tag{2.3.49}$$

Из последнего уравнения системы (2.3.46) с учетом формулы (2.3.49) находим

$$d_p = \sum_{i=p+1}^{2m} \alpha_i b_i + N = a_{p+1} + N. \tag{2.3.50}$$

Подставляем (2.3.50) в третье уравнение системы (2.3.46)

$$c_p = \alpha_p\left(\alpha_{p+1}b_{p+1} + d_{p+1}\right) + N_{p+1}b_{p+1} = \alpha_p d_p + N_{p+1}b_{p+1} =$$

$$=\alpha_p a_{p+1} + N_{p+1} b_{p+1} + N\alpha_p .$$

Из второго уравнения (2.3.46) следует, что $c_{p+1} = Nb_p - \alpha_{p+1} a_{p+1}$. Подставляя это выражение в предыдущее и учитывая (2.3.48), получим систему уравнений

$$\begin{cases} N b_{p-1} - \alpha_p a_p = \alpha_p a_{p+1} + N_{p+1} b_{p+1} + N\alpha_p , \\ \qquad a_p = \alpha_p b_p + a_{p+1} , \end{cases}$$

откуда

$$b_{p-1} = \alpha_p \left(1 + \frac{\alpha_p}{N} b_p \right) + \frac{N_{p+1}}{N} b_{p+1} + \frac{2\alpha_p}{N} \sum_{i=p+1}^{2m} \alpha_i b_i , \qquad (2.3.51)$$

$$p = 2m, 2m-1, \ldots, 2$$

при начальных условиях

$$b_{2m+1} = 0, \quad b_{2m} = \alpha_{2m+1} , \qquad (2.3.52)$$

причем предполагается, что сумма, у которой верхний индекс меньше нижнего, равна нулю.

Решения уравнений (2.3.51) представим в виде

$$b_{2i} = \sum_{k=i}^{m} A_{2i,2k+1} \alpha_{2k+1} , \qquad b_{2i+1} = \sum_{k=i+1}^{m} A_{2i+1,2k+1} \alpha_{2k} . \qquad (2.3.53)$$

Учитывая начальные условия (2.3.52), имеем

$$A_{2m,2m+1} = 1 . \qquad (2.3.54)$$

Подставляя (2.3.53) в (2.3.51), находим

$$b_{2i-1} = \sum_{k=i}^{m} A_{2i-1,2k} \alpha_{2k} = \alpha_{2i} \left(1 + \frac{\alpha_{2i}}{N} \sum_{k=i}^{m} A_{2i,2k+1} \alpha_{2k+1} \right) + \frac{N_{2i+1}}{N} \sum_{k=i+1}^{m} A_{2i+1,2k} \alpha_{2k} +$$

$$+ \frac{2\alpha_{2i}}{N} \left(\sum_{j=i+1}^{m} \alpha_{2j} \sum_{p=j}^{m} A_{2j,2p+1} \alpha_{2p+1} + \sum_{j=1}^{m-1} \alpha_{2j+1} \sum_{p=j+1}^{m} A_{2j+1,2p} \alpha_{2p} \right),$$

откуда

$$A_{2i-1,2i} = 1 + \frac{\alpha_{2i}}{N} \sum_{k=i}^{m} A_{2i,2k+1} \alpha_{2k+1} ,$$

$$A_{2i-1,2k}=\frac{N_{2i+1}}{N}A_{2i+1,2k}+\frac{2\alpha_{2i}}{N}\left(\sum_{p=k}^{m}A_{2k,2p+1}\alpha_{2p+1}+\sum_{p=i}^{k-1}A_{2p+1,2k}\alpha_{2p+1}\right).$$

Если привести аналогичные выкладки для b_{2i-2}, то окончательно получим рекуррентные соотношения

$$A_{2i-2,2i-1}=1+\frac{\alpha_{2i-1}}{N}\sum_{k=i}^{m}A_{2i-1,2k}\alpha_{2k}, \qquad i=m,m-1,\ldots,\ 2,$$

$$A_{2i-2,2i}=1+\frac{\alpha_{2i}}{N}\sum_{k=i}^{m}A_{2i,2k+1}\alpha_{2k+1}, \qquad i=m,m-1,\ldots,\ 1,$$

$$A_{2i-2,2p+1}=\frac{N_{2i}}{N}A_{2i,2p+1}+\frac{2\alpha_{2i-1}}{N}\left(\sum_{k=i}^{p}A_{2k,2p+1}\alpha_{2k}+\sum_{k=p+1}^{m}A_{2p+1,2k}\alpha_{2k}\right),$$

$$i,p=m,m-1,\ldots,\ 2,\ \ i\le p, \tag{2.3.55}$$

$$A_{2i-1,2p}=\frac{N_{2i+1}}{N}A_{2i+1,2p}+\frac{2\alpha_{2i}}{N}\left(\sum_{k=i}^{p-1}A_{2k+1,2p}\alpha_{2k+1}+\sum_{k=p}^{m}A_{2p,2k+1}\alpha_{2k+1}\right),$$

$$p=m,m-1,\ldots,\ 2,\ \ 1\le i\le p$$

при начальных условиях (2.3.54). Как и раньше считаем, что сумма, у которой верхний индекс меньше нижнего, равна нулю.

Если существует такое действительное число $\delta>0$, не зависящее от m, что $A_{2i,2p+1}>\delta,\ A_{2i-1,2p}>\delta$ для произвольных натуральных i и p, таких, что $p\ge i$, то из (2.3.53) следует, что

$$b_{2i}>\delta\sum_{k=i}^{m}\alpha_{2k+1},\quad b_{2i+1}>\delta\sum_{k=i+1}^{m}\alpha_{2k},$$

откуда с учетом (2.3.49) имеем

$$a_1=\sum_{i=1}^{2m}\alpha_i b_i>\delta\big(\alpha_1(\alpha_2+\alpha_4+\ldots+\alpha_{2m})+\alpha_2(\alpha_3+\alpha_5+\ldots+\alpha_{2m+1})+$$

$$+\alpha_3(\alpha_4+\alpha_6+\ldots+\alpha_{2m})+\alpha_4(\alpha_5+\alpha_7+\ldots+\alpha_{2m+1})+\ldots+$$

$$+\alpha_{2m-1}\alpha_{2m}+\alpha_{2m}\alpha_{2m+1}\big)=\delta(\alpha_1+\alpha_3+\ldots+\alpha_{2m+1})(\alpha_2+\alpha_4+\ldots+\alpha_{2m}).$$

Таким образом, если ряд (2.3.45) расходится, то $a_1(m)\to\infty$ при $m\to\infty$. Поэтому ВЦД (2.3.20) сходится, причем с учетом (2.3.21) справедлива оценка

$$\frac{f_{2m+1}}{f_{2m}} - 1 \le \frac{N}{\delta}\left(\sum_{i=1}^{m+1}\alpha_{2i-1}\right)^{-1}\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_{2i}\right)^{-1}.$$

Остается доказать ограниченность снизу некоторой положительной не зависящей от m константой решений системы рекуррентных уравнений (2.3.55) в предположении, что справедливо условие (2.3.44) теоремы. Так как $N_i > 1,\ i = \overline{2,2m}$, то из (2.3.55) следует, что $A_{i,i+1} > 1$, $A_{i,i+3} > N^{-1}$, $A_{i,i+5} > N^{-2}$ и т.д. Поэтому для заданного в условиях теоремы числа $M > 0$ существует число δ, не зависящее от m, что

$$A_{i,i+2k+1} > \delta, \text{ если } 1 \le 2k+1 < M,\ i+2k \le 2m. \tag{2.3.56}$$

Пусть индексы i, p таковы, что $2(p-i)+1 = M_0 \ge M$ и $M_0 - 2 < M$. Тогда, учитывая условие (2.3.44), оценки (2.3.56), из последнего уравнения системы (2.3.55) находим

$$A_{2i-1,2p} > \delta\left(\frac{N_{2i+1}}{N} + \frac{2\alpha_{2i}}{N}(\alpha_{2i+1} + \alpha_{2i+3} + \ldots + \alpha_{2m+1})\right) \ge \delta,$$

так $2(m-i)+1 \ge 2(p-i)+1 \ge M$. Из третьего уравнения системы (2.3.55) при тех же ограничениях относительно индексов i и p следует, что

$$A_{2i,2p+1} > \delta\left(\frac{N_{2i+2}}{N} + \frac{2\alpha_{2i+1}}{N}(\alpha_{2i+2} + \alpha_{2i+4} + \ldots + \alpha_{2m})\right) \ge \delta.$$

На втором шаге, взяв индексы i_1 и p_1 такие, что $2(p_1 - i_1) + 1 = M_0 + 2$, где M_0 определено выше, аналогичным образом приходим к оценке $A_{2i_1-1,2p_1} > \delta$, $A_{2i_1,2p_1+1} > \delta$ и т.д.

§ 4. Необходимые и достаточные признаки сходимости ВЦД с положительными действительными элементами.

Рассмотрим непрерывную дробь

$$b_0 + \underset{k=1}{\overset{\infty}{D}} \frac{1}{b_k}, \tag{2.4.1}$$

где b_k, $k = 1, 2, \ldots$, – положительные действительные числа. Применяя для дроби (2.4.1) теоремы 2.2.1 и 2.3.1, получим критерий сходимости, эквивалентный критерию Зейделя (теорема В.2).

Теорема 2.4.1 [20]. Цепная дробь (2.4.1) с положительными действительными частными знаменателями сходится тогда и только тогда, когда

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{k=2}^{2m+1} b_{k-1}\left(b_k + \frac{1}{b_{k+1}} + \frac{1}{b_{k+2}} + \ldots + \frac{1}{b_s}\right) = \infty, \tag{2.4.2}$$

где $s = 2m + k - 2\left[\frac{k}{2}\right]$, $\left[\frac{k}{2}\right]$ – целая часть $\frac{k}{2}$.

Сравнивая критерий Зейделя и теорему 2.4.1, имеем

Следствие 2.4.1. Расходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ с положительными действительными членами эквивалентна выполнению условия (2.4.2).

Применяя утверждение теорем 2.2.3 и 2.3.3 к цепной дроби

$$b_0 + \underset{k=1}{\overset{\infty}{D}} \frac{a_k}{b_k} \tag{2.4.3}$$

получим

Теорема 2.4.2. Непрерывная дробь (2.4.3) с положительными действительными компонентами сходится тогда и только тогда, когда

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{k=2}^{2m+1} \frac{b_{k-1}}{a_k}\left(b_k + \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}} + \frac{a_{k+2}}{b_{k+2}} + \ldots + \frac{a_s}{b_s}\right) = \infty, \tag{2.4.4}$$

где $s = 2m + k - 2\left[\frac{k}{2}\right]$, $\left[\frac{k}{2}\right]$ – целая часть $\frac{k}{2}$.

Теорема 2.4.3 [14,20]. Если для ВЦД

$$b_0 + \mathop{D}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{1}{b_{i(k)}} \tag{2.4.5}$$

с положительными действительными частными знаменателями существует константа $M > 0$, такая, что

$$\beta_k \le M\alpha_k \qquad k = 1, 2, \ldots, \tag{2.4.6}$$

где α_k и β_k определяются согласно (2.2.4), то эта дробь сходится тогда и только тогда, когда расходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \,. \tag{2.4.7}$$

Доказательство. Расходимость ряда (2.4.7) является необходимым условием сходимости ВЦД (2.4.5) в силу теоремы 2.2.2. Остается доказать достаточность. Из неравенств (2.4.6) и утверждения 1.3.2 следует, что для произвольных натуральных чисел i и n, $n \ge i$,

$$\beta_{2i} + \frac{N}{\alpha_{2i+1}} + \frac{N}{\beta_{2i+2}} + \frac{N}{\alpha_{2i+3}} + \ldots + \frac{N}{\beta_{2n}} \le$$

$$\le M\alpha_{2i} + \frac{N}{M^{-1}\beta_{2i+1}} + \frac{N}{M\alpha_{2i+2}} + \frac{N}{M^{-1}\beta_{2i+3}} + \ldots + \frac{N}{M\beta_{2n}} =$$

$$= M\left(\alpha_{2i} + \frac{N}{\beta_{2i+1}} + \frac{N}{\alpha_{2i+2}} + \frac{N}{\beta_{2i+3}} + \ldots + \frac{N}{\beta_{2n}} \right), \tag{2.4.8}$$

где в последнем равенстве использованы эквивалентные преобразования (1.5.1), (1.5.2) и $\rho_{2k+1} = M$, $\rho_{2k+2} = M^{-1}$, $k = \overline{i, n-1}$, $\rho_{2i} = 1$. Цепная дробь

$$b_0 + \frac{1}{N^{-1}\alpha_1} + \frac{1}{\beta_2} + \frac{1}{N^{-1}\alpha_3} + \frac{1}{\beta_4} + \ldots \tag{2.4.9}$$

в силу условий теоремы и критерия Зейделя сходится. Легко проверить, что непрерывная дробь

$$b_0 + \frac{N}{\alpha_1} + \frac{N}{\beta_2} + \frac{N}{\alpha_3} + \frac{N}{\beta_4} + \ldots \tag{2.4.10}$$

эквивалентна (2.4.9). Применяя теорему 2.4.2 к цепной дроби (2.4.10), имеем

$$\lim_{m\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{\alpha_{2k-1}}{N}\left(\beta_{2k}+\frac{N}{\alpha_{2k+1}}+\frac{N}{\beta_{2k+2}}+\frac{N}{\alpha_{2k+3}}+\ldots+\frac{N}{\beta_{2m}}\right)+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{m}\frac{\beta_{2k}}{N}\left(\alpha_{2k+1}+\frac{N}{\beta_{2k+2}}+\frac{N}{\alpha_{2k+3}}+\frac{N}{\beta_{2k+4}}+\ldots+\frac{N}{\alpha_{2m+1}}\right)\right)=\infty. \qquad (2.4.11).$$

Из неравенств (2.4.6) и (2.4.8) следует, что выражение, стоящее под знаком предела в (2.4.11), оценивается сверху выражением

$$\frac{M}{N}\sum_{k=1}^{m}\alpha_{k-1}\left(\alpha_k+\frac{N}{\beta_{k+1}}+\frac{N}{\alpha_{k+2}}+\frac{N}{\beta_{k+3}}+\ldots+\frac{N}{\alpha_s}\right),$$

где s определяется согласно (2.2.5). Поэтому из условия (2.4.11) следует условие (2.3.2) и в силу теоремы 2.3.1 сходимость ВЦД (2.4.5). ■

Теорема 2.4.4[14,20]. Пусть $K_n=[0,N]\times[0,N]\times\ldots\times[0,N]$ – n-мерный гиперкуб и $b_n(t^n)$, $t^n=(t_1,t_2,\ldots,t_n)$, $n=1,2,\ldots,$ – положительные непрерывные функции, заданные в K_n, такие, что

$$b_n(i^n)=b_n(i_1,i_2,\ldots,i_n)=b_{i(n)}, \qquad n=1,2,\ldots, \quad i_p=\overline{1,N},\ p=\overline{1,n},$$

и

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\max\left(b_n(t^n) : t^n\in K_n\right)\max\left(b_n^{-1}(t^n) : t^n\in K_n\right)<\infty. \qquad (2.4.12).$$

Тогда ВЦД (2.4.5) с положительными элементами сходится, если интегральная цепная дробь

$$b_0+\mathop{D}_{n=1}^{\infty}\int_0^N\frac{dt_n}{b_n(t^n)} \qquad (2.4.13)$$

сходится.

Доказательство. По аналогии с теоремой 2.2.2 для интегральной цепной дроби (2.4.13) с положительными компонентами установлен необходимый признак сходимости, утверждающий о том, что если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\max\left(b_n(t^n) : t^n\in K_n\right) \qquad (2.4.14)$$

сходится., то дробь (2.4.13) расходится [88]. Из условия (2.4.12) следует, что существует константа M, для которой выполняются неравенства

$$\max\left(b_n\left(t^n\right) : t^n \in K_n\right) \le M \min\left(b_n\left(t^n\right) : t^n \in K_n\right), \quad n = 1,2, \dots .$$

Если α_n и β_n определены согласно (2.2.4), то, очевидно,

$$\max\left(b_n\left(t^n\right) : t^n \in K_n\right) \ge \beta_n, \qquad \min\left(b_n\left(t^n\right) : t^n \in K_n\right) \le \alpha_n$$

и, следовательно, выполняются неравенства (2.4.6). Пусть интегральная цепная дробь (2.4.13) сходится, тогда ряд (2.4.14) расходится. Из условий теоремы и установленных в процессе доказательства неравенств следует, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ расходится. Так как $\beta_k \ge \alpha_k$, $k = 1, 2, \dots$, то ряд (2.4.7) расходится. Сходимость ВЦД (2.4.5) следует из теоремы 2.4.3. ■

Теорема 2.4.5[11,20]. Если для ВЦД (2.4.5) с положительными действительными элементами существует константа $M > 0$,такая что

$$\beta_k \le M\alpha_{k+1}, \qquad \beta_{k+1} \le M\alpha_k, \qquad k = 1,2,..., \tag{2.4.15}$$

где α_k, β_k определяются согласно (2.2.4), то ВЦД (2.4.5) сходится тогда и только тогда, когда ряд (2.4.7) расходится.

Доказательство. Необходимость следует из теоремы 1.2.2. Доказательство достаточности основано на применении теоремы 3.5.2, Рассмотрим последовательности

$$t_k = \alpha_k + \frac{1}{N^{-1}\beta_{k+1}} + \frac{1}{\alpha_{k+2}} + \frac{1}{N^{-1}\beta_{k+3}} + \frac{1}{\alpha_{k+4}} + \dots, \tag{2.4.16}$$

$$T_k = \beta_k + \frac{1}{N^{-1}\alpha_{k+1}} + \frac{1}{\beta_{k+2}} + \frac{1}{N^{-1}\alpha_{k+3}} + \frac{1}{\beta_{k+4}} + \dots, \tag{2.4.17}$$

имеющие смысл в силу условий теоремы и критерия Зейделя сходимости цепных дробей.

Возможны два случая: $\varliminf_{k\to\infty} t_k = \alpha > 0$ и $\varliminf_{k\to\infty} t_k = 0$. В первом случае последовательность $\{t_k\}$ ограничена снизу положительной константой. Учитывая условие (2.4.15), заключаем, что расходимость ряда (2.4.7) эквивалентна расходимости ряда (2.3.45). Из ограниченности снизу последовательности $\{t_k\}$ и расходимости последнего ряда следует выполнение условия (2.3.10). Поэтому в силу теоремы 2.3.2 ВЦД (2.4.5) сходится.

Покажем методом от противного, что второй случай в условиях теоремы не имеет места. Пусть $\varliminf\limits_{k\to\infty} t_k = 0$ и $\left\{ t_{k_n} \right\}$ – подпоследовательность, стремящаяся к нулю. Поэтому для произвольного как угодно малого действительного числа $\varepsilon > 0$ существует номер n_0, что для всех $n \ge n_0$ имеем $t_{k_n} < \varepsilon$. Так как $t_{k_n} = \alpha_{k_n} + \dfrac{N}{T_{k_n}}$, то $\lim\limits_{n\to\infty} T_{k_n+1} = \infty$.

Следовательно, для произвольного как угодно большого числа $K > \varepsilon$ существует номер n_1, что $T_{k_n+1} \ge K$ для всех $n \ge n_1$. Пусть $n_2 = \max(n_0, n_1)$ и $k_{n_2} = s$. Тогда для $n \ge n_2$.имеем $\left| T_{k_n+1} - t_{k_n} \right| \ge K - \varepsilon$, в частности,

$$\left| T_{s+1} - t_s \right| \ge K - \varepsilon . \tag{2.4.18}$$

Обозначим $t_s(2p)$, $T_{s+1}(2p)$ – $2p$-е аппроксиманты цепных дробей (2.4.16) и (2.4.17) соответственно. В силу сходимости дробей (2.4.16) и (2.4.17) для уже выбранного ε существует такое p, что

$$t_s - t_s(2p) < \varepsilon, \quad T_{s+1} - t_{s+1}(2p) < \varepsilon .$$

Таким образом,

$$| T_{s+1} - t_s | \le T_{s+1} - T_{s+1}(2p) - t_s - t_s(2p) + | T_{s+1}(2p) - t_s(2p) | \le$$
$$\le 2\varepsilon + | T_{s+1}(2p) - t_s(2p) |$$

Учитывая утверждение теоремы , где $N = 1$, α_s, $N^{-1}\beta_{s+1}$, α_{s+2}, $N^{-1}\beta_{s+3}$, ,..., α_{s+2p}– точные, а β_{s+1}, $N^{-1}\alpha_{s+2}$, β_{s+3}, $N^{-1}\alpha_{s+4}$, ...,β_{s+2p+1} – соответственно приближенные значения частных знаменателей цепной дроби, имеем

$$| T_{s+1}(2p) - t_s(2p) | \le t_s(2p) \max_{\substack{0\le k\le p \\ 1\le m\le p}} \left(\frac{| \beta_{s+1+2k} - \alpha_{s+2k} |}{\alpha_{s+2k}}, \right.$$
$$\left. \frac{\left| N^{-1}\alpha_{s+2m} - N^{-1}\beta_{s+2m+1} \right|}{N^{-1}\beta_{s+2m+1}} \cdot \left| 1 + \frac{N^{-1}\alpha_{s+2m} - N^{-1}\beta_{s+2m-1}}{N^{-1}\beta_{s+2m-1}} \right|^{-1} \right) =$$

$$= t_s(2p) \max_{\substack{0 \le k \le p \\ 1 \le m \le p}} \left(\frac{|\beta_{s+1+2k} - \alpha_{s+2k}|}{\alpha_{s+2k}}, \frac{|\beta_{s+2m-1} - \alpha_{s+2m}|}{\alpha_{s+2m}} \right) \le \varepsilon(M+1).$$

С учетом (2.4.18) приходим к противоречивому неравенству

$$K - \varepsilon \le |T_{s+1} - t_s| \le \varepsilon(M+3). \blacksquare$$

§ 5. Признаки сходимости ветвящихся цепных дробей с неотрицательными компонентами

Признаки сходимости непрерывных дробей с положительными компонентами легко переносятся на случай, когда элементами дроби являются неотрицательные действительные числа. Методика доказательства соответствующих теорем аналогична. Однако в этом случае в формулировки некоторых теорем необходимо ввести дополнительные условия. Так, критерий сходимости Зейделя справедлив и для непрерывной дроби с неотрицательными эле-ментами, если дополнительно потребовать, чтобы не все нечетные частные знаменатели были равными нулю.

При исследовании сходимости ВЦД с неотрицательными действительными членами возникают и другие трудности: дроби $Q_{i(k)}^{(n)}$, фигурирующие в основной формуле (1.3.4), могут быть равными нулю, бесконечности или не иметь смысла. Поэтому, вообще говоря, мы не можем, как это делалось в предыдущих параграфах настоящей главы, использовать свойство вилки (1.3.5) или формулу (1.3.4).

Дополним множество неотрицательных действительных чисел элементом ∞, но при этом будем рассматривать ВЦД, компонентами которых являются действительные (конечные) числа. Рассматривая арифметические операции на данном множестве, будем учитывать замечание 1.2.1.

Сначала установим условия, при выполнении которых все подходящие дроби ВЦД принимают конечные значения. Для этой цели можно воспользоваться формулами для числителей и знаменателей подходящих дробей в виде определителей (1.2.27).

Утверждение 2.5.1. Подходящие дроби f_k, $k=1,2,\ldots$, ветвящейся цепной дроби

$$b_0+\mathop{D}_{k=1}^{\infty}\sum_{i_k=1}^{N}\frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}}, \tag{2.5.1}$$

элементами которой являются неотрицательные действительные числа,

а) имеет смысл тогда и только тогда, когда

$$\det C_{0l} + \det C_{1l} \neq 0;$$

б) принимают конечные значения тогда и только тогда, когда

$$\det C_{1l} \neq 0,$$

где $l = N + N^2 + \ldots + N^k$ и матрицы C_{0l}, C_{1l} определяются согласно (1.2.16).

Рассматривая ВЦД (2.5.1) как композицию многомерных дробно-линейных преобразований (1.1.5), мы естественно предполагали, что все $a_{i(k)} \neq 0$, $k = 1,2,\ldots$, $i_p = \overline{1,N}$, $p = \overline{1,k}$. В этом случае дробь (1.5.1), используя эквивалентные преобразования (1.5.4), (1.5.12), можно привести к виду (1.5.13). Поэтому рассмотрим ВЦД

$$b_0 + \mathop{D}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{1}{b_{i(k)}}, \tag{2.5.2}$$

где $b_0 \in \mathbf{R}$, $b_{i(k)} \geq 0$, $k = 1,2,\ldots$, $i_p = \overline{1,N}$, $p = \overline{1,k}$.

Пусть $I = \{1,2,\ldots,N\}$. Впредь, рассматривая индексы p_k, q_k, r_k, j_k, $i_k \in I$, $k = 1,2,\ldots$, будем предполагать, что p_k, q_k, r_k, j_k фиксированы, а i_k – произвольный элемент множества I.

Утверждение 2.5.2. Если частными знаменателями ВЦД (2.5.2) являются неотрицательные действительные числа, то

а) ее четные подходящие дроби $f_{2n} \neq \infty$, $= 1,2,\ldots$;

б) $2n$-я подходящая дробь не имеет смысла, т.е. $f_{2n} = \frac{0}{0}$, тогда и только тогда, когда существует номер m, $1 \leq m \leq n$, индексы j_k, $k = 1, 2m-1$, p_{2m}, q_{2m}, $p_{2m} \neq q_{2m}$, принадлежащие множеству $I = \{1,2,\ldots,N\}$, что для произвольного набора индексов $i_{2k+1} \in I$, $k = \overline{m, n-1}$, и некоторых наборов индексов $p_{2k} \in I$, $q_{2k} \in I$, $k = \overline{m+1, n}$, выполняются условия

$$\begin{cases} b_{j(2m-1)p_{2m}\,i_{2m+1}\,p_{2m+2}\,i_{2m+3}\dots i_{2s-1}\,p_{2s}} = 0, \\ b_{j(2m-1)q_{2m}\,i_{2m+1}\,q_{2m+2}\,i_{2m+3}\dots i_{2s-1}\,q_{2s}} = 0, \end{cases} \qquad s = \overline{m,n}, \qquad (2.5.3)$$

причем равенства (2.5.3) при каждом фиксированном наборе индексов $i_{2k+1} \in I$, $k = \overline{m, n-1}$, выполняются только при одном наборе индексов $p_{2k} \in I$, $k = \overline{m+1, n}$, и $q_{2k} \in I$, $k = \overline{m+1, n}$.

Доказательство.

а) Методом математической индукции с учетом обозначений (1.3.1) легко проверить, что для произвольных наборов индексов $Q_{i(2k-1)}^{(2n)} \neq 0$, $k = n, n-1, \dots, 1$, $i_p = \overline{1, N}$, $p = \overline{1, 2k-1}$, откуда $f_{2n} = b_0 + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{1}{Q_{i(1)}^{(2n)}} \neq \infty$.

б) Используем метод математической индукции. При $n = 1, 2$, условия (2.5.3) легко проверяются. Предполагая, что пункт б) справедлив для произвольных ВЦД f_{2n-2}, докажем его справедливость для f_{2n}. Имеем

$$f_{2n} = b_0 + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{1}{b_{i(1)} + \sum_{i_2=1}^{N} \frac{1}{Q_{i(2)}^{(2n)}}}.$$

Так как $Q_{i(1)}^{(2n)} \neq 0$, $i_1 \in I$, то f_{2n} не имеет смысла тогда и только тогда, когда существует индекс $j(1)$, такой, что дробь

$$b_{j(1)} + \sum_{j_2=1}^{N} \frac{1}{Q_{j(1)j_2}^{(2n)}}$$

не имеет смысла. Последнее эквивалентно существованию индекса $j(2)$ такого, что $Q_{j(2)}^{(2n)}$ не имеет смысла либо существованию индексов $p_2 \in I$, $q_2 \in I$, $p_2 \neq q_2$, таких, что $Q_{j(1)p_2}^{(2n)} = Q_{j(1)q_2}^{(2n)} = 0$. Используя предположение индукции, получим: $Q_{j(2)}^{(2n)}$ не имеет смысла тогда и только тогда, когда выполняются условия (2.5.3), где $2 \leq m \leq n$. Так как

$$Q_{j(1)p_2}^{(2n)} = b_{j(1)p_2} + \sum_{j_3=1}^{N} \frac{1}{b_{j(1)p_2 i_3} + \sum\limits_{j_4=1}^{N} \frac{1}{Q_{j(1)p_2 i_3 i_4}^{(2n)}}},$$

то $Q_{j(1)p_2}^{(2n)} = 0$ тогда и только тогда, когда $b_{j(1)p_2} = 0$, и для каждого $i_3 \in I$ существует только один индекс p_4, что $Q_{j(1)p_2 i_3 p_4}^{(2n)} = 0$.

Последовательно применяя последнее утверждение, приходим к тому, что равенство $Q_{j(1)p_2}^{(2n)} = Q_{j(1)q_2}^{(2n)} = 0$ эквивалентно выполнению условия (2.5.3) при $m = 1$. ■

Утверждение 2.5.3 Если частными знаменателями (2.5.2) являются неотрицательные действительные числа, то

а) нечетная подходящая дробь $f_{2n+1} = \infty$, $n = 0,1,2,...$, тогда и только тогда, когда существует единственный индекс r_1, принадлежащий множеству $I = \{1,2,...,N\}$, что для произвольного набора индексов $i_{2k} \in I$, $k = \overline{1,n}$, и некоторого набора индексов $r_{2k+1} \in I$, $k = \overline{1,n}$, выполняются условия

$$b_{r_1 i_2 r_3 i_4 r_5 \ldots i_{2s} r_{2s+1}} = 0, \qquad s = \overline{0,n}, \tag{2.5.4}$$

причем равенство (2.5.4) при каждом фиксированном наборе индексов i_{2k}, $k = \overline{1,n}$, выполняется только при одном таборе индексов r_{2k+1}, $k = \overline{1,n}$;

б) $(2n+1)$-я подходящая дробь, $n = 0,1,2,...$, не имеет смысла, т.е. $f_{2n+1} = \dfrac{0}{0}$, тогда и только тогда, когда существует целое число m, $0 \le m \le n$, индексы $j_k \in I$, $k = \overline{1,2m}$, $j_0 = \varnothing$, $p_{2m+1} \in I$, $q_{2m+1} \in I$, $p_{2m+1} \ne q_{2m+1}$, что для произвольного набора индексов i_{2k}, $k = \overline{m+1,n}$, и некоторых наборов индексов $p_{2k+1} \in I$, $q_{2k+1} \in I$, $k = \overline{m+1,n}$ выполняются условия

$$\begin{cases} b_{j(2m)p_{2m+1} i_{2m+2} p_{2m+3} i_{2m+4} \ldots i_{2s} p_{2s+1}} = 0, \\ b_{j(2m)q_{2m+1} i_{2m+2} q_{2m+3} i_{2m+4} \ldots i_{2s} q_{2s+1}} = 0, \end{cases} \qquad s = \overline{m,n}, \tag{2.5.5}$$

причем равенства (2.5.5) при каждом фиксированном наборе индексов i_{2k}, $k=\overline{m+1,n}$, выполняются только при одном наборе индексов p_{2k+1}, $k=\overline{m+1,n}$ и q_{2k+1}, $k=\overline{m+1,n}$.

Доказательство.

а) Равенство $f_{2n+1}=b_0+\sum\limits_{i_1=1}^{N}\frac{1}{Q_{i(1)}^{(2n+1)}}=\infty$ возможно только тогда, когда существует единственный индекс r_1, что $Q_{r(1)}^{(2n+1)}=0$. Так как

$$Q_{r(1)}^{(2n+1)}=b_{r_1}+\sum_{i_2=1}^{N}\frac{1}{b_{r_1 i_2}+\sum\limits_{i_3=1}^{N}\frac{1}{Q_{r_1 i_2 i_3}^{(2n+1)}}}$$

то $Q_{r(1)}^{(2n+1)}=0$, тогда и только тогда, когда $b_{r_1}=0$, и для каждого $i_2\in I$ существует только один индекс r_3, что $Q_{r_1 i_2 i_3}^{(2n+1)}=0$. Продолжая аналогичным образом, приходим к условию (2.5.4).

Пункт б) доказывается аналогично соответствующему пункту предложения 2.5.2. При этом необходимо учитывать , что при всех допустимых наборах индексов $Q_{i(2k)}^{(2n+1)}\neq 0$. ■

Для ВЦД (2.5.2) с неотрицательными действительными частными знаменателями с учетом только что доказанных утверждений легко переносятся различные признаки сходимости , установленные ранее в §§ 2–4 в предположении, что ее компонентами являются положительные действительные числа.

Теорема 2.5.1 ВДЦ (2.5.2) с неотрицательными действительными частными знаменателями расходится, если выполняется хотя бы одно из условий (2.5.3), (2.5.4), (2.5.5) для бесконечной последовательности чисел n или условие (2.2.3), где α_k, β_k определяются согласно (2.2.4), s – согласно (2.2.5).

Доказательство. Если для бесконечной совокупности чисел n выполняется одно из условий (2.5.3), (2.5.4) или (2.5.5), то существует бесконечная подпоследовательность подходящих дробей, не имеющих смысла или равных ∞.

Пусть существует такое число n_0, что для всех $n \geq n_0$ условия (2.5.3), (2.5.4) и (2.5.5) не выполняются. Тогда все f_n для $n \geq n_0$ принимают конечные значения. Вместе с ВЦД (2.5.2) рассмотрим ветвящуюся цепную дробь

$$b_0 + \mathop{D}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{1}{b_{i(k)} + \varepsilon}, \tag{2.5.6}$$

где – ε некоторое положительное действительное число. Подходящие дроби (2.5.6) обозначим через $f_k(\varepsilon)$. Пусть $2m \geq n_0$. Для дроби (2.5.6) применима методика доказательства теоремы 2.2.1, из которой следует оценка

$$f_{2m+1}(\varepsilon) - f_{2m}(\varepsilon) \geq (f_{2m+1}(\varepsilon) - b_0)\exp(-\gamma_{2m+1}(\varepsilon)), \tag{2.5.7}$$

где

$$\gamma_{2m+1}(\varepsilon) = \sum_{k=2}^{2m+1} (\beta_{k-1} + \varepsilon)\left(\beta_k + \varepsilon + \frac{N}{\alpha_{k+1} + \varepsilon} + \frac{N}{\beta_{k+2} + \varepsilon} + \ldots + \frac{N}{\beta_{2s} + \varepsilon}\right).$$

Так как для $n \geq n_0$ существуют конечные пределы $f_n(\varepsilon)$ и $\gamma_{2m+1}(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$, то, устремляя ε к нулю в (2.5.7), получим

$$f_{2m+1} - f_{2m} \geq (f_{2m+1} - b_0)\exp(-\gamma_{2m+1}(0)) \geq C\exp(-\gamma_{2m+1}(0)).$$

В качестве константы C достаточно взять $f_{2m_0} - b_0$, где $2m_0$ – наименьшее четное число, такое, что $2m_0 \geq n_0$. Это следует из свойства вилки

$$f_{2k} \leq f_{2k+2} \leq f_{2j+1} - f_{2j-1}, \tag{2.5.8}$$

справедливого для произвольных натуральных чисел k и j, таких, что $2k \geq n_0$, $2j - 1 \geq n_0$. Неравенства (2.5.8) являются следствием неравенств (1.3.5), записанных для ВЦД (2.5.6), к которым применен предельный переход при $\varepsilon \to 0$. Как и при доказательстве теоремы 2.3.1, легко устанавливается, что последовательность $\gamma_{2m+1}(0)$ монотонно возрастает. Поэтому в силу условий теоремы существует конечный предел $\lim\limits_{m \to \infty} \gamma_{2m+1}(0) = \gamma(0)$. Из оценки $f_{2m+1} - f_{2m} \ge C\exp(-\gamma(0))$ следует расходимость ветвящейся цепной дроби (2.5.2). ■

Аналогичным образом для ВЦД (2.5.2) или (2.5.1) с неотрицательными действительными частными знаменателями и положительными частными числителями устанавливаются признаки сходимости, изложенные в §§2–4, если дополнительно потребовать, чтобы условия (2.5.3), (2.5.4) и (2.5.5), начиная с некоторого номера n_0, не выполнялись.

В дальнейшем нам понадобится

Теорема 2.5.2 [20, 23]. Пусть компонентами ВЦД (2.5.1) являются неотрицательные действительные числа $b_{i(k)} > 0$, $a_{i(k)} \ge 0$, $k = 1, 2, \ldots$, $i_p = \overline{1, N}$, $p = \overline{1, k}$.

Тогда ВЦД (2.5.1) сходится, если выполняется одно из условий: либо существует такой номер k, что все $a_{i(k)} = 0$, $i_p = \overline{1, N}$, $p = \overline{1, k}$, либо расходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \delta_k, \tag{2.5.9}$$

где

$$\delta_k = \min\left(\frac{b_{i(k+1)} b_{i(k)}}{a_{i(k+1)}} : i_p = \overline{1, N},\ p = \overline{1, k+1} \right), \tag{2.5.10}$$

причем наборы индексов, при которых $a_{i(k+1)} = 0$, при минимизации (2.5.10) не учитываются.

Доказательство. Легко проверить, что с учетом обозначений (1.3.1) для произвольных допустимых значений индексов все $Q_{i(k)}^{(n)}$ отличны от нуля и принимают конечные значения. Поэтому все n-е аппроксиманты $n = 1, 2, \ldots$, конечны и для них выполняется свойство вилки (2.5.8).

Рассмотрим s-ю подходящую дробь. Если при некотором наборе индексов $a_{i(k)} = 0$, то, так как $Q_{i(k)}^{(s)} \ne 0$, имеем $\dfrac{a_{i(k)}}{Q_{i(k)}^{(s)}} = 0$. Тогда s-ю аппроксиманту f_s ВЦД (2.5.1) можно записать в виде

$$f_s = b_0 + \underset{k=1}{\overset{s}{D}} \sum_{i_k=1}^{n_{i(k-1)}} \frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}}, \tag{2.5.11}$$

где $0 \le n_{i(k-1)} \le N$; $a_{i(k)} \ne 0$, причем предполагается, что если верхний индекс суммирования больше нижнего, то сумма равна нулю. Числа $n_{i(k-1)}$ не зависят от s.

Если при некотором m все $a_{i(m)} = 0$ $i_p = \overline{1,N}$, $p = \overline{1,m}$, то для произвольного $s \ge m$ $f_s = f_{m-1}$, и сходимость ВЦД (2.5.1) очевидна.

Пусть при каждом $k = 1, 2, \ldots,$ существует набор индексов $i_1, i_2, \ldots, i_k$, что $n_{i(k)} \ge 1$. Тогда обозначения (2.5.10) имеют смысл, так как набор индексов, по которым происходит минимизация, является не пустым множеством. Пусть в (2.5.11) $s = 2m+1$. Тогда, используя (1.3.4), получим

$$f_{2m+1} - f_{2m} = \sum_{i_1=1}^{n_{i(0)}} \sum_{i_2=1}^{n_{i(1)}} \cdots \sum_{i_{2m+1}=1}^{n_{i(2m)}} \frac{\prod_{r=1}^{2m+1} a_{i(r)}}{\prod_{r=1}^{2m+1} Q_{i(r)}^{(2m+1)} \prod_{r=1}^{2m} Q_{i(r)}^{(2m)}}.$$

Повторяем доказательство теоремы 2.3.3. Для оценки сверху выражений

$$\sum_{i_k=1}^{n_{i(k-1)}} \left(L_k + \sum_{j=1}^{n_{i(k-1)}} \frac{a_{i(k-1)j} Q_{i(k)}^{(s)}}{a_{i(k)} Q_{i(k-1)j}^{(s)}} \right)^{-1},$$

где $n_{i(k-1)} \ge 1$, s равно $2m+1$ или $2m$, применяем неравенство (2.1.5). Так как $L_k \ge \delta_k$ и $\frac{n}{\delta + n} \le \frac{N}{\delta + N}$, где $0 \le n \le N$, $\delta \ge 0$, то окончательно получим оценку

$$f_{2m+1} - f_{2m} \le C \prod_{k=2}^{2m+1} \frac{N}{N + \delta_k},$$

откуда с учетом расходимости ряда (2.5.9) следует сходимость ВЦД (2.5.1). ■

ГЛАВА 3. ПРИЗНАКИ СХОДИМОСТИ ВЦД С КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛОВЫМИ КОМПОНЕНТАМИ

§ 1. Исследование сходимости ветвящихся цепных дробей с частными числителями, равными единице

Рассмотрим ВЦД вида

$$b_0 + \mathop{D}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{1}{b_{i(k)}}, \tag{3.1.1}$$

где $b_{i(k)} \in \mathbf{C}$, $k = 1, 2, \ldots$, $i_p = \overline{1, N}$, $p = \overline{1, k}$. Именно для таких дробей оказались более компактными формулировки признаков сходимости в случае, если $b_{i(k)} > 0$ (см. гл.2).

Следующая теорема является многомерным аналогом теоремы Ван Флека (теорема В.10).

Теорема 3.1.1 [16,20]. Пусть все частные знаменатели ВЦД (3.1.1) принадлежат области

$$G_\varepsilon = \left\{ z \in \mathbf{C} : z \neq 0, \ \left| \arg z \right| < \frac{\pi}{2} - \varepsilon \right\}, \tag{3.1.2}$$

где ε – произвольное как угодно малое положительное действительное число $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}0$. Тогда

1) каждая m-я аппроксиманта f_m, $m = 1, 2, \ldots$, ВЦД (3.1.1) принадлежит области (3.1.2);

2) существуют конечные пределы четных f_{2n} и нечетных f_{2n+1} подходящих дробей при $n \to \infty$;

3) ВЦД (3.1.1) сходится, если при введении обозначений

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \min\left(\left| b_{i(k)} \right| : \ i_p = \overline{1, N}, \ p = \overline{1, k} \right), \\ \beta_k &= \max\left(\left| b_{i(k)} \right| : \ i_p = \overline{1, N}, \ p = \overline{1, k} \right), \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

выполняется одно из условий :

а) расходится ряд

$$\sum_{k=2}^{\infty} \alpha_k S_{k-1}\,, \tag{3.1.4}$$

где $S_k = \alpha_k + N^{-1}\alpha_{k-2} + N^{-2}\alpha_{k-4} + \ldots + N^{-r}\alpha_{k-2r}$ и $r = \left[\dfrac{k-1}{2}\right]$ – целая часть $\dfrac{k-1}{2}$;

б)

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{k=2}^{2m+1} \alpha_{k-1}\left(\alpha_k + \frac{N}{\beta_{k+1}} \frac{N}{+\alpha_{k+2}} \frac{N}{+\beta_{k+1}} \frac{N}{+\ldots+\alpha_s}\right) = \infty\,, \tag{3.1.5}$$

где $s = 2m + k - 2\left[\dfrac{k}{2}\right]$.

Доказательство. Если $b_{i(k)} \in G_\varepsilon$, $k = \overline{1,m}$, то, очевидно,

$$\frac{1}{b_{i(m)}} \in G_\varepsilon\,, \quad \left(b_{i(m-1)} + \sum_{i_m=1} \frac{1}{b_{i(m)}}\right) \in G_\varepsilon \text{ и т. д.}$$

Следовательно, пункт 1) выполняется при произвольном $0 < \varepsilon < \dfrac{\pi}{2}$.

Рассмотрим ВЦД

$$\mathop{D}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{1}{b_{i(k)}(z)}, \tag{3.1.6}$$

где $b_{i(k)}(z) = \left|b_{i(k)}\right| \exp\left(i\gamma_{i(k)}z\right)$, $\gamma_{i(k)} = \arg b_{i(k)}$, $z \in \mathbf{C}$, $i = \sqrt{-1}$.

Пусть

$$\left|\operatorname{Re} z\right| < 1 + \frac{\varepsilon}{\pi - 2\varepsilon}. \tag{3.1.7}$$

Тогда

$$\left|\arg b_{i(k)}(z)\right| = \left|\gamma_{i(k)} \operatorname{Re} z\right| < \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)\left(1 + \frac{\varepsilon}{\pi - 2\varepsilon}\right) = \frac{\pi - \varepsilon}{2} = \frac{\pi}{2} - \delta\,.$$

Следовательно, $b_{i(k)}(z) \in G_\delta$, где $\delta = \varepsilon/2$, если z принадлежит области (3.1.2). Поэтому в силу пункта 1) заключаем, что все подходящие дроби ВЦД (3.1.6) $f_m(z)$, $m = 1, 2, \ldots$, являются голоморфными функциями z в области (3.1.7). Рассмотрим область $D = \left\{ z \in C : \left|\operatorname{Re} z\right| < \varepsilon(\pi - 2)^{-1}, \left|\operatorname{Im} z\right| < 1 \right\}$. Для $z \in D$ и последовательности голоморфных функций $\{f_m(z)\}$ выполняются условия теоремы Стилтьеса-Витали (теорема В.18), где, например, $a=-1$, $b=-2$. Пусть $\Delta=\left\{ w\in C\colon \operatorname{Re}w=0, \left|\operatorname{Im}w\right|<1 \right\}$ и $z\in\Delta$. Тогда ВЦД (3.1.6) запишется в виде

$$\overset{\infty}{\underset{k=1}{D}} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{1}{\hat{b}_{i(k)}}, \tag{3.1.8}$$

где $\hat{b}_{i(k)}=\left|b_{i(k)}\right|\exp\left(-\gamma_{i(k)}\operatorname{Im}z\right)>0$. Из свойства вилки (1.3.5) следует, что для ВЦД (3.1.8) всегда существуют пределы четных и нечетных подходящих дробей. Поэтому в силу теоремы Стилтьеса-Витали существуют пределы $f_{2n}(1)$ и $f_{2n+1}(1)$ при $n\to\infty$,т.е. выполняется пункт 2) теоремы.

Докажем пункт 3) в предположении, что выполняется условие а). Пусть $z\in\Delta$ фиксировано и

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_k &= \min\left(\left|\hat{b}_{i(k)}\right| : i_p=\overline{1,N},\ p=\overline{1,k}\right), \\ \hat{\beta}_k &= \max\left(\left|\hat{b}_{i(k)}\right| : i_p=\overline{1,N},\ p=\overline{1,k}\right), \end{aligned} \tag{3.1.9}$$

Так как $\hat{\alpha}_k \geq \exp\left(-\frac{\pi}{2}\right)\alpha_k$, $\hat{\beta}_k \leq \exp\left(\frac{\pi}{2}\right)\beta_k$, то

$$\alpha_{k+1}S_k \leq e^{\pi}\hat{\alpha}_{k+1}\left(\hat{\alpha}_k + N^{-1}\hat{\alpha}_{k-2} + \ldots + N^{-r}\hat{\alpha}_{k-2r}\right).$$

В силу следствия 2.3.4, эквивалентности условий (2.3.42), (2.3.43) и предположения (3.1.4) теоремы ВЦД (3.1.6) сходится для каждого $z\in\Delta$. Учитывая теорему Стилтьеса-Витали, заключаем,что ВЦД (3.1.6) сходится на каждом компакте области D, в частности, в точке $z=1$, что равносильно сходимости ВЦД (3.1.1).

Пункт б) доказывается аналогично с учетом теоремы 2.3.1, теоремы Стилтьеса-Витали и неравенства

$$\sum_{k=2}^{2m+1}\alpha_{k-1}\left(\alpha_k + \frac{N}{\beta_{k+1}} \,\frac{N}{+\alpha_{k+2}} \,\frac{N}{+\beta_{k+3}} \,\frac{N}{+\ldots+\alpha_s}\right) \leq$$

$$\leq \sum_{k=2}^{2m+1} e^{\pi/2}\hat{\alpha}_{k-1}\left(e^{\pi/2}\hat{\alpha}_k + \frac{N}{e^{-\pi/2}\hat{\beta}_{k+1}} \,\frac{N}{+e^{\pi/2}\hat{\alpha}_{k+2}} + \frac{N}{e^{-\pi/2}\hat{\beta}_{k+3}} \,\frac{N}{+\ldots+e^{\pi/2}\hat{\alpha}_s}\right) =$$

$$= \sum_{k=2}^{2m+1} e^{\pi} \hat{\alpha}_{k-1} \left(\hat{\alpha}_k + \cfrac{N}{\hat{\beta}_{k+1} + \cfrac{N}{\hat{\alpha}_{k+2} + \cfrac{N}{\hat{\beta}_{k+3} + \ldots + \cfrac{N}{\hat{\alpha}_s}}}} \right). \quad \blacksquare$$

Теорема 3.1.1 неверна, если предположить, что $\varepsilon = 0$. В качестве контрпримера достаточно взять ВЦД (3.1.1), у которой $b_{i(2k)} = i$, $b_{i(2k-1)} = Ni$, $k = 1,2,\ldots$, $i_p = \overline{1,N}$, $p = \overline{1,k}$. В этом случае все нечетные подходящие дроби равны ∞.

Теорема 3.1.2 [20]. Пусть все частные знаменатели ВЦД (3.1.1) принадлежат области (3.1.2). Тогда дробь (3.1.1) сходится, если интегральная цепная дробь

$$\underset{k=1}{\overset{\infty}{D}} \int_0^N \frac{dt_k}{b_k\left(t^k\right)} \tag{3.1.10}$$

сходится, где $b_r\left(t^r\right)$, $t^r = \left(t_1, t_2, \ldots, t_r \right)$, $r = 1,2,\ldots$, – непрерывные положительные функции в гиперкубе $K_r = [0,N] \times [0,N] \times \ldots \times [0,N]$ такие, что

$$b_r\left(i^r\right) = \left|b_{i(r)}\right|, \quad i_{r.} = \overline{1,N},\ r = 1,2,\ldots. \tag{3.1.11}$$

и выполняются условия (2.4. 12).

Доказательство аналогично тому, которое применялось в предыдущей теореме, с использованием теорем 2.4.4 и В.18.■

Рассмотрим вопрос об аналоге теоремы В.12 для ВЦД. Если все частные знаменатели дроби (3.1.1) $b_{i(k)} > 0$, то, как следует из теоремы 2.2.2, расходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k\,, \tag{3.1.12}$$

где β_k определяются согласно (2.2.4), будет необходимым условием сходимости дроби (3.1.1). По аналогии с теоремой В.12 можно предположить, что аналогичное утверждение справедливо для ВЦД (3.1.1), где все $b_{i(k)} \in \mathbf{C}$, β_k определяются согласно (3.1.3). Построим контрпример, показывающий, что это не верно, хотя часть теоремы Кох справедлива и для ВЦД.

Теорема 3.1.3. Пусть для ВЦД

$$\overset{\infty}{\underset{k=1}{D}} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{1}{b_{i(k)}}, \tag{3.1.13}$$

где $b_{i(k)} \in \mathbf{C}$, $k = 1, 2, \ldots$, $i_p = \overline{1, N}$, $p = \overline{1, k}$, ряд (3.1.12) сходится, β_k определяются согласно (3.1.3). Тогда справедливы оценки

$$|A_m| \le K_m P_m, \quad |B_m| \le K_m Q_m, \tag{3.1.14}$$

где A_m и B_m, P_m и Q_m – соответственно числитель и знаменатель m-й подходящей дроби (3.1.13) и цепной дроби

$$\frac{N}{\beta_1} + \frac{N}{\beta_2} + \ldots + \frac{N}{\beta_k} + \ldots \tag{3.1.15}$$

$$K_m = C_1^{-1} \left(\beta_m^{N-1} C_2 \right)^{N^{m-1}}, \quad C_1 = C N^{N^p \left(N^2 - 1 \right)^{-1}},$$

$$C_2 = C N^{N^2 \left(N^2 - 1 \right)^{-1}}, \quad C = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \beta_k \right) \tag{3.1.16}$$

и p равно 1, если m – четное или 2 в противном случае.

Из полученных оценок следует, что $\lim\limits_{m \to \infty} A_m = 0, \ \lim\limits_{m \to \infty} B_m = 0$.

Доказательство. Вместе с ВЦД (3.1.13) рассмотрим ветвящуюся цепную дробь

$$\overset{\infty}{\underset{k=1}{D}} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{1}{\tilde{b}_{i(k)}}, \tag{3.1.17}$$

где $\tilde{b}_{i(k)} = \left| b_{i(k)} \right|$ и обозначим через $\tilde{A}_m, \tilde{B}_m$ – соответственно числитель и знаменатель ее m-й подходящей дроби. Очевидно, что A_m и B_m являются полиномами от переменных $b_{i(k)}$, $k \le n$. Поэтому

$$|A_m| \le \tilde{A}_m, \qquad |B_m| \le \tilde{B}_m. \tag{3.1.18}$$

Пусть

$$\tilde{A}[\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k] = \lim_{\substack{\tilde{b}_{j(r)} \to \beta_r \\ r = \overline{1,k}, \ j_n = \overline{1,N}, \ n = \overline{1,r}}} \tilde{A}_k,$$

$$\widetilde{B}[\beta_1,\beta_2,...,\beta_k] = \lim_{\substack{\widetilde{b}_{j(r)}\to\beta_r \\ r=\overline{1,k},\ j_n=\overline{1,N},\ n=\overline{1,r}}} \widetilde{B}_k,$$

где β_r определяются согласно (3.1.3). Тогда очевидно, что

$$\widetilde{A}_m \le \widetilde{A}[\beta_1,\beta_2,...,\beta_m], \qquad \widetilde{B}_m \le \widetilde{B}[\beta_1,\beta_2,...,\beta_m]. \tag{3.1.19}$$

Методом математической индукции докажем, что

$$\widetilde{A}[\beta_1,\beta_2,...,\beta_m] = \widetilde{K}_m P_m, \qquad \widetilde{B}[\beta_1,\beta_2,...,\beta_m] = \widetilde{K}_m Q_m, \tag{3.1.20}$$

где

$$\widetilde{K}_m = Q_{m,m}^{N^m - N^{m-1}} \cdot Q_{m-1,m}^{N^{m-1}-N^{m-2}} \cdot ... \cdot Q_{1,m}^{N-1} \tag{3.1.21}$$

и $P_{k,m}$, $Q_{k,m}$ обозначают соответственно числитель и знаменатель цепной дроби

$$\frac{N}{\beta_k} + \frac{N}{\beta_{k+1}} + ... + \frac{N}{\beta_m}. \tag{3.1.22}$$

Так как

$$\frac{P_{k,m}}{Q_{k,m}} = \frac{N}{\beta_k + \dfrac{P_{k+1,m}}{Q_{k+1,m}}} = \frac{NQ_{k+1,m}}{\beta_k Q_{k+1,m} + P_{k+1,m}},$$

то справедливы рекур-рентные соотношения

$$\begin{cases} P_{k,m} = NQ_{k+1,m}, \\ Q_{k,m} = \beta_k Q_{k+1,m} + P_{k+1,m}, \end{cases} \qquad k = \overline{1,m}, \tag{3.1.23}$$

откуда

$$Q_{k,m} = \beta_k Q_{k+1,m} + NQ_{k+2,m} \qquad k = \overline{1,m}, \tag{3.1.24}$$

причем $Q_{1,m} = Q_m$, $P_{1,m} = P_m$, $Q_{m+1,m} = 1$, $Q_{m+2,m} = 0$. Имеем

$$\frac{\widetilde{A}[\beta_1]}{\widetilde{B}[\beta_1]} = \lim_{\substack{\widetilde{b}_{i(1)}\to\beta_1 \\ i_1=\overline{1,N}}} \sum_{i_1=1}^{N} \frac{1}{\widetilde{b}_{i(1)}} = \frac{N\beta_1^{N-1}}{\beta_1^{N}}.$$

Следовательно, $\widetilde{A}[\beta_1] = N\beta_1^{N-1} = P_1 Q_{1,1}^{N-1}$, $\widetilde{K}_1 = Q_{1,1}^{N-1}$, т.е. справедливы (3.1.20) и (3.1.21) при $m = 1$. Пусть эти равенства выполняются при $m = n-1$. Тогда

$$\frac{\widetilde{A}[\beta_1,\beta_2,...,\beta_n]}{\widetilde{B}[\beta_1,\beta_2,...,\beta_n]}=\lim_{\substack{\widetilde{b}_{i(1)}\to\beta_1\\ i_1=\overline{1,N}}}\sum_{i_1=1}^{N}\frac{1}{\widetilde{b}_{i(1)}+\dfrac{\widetilde{A}[\beta_2,\beta_3,...,\beta_n]}{\widetilde{B}[\beta_2,\beta_3,...,\beta_n]}}=$$

$$=\frac{N\widetilde{B}[\beta_2,\beta_3,...,\beta_n]\left(\beta_1\widetilde{B}[\beta_2,\beta_3,...,\beta_n]+\widetilde{A}[\beta_2,\beta_3,...,\beta_n]\right)^{N-1}}{\left(\beta_1\widetilde{B}[\beta_2,\beta_3,...,\beta_n]+\widetilde{A}[\beta_2,\beta_3,...,\beta_n]\right)^{N}}.$$

Используя предположение индукции и учитывая, что $P_n=NQ_{2,n}$, $Q_n=Q_{1,n}$, имеем

$$\widetilde{A}[\beta_1,\beta_2,...,\beta_{n-1}]=NQ_{n-1,n-1}^{N^{n-1}-N^{n-2}}Q_{n-2,n-1}^{N^{n-2}-N^{n-3}}\ldots Q_{3,n-1}^{N^3-N^2}Q_{2,n-1}^{N^2-N+1}Q_{1,n-1}^{N-1},$$

откуда

$$\widetilde{A}[\beta_2,\beta_3,...,\beta_n]=NQ_{n,n}^{N^{n-1}-N^{n-2}}Q_{n-1,n}^{N^{n-2}-N^{n-3}}\ldots Q_{4,n}^{N^3-N^2}Q_{3,n}^{N^2-N+1}Q_{2,n}^{N-1}.$$

Аналогично,

$$\widetilde{B}[\beta_2,\beta_3,...,\beta_n]=Q_{n,n}^{N^{n-1}-N^{n-2}}Q_{n-1,n}^{N^{n-2}-N^{n-3}}\ldots Q_{4,n}^{N^3-N^2}Q_{3,n}^{N^2-N}Q_{2,n}^{N-1}.$$

Следовательно,

$$\widetilde{A}[\beta_1,\beta_2,...,\beta_n]=N\widetilde{B}[\beta_2,\beta_3,...,\beta_n]\left(\beta_1\widetilde{B}[\beta_2,\beta_3,...,\beta_n]+\right.$$

$$\left.+\widetilde{A}[\beta_2,\beta_3,...,\beta_n]\right)^{N-1}=NQ_{n,n}^{N^{n-1}-N^{n-2}}Q_{n-1,n}^{N^{n-2}-N^{n-3}}\ldots Q_{3,n}^{N^2-N}Q_{2,n}^{N}\times$$

$$\times\left(\beta_1Q_{n,n}^{N^{n-1}-N^{n-2}}Q_{n-1,n}^{N^{n-2}-N^{n-3}}\ldots Q_{3,n}^{N^2-N}Q_{2,n}^{N}+\right.$$

$$\left.+NQ_{n,n}^{N^{n-1}-N^{n-2}}Q_{n-1,n}^{N^{n-2}-N^{n-3}}\ldots Q_{4,n}^{N^3-N^2}Q_{3,n}^{N^2-N+1}Q_{2,n}^{N-1}\right)^{N-1}=$$

$$=NQ_{n,n}^{N^n-N^{n-1}}Q_{n-1,n}^{N^{n-1}-N^{n-2}}\ldots Q_{3,n}^{N^3-N^2}Q_{2,n}^{N^2-N+1}\left(\beta_1Q_{2,n}+NQ_{3,n}\right)^{N-1}=\widetilde{K}_nP_n.$$

Аналогичным образом доказывается, что

$$\widetilde{B}[\beta_1,\beta_2,...,\beta_n]=\widetilde{K}_nQ_n.$$

С учетом (3.1.24) оценим сверху $Q_{k,n}$, $k=n,n-1,...,1$. Имеем

$Q_{n,n}=\beta_n$,

$Q_{n-1,n}=\beta_{n-1}\beta_n+N<(1+\beta_n)(N+\beta_{n-1})<N(1+\beta_n)(1+\beta_{n-1})$,

$Q_{n-2,n}<\beta_{n-2}N(1+\beta_n)(1+\beta_{n-1})+N\beta_n<N(1+\beta_n)(1+\beta_{n-1})(1+\beta_{n-2})$,

$$Q_{n-3,n} < N\beta_{n-3}(1+\beta_n)(1+\beta_{n-1})(1+\beta_{n-2}) + N^2(1+\beta_n)(1+\beta_{n-1}) <$$
$$< N^2(1+\beta_n)(1+\beta_{n-1})(1+\beta_{n-2})(1+\beta_{n-3})$$

и т.д.

$$Q_{n,n} = \beta_n, \quad Q_{k,n} < C^{\left[\frac{n-k+1}{2}\right]}, \qquad 1 \le k < n, \tag{3.1.25}$$

где C определяется согласно (3.1.16), $\left[\dfrac{n-k+1}{2}\right]$ – целая часть $\dfrac{n-k+1}{2}$.

Применим (3.1.25) для оценки сверху выражения (3.1.21)

$$\widetilde{K}_n < \beta_n^{(N-1)N^{n-1}} C^{N^{n-1}-1} N^{N^{n-1}-N^{n-3}+2\left(N^{n-3}-N^{n-5}\right)+3\left(N^{n-5}-N^{n-7}\right)} + \ldots =$$
$$= C^{-1}\left(C\beta_n^{(N-1)}\right)^{N^{n-1}} N^{-\left[\frac{n}{2}\right]} N^{\frac{N^{n+1}-N^p}{N^2-1}} = C_1^{-1} N^{-\left[\frac{n}{2}\right]}\left(C_2\beta_n^{(N-1)}\right)^{N^{n-1}},$$

где $p=1$, если n – четное, $p=2$, если n – нечетное, и C_1, C_2 определяются согласно (3.1.16). Так как $\beta_n \to 0$ при $n \to \infty$, то $\widetilde{K}_n \to 0$ при $n \to \infty$. Из оценки (3.1.25) и того, что $P_n = Q_{2,n}$ и $Q_n = Q_{1,n}$, следует, что

$$Q_n < CN^{\left[\frac{n}{2}\right]}, \quad P_n < CN^{\left[\frac{n-1}{2}\right]+1}.$$

Учитывая полученные оценки, заключаем, что при выполнении условий теоремы $A_n \to 0$ и $B_n \to 0$ при $n \to \infty$. ■

Если бы для ВЦД существовал аналог детерминантной формулы в следующей формулировке

$$\left| A_n B_{n-1} - B_n A_{n-1} \right| \ge \alpha > 0, \tag{3.1.26}$$

где α – некоторая константа, не зависящая от n, то из утверждения теоремы 3.1.3 немедленно получили бы необходимый признак сходимости: ВЦД (3.1.13) расходится, если ряд (3.1.12) сходится.

Как показывает построенный ниже контрпример, оценка (3.1.26) и предполагаемая формулировка необходимого признака сходимости для ВЦД (3.1.13) с комплексными элементами, вообще говоря, неверны.

Рассмотрим ВЦД (3.1.13) с комплексными частными знаменателями

$b_{i(k)}$, такими, что ряд (3.1.12) сходится и для произвольного мультииндекса $i(k-1)$ $\sum_{i_k=1}^{N} \frac{1}{b_{i(k)}} = 0$. Тогда

$$f_n = \mathop{D}_{k=1}^{n} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{1}{b_{i(k)}} = 0, \quad n = 1, 2, \ldots \; .$$

Следовательно, ВЦД (3.1.13) сходится.

§ 2. Признаки сходимости ВЦД с частными знаменателями, равными единице

Рассмотрим последовательности непустых множеств $\{\Omega_{i(k)}\}$ и $\{V_{i(k)}\}$, $k=0,1,2,\ldots,\ i_0=0,\ i_p=\overline{1,N},\ p=\overline{1,k}$, где все $\varnothing \neq V_{i(k)} \subseteq \overline{\mathbf{C}}$ и $\varnothing \neq \Omega_{i(k)} \subseteq \overline{\mathbf{C}} \times \overline{\mathbf{C}}$, $\overline{\mathbf{C}}$ – расширенная комплексная плоскость. Последовательность $\{\Omega_{i(k)}\}$ называется последовательностью областей элементов, $\{V_{i(k)}\}$ – последовательностью областей значений, соответствующих $\{\Omega_{i(k)}\}$, для ВЦД

$$a_0\left(b_0+\sum_{i_k=1}^{N}\frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}}\right)^{-1}, \tag{3.2.1}$$

если

$$\frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}} \in V_{i(k)} \tag{3.2.2}$$

для произвольных $\langle a_{i(k)}, b_{i(k)} \rangle \in \Omega_{i(k)}$, $k=0,1,2,\ldots,\ i_0=0,\ i_p=\overline{1,N},\ p=\overline{1,k}$, и

$$\frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}+\sum\limits_{i_{k+1}=1}^{N} v_{i(k+1)}} \in V_{i(k)} \tag{3.2.3}$$

для произвольных $v_{i(k+1)} \in V_{i(k+1)}$ и $\langle a_{i(k)}, b_{i(k)} \rangle \in \Omega_{i(k)}$, $k=0,1,2,\ldots,\ i_0=0,$ $i_p=\overline{1,N},\ p=\overline{1,k}$. Условие (3.2.3) с учетом обозначений (1.3.3), (1.1.4) будем записывать в виде $t_{i(k)}\left(V_{i(k)}^{(1)}\right) \subseteq V_{i(k)}$.

Если $\{V_{i(k)}\}$ – последовательность областей значений, соответствующих последовательности областей элементов $\{\Omega_{i(k)}\}$, и если для каждой последовательности $\{V'_{i(k)}\}$ областей значений, соответствующих $\{\Omega_{i(k)}\}$, имеем

$$V_{i(k)} \subseteq V'_{i(k)},\ k=0,1,2,\ldots,\ i_0=0,\quad i_p=\overline{1,N},\ p=\overline{1,k},$$

то $\{V_{i(k)}\}$ называется наилучшей последовательностью областей значений. Аналогично, $\{\Omega_{i(k)}\}$ называется наилучшей последовательностью областей элементов, соответствующих последовательности областей значений $\{V_{i(k)}\}$, если для произвольной последовательности областей элементов $\{\Omega'_{i(k)}\}$, соответствующих $\{V_{i(k)}\}$, выполняются условия

$$\Omega'_{i(k)} \subseteq \Omega_{i(k)}, \ k = 0,1,2,\ldots, \ i_0 = 0, \ i_p = \overline{1,N}, \ p = \overline{1,k}.$$

Области элементов для ВЦД

$$a_0 \left(b_0 + \sum_{i_k=1}^{N} \frac{a_{i(k)}}{1} \right)^{-1} \tag{3.2.4}$$

обозначим $E_{i(k)}$, т.е. предполагается, что $a_{i(k)} \in E_{i(k)} \subseteq \mathbf{C}$, $k = 0,1,2,\ldots$, $i_0 = 0$, $i_p = \overline{1,N}$, $p = \overline{1,k}$.

Аналогично, через $G_{i(k)}$ будем обозначать области элементов ВЦД

$$\left(b_0 + \sum_{i_k=1}^{N} \frac{1}{b_{i(k)}} \right)^{-1}. \tag{3.2.5}$$

В работе [46] установлено, что последовательность областей

$$W_{i(k)} = \left\{ \frac{a_{i(k)}}{Q_{i(k)}^{(m)}} : \left\langle a_{i(p)}, b_{i(p)} \right\rangle \in \Omega_{i(p)}, \ p = \overline{k,m}, \ i_p = \overline{1,N} \right\}, \tag{3.2.6}$$

$k = 0,1,2,\ldots$, $i_0 = 0$, $i_p = \overline{1,N}$, $p = \overline{1,k}$, $m \ge k$ – произвольное, является последовательностью наилучших областей значений, соответствующих $\{\Omega_{i(k)}\}$. Таким образом, в случае, если $\Omega_{i(k)} = \Omega$, $V_{i(k)} = V$ для всех допустимых наборов индексов, наилучшей областью значений V является множество, совпадающее со значениями всех подходящих дробей ВЦД (3.2.1). Так как области значений – это, как правило, замкнутые области, то в случае сходимости ВЦД (3.2.1) к наилучшей области значений V присоединяем также значения бесконечной дроби (3.2.1).

Исследуем сходимость ветвящихся цепных дробей вида

$$b_0 + \sum_{i_k=1}^{N} \frac{c_{i(k)}}{1} \tag{3.2.7}$$

или

$$\left(1+\sum_{i_k=1}^{N}\frac{c_{i(k)}}{1}\right)^{-1}, \tag{3.2.8}$$

где $c_{i(k)} \in \mathbf{C}$, $k = 1,2,\ldots$, $i_p = \overline{1, N}$, $p = \overline{1, k}$.

Следующая теорема является многомерным аналогом признака сходимости Ворпицкого (теорема В.8).

Теорема 3.2.1 [7,10,20]. Если для ВЦД (3.2.8), где все $c_{i(k)}$ – комплексные числа, выполняются условия

$$\left|c_{i(k)}\right| \le \alpha = \frac{t(1-t)}{N},\ 0 \le t \le \frac{1}{2},\ k = 1,2,\ldots,\ i_p = \overline{1, N},\ p = \overline{1, k}, \tag{3.2.9}$$

то

1) ВЦД (3.2.8) абсолютно сходится;

2) справедливы неулучшаемые оценки скорости сходимости

$$\left|f_n - f_m\right| \le \frac{(1-2t)\,t^m(1-t)^m\left((1-t)^{n-m} - t^{n-m}\right)}{\left((1-t)^{n+1} - t^{n+1}\right)\left((1-t)^{m+1} - t^{m+1}\right)},\ \text{ если }\ 0 \le t < \frac{1}{2}, \tag{3.2.10}$$

или

$$\left|f_n - f_m\right| \le \frac{2(n-m)}{(n+1)(m+1)}, \qquad \text{если } t = \frac{1}{2}, \tag{3.2.11}$$

где $n > m$, f_k $-k$-я подходящая дробь ВЦД (3.2.8);

3) наилучшей областью значений, соответствующей области элементов (3.2.9) является круг

$$\left|z - \frac{1}{1-t^2}\right| \le \frac{t}{1-t^2}; \tag{3.2.12}$$

4) предельная константа $\alpha = \dfrac{1}{4N}$, является наилучшей, ее нельзя увеличить, сохранив при этом сходимость ВЦД (3.2.8).

Доказательство. Рассмотрим периодическую непрерывную дробь

$$\frac{1}{1-}\,\frac{t(1-t)}{1}\,\frac{t(1-t)}{-\quad 1}\,-\ldots \tag{3.2.13}$$

и обозначим P_m, Q_m, g_m ее m-й числитель, m-й знаменатель и m-ю аппроксиманту соответственно. Используя метод математической индукции с учетом рекуррентных формул (1.2.2), легко доказать, что $P_m = Q_{m-1}$, $m = 1,2,...$, и

$$Q_m = \frac{(1-t)^m - t^m}{1-2t}, \ m = 1,2,..., \qquad \text{если } 0 \le t < \frac{1}{2}, \tag{3.2.14}$$

$$Q_m = \frac{m+1}{2^m}, \ m = 1,2,..., \qquad \text{если } t = \frac{1}{2}. \tag{3.2.15}$$

Из (3.2.14), (3.2.15) следует, что $Q_m > 0$ и $g_m > 0$ для $0 \le t \le \frac{1}{2}$ и $m = 1,2,...$.

Покажем, что при выполнений условия (3.2.9) цепная дробь (3.2.13) является мажорантой ВЦД (3.2.8) (см. определение 1.4.2). Для ВЦД (3.2.8) аналогично (1.3.1) определим $Q_{i(k)}^{(s)}$, $s = 1,2,...$, $1 \le k \le s$, $i_p = \overline{1,N}$, $p = \overline{1,k}$, и

$$Q_0^{(s)} = 1 + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{c_{i(1)}}{Q_{i(1)}^{(s)}}, \ s = 1,2,... .$$

Используя метод математической индукции, докажем, что при выполнение условий теоремы

$$\left| Q_{i(k)}^{(s)} \right| \ge \frac{1}{g_{s-k+1}}, \ s = 1,2,..., \ 0 \le k \le s, \ i_0 = 0, \ i_p = \overline{1,N}, \ p = \overline{1,k}. \tag{3.2.16}$$

Фиксируем s. При $k = s$ имеем $Q_{i(s)}^{(s)} = 1 = g_1^{-1}$. При $k = s-1$ получим

$$Q_{i(s-1)}^{(s)} = \left| 1 + \sum_{i_s=1}^{N} c_{i(s)} \right| \ge 1 - t(1-t) = \frac{1}{g_2}.$$

Пусть неравенство (3.2 16) выполняется при $k = n+1$. Докажем его справедливость при $k = n$. Имеем

$$\left| Q_{i(n)}^{(s)} \right| = \left| 1 + \sum_{i_{n+1}=1}^{N} \frac{c_{i(n+1)}}{Q_{i(n+1)}^{(s)}} \right| \ge 1 - t(1-t) g_{s-n} = \frac{1}{g_{s-n+1}}.$$

Пусть $n > m$. Так как все $Q_{i(k)}^{(s)} \ne 0$, то для разности двух подходящих дробей $f_n - f_m$ ВЦД (3.2.8) по аналогии с (1.3.3) легко устанавливается формула

$$f_n - f_m = \sum_{i_1, i, \ldots, i_m = 1}^{n} \frac{(-1)^m \prod_{k=1}^{m} c_{i(k)}}{\prod_{k=0}^{m} Q_{i(k)}^{(n-1)} \prod_{k=0}^{m-1} Q_{i(k)}^{(m-1)}}, \tag{3.2.17}$$

где $Q_{i(0)}^{(s)} = Q_0^{(s)}$, $s = n-1, m-1$.

Запишем формулу (3.2.17) для непрерывной дроби (3.2.13)

$$g_n - g_m = \frac{t^m (1-t)^m}{\prod_{k=0}^{m} \frac{1}{g_{n-k}} \prod_{k=0}^{m-1} \frac{1}{g_{m-k}}} \geq 0, \quad n > m. \tag{3.2.18}$$

Из неравенств (3.2.16) следует, что $|f_n - f_m| \leq g_n - g_m$.

Так как периодическая цепная дробь (3.2.13), где $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$, сходится (см. теорему В?), и ее подходящие дроби монотонно возрастают, то ВЦД (3.2.8) абсолютно сходится и справедлива оценка

$$|f_n - f_m| \leq t^m (1-t)^m \prod_{k=0}^{m} g_{n-k} \prod_{k=0}^{m-1} g_{m-k}.$$

Учитывая, что $g_k = \frac{Q_{k-1}}{Q_k}$, $k = 1, 2, \ldots$, получим

$$|f_n - f_m| \leq \frac{t^m (1-t)^m Q_{n-m}}{Q_n Q_m}. \tag{3.2.19}$$

При $t = \frac{1}{2}$ имеем $Q_k = \frac{k+1}{2^k}$, $k = 1, 2, \ldots$, и оценка (3.2.19) преобразуется в (3.2.11). Если же $0 \leq t < \frac{1}{2}$, то, используя (3.2.14), получим неравенство (3.2.10). Оценки (3.2.10) и (3.2.11) точные. Они достигаются для ВЦД (3.2.8), у которой $c_{i(k)} = -\frac{t(1-t)}{N}$, $k = 1, 2, \ldots$, $i_p = \overline{1, N}$, $p = \overline{1, k}$. Заметим также, что правая часть неравенства (3.2.11) получается из правой части неравенства (3.2.10) путем предельного перехода при $t \to \frac{1}{2}$.

В случае $0 \leq t < \frac{1}{2}$ справедливо неравенство

$$\frac{(1-2t)\left((1-t)^{n-m}-t^{n-m}\right)}{\left((1-t)^{n+1}-t^{n+1}\right)\left((1-t)^{m+1}-t^{m+1}\right)}\le\frac{1}{(1-t)^{2m+1}}, \qquad (3.2.20)$$

которое легко устанавливается, если ввести замену $y=\frac{t}{1-t}$ и учесть, что $0\le y<1$. Действительно, в этом случае (3.2.20) сводится к очевидному неравенству $(1-y)\left(1-y^{n-m}\right)\le\left(1-y^{m+1}\right)\left(1-y^{n+1}\right)$.

Из (3.2.20) следует более прозрачная, но и более грубая оценка

$$\left|f_n-f_m\right|\le\frac{t^m}{(1-t)^m}, \qquad \text{если } 0\le t<\frac{1}{2}. \qquad (3.2.21)$$

Докажем пункт 3). m-ю аппроксиманту ВЦД (3.2.8) запишем в виде

$$z=\left(1+\sum_{i_1=1}^{N}\frac{c_{i(1)}}{Q_{i(1)}^{(m-1)}}\right)^{-1}=\frac{1}{1+w}.$$

Из оценки (3.2.16) и условия (3.2.9) следует, что

$$|w|\le\sum_{i_1=1}^{N}\frac{\left|c_{i(1)}\right|}{\left|Q_{i(1)}^{(m-1)}\right|}\le t(1-t)g_{m-1}.$$

Обозначим через g значение бесконечной цепной дроби (3.2.13). Так как $g=\frac{1}{(1-t(1-t)g)}$, то, решая квадратное уравнение относительно g, получим $g=\frac{1}{1-t}$. Из формулы (3.2.18) следует, что последовательность $\{g_m\}$ монотонно возрастает. Следовательно, $w\le t(1-t)g=t$ и $\left|\frac{1-z}{z}\right|=w\le t$, откуда после несложных вычислений получим (3.2.12).

Покажем, что наилучшая область значений ВЦД (3.2.8) совпадает с этим кругом. Рассмотрим ветвящуюся цепную дробь (3.2.8), у которой $c_{i(1)}=N^{-1}c$, $i_1=\overline{1,N}$, $c_{i(k)}=-N^{-1}t(1-t)$, $k=2,3,\ldots$, $i_p=\overline{1,N}$, $p=\overline{1,k}$. Её значение равно $z=\left(1+c(1-t)^{-1}\right)^{-1}$. Произвольное z, принадлежащее области (3.2.12), легко получается подбором c, такого, что $c\le t(1-t)$.

Для доказательства пункта 4) заметим, что согласно теореме В.13 ВЦД (3.2.8), у которой $c_{i(k)} = -c$, где c – произвольное действительное число, такое, что $c > \dfrac{1}{4N}$, расходится. ■

Теорема 3.2.2 [20]. Пусть для ВЦД (3.2.7), где b_0, $c_{i(k)}$, $k = 1, 2, \ldots$, $i_p = \overline{1, N}$, $p = \overline{1, k}$, – комплексные числа, выполняются условия

$$c_{i(k)} \le N^{-1} g_{i(k)} \left(1 - g_{i(k-1)}\right), \quad k = 1, 2, \ldots,\ i_p = \overline{1, N},\ p = \overline{1, k},\ i_0 = 0, \qquad (3.2.22)$$

где

$$g_{i(k)} \in \mathbf{R},\ 0 \le g_{i(k)} < 1,\ g_{i(0)} = g_0 = 0,\ k = 1, 2, \ldots,\ i_p = \overline{1, N},\ p = \overline{1, k}, \qquad (3.2.23)$$

или

$$g_{i(k)} \in \mathbf{R},\ 0 < g_{i(k)} \le 1,\ g_{i(0)} = g_0 = 0,\ k = 1, 2, \ldots,\ i_p = \overline{1, N},\ p = \overline{1, k}. \qquad (3.2.24)$$

Тогда ВЦД (3.2.7) абсолютно сходится и ее наилучшей областью значений является круг

$$|z - b_0| \le 1. \qquad (3.2.25)$$

Доказательство. Покажем, что мажорантой ВЦД (3.2.7) является ВЦД

$$|b_0| + \mathop{D}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{-N^{-1} g_{i(k)} \left(1 - g_{i(k-1)}\right)}{1}. \qquad (3.2.26)$$

Для дроби (3.2.26) введем рекуррентно сокращенные обозначения, аналогичные (1.3.2)

$$\hat{Q}_{i(s)}^{(s)} = 1, \quad \hat{Q}_{i(p)}^{(s)} = 1 + \sum_{i_{p+1}=1}^{N} \frac{-N^{-1} g_{i(p+1)} \left(1 - g_{i(p)}\right)}{\hat{Q}_{i(p+1)}^{(s)}}, \qquad (3.2.27)$$

где $s = 1, 2, \ldots$, $p = \overline{1, s-1}$, $i_k = \overline{1, N}$, $k = \overline{1, p}$. Методом математической индукции докажем справедливость неравенств

$$\left|Q_{i(k)}^{(s)}\right| \ge \hat{Q}_{i(k)}^{(s)},\ s = 1, 2, \ldots,\ k = \overline{1, s},\ i_p = \overline{1, N},\ p = \overline{1, k}, \qquad (3.2.28)$$

и

$$\hat{Q}_{i(k)}^{(s)} > g_{i(k)}, \qquad s = 1, 2, \ldots,\ k = \overline{1, s},\ i_p = \overline{1, N},\ p = \overline{1, k}, \qquad (3.2.29)$$

если выполняются ограничения (3.2.23), или

$$\hat{Q}_{i(k)}^{(s)} \ge g_{i(k)}, \qquad s=1,2,..., \; k=\overline{1,s}, \; i_p=\overline{1,N}, \; p=\overline{1,k}, \tag{3.2.30}$$

если выполняются ограничения (3.2.24).

При $k=s$ неравенства (3.2.28)-(3.2.30) очевидны. При $k=s-1$ имеем

$$\left|Q_{i(s-1)}^{(s)}\right| \ge 1-\sum_{i_s=1}^{N}\left|c_{i(s)}\right| \ge 1-\sum_{i_s=1}^{N} N^{-1} g_{i(s)}\left(1-g_{i(s-1)}\right)=\hat{Q}_{i(s-1)}^{(s)}.$$

Заменяя $g_{i(s)}$ единицей, получим (3.2.29) или (3.2.30), где $k=s-1$.

Пусть неравенства (3.2.28) – (3.2.30) выполняются при $k=p+1\le s$. Докажем их справедливость при $k=p$. Имеем

$$\left|Q_{i(p)}^{(s)}\right| = \left|1+\sum_{i_s=1}^{N}\frac{c_{i(p+1)}}{Q_{i(p+1)}^{(s)}}\right| \ge 1-\sum_{i_s=1}^{N}\frac{\left|c_{i(p+1)}\right|}{\left|Q_{i(p+1)}^{(s)}\right|} \ge 1-\sum_{i_s=1}^{N}\frac{\left|c_{i(p+1)}\right|}{\left|Q_{i(p+1)}^{(s)}\right|} \ge$$

$$\ge 1+\sum_{i_s=1}^{N}\frac{-N^{-1}g_{i(p+1)}\left(1-g_{i(p)}\right)}{\hat{Q}_{i(p+1)}^{(s)}}=\hat{Q}_{i(p)}^{(s)}.$$

Учитывая, что в силу оценок (3.2.29) и (3.2.30) все $\hat{Q}_{i(p+1)}^{(s)} \ne 0$ и заменяя $g_{i(p+1)}$ на $\hat{Q}_{i(p+1)}^{(s)}$, получим (3.2.29), (3.2.30) при $k=p$.

Следовательно, все $Q_{i(k)}^{(s)} \ne 0$, $\hat{Q}_{i(k)}^{(s)} \ne 0$. Воспользовавшись формулой (1.3.4) для разностей подходящих дробей ВЦД (3.2.7) и (3.2.26) f_n-f_m и соответственно $\hat{g}_n-\hat{g}_m$ где $n>m$, имеем

$$|f_n-f_m| \le \sum_{i_1,i_2,...,i_{m+1}=1}^{N}\frac{\prod_{k=1}^{m+1}\left|c_{i(k)}\right|}{\prod_{k=1}^{m+1}\left|Q_{i(k)}^{(n)}\right|\prod_{k=1}^{m}\left|Q_{i(k)}^{(m)}\right|} \le$$

$$\le(-1)^{m+1}\sum_{i_1,i_2,...,i_{m+1}=1}^{N}\frac{(-1)^{m+1}\prod_{k=1}^{m+1}g_{i(k)}\left(1-g_{i(k-1)}\right)}{N^{m+1}\prod_{k=1}^{m+1}\hat{Q}_{i(k)}^{(n)}\prod_{k=1}^{m}\hat{Q}_{i(k)}^{(m)}}=-\left(\hat{g}_n-\hat{g}_m\right).$$

Таким образом,

$$|f_n - f_m| \le \hat{g}_m - \hat{g}_n, \qquad n > m. \tag{3.2.31}$$

Последовательность $\{\hat{g}_n\}$ монотонно убывает и в силу неравенств (3.2.29), (3.2.30) ограничена снизу, так как

$$\hat{g}_n = |b_0| + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{-N^{-1} g_{i(1)}}{\hat{Q}_{i(1)}^{(n)}} \ge |b_0| - 1.$$

Поэтому предел $\hat{g} = \lim\limits_{n\to\infty} \hat{g}_n$ существует и конечен. Абсолютная сходимость ВЦД (3.2.7) следует из неравенства (3.2.31). Учитывая (3.2.29) или (3.2.30) и условия (3.2.22), имеем

$$|f_n - b_0| \le \sum_{i_1=1}^{N} \frac{|c_{i(1)}|}{\left|Q_{i(1)}^{(n)}\right|} \le 1.$$

Поэтому наилучшая область значений ВЦД (3.2.7) принадлежит кругу (3.2.25). Покажем, что она совпадает с этим кругом. ВЦД (3.2.7), у которой $c_{i(1)} = (2N)^{-1} c$, $i_1 = \overline{1,N}$, $c_{i(k)} = -\dfrac{1}{4N}$, $k = 2,3,\ldots$, $i_p = \overline{1,N}$, $p = \overline{1,k}$, удовлетворяет ограничениям (3.2.22), если $|c| \le 1$. В данном случае $g_{i(1)} = \dfrac{1}{2} c$, $i_1 = \overline{1,N}$, $g_{i(k)} = \dfrac{1}{2}$, $k = 2,3,\ldots$, $i_p = \overline{1,N}$, $p = \overline{1,k}$, и значение дроби равно $b_0 + c$. ■

Рассмотрим ВЦД (3.2.8), где $c_{i(k)}$ – комплексные числа, удовлетворяющие условиям (3.2.22) и ограничениям (3.2.23) или (3.2.24) относительно $g_{i(k)}$. Так как согласно теореме 3.2.2 значение дроби, обратной к (3.2.8), может быть равно нулю, то без дополнительных ограничений можно лишь говорить о сходимости в широком смысле ВЦД (3.2.8)

Теорема 3.2.3 [20,31]. ВЦД (3.2.8) с числовыми комплексными элементами $c_{i(k)}$, $k = 1,2,\ldots$, $i_p = \overline{1,N}$, $p = \overline{1,k}$, абсолютно сходится, если справедливы условия (3.2.22), где $0 < g_{i(0)} = g_0 \le 1$ и $0 < g_{i(k)} \le 1$ или $0 \le g_{i(k)} < 1$, $k = 1,2,\ldots$, $i_p = \overline{1,N}$, $p = \overline{1,k}$. Наилучшей областью значений этой дроби является круг

$$\left| z - \frac{1}{g_0(2-g_0)} \right| \le \frac{1-g_0}{g_0(2-g_0)}. \tag{3.2.32}$$

Доказательство. Аналогично, как и при доказательстве теоремы 3.2.2, легко устанавливается, что мажорантой ВЦД (3.2.8) является ВЦД

$$\left(1 + \mathop{D}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{-N^{-1}\left(1-g_{i(k-1)}\right)g_{i(k)}}{1} \right)^{-1}. \tag{3.2.33}$$

Если бесконечную ВЦД (3.2.33) или ее n-ю аппроксиманту записать в виде

$$z = \frac{1}{1-(1-g_0)w}, \quad w = \sum_{i_1=1}^{N} \cfrac{N^{-1}g_{i(1)}}{1 - \sum\limits_{i_2=1}^{N} \cfrac{N^{-1}\left(1-g_{i(1)}\right)g_{i(2)}}{1 - \ddots}},$$

то в силу утверждения теоремы 3.2.2 $w \le 1$ и поэтому $\left|1-\frac{1}{z}\right| \le 1-g_0$, откуда с помощью элементарных вычислений получим (3.2.32). Абсолютная сходимость ВЦД (3.2.8) следует из того, что аппроксиманты мажорантной ВЦД (3.2.33) образуют монотонно возрастающую и ограниченную сверху последовательность. ■

Теорема 3.2.4 [13,20]. Пусть для ВЦД (3.2.8), где $c_{i(k)}$, $k = 1,2,...$, $i_p = \overline{1,N}$, $p = \overline{1,k}$ – комплексные числа, выполняются условия (3.2.22) и ограничения (3.2.23) относительно $g_{i(k)}$.

Тогда дробь (3.2.8) сходится, если существует такое натуральное число n и набор индексов $i_1, i_2, ..., i_n$, $1 \le i_k \le N$, $k = \overline{1,n}$, что $g_{i(n)} = 0$ или

$$Nc_{i(n)} \ne -g_{i(n)}\left(1-g_{i(n-1)}\right). \tag{3.2.34}$$

Доказательство. ВЦД

$$Q_{i(p)} = 1 + \mathop{D}_{k=p+1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{c_{i(k)}}{1},$$

где $p = 0,1,2,...$, $i_0 = 0$, $i_k = \overline{1,N}$, $k = \overline{1,p}$, согласно теореме 3.2.2 сходится и принимает значение, принадлежащее кругу $|z-1| \le 1-g_{i(p)}$.

Элементы $c_{i(k)}$ запишем в виде

$$c_{i(k)} = N^{-1} g_{i(k)} \left(1 - g_{i(k-1)}\right) x_{i(k)},$$

где $\left| x_{i(k)} \right| \le 1$ в силу условия (3.2.22). Если ВЦД (3.2.8) расходится, то необходимо

$$Q_0 = 1 + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{N^{-1} g_{i(1)} x_{i(1)}}{Q_{i(1)}} = 0\,. \tag{3.2.36}$$

Так как $\left| x_{i(1)} \right| \le 1$ и согласно (3.2.29) $\left| Q_{i(1)} \right| \ge g_{i(1)}$, то равенство (3.2.36) равносильно тому, что

$$\left| x_{i(1)} \right| = 1,\ g_{i(1)} \left| Q_{i(1)} \right|^{-1} = 1,\ g_{i(1)} x_{i(1)} Q_{i(1)}^{-1} = -1, \quad i_1 = \overline{1,N}\,. \tag{3.2.37}$$

Из условия $\left| Q_{i(1)} - 1 \right| \le 1 - g_{i(1)}$ и (3.2.37) следует, что

$$Q_{i(1)} = g_{i(1)},\ x_{i(1)} = -1, \quad i_1 = \overline{1,N}\,. \tag{3.2.38}$$

Поскольку

$$Q_{i(1)} = 1 + \left(1 - g_{i(1)}\right) \sum_{i_2=1}^{N} \frac{N^{-1} g_{i(2)} x_{i(2)}}{Q_{i(2)}},$$

то, учитывая (3.2.38), имеем

$$\sum_{i_2=1}^{N} \frac{N^{-1} g_{i(2)} x_{i(2)}}{Q_{i(2)}} + 1 = 0,$$

откуда, повторяя те же рассуждения, получим

$$Q_{i(1)} = g_{i(2)},\ x_{i(2)} = -1,\ i_k = \overline{1,N}, \quad k = 1,\,2 \ \text{ и т.д.}$$

Расходимость дроби (3.2.8) эквивалентна выполнению условий

$$Q_{i(k)} = g_{i(k)}, \qquad\qquad x_{i(k)} = -1 \tag{3.2.39}$$

при всех возможных наборах индексов. Поэтому выполнение условия (3.2.34) гарантирует сходимость ВЦД (3.2.8).

Пусть $x_{i(k)} = -1$, $k = 1, 2, \ldots$, $i_p = \overline{1,N}$, $p = \overline{1,k}$, и $g_{j(n)} = 0$ при некотором наборе индексов. С учетом (3.2.29) имеем

$$Q_{j(n-1)}^{(s)}=1-\left(1-g_{j(n-1)}\right)\sum_{i_n=1}^{N}\frac{N^{-1}g_{j(n-1)i_n}}{Q_{j(n-1)i_n}^{(s)}}>1-\left(1-g_{j(n-1)}\right)\frac{N-1}{N}. \quad (3.2.40)$$

Если $n>1$, то $Q_{j(n-1)}\neq g_{j(n-1)}$, и условие (3.2.39) не выполняется. При $n=1$ из неравенства (3.2.40) следует, что $Q_0\geq N^{-1}$. Поэтому ВЦД (3.2.8) сходится. ■

Теорема 3.2.5 [20]. ВЦД (3.2.8) с комплексными частными числителями сходится, если для произвольного натурального n и произвольного набора индексов $i_1,i_2,...,i_n$ выполняются условия

$$\sum_{k=1}^{n}\left|c_{i(k)}\right|<N^{-1},\quad n=1,2,...,\ i_p=\overline{1,N},\ \ p=\overline{1,k}. \quad (3.2.41)$$

Доказательство. Покажем, что существуют такие действительные числа $0\leq g_{i(k)}<1$, $k=1,2,...$, $i_p=\overline{1,N}$, $p=\overline{1,k}$, $g_{i(0)}=g_0=0$, что

$$\left|c_{i(k)}\right|=N^{-1}g_{i(k)}\left(1-g_{i(k-1)}\right) \quad (3.2.42)$$

Действительно, так как $\left|c_{i(1)}\right|<N^{-1}$, то можно положить $N\left|c_{i(1)}\right|=g_{i(1)}$. Тогда $0\leq g_{i(1)}<1$, $i_1=\overline{1,N}$. Пусть $g_{i(n)}$, $i_k=\overline{1,N}$, $k=\overline{1,n}$, уже найдены. Учитывая (3.2.42), имеем

$$Nc_{i(n+1)}<1-\sum_{k=1}^{n}Nc_{i(k)}=1-\sum_{k=1}^{n}g_{i(k)}\left(1-g_{i(k-1)}\right)=1-g_{i(1)}-\sum_{k=2}^{n}g_{i(k)}\left(1-g_{i(k-1)}\right)=$$
$$=\left(1-g_{i(1)}\right)\left(1-g_{i(2)}\right)-\sum_{k=3}^{n}g_{i(k)}\left(1-g_{i(k-1)}\right)\leq\left(1-g_{i(2)}\right)-\sum_{k=3}^{n}g_{i(k)}\left(1-g_{i(k-1)}\right)=$$
$$=\left(1-g_{i(2)}\right)\left(1-g_{i(3)}\right)-\sum_{k=4}^{n}g_{i(k)}\left(1-g_{i(k-1)}\right)\leq\left(1-g_{i(3)}\right)-\sum_{k=4}^{n}g_{i(k)}\left(1-g_{i(k-1)}\right)\leq\ldots\leq$$
$$\leq\left(1-g_{i(n-1)}\right)\left(1-g_{i(n)}\right)\leq\left(1-g_{i(n)}\right).$$

Поэтому существует такое действительное число $0\leq g_{i(n+1)}<1$, что

$$N\left|c_{i(n+1)}\right|=g_{i(n+1)}\left(1-g_{i(n)}\right).$$

Если некоторые $c_{i(n)}$ равны нулю, то, значит, $g_{i(n)}=0$, и сходимость

ВЦД (3.2.8) следует из теоремы 3.2.4. Пусть все $c_{i(k)} \neq 0$, $k = 1,2,\ldots,$ $i_p = \overline{1,N}$, $p = \overline{1,k}$. Тогда, положив,

$$g_{i(k)} = 1 - \sup\left(\sum_{p=k+1}^{\infty} N\left| c_{i(p)} \right| : i_r = \overline{1,N}, r \geq k+1 \right), \tag{3.2.43}$$

$$k = 0,1,2,\ldots, \; i_0 = 0, \; i_p = \overline{1,N}, \; p = \overline{1,k},$$

имеем

$$\left(1 - g_{i(k-1)}\right) g_{i(k)} = \left(\sup \sum_{p=k}^{\infty} N\left| c_{i(p)} \right| \right)\left(1 - \sup \sum_{p=k+1}^{\infty} N\left| c_{i(p)} \right| \right) \geq$$

$$\geq \left(N\left| c_{i(k)} \right| + \sup \sum_{p=k+1}^{\infty} N\left| c_{i(p)} \right| \right)\left(1 - \sup \sum_{p=k+1}^{\infty} N\left| c_{i(p)} \right| \right) \geq$$

$$\geq N\left| c_{i(k)} \right| + \sup \sum_{p=k+1}^{\infty} N\left| c_{i(p)} \right| \left(1 - \sup \sum_{p=k+1}^{\infty} N\left| c_{i(p)} \right| \right) \geq N\left| c_{i(k)} \right|.$$

Учитывая (3.2.43), получим $0 \leq g_{i(0)} = g_0 < 1,\; 0 < g_{i(k)} < 1$, $k = 1,2,\ldots,$ $i_p = \overline{1,N},\; p = \overline{1,k}$. Поэтому

$$c_{i(1)} \leq N^{-1}(1 - g_0) g_{i(1)}, \quad i_1 = \overline{1,N},$$

$$c_{i(k)} < N^{-1}\left(1 - g_{i(k-1)}\right) g_{i(k)}, \qquad k = 2,3,\ldots, \; i_p = \overline{1,N}, \; p = \overline{1,k}.$$

Если $g_0 > 0$, то ВЦД (3.2.8) сходится согласно теореме 3.2.3. Если же $g_0 = 0$, то сходимость ВЦД (3.2.8) следует из теоремы 3.2.4.■

Нам будут необходимы некоторые сведения о цепных последовательностях, более подробно изложенные в монографии [202].

Последовательность действительных неотрицательных чисел $\{a_k\}$ называется цепной, если существуют такие действительные числа $0 \leq g_n \leq 1$, $n = 0,1,2,\ldots,$ что $a_k = (1 - g_{k-1}) g_k$, $k = 1,2,\ldots$. Числа g_n, $n = 0,1,2,\ldots$, называются параметрами цепной последовательности. Параметры определяются неоднозначно. Однако для каждой цепной последовательности $\{a_k\}$ всегда существуют так называемые минимальные параметры m_n, $n = 0,1,\ldots,$ и максимальные параметры M_n, $n = 0,1,2,\ldots,$ такие, что $a_k = (1 - m_{k-1}) m_k$,

$a_k = (1 - M_{k-1})M_k$, $k = 1,2,\ldots$. Для всех других значений параметров данной цепной последовательности $\{a_k\}$ справедливы неравенства

$$m_n \le g_n \le M_n, \qquad n = 0,1,2,\ldots .$$

Минимальные и максимальные параметры определяются однозначно по формулам

$$m_0 = 0, \qquad m_{p+1} = \begin{cases} 0, \; если \;\; m_p = 1 \\ a_{p+1}(1 - m_p)^{-1}, \; если \;\; m_p < 1, \end{cases} \qquad p = 1,2,\ldots ,$$

$$M_p = 1 - \frac{a_{p+1}}{1} \, \frac{a_{p+2}}{1} \, \frac{a_{p+3}}{1} \, \frac{}{-}\ldots, \qquad p = 1,2,\ldots .$$

Если $\{a_k\}$ – цепная последовательность, у которой $a_k > 0$, $k = 1,2,\ldots$, то $m_p = M_p$, $p = 1,2,\ldots$, тогда и только тогда, когда расходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{k} \frac{m_i}{1 - m_i}.$$

Последовательность $\{\alpha_k^2\}$ является цепной тогда и только тогда, когда для всех действительных значений ξ_i, $i = 1,2,\ldots$, неотрицательно определены квадратические формы $\sum_{p=1}^{n} \xi_p^2 - 2\sum_{p=1}^{n-1} \alpha_p \xi_p \xi_{p+1} \ge 0$, $n = 2,3,\ldots$.

Теорема 3.2.6 [20,31]. Пусть элементами ВЦД (3.2.8) являются комплексные числа $c_{i(k)}$, $k = 1,2,\ldots$, $i_p = \overline{1,N}$, $p = \overline{1,k}$, такие, что последовательность

$$a_k = N \max\left(\left| c_{i(k)} \right| : i_p = \overline{1,N}, \; p = \overline{1,k} \right), \quad k = 1,2,\ldots, \tag{3.2.44}$$

является цепной последовательностью с минимальными параметрами m_p, $p = 0,1,2,\ldots$, удовлетворяющими условиям

$$0 \le m_p < 1, \qquad p = 1,2,\ldots . \tag{3.2.45}$$

Тогда ВЦД (3.2.8) абсолютно сходится, если сходится ряд

$$T = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{k} m_i (1 - m_i)^{-1}. \tag{3.2.46}$$

Значение ВЦД (3.2.8) и всех ее аппроксимант принадлежит области

$$\left| z - \frac{T}{2T-1} \right| \le \frac{T(T-1)}{(2T-1)}, \tag{3.2.47}$$

где T – сумма ряда (3.2.46).

Доказательство. Аналогично, как и при доказательстве теоремы 3.2.2, легко проверить, что цепная дробь

$$f = \frac{1}{1} - \frac{m_1}{1} - \frac{(1-m_1)m_2}{1} - \frac{(1-m_2)m_3}{1} - \cdots \tag{3.2.48}$$

является мажорантой ВЦД (3.2.8). Пусть P_n и Q_n – соответственно n-й числитель и n-й знаменатель цепной дроби $1-f^{-1}$, где f – непрерывная дробь (3.2.48). На основании рекуррентных формул (1.2.2) легко доказать (см. [202]), что

$$Q_k = (1-m_1)(1-m_2)\dots(1-m_k) + m_1(1-m_2)\dots(1-m_k) +$$
$$+ m_1 m_2 (1-m_3)(1-m_4)\dots(1-m_k) + \dots + m_1 m_2 \dots m_k,$$
$$P_k = Q_k - (1-m_1)(1-m_2)\dots(1-m_k).$$

Поэтому $P_n/Q_n = 1 - T_n^{-1}$, где T_n – n-я частная сумма ряда (3.2.46). Записывая ВЦД (3.2.8) или ее аппроксиманту в виде

$$z = \frac{1}{1+w}, \quad w = \sum_{i_1=1}^{N} \frac{c_{i(1)}}{1} + \sum_{i_2=1}^{N} \frac{c_{i(2)}}{1} + \cdots$$

с учетом оценки типа (3.2.28) в данном случае имеем $|w| \le 1 - T^{-1}$ или $\left| z^{-1} - 1 \right| \le 1 - T^{-1}$, откуда с помощью элементарных вычислений получим (3.2.47). ■

Следствие 3.2.1 [20]. ВЦД (2.2.2) с комплексными элементами абсолютно сходится, если существуют такие действительные числа $q_{i(k)} > 1$, $k = 1, 2, \dots$, $i_p = \overline{1,N}$, $p = \overline{1,k}$, что выполняются неравенства

$$\left| \frac{a_{i(1)}}{b_{i(1)}} \right| \le \frac{q_{i(1)} - 1}{N q_{i(1)}}, \qquad i_1 = \overline{1,N}, \tag{3.2.49}$$

$$\left|\frac{a_{i(k)}}{b_{i(k-1)}b_{i(k)}}\right| \le \frac{q_{i(k)}-1}{N\, q_{i(k-1)}\, q_{i(k)}}, \quad k=2,3,\ldots,\ i_p=\overline{1,N},\ p=\overline{1,k}. \qquad (3.2.50)$$

Доказательство. Используя эквивалентные преобразования (1.5.4), (1.5.15), дробь (2.2.2) приведем к виду (3.2.7). Пусть $g_{i(0)} = g_0 = 0$ и $g_{i(k)} = 1 - q_{i(k)}^{-1}$, $k = 1,2,\ldots,\ i_p = \overline{1,N},\ p = \overline{1,k}$. Тогда неравенства (3.2.49), (3.2.50) эквивалентны условиям (3.2.22) теоремы 3.2.2 с ограничениями (3.2.23) для $g_{i(k)}$. Для завершения доказательства остается применить теорему 3.2.2. ■

Другие следствия, а также некоторые усиления рассмотренных здесь теорем будут изложены в дальнейшем.

В заключение отметим, что теоремы 3.2.2–3.2.6 являются многомерными аналогами признаков сходимости цепных дробей, восходящих от Ван Флека [199] и в наиболее полном объеме изложенных в монографии Уолла [202]. Теорема 3.2.6 является обобщением теоремы Ван Флека, следствие 3.2.1 – многомерный аналог теоремы Перрона [181], теорема 3.2.5 – обобщение признака сходимости Кох [170]. Остальные теоремы, изложенные в настоящем параграфе, являются многомерными аналогами признаков сходимости дробей Скотта–Уолла и Пейдона–Уолла [202].

§ 3. Многомерные аналоги параболических теорем

Ниже рассмотрим аналоги параболических теорем для ВЦД. Предварительно с учетом обозначений, предложенных в начале §2 данной главы, докажем лемму, являющуюся многомерным обобщением известного утверждения в теории цепных дробей [168].

Лемма 3.3.1 [20]. Пусть $\{V_{i(k)}\}$ – последовательность полуплоскостей

$$V_{i(k)} = \{w: \operatorname{Re}(w\exp(-i\psi_k)) \geq -p_{i(k)}\}, \qquad i(k) \in I, \tag{3.3.1}$$

и

$$\Omega_{i(k)} = \Big\{ \langle a_{i(k)}, b_{i(k)} \rangle : \left| a_{i(k)} \right| - \operatorname{Re}\left(a_{i(k)} \exp(-i(\psi_k + \psi_{k+1}))\right) \leq$$
$$\leq 2 p_{i(k)} \left(\operatorname{Re}\left(b_{i(k)} \exp(-i\psi_{k+1})\right) - p^*_{i(k)} \right) \Big\}, \qquad i(k) \in I, \tag{3.3.2}$$

где $p_{i(k)} > 0$ – некоторые действительные числа, $p^*_{i(k)} = \sum\limits_{i_{k+1}=1}^{N} p_{i(k+1)}$,

$-\pi < \psi_k \leq \pi$, $k = 0, 1, \ldots$, и

$$I = \{ i(k): \ k = 0, 1, 2, \ldots, \quad i_0 = 0, \quad i_p = \overline{1, N}, \quad p \geq 1 \}. \tag{3.3.3}$$

Тогда $\{V_{i(k)}\}$ является последовательностью областей значений, соответствующих последовательности областей элементов $\{\Omega_{i(k)}\}$ для ВЦД

$$a_0 \left(b_0 + \mathop{D}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}} \right)^{-1} \tag{3.3.4}$$

с комплексными числовыми элементами.

Доказательство. Условия

$$\operatorname{Re}\left(b_{i(k)} \exp(-i\psi_{k+1})\right) \geq p^*_{i(k)}, \qquad i(k) \in I, \tag{3.3.5}$$

являются необходимыми для того, чтобы обозначения (3.3.2) имели смысл. Если справедливо (3.3.5), то неравенства (3.3.2) выполняются, когда все $a_{i(k)} = 0$, и поэтому $\Omega_{i(k)} \neq \varnothing$. Пусть

$$\operatorname{Re}\left(b_{i(k)} \exp(-i\psi_{k+1})\right) = p^*_{i(k)}.$$

Тогда, учитывая обозначения (1.1.3), (1.1.4), имеем

$$t_{i(k)}\left(V_{i(k)}^{(1)}\right)=\left\{\ w\colon\ \mathrm{Re}\left(w\exp\left(i\left(\psi_{k+1}-\arg a_{i(k)}\right)\right)\right)\geq 0\ \right\}. \qquad (3.3.6)$$

При выполнении равенства в (3.3.5) область (3.3.2) будет непустым множеством лишь в том случае. если $\arg a_{i(k)}=\psi_k+\psi_{k+1}$. Выполнение последнего равенства с учетом (3.3.6) гарантирует включение (3.2.3). Так как $0\in V_{i(k+1)}$, то отсюда следует справедливость (3.2.2). Пусть

$$\mathrm{Re}\left(b_{i(k)}\exp\left(-i\psi_{k+1}\right)\right)>p_{i(k)}^{*}.$$

Легко проверить, что в этом случае

$$t_{i(k)}\left(V_{i(k)}^{(1)}\right)=\left\{\ w\in\mathbf{C}\colon\left|\ w-c_{i(k)}\right|<\rho_{i(k)}\ \right\},$$

где

$$\rho_{i(k)}=\frac{\left|a_{i(k)}\right|}{2\left(\mathrm{Re}\left(b_{i(k)}\exp\left(-i\psi_{k+1}\right)\right)-p_{i(k)}^{*}\right)},$$

$$c_{i(k)}=\rho_{i(k)}\exp\left(i\left(\arg a_{i(k)}-\psi_{k+1}\right)\right).$$

Тогда условие (3.2.3) будет выполняться, если $c_{i(k)}\in V_{i(k)}$, и для расстояния от точки $c_{i(k)}$ до границы области $V_{(k)}$ справедливо неравенство

$$\min\left(\left|c_{i(k)}-v_{i(k)}\right|,\ \ v_{i(k)}\in\partial V_{i(k)}\right)\geq\rho_{i(k)}.$$

Подставляя значение для $c_{i(k)}$ в (3.3.1), получим

$$-\mathrm{Re}\left(a_{i(k)}\exp\left(-i\left(\psi_k+\psi_{k+1}\right)\right)\right)\leq p_{i(k)}\left(\mathrm{Re}\left(b_{i(k)}\exp\left(-i\psi_{k+1}\right)\right)-p_{i(k)}^{*}\right).$$

Это неравенство следует из (3.3.2). Обозначим $d_{i(k)}$ точку из $\partial V_{i(k)}$, для которой

$$\left|d_{i(k)}-c_{i(k)}\right|=\min\left(\left|c_{i(k)}-v_{i(k)}\right|,\ \ v_{i(k)}\in\partial V_{i(k)}\right).$$

Несложно проверить, что

$$\left|d_{i(k)}\right|=\exp\left(i\psi_k\right)\left(-p_{i(k)}+i\,\mathrm{Im}\left(c_{i(k)}\exp\left(-i\psi_k\right)\right)\right)$$

и

$$\left|d_{i(k)}-c_{i(k)}\right|=\rho_{i(k)}\cos\left(\arg a_{i(k)}-\psi_k-\psi_{k+1}\right)+p_{i(k)}.$$

Неравенство $\left|d_{i(k)}-c_{i(k)}\right|\geq\rho_{i(k)}$ эквивалентно (3.3.2). ■

С л е д с т в и е 3.3.1 [20]. Множества

$$V_{i(k)} = V(\alpha) = \left\{ w : \operatorname{Re}(w \exp(-i\alpha)) \geq -\frac{1}{2N} \cos\alpha \right\},$$

$$E_{i(k)} = E(\alpha) = \left\{ w : |w| - \operatorname{Re}(w \exp(-2i\alpha)) \leq \frac{1}{2N} \cos^2 \alpha \right\},$$

где $i(k) \in I$, $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, I определяется согласно (3.3.3), является соответствующими областями значений и областями элементов ВЦД (3.3.4).

Множество $E(\alpha)$ является параболической областью, ограниченной параболой, проходящей через точку $-\frac{1}{4N}$ с осью вдоль луча $\arg w = 2\alpha$ и фокусом в точке $-\frac{1}{4N}\cos^2 \alpha \exp(2\alpha i)$.

Т е о р е м а 3.3.1 [20]. Пусть элементами ВЦД

$$\left(1 + \mathop{D}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{c_{i(k)}}{1} \right)^{-1} \tag{3.3.7}$$

$c_{i(k)}$, $k = 1, 2, \ldots$, $i_p = \overline{1, N}$, $p = \overline{1, k}$ являются комплексные числа, принадлежащие области

$$P_\varepsilon = \left\{ z \in \mathbf{C} : |z| - \operatorname{Re} z \leq (2N)^{-1}(1 - \varepsilon) \right\}, \tag{3.3.8}$$

где ε – как угодно малое действительное число, $0 < \varepsilon < 1$, N – число веток ветвления ВЦД (3.3.7).

Тогда

1) существуют конечные пределы четных f_{2n} и нечетных f_{2n+1} подходящих дробей;

2) ВЦД (3.3.7) сходится, если выполняется одно из двух условий: либо существует такой номер k,что все $c_{i(k)} = 0$, $i_p = \overline{1, N}$, $p = \overline{1, k}$, либо расходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \delta_k, \tag{3.3.9}$$

где $\delta_k = \min\left(\frac{1}{\left|c_{i(k)}(z)\right|} : i_p = \overline{1,N},\ p = \overline{1,k}\right)$, причем те наборы индексов, при которых $c_{i(k)} = 0$, при минимизации не рассматриваются;

3) область значений ВЦД (3.3.7) принадлежит кругу

$$\left|z-1\right| < 1. \tag{3.3.10}$$

Доказательство. Заметим, что границей области P_ε является парабола с фокусом в начале координат с осью вдоль луча $\arg z = 0$ и с вершиной в точке $-\frac{1-\varepsilon}{4N}$.

Каждый отличный от нуля элемент $c_{i(k)}$ ВЦД (3.3.7) представим в виде

$$c_{i(k)} = \left|c_{i(k)}\right| \exp\left(i\alpha_{i(k)}\right),$$

где $-\pi < \alpha_{i(k)} \le \pi$ и $i = \sqrt{-1}$. В области

$$\Omega_\delta = \left\{z \in \mathbf{C}: \left|\operatorname{Im} z\right| < \delta,\ \left|\operatorname{Re} z\right| < 1+\delta\right\}, \tag{3.3.11}$$

где δ – произвольное действительное число, такое ,что

$$(1+\delta)^2 \exp(\pi\delta) < (1-\varepsilon)^{-1}. \tag{3.3.12}$$

Рассмотрим функции

$$c_{i(k)}(z) = \begin{cases} 0, \ \text{если } c_{i(k)} = 0, \\ \left|c_{i(k)}\right| \exp\left(i\alpha_{i(k)} z\right), \ \text{если } c_{i(k)} \ne 0, \end{cases}$$

$k = 1, 2, \ldots,\ \ i_p = \overline{1,N},\ \ p = \overline{1,k}$. Покажем, что $c_{i(k)}(z) \in P_0$, когда $z \in \Omega_\delta$, где P_0 определяется согласно (3.3.8), если положить $\varepsilon = 0$. Если $\alpha_{i(k)} = 0$, то, очевидно, $c_{i(k)} \in P_0$. Пусть $\alpha_{i(k)} \ne 0$ и $z = x + iy$. Тогда, опуская индексы с целью сокращения записей, получим

$$\left|c(z)\right| - \operatorname{Re} c(z) = \left|c\right| e^{-\alpha y}\left(1 - \cos\alpha x\right).$$

Так как $\left|c\right|(1-\cos\alpha) \le \frac{1-\varepsilon}{2N}$|, то $\left|c(z)\right| - \operatorname{Re} c(z) \le \frac{1-\varepsilon}{2N} e^{\pi\delta} \frac{1-\cos\alpha x}{1-\cos\alpha}$.

Исследуем на экстремум выражение

$$M(\alpha,x)=\frac{1-\cos(\alpha x)}{1-\cos\alpha}=\frac{\sin^2\frac{\alpha x}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}},$$

где $-\pi<\alpha\le\pi,\ \alpha\ne 0,\ |x|\le 1+\delta$. Достаточно ограничиться случаем $0<\alpha\le\pi$, $0\le x<1+\delta$. Если $0<\alpha<\frac{\pi}{(1+\delta)}$, то функция $\sqrt{M(\alpha,x)}$ по аргументу x монотонно возрастает и поэтому

$$\sqrt{M(\alpha,x)}\le\frac{\sin\frac{\alpha(1+\delta)}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}=M(\alpha),$$

$M(\alpha)$ – монотонно убывающая функция по α, так как

$$M'(\alpha)=\frac{1}{2}\frac{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha(1+\delta)}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}\left((1+\delta)\,tg\frac{\alpha}{2}-tg\frac{\alpha(1+\delta)}{2}\right)<0$$

если $0<\alpha<\pi(1+\delta)^{-1}$. Следовательно,

$$\sup\left(M(\alpha)\colon 0<\alpha<\frac{\pi}{(1+\delta)}\right)=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\frac{\alpha(1+\delta)}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}=1+\delta\,.$$

Если же $\frac{\pi}{(1+\delta)}\le\alpha\le\pi,\ 0\le x\le 1+\delta$, то $\dfrac{\sin\frac{\alpha x}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\le\dfrac{1}{\sin\frac{\pi}{2(1+\delta)}}\le 1+\delta$, так как $\sin\frac{\pi}{2}x\ge x$, где $0\le x\le 1$.

Таким образом, выбирая δ согласно (3.3.12), имеем $|c(z)|-\mathrm{Re}\,c(z)<\frac{1}{2N}$.

Рассмотрим ВЦД

$$\left(1+\mathop{D}_{k=1}^{\infty}\sum_{i_k=1}^{N}\frac{c_{i(k)}(z)}{1}\right)^{-1}. \qquad (3.3.13)$$

Учитывая следствие 3.3.1, где $\alpha=0$, убеждаемся в том, что область значений

ВЦД $c_{i(1)}(z)\left(1+\overset{\infty}{\underset{k=2}{D}}\sum_{i_k=1}^{N}\frac{c_{i(k)}(z)}{1}\right)^{-1}$ принадлежит полуплоскости $\operatorname{Re} z > -\frac{1}{2N}$, откуда следует, что областью значений ВЦД, обратной к (3.3.13), является полуплоскость $\operatorname{Re} z > \frac{1}{2}$. Поэтому значения подходящих дробей ВЦД (3.3.13) принадлежат области $|z-1|<1$.

Обозначим через $f_n(z)$ n-ю аппроксиманту ВЦД (3.3.13). Очевидно, что $f_n(z)$ – голоморфные функции в области Ω_δ. Для этой последовательности выполняются условия теоремы Стилтьеса-Витали, где, например, $a=-1, b=-2$.

Пусть $\Delta=\{z\in\mathbf{C}: \operatorname{Re} z=0, |\operatorname{Im} z|<\delta\}$ и $z\in\Delta$. Тогда ВЦД (3.3.13) запишется в виде

$$\left(1+\overset{\infty}{\underset{k=1}{D}}\sum_{i_k=1}^{N}\frac{\hat{c}_{i(k)}(z)}{1}\right)^{-1}, \tag{3.3.14}$$

где

$$\hat{c}_{i(k)}=\begin{cases} 0, \ \textit{если} \ c_{i(k)}=0, \\ |c_{i(k)}|\exp(-\alpha_{i(k)}y), \ \textit{если} \ c_{i(k)}\neq 0. \end{cases}$$

Для установления сходимости ВЦД

$$1+\overset{\infty}{\underset{k=1}{D}}\sum_{i_k=1}^{N}\frac{\hat{c}_{i(k)}(z)}{1}, \tag{3.3.15}$$

обратной к (3.3.14), воспользуемся теоремой 2.5.2. Условия этой теоремы выполняется очевидным образом.

Если существует такой номер k, что все $c_{i(k)}=0$, $i_p=\overline{1,N}$, $p=\overline{1,k}$, то все $\hat{c}_{i(k)}=0$, $i_p=\overline{1,N}$, $p=\overline{1,k}$, поэтому ВЦД (3.3.15) сходится и принимает отличные от нуля значение. Следовательно, ВЦД (3.3.14) сходится.

Так как

$$\hat{\delta}_k=\min\left(\hat{c}_{i(k)}^{-1}: i_p=\overline{1,N},\ p=\overline{1,k}\right)\geq\delta_k\exp(-\pi\delta),$$

то в силу условия (3.3.9) ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\hat{\delta}_k$ расходится, и ВЦД (3.3.14) сходится.

Из теоремы Стилтьеса-Витали следует, что ВЦД (3.3.13) сходится на каждом компакте области (3.3.11), в частности, в точке $z=1$, что равносильно сходимости ВЦД (3.3.7).

Из свойства вилки (1.3.5) следует, что всегда существуют конечные пределы четных и нечетных подходящих дробей ВЦД (3.3.14). Как и раньше, применяя теорему Стилтьеса-Витали, легко убеждаемся в справедливости пункта 1). ■

Следующая теорема является обобщением только что доказанной на случай повернутой параболической области.

Теорема 3.3.2 [20,23]. Пусть элементы ВЦД (3.3.7) $c_{i(k)}$, $k=1,2,...$, $i_p=\overline{1,N}$, $p=\overline{1,k}$, принадлежат области

$$P_{\varepsilon,\gamma}=\left\{ z\in\mathbf{C}: |z|-\operatorname{Re}(z\exp(-2i\gamma))\le\frac{1-\varepsilon}{2N}\cos^2\gamma \right\}, \tag{3.3.16}$$

где $-\frac{\pi}{2}<\gamma<\frac{\pi}{2}$, ε – как угодно малое действительное положительное число, $0<\varepsilon<1$, N – число веток ветвления дроби (3.3.7).

Тогда

1) существуют конечные пределы четных и нечетных подходящих дробей ВЦД (3.3.7);

2) ВЦД (3.3.70 сходится, если выполняется одно из двух условий: либо существует такой номер k, что все $c_{i(k)}=0$, $i_p=\overline{1,N}$, $p=\overline{1,k}$, либо ряд (3.3.9) расходится;

3) область значений ВЦД (3.3.7) принадлежит кругу

$$\left| z-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\cos\gamma\right)^{-1}\exp(-i\gamma)\right|\le\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\cos\gamma\right)^{-1}. \tag{3.3.17}$$

Доказательство. ВЦД (3.3.7) запишем в виде

$$\left(1+\sum_{i_k=1}^{N}\frac{a_{i(k)}^2}{1}\right)^{-1}, \tag{3.3.18}$$

т.е. положим $c_{i(k)}=a_{i(k)}^2$, $k=1,2,...,$ $i_p=\overline{1,N}$, $p=\overline{1,k}$. С учетом того, что $|z|^2-\mathrm{Re}(z^2)=2(\mathrm{Im}\,z)^2$, область (3.3.16) в терминах w, где $z=w^2$, преобразуется к виду

$$G_{\varepsilon,\gamma}=\left\{w\in\mathbf{C}:\left|\mathrm{Im}(w\exp(-i\gamma))\right|\le\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{N}}\cos\gamma\right\}. \tag{3.3.19}$$

Каждый элемент $a_{i(k)}$ ВЦЦ (3.3.18), принадлежащий области (3.3.19), представим в виде $a_{i(k)}=b_{i(k)}\exp(i\gamma)+id_{i(k)}$, где $b_{i(k)},d_{i(k)}\in\mathbf{R}$ и $\left|d_{i(k)}\right|\le\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{N}}$. Фиксируем $\gamma:|\gamma|<\frac{\pi}{2}$. Пусть δ – положительное действительное число, $0<\delta<1$, такое, что $|\gamma\pm\delta|<\frac{\pi}{2}$. В области

$$S_\delta=\left\{z\in\mathbf{C}:\ 1-\delta<|z|<1+\delta,\ \begin{matrix}-\gamma-\delta<\arg z<\delta,\ \text{если}\ \gamma\ge 0,\\ -\delta<\arg z<-\gamma+\delta,\ \text{если}\ \gamma<0.\end{matrix}\right\} \tag{3.3.20}$$

определим функции

$$a_{i(k)}(z)=zb_{i(k)}\exp(i\gamma)+id_{i(k)},\qquad k=1,2,...,\ i_p=\overline{1,N},\ p=\overline{1,k}.$$

Очевидно, что $a_{i(k)}(z)\in G_{\varepsilon,\gamma^*}$, где $\gamma^*=\gamma+\arg z$ и $|\gamma^*|<\frac{\pi}{2}$.

Учитывая следствие 3.3.1, убеждаемся в том, что область значений ВЦД

$$a_{i(1)}^2(z)\left(1+\underset{k=2}{\overset{\infty}{D}}\sum_{i_k=1}^{N}\frac{a_{i(k)}^2(z)}{1}\right)^{-1}$$

принадлежит полуплоскости

$$V=\left\{w\in\mathbf{C}:\ \mathrm{Re}(w\exp(-i\gamma^*))>\frac{1}{2N}\cos\gamma^*\right\}.$$

Отсюда следует, что область значений ВЦД, обратной к (3.3.18), принадлежит области

$$W = \left\{ w \in \mathbf{C} : \mathrm{Re}\left(w \exp\left(-i\gamma *\right)\right) > 1 - \frac{1}{2}\cos\gamma * \right\}.$$

Поэтому значения подходящих дробей ВЦД (3.3.18), как легко подсчитать, принадлежит кругу

$$\left| z - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\cos\gamma *\right)^{-1} \exp\left(-i\gamma *\right) \right| < \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\cos\gamma *\right)^{-1}. \qquad (3.3.31)$$

Обозначим $f_n(z) - n$-е аппроксиманты ВЦД (3.3.18). Для последовательности $\{ f_n(z) \}$ голоморфных функций в области S_δ выполняется условия теоремы Стилтьеса-Витали, где, например, $a = -1$, $b = -2$ и $\Delta = \{ z \in S_\delta : \arg z = -\gamma \}$. Если $z \in \Delta$, то $a_{i(k)}^2(z) \in P_\varepsilon$, где P_ε определяется согласно (3.3.8). Расходимость ряда (3.3.9) эквивалентна для каждого $z \in \Delta$ расходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\min \frac{1}{\left| a_{i(k)}^2(z) \right|} : i_p = \overline{1, N},\ p = \overline{1, k} \right).$$

Так как $z = 1$ – компакт области S_δ, то сходимость ВЦД (1.3.7) следует из теоремы Стилтьеса-Витали .■

§ 4. Аналог признаков сходимости Прингсгейма для ВЦД

В качестве следствия теоремы 3.2.2 получим два признака сходимости, которые являются многомерными обобщениями теоремы Слешинского – Прингсгейма (теорема В 9).

Теорема 3.4.1 [20]. Ветвящаяся цепная дробь

$$b_0 + \mathop{D}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{\infty} \frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}} \tag{3.4.1}$$

с комплексными числовыми элементами, удовлетворяющими условиям

$$\left|b_{i(k)}\right| \ge N\left|a_{i(k)}\right| + 1, \qquad k = 1,2,..., \quad i_p = \overline{1,N},\ p = \overline{1,k}, \tag{3.4.2}$$

абсолютно сходится, и ее наилучшей областью значений является круг

$$\left|z - b_0\right| \le 1. \tag{3.4.3}$$

Доказательство. Из условия (3.4.2) следует, что $\left|b_{i(k)}\right| \ne 0$, $.k = 1,2,...,\ i_p = \overline{1,N},\ p = \overline{1,k}$. Используя эквивалентные преобразования (1.5.4), (1.5.15), приведем ВЦД (3.4.1) к виду

$$b_0 + \mathop{D}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{c_{i(k)}}{1}, \tag{3.4.4}$$

где

$$c_{i(1)} = \frac{a_{i(1)}}{b_{i(1)}},\ i_1 = \overline{1,N}, \qquad c_{i(k)} = \frac{a_{i(k)}}{b_{i(k-1)}b_{i(k)}},\ k = 2,3,...,\quad i_p = \overline{1,N},\ p = \overline{1,k}.$$

Пусть

$$g_{i(k)} = \frac{N\left|a_{i(k)}\right|}{N\left|a_{i(k)}\right| + 1}, \qquad k = 1,2,...,\ i_p = \overline{1,N},\ p = \overline{1,k}.$$

Тогда $0 \le g_{i(k)} < 1$ и в силу (3.4.2)

$$\left|c_{i(1)}\right| \le \frac{\left|a_{i(1)}\right|}{N\left|a_{i(1)}\right| + 1} = \frac{1}{N} g_{i(1)},$$

$$c_{i(k)} \le \frac{\left|a_{i(k)}\right|}{\left(N\left|a_{i(k)}\right| + 1\right)\left(N\left|a_{i(k-1)}\right| + 1\right)} = \frac{1}{N} g_{i(k)}\left(1 - g_{k-1}\right).$$

Поэтому на основании теоремы 3.2.2 ВЦД (3.4.1) абсолютно сходится, и ее область значений содержится в круге (3.4.3).

Докажем, что наилучшая область значений дроби (3.4.1) совпадает с областью (3.4.3). Если c – произвольное комплексное число, такое, что $|c|<1$, то первая аппросиманта f_1 ВЦД (3.4.1), у которой $a_{i(1)}=\dfrac{c}{N(1-|c|)}$, $b_{i(1)}=\dfrac{|c|}{1-|c|}+1$, $i_1=\overline{1,N}$, $a_{i(k)},b_{i(k)}$, $k=2,3,\ldots$, $i_p=\overline{1,N}$, $p=\overline{1,k}$, – произвольные комплексные числа, удовлетворяющие условиям (3.4.2), принимает значение b_0+c. Пусть $c=e^{i\varphi}$, $-\pi<\varphi\le\pi$. Рассмотрим ВЦД, у которой $a_{i(1)}=cs_1$, $b_{i(1)}=Ns_1+1$, $i_1=\overline{1,N}$, $a_{i(k)}=-s_k$, $b_{i(k)}=Ns_k+1$, $k=2,3,\ldots$, $i_p=\overline{1,N}$, $p=\overline{1,k}$, где $s_i>0$, и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}N^k\prod\limits_{i=1}^{k}s_i$ расходится. Она эквивалентна непрерывной дроби

$$b_0+\frac{g_1c}{1}\,\underset{-}{}\,\frac{g_2(1-g_1)}{1}\,\underset{-}{}\,\frac{g_3(1-g_2)}{1}\,\underset{-}{}\cdots,\tag{3.4.5}$$

где $g_k=Ns_k(Ns_k+1)^{-1}$. Как следует из доказательства теоремы 3.2.6, значение дроби (3.4.5) равно b_0+c. ■

Теорема 3.4.2 [20,91]. ВЦД (3.4.1) с комплексными числовыми компонентами удовлетворяющими условиям

$$\left|b_{i(k)}\right|\ge\left|a_{i(k)}\right|+N,\qquad k=1,2,\ldots,\ i_p=\overline{1,N},\ p=\overline{1,k},\tag{3.4.6}$$

абсолютно сходится и ее наилучшей областью значений является круг

$$|z-b_0|\le N.\tag{3.4.7}$$

Доказательство аналогично доказательству предыдущей. В данном случае $g_{i(k)}=\dfrac{\left|a_{i(k)}\right|}{\left|a_{i(k)}\right|+N}$, $k=1,2,\ldots$, $i_p=\overline{1,N}$, $p=\overline{1,k}$. Первая подходящая дробь f_1 ВЦД (3.4.1), у которой $a_{i(1)}=\dfrac{N|c|}{N-|c|}$, $b_{i(1)}=\dfrac{N|c|}{N-|c|}+N$, $i_1=\overline{1,N}$, а остальные элементы удовлетворяют условию (3.4.6), принимает значение c, где $|c| < N$. Если же $c = Ne^{i\varphi}$, то ВЦД (3.4.1). у которой $a_{i(1)} = s_1 e^{i\varphi}$, $b_{i(1)} = s_1 + N$, $i_1 = \overline{1,N}$, $a_{i(k)} = -s_k$, $b_{i(k)} = s_k + N$, $k = 2,3,...$, $i_p = \overline{1,N}$, $p = \overline{1,k}$, где $s_i > 0$, и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} N^{-k} \prod_{i=1}^{k} s_i$ расходится, принимает значение $b_0 + c$. ■

Н.А.Недашковский в [91] установил, что при выполнении условий (3.4.6) ВЦД (3.4.1) абсолютно сходится, и ее область значений содержится в круге (3.4.7). Теорема 3.4.2 является усилением этого результата.

На основании следствия 3.2.1 имеем

Следствие 3.4.1 [13,20]. ВЦД

$$b_0 + \mathop{D}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{1}{b_{i(k)}} \tag{3.4.8}$$

с числовыми комплексными элементами $b_{i(k)}$, $k = 1,2,...$, $i_p = \overline{1,N}$, $p = \overline{1,k}$, абсолютно сходится, если

$$\alpha_{2k-1}^{-1} + (N\alpha_{2k})^{-1} \le N^{-1}, \qquad k = 1,2,..., \tag{3.4.9}$$

где N – число веток ветвления ВЦД (3.4.8) и

$$\alpha_k = \min\left(b_{i(k)}:\ i_p = \overline{1,N},\ p = \overline{1,k}\right). \tag{3.4.10}$$

Доказательство. Неравенство (3.4.9) следует из условий (3.2.54), (3.2.55), если положить

$$q_{i(2k-1)} = q_{i(2k)} = \alpha_{2k}, \quad a_{i(k)} = 1 \qquad k = 1,2,..., \quad i_p = \overline{1,N},\ p = \overline{1,k}.$$

Следствие 3.4.2 [20]. ВЦД (3.4.8) с комплексными частными знаменателями абсолютно сходится, если

$$\alpha_{2k}^{-1} + (N\alpha_{2k+1})^{-1} \le N^{-1}, \qquad k = 0,1,2,..., \tag{3.4.11}$$

где α_k определяются согласно (3.4.10) и $\alpha_0 = \alpha_1$.

Доказательство. Неравенства (3.4.11) следуют из условий (3.2.54), (3.2.55), если положить

$$q_{i(2k+1)} = q_{i(2k)} = \alpha_{2k+1},\ q_{i(1)} = \alpha_1,\ a_{i(k)} = 1,\ k = 1,2,...,\ i_p = \overline{1,N},\ p = \overline{1,k}.$$

Следствия 3.4.1 и 3.4.2 являются также многомерными аналогами признаков сходимости Прингсгейма [185] .

Более общие результаты в этом направлении можно получить либо переходом в действительную область, либо более тщательным изучением ВЦД, значения которых принадлежат границе области значений. Обозначим через I множество мультииндексов

$$I = I(N) = \left\{ i(k) = i_1 i_2 \ldots, i_k,\ k = 1,2,\ldots,\ i_p = \overline{1,N},\ p = \overline{1,k} \right\}, \qquad (3.4.12)$$

где $N \in \mathbf{N}$ фиксировано. Рассмотрим ВЦД (3.4.1) с действительными элементами, такими что все $a_{i(k)} \neq 0,\ i(k) \in I$. Используя преобразования, не изменяющие величин подходящих дробей, ВЦД (3.4.1) всегда можно привести к виду

$$b_0 + \mathop{D}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{\hat{a}_{i(k)}}{\hat{b}_{i(k)}} = b_0 + \mathop{D}_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i_k=1}^{n_{i(k-1)}} \frac{\hat{a}_{i(k)}}{\hat{b}_{i(k)}} + \sum_{i_k = n_{i(k-1)}+1}^{N} \frac{\hat{a}_{i(k)}}{\hat{b}_{i(k)}} \right), \qquad (3.4.13)$$

где $\hat{b}_{i(k)} \geq 0,\ i(k) \in I$, $\hat{a}_{i(k)} < 0,\ i_k = \overline{1, n_{i(k-1)}}$, $\hat{a}_{i(k)} > 0,\ i_k = \overline{n_{i(k-1)}+1, N}$, и $0 \leq n_{i(k-1)} \leq N,\ n_{i(0)} = n_0$. Предполагается, что сумма, у которой верхний индекс меньше нижнего, равна нулю, и для каждого мультииндекса $i(k)$ существует мультииндекс $j(k)$, что $\left|\hat{a}_{i(k)}\right| = \left|a_{j(k)}\right|,\ \left|\hat{b}_{i(k)}\right| = \left|b_{j(k)}\right|$.

Действительно, положив в (1.5.4) $\rho_{i(k)} = 1$, если $b_{i(k)} \geq 0$, и $\rho_{i(k)} = -1$, если $b_{i(k)} < 0$, преобразуем ВЦД (3.4.1) к эквивалентному виду

$$b_0 + \mathop{D}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{a^*_{i(k)}}{b^*_{i(k)}}, \qquad (3.4.14)$$

где $b^*_{i(k)} = \left|b_{i(k)}\right|,\ i(k) \in I$.

Переход от n-й подходящей дроби ВЦД (3.4.14) f_n^* к n-й подходящей дроби (3.4.13) $\hat{f}_n$ осуществляется путем переобозначения элементов ВЦД (3.4.14). Если для ВЦД (3.4.14) ввести обозначения аналогичные (1.3.1), то ее n-ю аппроксиманту можно записать в виде

$$f_n^* = b_0 + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{a_{i(1)}^*}{\overline{Q}_{i(1)}^{(n)}} = b_0 + \sum_{i_1=1}^{n_0} \frac{\widetilde{a}_{i(1)}}{\widetilde{Q}_{i(1)}^{(n)}} + \sum_{i_1=n_0+1}^{N} \frac{\widetilde{a}_{i(1)}}{\widetilde{Q}_{i(1)}^{(n)}},$$

где в первой сумме собраны все те слагаемые, у которых $a_{i(1)}^* < 0$, и введены соответствующие переобозначения элементов. Тогда

$$\widetilde{a}_{i(1)} = \hat{a}_{i(1)},\ \widetilde{b}_{i(1)} = \hat{b}_{i(1)},\ i_1 = \overline{1,N}.$$

Аналогичным образом поступим с каждым

$$\widetilde{Q}_{i(1)}^{(n)} = \hat{b}_{i(1)} + \sum_{i_2=1}^{N} \frac{\widetilde{a}_{i(2)}}{\widetilde{Q}_{i(2)}^{(n)}}, \qquad i_1 = \overline{1,N},$$

и т.д. Так как процедура переобозначения элементов ВЦД (3.4.14) происходит сверху вниз, то при её выполнении для $(n+1)$-й подходящей дроби (3.4.14) все элементы $\widetilde{f}_{n+1}$, входящие в $\widetilde{f}_n$, остаются без изменения.

Таким образом, не ограничивая общности, считаем, что ВЦД (3.4.1) уже приведена к виду (3.4.13).

Пусть выполняются неравенства

$$\gamma_{i(k)} = b_{i(k)} - n_{i(k-1)}\varepsilon_{i(k)}a'_{i(k)} - \delta_{i(k)} \ge 0, \quad i(k) \in I, \tag{3.4.15}$$

где $a'_{i(k)} = \left|a_{i(k)}\right|$, $n_{i(k)}$ – число отрицательных элементов $a_{i(k+1)}$, $1 \le i_{k+1} \le N$, $n_{i(0)} = n_0$,

$$\delta_{i(k)} = \begin{cases} 1, \textit{если}\ \ n_{i(k)} > 0, \\ 0, \textit{если}\ \ n_{i(k)} = 0, \end{cases} \qquad \varepsilon_{i(k)} = \begin{cases} 1, \textit{если}\ \ a_{i(k)} < 0, \\ 0, \textit{если}\ \ a_{i(k)} > 0. \end{cases}$$

Пусть ВЦД (3.4.1) имеет вид (3.4.13). Каждое её звено

$$b_{i(k)} + \sum_{i_{k+1}=1}^{N} \frac{a_{i(k+1)}}{b_{i(k+1)}},$$

где $k = 0$ или $a_{i(k)} > 0$ при $k \ge 1$, $i_0 = 0$, заменим тождественно равным ему выражением

$$b_{i(k)} - \delta_{i(k)} + \sum_{i_{k+1}=1}^{n_{i(k)}} \frac{1/n_{i(k)}}{1 + \dfrac{n_{i(k)} a'_{i(k+1)}}{b_{i(k+1)} - n_{i(k)} a'_{i(k+1)}}} + \sum_{i_{k+1}=n_{i(k)}+1}^{N} \frac{a'_{i(k+1)}}{b_{i(k+1)}}. \qquad (3.4.16)$$

Аналогичную процедуру проделаем для всех новообразованных звеньев

$$b_{i(k+1)} - na'_{i(k+1)} + \sum_{i_{k+2}=1}^{N} \frac{a_{i(k+2)}}{b_{i(k+2)}}.$$

При этом ВЦД (3.4.1) преобразуется в ВЦД с неотрицательными членами вида

$$b_0 - \delta_0 + \sum_{i_1=1}^{n_0} \frac{1/n_0}{1 + \dfrac{n_0 a'_{i(1)}}{\gamma_{i(1)} + \sum\limits_{i_2=1}^{n_{i(1)}} \dfrac{1/n_{i(1)}}{1 + \dfrac{n_{i(1)} a'_{i(2)}}{\gamma_{i(2)} + \ddots}} + \sum\limits_{i_2=n_{i(1)}+1}^{N} \dfrac{a'_{i(2)}}{\gamma_{i(2)} + \ddots}}} +$$

$$+ \sum_{i_1=n_0+1}^{N} \frac{a'_{i(1)}}{\gamma_{i(1)} + \sum\limits_{i_2=1}^{n_{i(1)}} \dfrac{1/n_{i(1)}}{1 + \dfrac{n_{i(1)} a'_{i(2)}}{\gamma_{i(2)} + \ddots}} + \sum\limits_{i_2=n_{i(1)}+1}^{N} \dfrac{a'_{i(2)}}{\gamma_{i(2)} + \ddots}}, \qquad (3.4.17)$$

где $\gamma_{i(k)}$ определяются согласно (3.4.15). При $N = 1$ ВЦД (3.4.1) и (3.4.17) вырождаются в непрерывные дроби, вторая из которых является растяжением первой, т.е. аппроксиманты (3.4.1) образуют подпоследовательность подходящих дробей (3.4.17). Поэтому в этом случае из сходимости дроби (3.4.17) следует сходимость (3.4.1). При $N > 1$ в последовательностях аппроксимант ВЦД (3.4.1) и (3.4.17), вообще говоря, нет даже совпадающих элементов. Исключение составляет лишь случай, когда все $a_{i(k)} < 0$, $i(k) \in I$. Однако и для ветвящихся дробей справедливо аналогичное утверждение о сходимости.

Лемма 3.4.1 [32]. Пусть

$$F_m = d_0 + \mathop{D}_{k=1}^{m} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{c_{i(k)}}{d_{i(k)}}, \quad \hat{F}_m = d_0 + \mathop{D}_{k=1}^{m} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{c_{i(k)}}{\hat{d}_{i(k)}} -$$

две ВЦД с неотрицательными действительными компонентами, причем первая принимает конечное значение и при некотором r и всем допустимым наборам индексов $\hat{d}_{i(r)} \geq d_{i(r)}$, а также $\hat{d}_{i(r)} = d_{i(r)}$ во всех остальных случаях. Тогда значение второй дроби конечно и $(-1)^r \left(\hat{F}_m - F_m\right) \geq 0$.

Доказательство. При рассмотрении ВЦД с неотрицательными элементами учитываем замечание 1.2.1. По аналогии с (1.3.1) введем обозначения $Q_{i(p)}^{(m)} = d_{i(p)} + \mathop{D}_{k=p+1}^{m} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{c_{i(k)}}{d_{i(k)}}$, $\hat{Q}_{i(p)}^{(m)} = \hat{d}_{i(p)} + \mathop{D}_{k=p+1}^{m} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{c_{i(k)}}{\hat{d}_{i(k)}}$. Так как F_m конечно, то дроби $Q_{i(r)}^{(m)}$ и $\hat{Q}_{i(r)}^{(m)}$ принимают одновременно либо конечные, либо бесконечные значения, причем в первом случае $\hat{Q}_{i(r)}^{(m)} \geq Q_{i(r)}^{(m)}$. В силу того, что F_m конечно и $Q_{i(r-1)}^{(m)} = 0$, тогда, и только тогда, когда $\hat{Q}_{i(r-1)}^{(m)} = 0$, имеем: $Q_{i(r-2)}^{(m)}$ и $\hat{Q}_{i(r-2)}^{(m)}$ одновременно либо конечны, либо бесконечны и $\hat{Q}_{i(r-2)}^{(m)} \geq Q_{i(r-2)}^{(m)}$ в первом случае и т.д. Учитывая, что $Q_{i(1)}^{(m)} \neq 0$, $i_1 = \overline{1, N}$, легко завершаем доказательство леммы.■

Теорема 3.4.3 [32]. Пусть элементами ВЦД (3.4.1) являются действительные числа, удовлетворяющие условиям: все $a_{i(k)} \neq 0$, $i(k) \in I$, справедливы неравенства (3.4.15), где I определяется согласно (3.4.12). Если преобразованная ВЦД (3.4.17), построенная согласно описанному выше алгоритму, сходится, то дробь (3.4.1) сходится и к тому же пределу.

Доказательство. Конструкция ВЦД (3.4.17) предполагает, что дробь (3.4.1) приведена к виду (3.4.13). В противном случае, используя рассмотренные выше эквивалентные преобразования, приведем ВЦД (3.4.1) к требуемому виду. Тогда в ветвящейся цепной дроби (3.4.17) вместо каждого из элементов $a'_{i(k)}$, $b_{i(k)}$ следует взять $\hat{a}'_{i(k)}$, $\hat{b}_{i(k)}$ соответственно. Не ограничивая общности, будем предполагать, что ВЦД (3.4.1) имеет вид (3.4.13).

Обозначим f_k и g_k – k-е подходящие дроби ВЦД (3.4.1) и (3.4.17) соответственно. Рассмотрим фигурную подходящую дробь $\tilde{g}_k$ преобразованной ВЦД (3.4.17), содержащую только те звенья, размер мультииндексов которых не больше k. Методом математической индукции легко доказать, что $\tilde{g}_k = f_k$, $k = 1, 2, \ldots$. При $k = 1$ имеем N

$$\tilde{g}_1 = b_0 - \delta_0 + \sum_{i_1=1}^{n_0} \frac{1/n_0}{1 + \cfrac{n_0 a'_{i(1)}}{\gamma_{i(1)} + \sum\limits_{i_2=1}^{n_{i(1)}} \cfrac{1}{n_{i(1)}}}} + \sum_{i_1=n_0+1}^{N} \frac{a'_{i(1)}}{\gamma_{i(1)} + \sum\limits_{i_2=1}^{n_{i(1)}} \cfrac{1}{n_{i(1)}}} =$$

$$= b_0 - \delta_0 + \sum_{i_1=1}^{n_0} \frac{1/n_0}{1 + \cfrac{n_0 a'_{i(1)}}{b_{i(1)} - n_0 a'_{i(1)}}} + \sum_{i_1=n_0+1}^{N} \frac{a'_{i(1)}}{b_{i(1)}} = f_1 .$$

Так как с учетом равенств $\sum\limits_{i_{r+1}=1}^{n_{i(r)}} \frac{1}{n_{i(r)}} - \delta_{i(r)} = 0$, $r = k, k+1$, ВЦД $\tilde{g}_{k+1}$ можно привести к виду $\tilde{g}_k$, у которой последними тупиковыми звеньями являются выражения $\frac{a'_{i(k)}}{\alpha_{i(k)}}$, если $a_{i(k)} > 0$ или $\frac{n_{i(k-1)} a'_{i(k)}}{\alpha_{i(k)} - n_{i(k-1)} a'_{i(k)}}$, если $a_{i(k)} < 0$, где $\alpha_{i(k)}$ имеет вид (3.4.16). После несложных вычислений получим дробь $\tilde{g}_k$, у которой вместо $b_{i(k)}$ положено $b_{i(k)} + \sum\limits_{i_{k+1}=1}^{N} \frac{a_{i(k+1)}}{b_{i(k+1)}}$, что равно f_{k+1} в силу предположения индукции.

Из определения сходимости ВЦД (3.4.17) следует, что, начиная с некоторого номера k_0, значения всех g_k конечны. Пусть m_k – минимальная длина веток $\tilde{g}_k$, $s = \left[\frac{m_k - 1}{2}\right]$ и $k > k_0$. Очевидно, что $m_k \geq k$. Дробь $\tilde{g}_k$, $k > k_0$, можно записать в виде g_{2s+1}, если вместо частных знаменателей последних тупиковых звеньев $d_{i(2s+1)}$ в g_{2s+1} взять некоторые числа

$\hat{d}_{i(2s+1)} \ge d_{i(2s+1)}$ или ∞. Заметим, что $\hat{d}_{i(2s+1)} = \dfrac{0}{0}$ тогда и только тогда, когда $\sum\limits_{i_k = n_{i(k-1)}+1}^{N} \dfrac{a'_{i(k)}}{b_{i(k)}} = \dfrac{0}{0}$. Если p обозначает номер этажа ВЦД $\widetilde{g}_k$, на котором расположена эта сумма, то, очевидно, $p \ge k$ и $g_p = \dfrac{0}{0}$, что в силу выбора k невозможно. Используя лемму 3.4.1, справедливую, как легко заметить, и в случае, когда некоторые $\hat{d}_{i(r)} = \infty$, если $r = m$ нечетное и F_{m-1} конечно, заключаем что $\widetilde{g}_k \le g_{2s+1}$. На основании свойства вилки (2.5.8) имеем $\widetilde{g}_k \ge g_{2s}$. Из этих неравенств следует утверждение теоремы. ■

Используя признаки сходимости ВЦД с неотрицательными компонентами и предыдущую теорему, имеем

Теорема 3.4.4 [32]. Пусть для ВЦД (3.4.1), элементами которой являются действительные числа, выполняются условия: все $a_{i(k)} \ne 0$, $i(k) \in I$, справедливы неравенства (3.4.15), причем для всех $k = 1, 2, \ldots$ $\gamma_{i(k)} > 0$, если $n_{k-1} < i_k \le N$, и I определено согласно (3.4.12). Тогда ВЦД (3.4.1) сходится, если расходится ряд $\sum\limits_{k=2}^{\infty} z_k = \infty$, где $z_k = \min(\xi_{k-1}, \eta_{k-1}, \varsigma_k)$,

$$\xi_k = \min\left(\frac{\gamma_{i(m)}}{n_{i(m-1)} a'_{i(m)}} : i(m) \in I_{m,n}^{2m-k-1},\ m = \overline{\left[\frac{k}{2}\right] + 1, k} \right),$$

$$\eta_k = \min\left(\gamma_{i(m)} n_{i(m)} : i(m) \in I_{m,n}^{2m-k},\ m = \overline{\left[\frac{k+1}{2}\right], k} \right),$$

$$\varsigma_k = \min\left(\frac{\gamma_{i(m-1)} \gamma_{i(m)}}{a'_{i(m)}} : i(m) \in I_{m,N}^{2m-k},\ m = \overline{\left[\frac{k}{2}\right] + 1, k} \right),$$

и I_m^r обозначает множество всех мультииндексов $i(m)$, r индексов которых удовлетворяют неравенствам $n_{i(s-1)} < i_s \le N$, остальные $m - r$ индексов – неравенствам $1 \le i_s \le n_{i(s-1)}$, $I_{m,N}^r$ – подмножество I_m^r, у которого заранее известно, что последний индекс i_m удовлетворяет неравенству $n_{i(m-1)} < i_m \le N$, а $I^r_{m,n} = I^r_m - I^r_{m,N}$, причем каждое из указанных множеств индексов является пустым, если хотя бы одно из характеризующих его неравенств противоречиво.

Доказательство. ВЦД (3.4.1) приведем к виду (3.4.17). Из условий теоремы следует, что все подходящие дроби (3.4.17) принимают конечные значения. Рассмотрим ветвящуюся цепную дробь вида (3.4.17), где вместо каждого $\gamma_{i(k)}$, $k = 1,2,...$, $1 \le i_p \le n_{i(p-1)}$, $p = \overline{1,k}$, положено $\gamma_{i(k)}(\varepsilon) = \gamma_{i(k)} + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ – произвольное. Для этой дроби обозначим $f_n(\varepsilon)$, $z_n(\varepsilon)$, $n = 1,2,...$, ее n-ю аппроксиманту и соответствующее выражение, определенное для ВЦД (3.4.1) в условиях теоремы. Можно считать, что $f_n(\varepsilon)$ уже приведена к виду (2.5.11), так так все ее частные числители отличны от нуля. Применяем методику доказательства теоремы 2.5.2. Каждое из выражений, стоящее под знаком минимума в (2.5.10) в нашем случае принимает один из трех видов

$$\frac{\gamma_{i(m)}(\varepsilon)}{n_{i(m-1)}a'_{i(m)}}, \qquad \gamma_{i(m)}(\varepsilon)n_{i(m)}, \qquad \frac{\gamma_{i(m-1)}(\varepsilon)\gamma_{i(m)}(\varepsilon)}{a'_{i(m)}}$$

при соответствующем значении мультииндексов. Учет последних и приводит к определению множеств мультииндексов I^r_m, $I^r_{m,N}$, $I^r_{m,n}$. Из оценки, приведенной в конце теоремы 2.5.2, следует, что

$$f_{2m+1}(\varepsilon) - f_{2m}(\varepsilon) \le C(\varepsilon)\prod_{k=2}^{2m+1}\frac{N}{N + z_k(\varepsilon)}.$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$ в последнем неравенстве, учитывая условия теоремы и то, что подходящие дроби f_n, $n = 1,2,...$, ВЦД (3.4.17) принимают конечные значения, легко завершаем доказательство теоремы. ■

Теорема 3.4.5 [32]. Пусть элементами ВЦД (3.4.1) являются вещественные числа, удовлетворяющие условиям: все $a_{i(k)} \ne 0$, $i(k) \in I$, справедливы неравенства (3.4.15), причем $\gamma_{i(k)} > 0$ для каждого значения мультииндекса $i(k)$, для которого $a_{i(k)} > 0$. Тогда, если ВЦД (3.4.1) сходится, то для ее значения z справедливы оценки $z > b_0$ в предположении, что $a_{i(1)} > 0,\ i_1 = \overline{1,N}$, или $z \geq b_0 - 1$ в случае существования индекса i_1, $1 \leq i_1 \leq N$, такого, что $a_{i(1)} < 0$. Причем $z = b_0 - 1$ тогда и только тогда, когда все $a_{i(k)} < 0,\ i(k) \in I$, $b_{i(k)} = Na'_{i(k)} + 1$ и

$$\lim_{k \to \infty} \left\lfloor 1 + Na'_{i(1)} \left\lfloor 1 + Na'_{i(2)} \left\lfloor 1 + \ldots + Na'_{i(k-1)} \left\lfloor 1 + Na'_{i(k)} \right\rfloor \right\rfloor \right\rfloor \right\rfloor = \infty, \qquad (3.4.18)$$

где каждое выражение в квадратных скобках обозначает среднее гармоническое (1.6.4). I определяется согласно (3.4.12).

Доказательство. Сохраняя обозначения, предложенные при доказательстве теоремы 3.4.3 и учитывая приведенные в конце этой теоремы оценки, имеем $g_1 \geq f_n \geq g_0$, $n = 1,2,\ldots$.

Таким образом, $z \geq b_0$, если $a_{i(1)} > 0,\ i_1 = \overline{1,N}$, и $z \geq b_0 - 1$, если существует индекс i_1, что $a_{i(1)} < 0$. Исследуем возможность равенства $z = b_0$ в первом случае. Из условия

$$z - b_0 = \lim_{m \to \infty} \sum_{i_1 = 1}^{N} \frac{a'_{i(1)}}{Q_{i(1)}^{(m)}} = 0$$

с учетом обозначений (1.3.1) и того, что все $Q_{i(1)}^{(m)} \geq 0$, $i_1 = \overline{1,N}$, следует , что для каждого i_1, $i_1 = \overline{1,N}$, $\lim\limits_{m \to \infty} Q_{i(1)}^{(m)} = +\infty$. Последнее возможно лишь тогда, когда для каждого i_1, $i_1 = \overline{1,N}$, существует индекс i_2, $i_2 = 1 \leq i_2 \leq N$, что $a_{i(2)} > 0$ и $\lim\limits_{m \to \infty} Q_{i(2)}^{(m)} = 0$. Так как $Q_{i(2)}^{(m)} \geq b_{i(2)} - \delta_{i(2)}$, то необходимо $\gamma_{i(2)} = b_{i(2)} - \delta_{i(2)} = 0$, что противоречит условиям теоремы.

Исследуем возможность равенства $z = b_0 - 1$ во втором случае. Пусть

$$A_m = \sum_{i_1 = 1}^{n_0} \frac{a'_{i(1)}}{Q_{i(1)}^{(m)}}, \quad B_m = \sum_{i_1 = n_0 + 1}^{N} \frac{a'_{i(1)}}{Q_{i(1)}^{(m)}}.$$

Тогда $A_m - B_m = 1 + \varepsilon_m$, где $\varepsilon_m \to 0$ при $m \to \infty$. Если $n_0 < N$, то для $m \geq 2$

существует константа $K>0$, не зависящая от m, что $B_m \ge K$. Следовательно, $A_m \ge 1+K+\varepsilon_m$.

С другой стороны, $A_m \le 1$, так как $Q_{i(1)}^{(m)} \ge b_{i(1)} \ge n_0 a'_{i(1)}$, $i_1=\overline{1,n_0}$. Полученные оценки для A_m при достаточно большом m противоречивы. Поэтому $n_0=N$. В этом случае $Q_{i(1)}^{(m)} \ge Na'_{i(1)}$, $i_1=\overline{1,N}$, и равенство $\lim\limits_{m\to\infty}\sum\limits_{i_1=1}^{N}\dfrac{a'_{i(1)}}{Q_{i(1)}^{(m)}}=1$ возможно только тогда, когда для каждого i_1, $i_1=\overline{1,N}$,

$$\beta_{i(1)}=\left(b_{i(1)}-Na'_{i(1)}+\lim_{m\to\infty}\sum_{i_2=1}^{N}\frac{a'_{i(2)}}{Q_{i(2)}^{(m)}}\right)=0.$$

Если все $a_{i(2)}>0$, $i_2=\overline{1,N}$, то $\beta_{i(1)}>b_{i(1)}-Na'_{i(1)}\ge 0$, что невозможно. Поэтому для каждого i_1, $i_1=\overline{1,N}$, существует i_2, $1\le i_2\le N$, что $a_{i(2)}<0$. Тогда с учетом неравенств (3.4.15) и оценки $0=\beta_{i(1)}\ge b_{i(1)}-Na'_{i(1)}-1$, имеем, что для каждого i_1, $i_1=\overline{1,N}$, $b_{i(1)}=Na'_{i(1)}+1$, и $\lim\limits_{m\to\infty}\sum\limits_{i_2=1}^{N}\dfrac{a_{i(2)}}{Q_{i(2)}^{(m)}}=-1$.

Повторяя аналогичные соображения, приходим к ВЦД

$$\mathop{D}_{k=1}^{\infty}\sum_{i_k=1}^{N}\frac{-a'_{i(k)}}{Na'_{i(k)}+1}.$$

В силу (1.6.2) она принимает значение -1 тогда и только тогда, когда выполняется условие (3.4.18). ■

Следующая теорема является обобщением теоремы 3.4.1

Теорема 3.4.6 [26,32]. Пусть члены звеньев ВЦД

$$\mathop{D}_{k=1}^{\infty}\sum_{i_k=1}^{N}\frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}} \tag{3.4.19}$$

являются комплексные числа, удовлетворяющие условиям

$$\left|b_{i(k)}\right|\ge N\left|a_{i(k)}\right|+1. \tag{3.4.20}$$

Тогда

1) ВЦД (3.4.19) абсолютно сходится, и множеством, содержащим

значения этой дроби и всех ее аппроксимант, является круг $|z|\le 1$;

2) $|z|=1$ тогда и только тогда, когда выполняется условие (3.4.18), где, как и раньше, $a'_{i(k)}=|a_{i(k)}|$, существует φ, $-\pi<\varphi<\pi$, что

$$|b_{i(1)}|\cdot a_{i(1)}\cdot b_{i(1)}^{-1}|a_{i(1)}|^{-1}=e^{i\varphi},\ i_1=\overline{1,N},\qquad |b_{i(k)}|\ge N|a_{i(k)}|+1,\ i(k)\in I,\ \text{и}$$
$$\cdot a_{i(k+1)}\cdot b_{i(k)}^{-1}b_{i(k+1)}^{-1}<0,\ k=1,2,\ldots,\ i(k)\in I.$$

При выполнении этих условий имеем $z=e^{i\varphi}$.

Доказательство. 1) следует из теоремы 3.4.1. Исследуем возможность равенства $|z|=1$. Введем обозначения

$$Q_{i(r)}=\beta_{i(r)}+\mathop{D}_{k=r+1}^{\infty}\sum_{i_k=1}^{N}\frac{\beta_{i(k-1)}\beta_{i(k)}b_{i(k-1)}^{-1}b_{i(k)}^{-1}a_{i(k)}}{\beta_{i(k)}},\qquad i(r)\in I,$$

где $\beta_{i(k)}=|b_{i(k)}|$, $b_{i(0)}=1$. Имеем

$$\left|\sum_{i_1=1}^{N}\frac{\beta_{i(1)}b_{i(1)}^{-1}a_{i(1)}}{Q_{i(1)}}\right|=1. \tag{3.4.21}$$

Так как $|Q_{i(1)}-\beta_{i(1)}|\le 1$, то $|Q_{i(1)}|\ge\beta_{i(1)}-1\ge N|a_{i(1)}|$, и поэтому равенство (3.4.21) имеет место только тогда, когда

$$|Q_{i(1)}|=N|a_{i(1)}|\quad\text{и}\quad |b_{i(1)}|a_{i(1)}b_{i(1)}^{-1}|a_{i(1)}|=e^{i\varphi},\qquad i_1=\overline{1,N}.$$

Так как

$$\beta_{i(1)}-Q_{i(1)}=\beta_{i(1)}-Na_{i(1)}=-\sum_{i_2=1}^{N}\frac{\beta_{i(1)}\beta_{i(2)}b_{i(1)}^{-1}b_{i(2)}^{-1}a_{i(2)}}{Q_{i(2)}}\le 1,$$

то с учетом (3.4.20) имеем

$$|b_{i(1)}|=N|a_{i(1)}|+1\qquad\text{и}\qquad \sum_{i_2=1}^{N}\frac{\beta_{i(1)}\beta_{i(2)}b_{i(1)}^{-1}b_{i(2)}^{-1}a_{i(2)}}{Q_{i(2)}}=-1.$$

Это возможно только тогда, когда для всех допустимых наборов индексов $|Q_{i(2)}|=N|a_{i(2)}|$ и $b_{i(1)}^{-1}b_{i(2)}^{-1}a_{i(2)}<0$ и т.д. Учитывая (1.6.2), легко завершаем доказательство теоремы. ■

Аналогичным образом устанавливается сходимость ВЦД (3.4.1) с действительными компонентами , удовлетворяющими условиям: $a_{i(k)} \neq 0$ и

$$\Gamma_{i(k)} = b_{i(k)} - \varepsilon_{i(k)} a'_{i(k)} - n_{i(k)} \geq 0, \qquad i(k) \in I, \tag{3.4.22}$$

где параметры имеют тот же смысл, что и в неравенствах (3.4.15). Здесь необходимо применить алгоритм, предложенный в [42], только, начиная с первого этажа ВЦД (3.4.1), предварительно приведенной к виду (3.4.13). Каждое звено дроби (3.4.13)

$$b_{i(k)} + \sum_{i_{k+1}=1}^{N} \frac{a_{i(k+1)}}{b_{i(k+1)}},$$

где $k = 0$ или $a_{i(k)} > 0$ при $k \geq 1$, $i_0 = 0$, заменим ему тождественно равным выражением

$$b_{i(k)} - n_{i(k)} + \sum_{i_{k+1}=1}^{n_{i(k)}} \frac{1}{1 + \dfrac{a'_{i(k+1)}}{b_{i(k+1)} - a'_{i(k+1)}}} + \sum_{i_{k+1}=n_{i(k)}+1}^{N} \frac{a'_{i(k+1)}}{b_{i(k+1)}}.$$

Аналогичную процедуру проделаем и для всех новообразованных звеньев

$$b_{i(k+1)} - a'_{i(k+1)} + \sum_{i_{k+2}=1}^{N} \frac{a_{i(k+2)}}{b_{i(k+2)}}.$$

При этом ВЦД (3.4.1) преобразуется в ветвящуюся цепную дробь с неотрицательными компонентами вида

$$b_0 - n_0 + \sum_{i_1=1}^{n_0} \cfrac{1}{1 + \cfrac{a'_{i(1)}}{\Gamma_{i(1)} + \sum\limits_{i_2=1}^{n_{i(1)}} \cfrac{1}{1 + \cfrac{a'_{i(2)}}{\Gamma_{i(2)} + \ddots}} + \sum\limits_{i_2=n_{i(1)}+1}^{N} \cfrac{a'_{i(2)}}{\Gamma_{i(2)} + \ddots}}} +$$

$$+ \sum_{i_1=n_0+1}^{N} \cfrac{a'_{i(1)}}{\Gamma_{i(1)} + \sum\limits_{i_2=1}^{n_{i(1)}} \cfrac{1}{1 + \cfrac{a'_{i(2)}}{\Gamma_{i(2)} + \ddots}} + \sum\limits_{i_2=n_{i(1)}+1}^{n_{i(1)}} \cfrac{a'_{i(2)}}{\Gamma_{i(2)} + \ddots}}. \tag{3.4.23}$$

В данном случае также справедливы аналоги теорем 3.4.3 – 3.4.6

Теорема 3.4.7 [26]. Пусть элементами ВЦД (3.4.1) являются действительные числа, удовлетворяющие условиям: все $a_{i(k)} \neq 0$, $i(k) \in I$, справедливы неравенства (3.4.22), где I определяется согласно (3.4.12). Если преобразованная ВЦД (3.4.23) с неотрицательными компонентами, построенная согласно описанному выше алгоритму, сходится, то дробь (3.4.1) сходится и к тому же пределу.

Теорема 3.4.8 [26]. Пусть для ВЦД (3.4.1), элементами которой являются действительные числа, выполняются условия: все $a_{i(k)} \neq 0$, $i(k) \in I$, справедливы неравенства (3.4.22). причем для всех $k = 1, 2 \ldots$ $\Gamma_{i(k)} > 0$, если $n_{i(k-1)} < i_k \leq N$. Тогда ВЦД (3.4.1) сходится, если расходится ряд $\sum_{k=2}^{\infty} z_k = \infty$, где $z_k = \min(\xi_{k-1}, \eta_{k-1}, \varsigma_k)$,

$$\xi_k = \min\left(\frac{\Gamma_{i(m)}}{a'_{i(m)}} : i(m) \in I_{m,n}^{2m-k-1},\ m = \overline{\left[\frac{k}{2}\right] + 1, k} \right),$$

$$\eta_k = \min\left(\Gamma_{i(m)} : i(m) \in I_{m,n}^{2m-k},\ m = \overline{\left[\frac{k+1}{2}\right], k} \right),$$

$$\varsigma_k = \min\left(\frac{\Gamma_{i(m-1)}\Gamma_{i(m)}}{a'_{i(m)}} : i(m) \in I_{m,N}^{2m-k},\ m = \overline{\left[\frac{k}{2}\right] + 1, k} \right),$$

а $I_{m,n}^r$, I_m^r, $I_{m,N}^r$ определены при формулировке теоремы 3.4.4.

Теорема 3.4.9 [26]. Пусть элементами ВЦД (3.4.1) являются вещественные числа, удовлетворяющие условиям: все $a_{i(k)} \neq 0$, $i(k) \in I$, справедливы неравенства (3.4.22), причем $\Gamma_{i(k)} > 0$ для каждого значения мультииндекса $i(k)$, для которого $a_{i(k)} > 0$.

Тогда, если ВЦД (3.4.1) сходится, то для ее значения z справедливы оценки: $z > b_0$ в предположении, что $a_{i(1)} > 0$, $i_1 = \overline{1, N}$, или $z \geq b_0 - N$ в случае существования индекса i_1, $i_1 = \overline{1, N}$, такого, что $a_{i(1)} < 0$. Причем $z = b_0 - N$ тогда и только тогда, когда все $a_{i(k)} < 0$, $i(k) \in I$, $b_{i(k)} = a'_{i(k)} + N$ и

$$\lim_{k\to\infty}\left[1+\frac{a'_{i(1)}}{N}\left[1+\frac{a'_{i(2)}}{N}\left[1+\ldots+\frac{a'_{i(k-1)}}{N}\left[1+\frac{a'_{i(k)}}{N}\right]\right]\right]\right]=\infty, \qquad (3.4.24)$$

где каждое выражение в квадратных скобках означает среднее гармоническое (1.6.4).

Теорема 3.4.10 [26]. Пусть компонентами ВЦД (3.4.19) являются комплексные числа, удовлетворяющие неравенствам

$$\left|b_{i(k)}\right|\geq a_{i(k)}+N, \qquad i(k)\in I. \qquad (3.4.25)$$

Тогда

1) ВЦД (3.4.19) абсолютно сходится, и множеством, содержащим значения этой дроби и всех ее подходящих дробей является круг $|z|\leq N$;

2) $|z|=N/$ тогда и только тогда, когда выполняются условия (3.4.24), где , как и раньше, $a'_{i(k)}=\left|a_{i(k)}\right|$, существует φ, $-\pi<\varphi<\pi$, что

$$a_{i(1)}b_{i(1)}^{-1}\left|a_{i(1)}\right|^{-1}b_{i(1)}=\varphi,\ i_1=\overline{1,N}.$$

$$\left|b_{i(k)}\right|=\left|a_{i(k)}\right|+N, \qquad i(k)\in I,$$

и

$$a_{i(k+1)}b_{i(k)}^{-1}b_{i(k+1)}^{-1}<0, \qquad k=1,2,\ldots,\ i(k)\in I.$$

При выполнении этих условий имеем $z=e^{i\varphi}$.

Следующая теорема является усилением теоремы 3.4.1.

Теорема 3.4.11 [26]. Пусть элементами ВЦД (3.4.1) являются комплексные числа, удовлетворяющие условиям

$$\left|b_{i(1)}\right|\geq 1, \quad i_1=\overline{1,N}, \qquad \left|b_{i(k)}\right|\geq N\left|a_{i(k)}\right|+1, \qquad k\geq 2,\ i(k)\in I. \qquad (3.4.26)$$

Тогда дробь (3.4.1) сходится, если для каждого i_1, $i_1=\overline{1,N}$, хотя бы одно из неравенств (3.4.26) строгое.

Доказательство. Для каждого i_1, $i_1=\overline{1,N}$, рассмотрим ВЦД

$$Q_{i(1)}=b_{i(1)}+\underset{k=2}{\overset{\infty}{D}}\sum_{i_k=1}^{N}\frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}}. \qquad (3.4.27)$$

Из теоремы 3.4.6 следует, что дробь (3.4.27) сходится и $Q_{i(1)} \neq 0$. Таким образом, ВЦД (3.4.1) сходится. ■

Вместе с ВЦД (3.4.1) рассмотрим ей эквивалентную дробь

$$b_{i(0)} + \mathop{D}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{\rho_{i(k-1)}\rho_{i(k)}a_{i(k)}}{\rho_{i(k)}b_{i(k)}},$$

где $\rho_{i(0)} = 1$, $\rho_{i(k)} \neq 0$, $i(k) \in I$, – произвольные комплексные числа. Если $\rho_{i(k)}$ подобрать так, чтобы выполнялись неравенства

$$\left| \rho_{i(1)}\, b_{i(1)} \right| \geq 1,\ i_1 = \overline{1,N},\ \left| \rho_{i(k)} b_{i(k)} \right| \geq N \left| \rho_{i(k-1)}\rho_{i(k)}a_{i(k)} \right| + 1,\ k \geq 2,\ i(k) \in I, \tag{3.4.28}$$

причем для каждого i_1, $i_1 = \overline{1,N}$, хотя бы одно из этих неравенств строгое, то согласно предыдущей теореме ВЦД (3.4.1) сходится. Подбирая специальным образом $\rho_{i(k)}$, получим многомерные аналоги известных признаков сходимости непрерывных дробей.

Теорема 3.4.12 [26]. ВЦД (3.4.1), элементами которой являются комплексные числа, сходится, если для всех допустимых наборов индексов выполняется одно из условий:

1) $\left| b_{i(1)} \right| \geq N$, $i_1 = \overline{1,N}$, $\left| b_{i(k)} \right| \geq \left| a_{i(k)} \right| + N$, $k \geq 2$, $i(k) \in I$;

2) $\left| c_{i(2)} \right| \leq (2N)^{-1}$, $\left| c_{i(k)} \right| \leq (4N)^{-1}$, $k \geq 3$, $i(p) \in I$, $p = 2,3,\ldots$;

3) $\left| c_{i(2)} \right| \leq \dfrac{3}{8N}$, $\left| c_{i(k)} \right| \leq \dfrac{k(k-1)+1/4}{4Nk(k-1)}$, $k \geq 3$, $i(p) \in I$, $p = 2,3,\ldots$;

4) $\left| c_{i(2)} \right| \leq \dfrac{2}{5N}$, $\left| c_{i(k)} \right| \leq \dfrac{k^2}{(4k^2-1)N}$, $k \geq 3$, $i(p) \in I$, $p = 2,3,\ldots$;

5) $\left| c_{i(2)} \right| \leq (2N)^{-1}$, $\left| c_{i(k-1)} \right| + \left| c_{i(k)} \right| \leq (2N)^{-1}$, $k \geq 2$, $i(p) \in I$, $p = 2,3,\ldots$,

причем все $\left| a_{i(2k)} \right| \neq 0$, $k = 1,2,\ldots$, $i(2k) \in I$;

6) $\left| c_{i(k)} \right|^{1/2} + \left| c_{i(k+1)} \right|^{1/2} \leq N^{-1/2}$, $k \geq 2$, $i(k) \in I$, причем все $\left| a_{i(k)} \right| \neq 0$, $k \geq 2$, $i(k) \in I$;

7) $\left|b_{i(1)}\right| \ge \sum_{i_2=1}^{N}\left|a_{i(2)}\right|,\ i_1=\overline{1,N}$, $\left|b_{i(k)}\right| \ge N\left|a_{i(k)}\right|\left(\sum_{i_k=1}^{N}\left|a_{i(k)}\right|\right)^{-1} + \sum_{i_{k+1}=1}^{N}\left|a_{i(k+1)}\right|$,

$k \ge 2,\ i(k) \in I$, где для произвольного $i_1, i_1=\overline{1,N}$, хотя бы одно из неравенств в каждом условии строгое и $c_{i(k)} = a_{i(k)} b_{i(k)}^{-1} b_{i(k-1)}^{-1}$.

Доказательство осуществляется выбором $\rho_{i(k)}$ в неравенствах (3.4.28). Условия 1) или 7) следуют из (3.4.28), если взять соответственно $\rho_{i(k)} = N^{-1}$ или $\rho_{i(k)} = \left(\sum_{i_{k+1}=1}^{N}\left|a_{i(k+1)}\right|\right)^{-1}$, $i(k) \in I$. Пусть $\rho_{i(k)} = \dfrac{p_{i(k)}}{\left|b_{i(k)}\right|}$.

Положив $p_{i(1)} = 1,\ i_1=\overline{1,N}$, и $p_{i(k)} = 2$, $p_{i(k)} = \dfrac{2k}{k+\frac{1}{2}}$ или $p_{i(k)} = \dfrac{2k+1}{k+1}$, $k \ge 2, i(k) \in I$, получим 2), 3) или 4) соответственно.

Если же $p_{i(2k)} = 2$, $p_{i(2k-1)} = (2N)^{-1}\min\left(\left|c_{i(2k)}\right|^{-1} : i_{2k}=\overline{1,N}\right)$, то (3.4.28) эквивалентно

$$\begin{cases} 2(N)^{-1}\min\left(\left|c_{i(2)}\right|^{-1}:\ i_2=\overline{1,N}\right) \ge 1, \\ \left|c_{i(2k-1)}\right| + \min\left(\left|c_{i(2k)}\right|^{-1}:\ i_{2k}=\overline{1,N}\right) \le (2N)^{-1},\ k \ge 2. \end{cases} \tag{3.4.29}$$

Условие 5) является достаточным для выполнения неравенств (3.4.29). Подставляя в (3.4.28) $\rho_{i(k)} = \left|b_{i(k)}\right|^{-1} N^{-1/2}\min\left(\left|c_{i(k+1)}\right|^{-1/2}:\ i_{k+1}=\overline{1,N}\right)$, получим неравенства

$$\begin{cases} N^{-1/2}\min\left(\left|c_{i(2)}\right|^{-1/2}:\ i_2=\overline{1,N}\right) \ge 1, \\ \left|c_{i(k)}\right|\min\left(\left|c_{i(k)}\right|^{-1/2}: i_k=\overline{1,N}\right) + \dfrac{1}{\min\left(\left|c_{i(k+1)}\right|^{-1/2}: i_{2k+1}=\overline{1,N}\right)} \le N^{-1/2},\ k \ge 2. \end{cases}$$

Условие 6) гарантирует выполнение этих неравенств. ■

Перечисленные выше условия, кроме 3) и 5) являются аналогами признаков сходимости Прингсгейма, условие 5) – многомерный аналог теоремы Арвина (см. [181]). Из теоремы 3.3.1 следует, что круг $|z|\le\frac{1}{4N}+\varepsilon$ ни при каком $\varepsilon>0$ не является областью сходимости ВЦД (3.2.2). Однако условия 2), 3) последней теоремы показывают, что если взять

$$c_{i(k)}\in\left\{ z\in\mathbf{C}: |z|\le\frac{1}{4N}+\varepsilon_k \right\},\qquad k=1,2,\ldots,\ i_p=\overline{1,N},\ p=\overline{1,k},$$

где $\varepsilon_k\to 0$ (значение ε_k определяется из условий 2) или 3)), то ВЦД (3.2.2) сходится.

Рассматриваемые ранее теоремы 3.4.6, 3.4.10 и 3.4.11 являются многомерными аналогами признаков сходимости Прингсгейма, теоремы 3.4.3, 3.4.5, 3.4.7, 3.4.9 – многомерные обобщения теорем Тице [181].

§ 5. Области сходимости и области устойчивости ветвящихся цепных дробей

Рассмотрим ВЦД (3.3.4) с комплексными элементами и обозначим через I набор индексов (3.3.3). Последовательность элементов $\{\Omega_{i(k)}\}$, $i(k)\in I$, определенных в начале §2 настоящей главы, называется последовательностью областей сходимости ВЦД (3.3.4), если условие $\langle a_{i(k)}, b_{i(k)}\rangle \in \Omega_{i(k)}$, $i(k)\in I$, обеспечивает сходимость этой дроби. Аналогично определим последовательность областей сходимости $\{E_{i(k)}\}$ для ВЦД (3.2.4) или $\{G_{i(k)}\}$ для ВЦД (3.2.5). Можно рассматривать и дроби, обратные к (3.3.4), (3.2.4) или (3.2.5). Если $\Omega_{i(k)}=\Omega$ (или $E_{i(k)}=E$, или $G_{i(k)}=G$) при всех возможных наборах индексов, то назовем Ω (или E, или G) простой областью сходимости. Если же $\Omega_{i(2k-1)}=\Omega'$, $\Omega_{i(2k)}=\Omega''$ (или $E_{i(2k-1)}=E'$, $E_{i(2k)}=E''$, или $G_{i(2k-1)}=G'$, $G_{i(2k)}=G''$) при всех возможных наборах индексов, то назовем $\langle \Omega',\Omega''\rangle$ (или $\langle E',E''\rangle$, или $\langle G',G''\rangle$) спаренными областями сходимости.

Например, в силу теоремы 3.1.1 простой областью сходимости ВЦД обратной к (3.2.5), является произвольный компакт K области

$$\left\{ z\in\mathbf{C}:\ z\neq 0,\ |\arg z|<\frac{\pi}{2}-\varepsilon,\ 0<\varepsilon<\frac{\pi}{2}\right\}.$$

Простой областью сходимости ВЦД (3.2.4) является круг $\left\{ z\in\mathbf{C}: |z|\le \dfrac{1}{4N}\right\}$, что следует из теоремы 3.2.1.

Круговые области сходимости для ВЦД рассмотрены также в работах [20, 22, 46–48]. Следует отметить, что теорема Лейтона–Уолла, как теорема о спаренных областях сходимости, в принципе не переносится на ветвящиеся цепные дроби.

Круг $K=\{z\in\mathbf{C}: |z-a|\le r\}$ называется окрестностью сходимости точки $a \in \mathbf{C}$, если K – простая область сходимости ВЦД (3.2.4) или (3.2.5).

Теорема 3.5.1 [20, 22|. Если α - комплексное число такое, что

$$|\arg a| < \pi\,,\ |a| > \frac{1}{4N} \quad .(3.5.1)$$

то область

$$E = \left\{ z \in \mathbf{C} : |z - a| \le r < \frac{1}{\sqrt{2N}} \left(|a| + \operatorname{Re} a \right)^{1/2} \right\} \quad (3.5.2)$$

является окрестностью сходимости ВЦД (3.2.4). Если же

$$|a| \le \frac{1}{4N}, \quad (3.5.3)$$

то окрестностью сходимости точки a для этой дроби является круг

$$E = \left\{ z \in \mathbf{C} : |z - a| \le r < \left(|a| + \frac{1}{4N} \right) \right\}. \quad (3.5.4)$$

Если $a \in \mathbf{R}$ и $a < -\frac{1}{4N}$ 0, то окрестности сходимости точки a ни каком r не существует.

Доказательство основано на свойствах парабол и утверждении теоремы 3.3.2. Если $a = 0$, то утверждение теоремы следует из многомерного аналога признака сходимости Ворпицкого (теорема 3.2.1). Если же $a \ne 0$, то, взяв $\gamma = \frac{1}{2}\arg a$, построим параболическую область $P_{0\gamma}$ вида (3.3.16), где $\varepsilon = 0$. Остается отыскать радиус круга, касающегося границы $\partial P_{0\gamma}$ с центром в точке a, используя методику, рассмотренную в [65]. Утверждение теоремы 3.3.2 гарантирует сходимость ВЦД (3.2.4) в каждом компакте K области $P_{\varepsilon\gamma}$. Поэтому, учитывая произвольность ε, возьмем несколько меньшими радиусы полученных кругов. Для завершения доказательства воспользуемся пунктом 4 теоремы 3.2.1. ■

Одним из важных свойств непрерывных дробей и их многомерных обобщений является свойство вычислительной устойчивости. Наряду с многочисленными публикациями, посвященными сходимости, имеется сравнительно немного работ, где излагаются результаты по данному вопросу (см., например [45, 122, 169], а также [5, 93, 97, 150] и др.) При исследовании вычислительной устойчивости ВЦД на ЭВМ используется метод обратного анализа [122, 133].

Рассмотрим конечные ветвящиеся цепные дроби

$$f = a_0 \left(b_0 + \mathop{D}_{k=1}^{n} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}} \right)^{-1} \tag{3.5.5}$$

и

$$\hat{f} = \hat{a}_0 \left(\hat{b}_0 + \mathop{D}_{k=1}^{n} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{\hat{a}_{i(k)}}{\hat{b}_{i(k)}} \right)^{-1}, \tag{3.5.6}$$

для которых область $\Omega \subset \mathbf{C} \times \mathbf{C}$ является областью элементов, т.е.

$$\left\langle a_{i(k)}, b_{i(k)} \right\rangle \in \Omega, \qquad \left\langle \hat{a}_{i(k)}, \hat{b}_{i(k)} \right\rangle \in \Omega, \qquad i(k) \in I,\ k \le n, \tag{3.5.7}$$

где I определяется согласно (3.3.3). Пусть компоненты ВЦД (3.5.5) и (3.5.6) связаны соотношениями

$$\hat{a}_{i(k)} = \left(1 + \alpha_{i(k)}\right) a_{i(k)}, \quad \hat{b}_{i(k)} = \left(1 + \beta_{i(k)}\right) b_{i(k)}, \quad i(k) \in I,\ k \le n, \tag{3.5.8}$$

или

$$a_{i(k)} = \left(1 + \hat{\alpha}_{i(k)}\right) \hat{a}_{i(k)}, \quad b_{i(k)} = \left(1 + \hat{\beta}_{i(k)}\right) \hat{b}_{i(k)}, \quad i(k) \in I,\ k \le n. \tag{3.5.9}$$

Дробь (3.5.6) будем интерпретировать как приближенную относительно ВЦД (3.5.5). Числа $\alpha_{i(k)}, \beta_{i(k)}, \hat{\alpha}_{i(k)}, \hat{\beta}_{i(k)}$ называются относительными погрешностями , а числа

$$\Delta a_{i(k)} = a_{i(k)} - \hat{a}_{i(k)}, \qquad \Delta b_{i(k)} = b_{i(k)} - \hat{b}_{i(k)}, - \tag{3.5.10}$$

абсолютными погрешностями элементов $a_{i(k)}$ и $b_{i(k)}$ соответственно. Мы, естественно, предполагаем, что в соотношениях (3.5.8) все $a_{i(k)} \ne 0$ и $b_{i(k)} \ne 0$, а в соотношениях (3.5.9) все $\hat{a}_{i(k)} \ne 0$ и $\hat{b}_{i(k)} \ne 0$.

Пусть

$$\Delta f = f - \hat{f}, \qquad \hat{f} = (1 + \delta) f, \qquad f = \left(1 + \hat{\delta}\right) \hat{f} \tag{3.5.11}$$

с естественными ограничениями $f \ne 0$ или $\hat{f} \ne 0$, где это необходимо.

Пусть

$$\begin{aligned}\Delta &= \max\left(\left|\Delta a_{i(k)}\right|, \left|\Delta b_{i(k)}\right| : i(k)\in I,\ k\le n\right),\\ \gamma &= \max\left(\left|\alpha_{i(k)}\right|, \left|\beta_{i(k)}\right|, \left|\hat{\alpha}_{i(k)}\right|, \left|\hat{\beta}_{i(k)}\right| : i(k)\in I,\ k\le n\right),\end{aligned} \tag{3. 5.12}$$

где I определяется согласно (3.3.3). Область элементов Ω называется областью абсолютной (относительной) устойчивости ВЦД (3.5.5), если существует действительная положительная константа C, зависящая от Ω и не зависящая от n, что

$$\left|\Delta f\right| \le C\Delta \quad \left(\left|\delta\right| \le C\gamma \right). \tag{3.5.13}$$

Теорема 3.5.2.[?, ?] Область $G=(0,+\infty)$ является областью относительной устойчивости ВЦД

$$f = b_0 + \mathop{D}_{k=1}^{n} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{1}{b_{i(k)}}, \tag{3.5.14}$$

причем

$$\left|\delta\right| \le \max\left(\left|\beta_{i(2k)}\right|, \left|\hat{\beta}_{i(2k+1)}\right| : i(k)\in I,\ k\le \left[\frac{n}{2}\right]\right) \tag{3.5.15}$$

и $\hat{\beta}_{i(2s+1)}=0$, если $n=2s$.

Доказательство. Сначала отметим некоторые свойства относительных погрешностей [70]. Для удобства их формулировки обозначим относительную погрешность числа a через $\delta(a)$ или $\hat{\delta}(a)$, т.е. $\delta(a)=\alpha$ или $\hat{\delta}(a)=\hat{\alpha}$ (см. (3.5.8), (3.5.9)). Справедливы соотношения

$$\begin{cases} \left|\delta\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right)\right| \le \max\left(\left|\delta(a_i)\right| : i=\overline{1,n}\right), \\ \left|\hat{\delta}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right)\right| \le \max\left(\left|\hat{\delta}(a_i)\right| : i=\overline{1,n}\right), \end{cases} \tag{3.5.16}$$

$$\hat{\delta}(a) = -\delta(a)\left(1+\delta(a)\right)^{-1}, \qquad \delta(a) = -\hat{\delta}(a)\left(1+\hat{\delta}(a)\right)^{-1}, \tag{3.5.17}$$

$$\delta\left(\frac{a}{b}\right) = \delta(a) + \left(1+\delta(a)\right)\hat{\delta}(b), \quad \hat{\delta}\left(\frac{a}{b}\right) = \hat{\delta}(a) + \left(1+\hat{\delta}(a)\right)\delta(b), \tag{3.5.18}$$

где предполагается, что $a>0,\ b>0,\ a_i>0,\ \hat{a}>0,\ \hat{b}>0,\ \hat{a}_i>0,\quad i=\overline{1,n}$.

Действительно,

$$\left|\delta\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\right| = \left|\sum_{i=1}^{n}(\hat{a}_i - a_i)\left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right)^{-1}\right| \le \sum_{i=1}^{n}|\delta(a_i)|\frac{a_i}{\sum_{j=1}^{n} a_j} \le \max\left(|\delta(a_i)| : i=\overline{1,n}\right).$$

Аналогично проверяется второе неравенство в (3.5.16). Далее,

$$\hat{\delta}(a) = \frac{a-\hat{a}}{\hat{a}} = \frac{a - a(1+\delta(a))}{a(1+\delta(a))} = \frac{-\delta(a)}{1+\delta(a)},$$

$$\hat{\delta}\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{\dfrac{\hat{a}}{\hat{b}} - \dfrac{a}{b}}{\dfrac{a}{b}} = \frac{\hat{a}b - a\hat{b}}{a\hat{b}} = \frac{\hat{a}\hat{b} - a\hat{b}}{a\hat{b}} + \frac{\hat{a}b - \hat{a}\hat{b}}{a\hat{b}} = \delta(a) + (1+\delta(a))\hat{\delta}(b),$$

в частности,

$$\delta\left(\frac{1}{b}\right) = \hat{\delta}(b),\ \ \hat{\delta}\left(\frac{1}{b}\right) = \delta(b). \tag{3.5.19}$$

Относительную погрешность при вычислении ВЦД $Q_{i(k)}^{(n)}$ (см. (1.3.2)) обозначим $\delta_{i(k)}$. Тогда, последовательно применяя соотношения (3.5.16), (3.5.17), (3.5.19), получим

$$|\,\delta\,| = |\,\delta_{i(0)}\,| \le \max\left(|\,\beta_0\,|, |\,\hat{\delta}_{i(1)}\,| :\ i_1 = \overline{1,N}\right) \le$$
$$\le \max\left(|\,\beta_0\,|, |\,\hat{\beta}_{i(1)}\,|, |\,\hat{\delta}_{i(2)}\,| :\ i_k = \overline{1,N},\ k=1,2\right) \le \ldots \le$$
$$\le \max\left(|\,\beta_{i(2k)}\,|, |\,\hat{\beta}_{i(2k+1)}\,| :\ k = \left[\frac{n}{2}\right],\ i_0 = 0,\ i_p = \overline{1,N},\ p = \overline{1,k}\right). \ \blacksquare$$

Теорема 3.5.3. Область

$$E = \left\{ z \in \mathbf{C} :\ |\,z\,| \le \frac{t(1-t)}{N},\ 0 < t < \frac{1}{2} \right\} \tag{3.5.20}$$

является областью абсолютной устойчивости ВЦД

$$f = \left(1 + \mathop{D}_{k=1}^{n} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{c_{i(k)}}{1}\right)^{-1},$$

т.е. $|\,\Delta f\,| \le C\Delta$, причем $C \le N(1-t)^{-2}(1-2t)^{-1}$.

Доказательство. Используя рекуррентные обозначения (1.3.2) для ВЦД (3.5.5) и (3.5.6) и предполагая, что все $Q_{i(k)}^{(n)} \ne 0$, $\hat{Q}_{i(k)}^{(n)} \ne 0$, $k = \overline{0,n}$, $i_0 = 0$,

$i_p = \overline{1,N},\ p = \overline{1,n}$, установим формулы для абсолютной погрешности Δf. На первом шаге имеем

$$\Delta f = f - \hat{f} = \frac{a_0}{Q_0^{(n)}} - \frac{\hat{a}_0}{\hat{Q}_0^{(n)}} = \frac{\Delta a_0}{\hat{Q}_0^{(n)}} - a_0 \frac{Q_0^{(n)} - \hat{Q}_0^{(n)}}{Q_0^{(n)}\hat{Q}_0^{(n)}} =$$

$$= \frac{\Delta a_0}{\hat{Q}_0^{(n)}} - \frac{a_0 \Delta b_0}{Q_0^{(n)}\hat{Q}_0^{(n)}} - \sum_{i_1=1} \frac{a_0\left(a_{i(1)}\hat{Q}_{i(1)}^{(n)} - \hat{a}_{i(1)}Q_{i(1)}^{(n)}\right)}{Q_0^{(n)}\,Q_{i(1)}^{(n)}\,\hat{Q}_0^{(n)}\,\hat{Q}_{i(1)}^{(n)}}.$$

Последовательно применяя рекуррентное соотношение

$$a_{i(k)}\hat{Q}_{i(k)}^{(n)} - \hat{a}_{i(k)}Q_{i(k)}^{(n)} = \Delta a_{i(k)}Q_{i(k)}^{(n)} - a_{i(k)}\Delta b_{i(k)} -$$
$$- \sum_{i_{k+1}=1}^{N} \frac{a_{i(k)}\left(a_{i(k+1)}\,\hat{Q}_{i(k+1)}^{(n)} - \hat{a}_{i(k+1)}\,Q_{i(k+1)}^{(n)}\right)}{Q_{i(k+1)}^{(n)}\,\hat{Q}_{i(k+1)}^{(n)}}$$

с учетом того, что

$$a_{i(n)}\,\hat{Q}_{i(n)}^{(n)} - \hat{a}_{i(n)}\,Q_{i(n)}^{(n)} = \Delta a_{i(n)}\,Q_{i(n)}^{(n)} - a_{i(n)}\Delta b_{i(n)},$$

окончательно получим

$$\Delta f = \frac{Q_0^{(n)}\Delta a_0 - a_0\Delta b_0}{Q_0^{(n)}\hat{Q}_0^{(n)}} + \sum_{m=1}^{n}\sum_{i_1,i_2,\ldots,i_m=1}^{N} \frac{(-1)^m\left(Q_{i(m)}^{(n)}\Delta a_{i(m)} - a_{i(m)}\Delta b_{i(m)}\right)}{\prod_{k=0}^{m}\left(Q_{i(k)}^{(n)}\hat{Q}_{i(k)}^{(n)}\right)} \prod_{k=0}^{m-1} a_{i(k)}. \tag{3.5.22}$$

В частности, для ВЦД (3.5.21) эта формула примет вид

$$\Delta f = \sum_{m=1}^{n}\sum_{i_1,i_2,\ldots,i_m=1}^{N} (-1)^m \frac{\Delta a_{i(m)}}{\hat{Q}_{i(m)}^{(n)}} \prod_{k=0}^{m-1} \frac{a_{i(k)}}{Q_{i(k)}^{(n)}\hat{Q}_{i(k)}^{(n)}}. \tag{3.5.23}$$

Применяя оценку (3.2.16) для $Q_{i(k)}^{(n)}$ и $\hat{Q}_{i(k)}^{(n)}$, учитывая условие (3.5.20) и соотношение $g_k = Q_{k-1}Q_k^{-1}$, где g_k и Q_k – k-я подходящая дробь (3.2.13) и знаменатель этой дроби соответственно имеем

$$|\Delta f| \le \Delta \sum_{m=1}^{n} N^m N^{-m+1} t^{m-1}(1-t)^{m-1} g_{n-m+1} \prod_{k=0}^{m-1} g_{n-k+1}^2 =$$

$$= N\Delta \sum_{m=1}^{n} t^{m-1}(1-t)^{m-1} Q_{n-m} Q_{n-m+1} Q_{n+1}^{-2}. \tag{3.5.24}$$

Из формулы (3.2.14) для Q_m следует неравенство

$$(1-t)^k Q_p \le Q_{p+k} \qquad k, p \in \mathbf{N}. \tag{3.5.25}$$

Применяя (3.5.25) к (3.5.24), получим оценку

$$|\Delta f| \le \frac{N\Delta}{(1-t)^2(1-2t)}.$$

Если же $t = \frac{1}{2}$, то, подставляя в (3.5.24) $Q_p = \frac{(p+1)}{2^p}$ (см. (3.2.15)), имеем

$$|\Delta f| \le \frac{8Nn(n+1)}{3(n+2)}\Delta. \ ■$$

Как видно из доказательства предыдущей теоремы для оценки абсолютной погрешности ВЦД важную роль играет формула (3.5.22). Впервые формула такого типа была установлена в работе [5]. Она выражала абсолютную погрешность ВЦД через относительные погрешности ее компонент и была использована для оценки относительной погрешности ВЦД (3.5.21), удовлетворяющей условиям (3.5.20). Н.А.Недашковский [91, 93, 122] использовал некоторые модификации этой формулы для оценки абсолютной погрешности ВЦД (3.5.5) с положительными и комплексными элементами, удовлетворяющими условиям несколько более сильным, чем (3.4.6). Используя эту же методику, Т.Н.Одноволова [97] выразила абсолютную погрешность интегральной цепной дроби через абсолютные погрешности ее компонент и применила эту формулу при исследовании вычислительной устойчивости интегральных цепных дробей, удовлетворяющих условиям, гарантирующим геометрическую скорость их сходимости.

ГЛАВА 4. НЕКОТОРЫЕ ТИПЫ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ВЕТВЯЩИХСЯ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ

§ 1. Равномерная сходимость функциональных ВЦД. Многомерный аналог теоремы Стилтьеса–Витали

Предметом наших обсуждений будут ВЦД вида

$$b_0(z)+\mathop{D}_{k=1}^{\infty}\sum_{i_k=1}\frac{a_{i(k)}(z)}{b_{i(k)}(z)} \tag{4.1.1}$$

или вида

$$a_0(z)\left(b_0(z)+\mathop{D}_{k=1}^{\infty}\sum_{i_k=1}\frac{a_{i(k)}(z)}{b_{i(k)}(z)}\right)^{-1}, \tag{4.1.2}$$

где $a_{i(k)}(z), b_{i(k)}(z), i(k)\in I$, – комплексные функции, определённые в области , $D\subset\mathbf{C}^n$, $z=(z_1,z_2,\dots,z_n)$, I определяется согласно (3.3.3).

Методика исследования сходимости числовых ВЦД в принципе переносится и на общие функциональные ветвящиеся цепные дроби. В качестве иллюстрации приведём некоторые достаточные признаки равномерной сходимости ВЦД (4.1.1) или (4.1.2).

Теорема 4.1.1 [20]. Пусть компонентами ВЦД (4.1.1) являются неотрицательные действительные функции $a_{i(k)}(z)\geq 0,\ b_{i(k)}(z)>0$, $k=1,2,\dots$, $i_p=\overline{1,N}$, $p=\overline{1,k}$, определённые в области $D\subset\mathbf{C}^n$.

Тогда дробь (4.1.1) равномерно сходится в области D, если существует константа $M>0$ такая, что для всех $z\in D, 1\leq i_1\leq N$, $\left|\frac{a_{i(1)}(z)}{b_{i(1)}(z)}\right|\leq M$,

и выполняется одно из двух условий: либо существует такой номер k, что все $a_{i(k)}(z)\equiv 0$ ($i_p=\overline{1,N}$, $p=\overline{1,k}$), либо расходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\delta_k, \tag{4.1.3}$$

где

$$\delta_k = \inf\left(\frac{b_{i(k)}(z) b_{(k+1)}(z)}{a_{i(k+1)}(z)} :\ i_p = \overline{1,N},\ p = \overline{1,k+1},\ z \in D \right),$$

причем те наборы индексов и те значения z, при которых $a_{i(k+1)}(z) = 0$, при минимизации не рассматриваются.

Справедлива оценка

$$|f_m(z) - f(z)| \le M \prod_{k=1}^{m} \frac{N}{N + \delta_k}, \qquad (4.1.4)$$

где $f(z)$ – значение бесконечной ВЦД (4.1.1), $f_m(z)$ – её m-я аппроксиманта.

Доказательство следует из теоремы 2.5.2.

Теорема 4.1.2 [20, 83]. Пусть элементами ВЦД (4.1.1) являются действительные функции, заданные в некоторой области $D \subset \mathbf{C}^n$ и удовлетворяющие условиям:

i) существует константа $M > 0$, что для всех $z \in D$ $\left| \frac{a_{i(1)}(z)}{b_{i(1)}(z)} \right| \le M$, $i_1 = \overline{1,N}$;

ii) $b_{i(k)}(z) \ne 0$ $(k = 1, 2, \ldots,\ i_p = \overline{1,N},\ p = \overline{1,k},\ z \in D)$;

iii) существует неотрицательные константа $t, 0 \le t \le \frac{1}{2}$, такая, что для всех $z \in D$

$$d_{i(k+1)}(z) + \frac{t(1-t)}{N} \ge 0, \quad k = 1, 2, \ldots,\ i_p = \overline{1,N},\ p = \overline{1,k}. \qquad (4.1.5)$$

Тогда ВЦД (4.1.1) равномерно сходится в области D, если выполняется одно из двух условий: либо либо существует такой номер k ,что все $a_{i(k)}(z) \equiv 0$, $i_p = \overline{1,N}$, $p = \overline{1,k}$, $z \in D$, либо расходится ряд (4.1.3), если $0 \le t < \frac{1}{2}$, либо

$$\lim_{m \to \infty} \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\delta_k}{m-k} = \infty, \qquad \text{если } t = \frac{1}{2}, \qquad (4.1.6)$$

где

$$\delta_k = \inf\left(\frac{1}{\left|d_{i(k+1)}(z)\right|} : i_p = \overline{1,N}, p = \overline{1,k+1},\ z \in D \right),\ d_{i(k+1)}(z) = \frac{a_{i(k+1)}(z)}{b_{i(k+1)}(z) b_{i(k)}(z)},$$

причем те наборы индексов и те значения z, при которых $a_{i(k+1)}(z) = 0$, при минимизации не рассматриваются.

Доказательство. Учитывая обозначения (1.3.2) для ВЦД (4.1.1), покажем, что при выполнении условий теоремы справедливы утверждения

$$Q_{i(k)}^{(s)} \neq 0,\ s = 1,2,\ldots,\ k = \overline{1,s},\ i_p = \overline{1,N},\ p = \overline{1,k}, \tag{4.1.7}$$

существуют действительные константы $\rho_k > 0$, $k = 1,2,\ldots,$ такие, что

$$\sum_{i_1=1}^{N} \frac{\left| a_{i(1)}(z) \right|}{\left| Q_{i(1)}^{(s)}(z) \right|} \leq \rho_1, \qquad s = 1,2,\ldots, \tag{4.1.8}$$

$$\sum_{i_{k+1}=1}^{N} \frac{\left| a_{i(k+1)}(z) \right|}{\left| Q_{i(k+1)}^{(s)}(z) \right|} \leq \rho_{k+1} \left| b_{i(k)} + \sum_{i_{k+1}=1}^{N} \frac{a_{i(k+1)}(z)}{Q_{i(k+1)}^{(s)}(z)} \right|, \tag{4.1.9}$$

$s = 2,3,\ldots,\ k = \overline{1, s-1},\ i_p = \overline{1,N},\ p = \overline{1,k}$.

. Тогда из формулы (1.3.4) следует, что для $n > m$

$$\left| f_n(z) - f_m(z) \right| \leq \prod_{k=1}^{m+1} \rho_k, \tag{4.1.10}$$

где $f_k(z)$ – k-я аппроксиманта дроби (4.1.1). Подобрав соответствующим образом числа ρ_k, $k = 1,2,\ldots,$ можно установить равномерную сходимость ВЦД (4.1.1).

Используя метод математической индукции по s при фиксированном k с учетом соотношения

$$\frac{Q_{i(k)}^{(s)}}{b_{i(k)}(z)} = 1 + \sum_{i_{k+1}=1}^{N} \frac{d_{i(k+1)}(z)}{\dfrac{Q_{i(k+1)}^{(s)}(z)}{b_{i(k+1)}(z)}},$$

легко доказать, что

$$\frac{Q_{i(k)}^{(s)}}{b_{i(k)}(z)} \geq \frac{1}{g_{s-k+1}} > 0,\ s = 1,2,\ldots,\ k = \overline{1,s},\ i_p = \overline{1,N},\ p = \overline{1,k}, \tag{4.1.11}$$

где g_k – k-я аппроксиманта непрерывной дроби (3.2.13). При доказательстве теоремы 3.2.1 было установлено, что $\{ g_s \}$ монотонно возрастает и $\lim\limits_{s\to\infty} g_s = \dfrac{1}{(1-t)}$. Из сказанного следует, что

$$\sum_{i_1=1}^{N} \frac{\left|a_{i(1)}(z)\right|}{\left|Q_{i(1)}^{(s)}(z)\right|} = \sum_{i_1=1}^{N} \frac{\left|a_{i(1)}(z)\right|}{\left|b_{i(1)}(z)\right|} \cdot \frac{b_{i(1)}(z)}{Q_{i(1)}^{(s)}(z)} \le MNg_s = \frac{MN}{1-t}.$$

Таким образом, $\rho_1 = \dfrac{MN}{(1-t)}$. Остальные ρ_k, $k = 2,3,...,$ ищем в виде $\rho_{k+1} = \dfrac{L}{L+\delta_k}$. Тогда неравенство (4.1.9) эквивалентно неравенству

$$\delta_k \sum_{i_{k+1}=1}^{N} \frac{\left| a_{i(k+1)}(z)\right|}{\left| Q_{i(k+1)}^{(s)}(z)\right|} \le L\left(\left| b_{i(k)} + \sum_{i_{k+1}=1}^{N} \frac{a_{i(k+1)}(z)}{Q_{i(k+1)}^{(s)}(z)}\right| - \sum_{i_{k+1}=1}^{N} \frac{\left| a_{i(k+1)}(z)\right|}{\left| Q_{i(k+1)}^{(s)}(z)\right|}\right). \quad (4.1.12)$$

Выражение, стоящее слева, оценим сверху, стоящее справа – снизу. Сравнивая полученные выражения, найдём формулу для L.

В случае, когда все $a_{i(k+1)}(z) \ne 0$, имеем

$$\delta_k \sum_{i_{k+1}=1}^{N} \frac{\left| a_{i(k+1)}(z)\right|}{\left| Q_{i(k+1)}^{(s)}(z)\right|} \le \sum_{i_{k+1}=1}^{N} \frac{\left| a_{i(k+1)}(z) b_{i(k+1)}(z) b_{i(k)}(z)\right|}{\left| Q_{i(k+1)}^{(s)}(z) a_{i(k+1)}(z)\right|} \le \left| b_{i(k)}(z)\right| \cdot N\, g_{s-k},$$

$$\left| b_{i(k)}(z) + \sum_{i_{k+1}=1}^{N} \frac{a_{i(k+1)}(z)}{Q_{i(k+1)}^{(s)}(z)}\right| - \sum_{i_{k+1}=1}^{N} \frac{\left| a_{i(k+1)}(z)\right|}{\left| Q_{i(k+1)}^{(s)}(z)\right|} \ge$$

$$\ge \left| b_{i(k)}(z)\right| \left| 1 + \sum_{i_{k+1}=1}^{N} \frac{d_{i(k+1)}(z) b_{i(k+1)}(z)}{Q_{i(k+1)}^{(s)}(z)}\right| - \sum_{i_{k+1}=1}^{N} \frac{\left| d_{i(k+1)}(z) b_{i(k+1)}(z)\right|}{\left| Q_{i(k+1)}^{(s)}(z)\right|} \ge$$

$$\ge \left| b_{i(k)}(z)\right| \left(1 - 2t(1-t) g_{s-k} \right),$$

откуда

$$L = \frac{N}{\dfrac{1}{g_{s-k}} - 2t(1-t)}. \quad (4.1.13)$$

Если же некоторые $a_{i(k+1)}(z)=0$, то, так как все $Q_{i(k+1)}^{(s)}\neq 0$, заменяем выражения $a_{i(k+1)}(z)\big/Q_{i(k+1)}^{(s)}$, где $a_{i(k+1)}(z)=0$, нулями и перегруппировывая оставшиеся отношения, получим (4.1.12), где вместо N необходимо взять $N_1\leq N$. Если же $N_1=0$, то суммы в (4.1.12) исчезают, и это неравенство остаётся справедливым при $L=0$. В общем случае в качестве L достаточно взять выражение (4.1.13).

Если же при некотором k все $a_{i(k+1)}(z)\equiv 0$ в области D, то, так как все $Q_{i(k+1)}^{(s)}\neq 0$, $s\geq k$, имеем $f_s(z)=f_{k-1}(z)$, $s=k,k+1,\ldots$, и сходимость ВЦД (4.1.1) в этом случае очевидна.

Пусть $0\leq t<\dfrac{1}{2}$, тогда, учитывая монотонное возрастание последовательности $\{g_k\}$ и что $\lim\limits_{k\to\infty} g_k=(1-t)^{-1}$, в качестве L достаточно взять число

$$L=\frac{N}{(1-2t)(1-t)}. \tag{4.1.14}$$

Равномерная сходимость ВЦД (4.1.1) в этом случае следует из оценки (4.1.10)

$$|\,f_n(z)-f_m(z)\,|\leq\frac{MN}{(1-t)}\prod_{k=1}^{m}\frac{L}{L+\delta_k},\quad n>m,$$

если учесть, что L определяется согласно (4.1.14), и ряд (4.1.13) расходится. Пусть $t=\dfrac{1}{2}$. Учитывая, что $g_m=Q_{m-1}/Q_m$, где Q_n определяется согласно (3.2.15), выражение (4.1.13) для L преобразуется к виду $L=L_{s,k}=2N(s-k)$. Неравенство (4.1.9) с учетом выбора ρ_{k+1} запишем в виде

$$\sum_{i_{k+1}=1}^{N}\frac{|\,a_{i(k+1)}(z)\,|}{\left|\,Q_{i(k)}^{(s)}Q_{i(k+1)}^{(s)}\,\right|}\leq\frac{2N(s-k)}{2N(s-k)+\delta_k}. \tag{4.1.15}$$

Применяя оценки (4.1.15) в формуле разности подходящих дробей (1.3.4), в случае $m=2r$ получим

$$|\,f_n(z)-f_m(z)|\leq 2MN\prod_{k=1}^{[m/2]}\frac{2N(m-2k+1)}{2N(m-2k+1)+\delta_{2k-1}}\prod_{k=1}^{[m/2]}\frac{2N(n-2k)}{2N(n-2k)+\delta_{2k}}, \tag{4.1.16}$$

если же $m = 2r - 1$, то получим

$$|\,f_n(z) - f_m(z)| \leq 2MN \prod_{k=1}^{[m/2]} \frac{2N(m-2k)}{2N(m-2k)+\delta_{2k}} \prod_{k=1}^{[(m+1)/2]} \frac{2N(n-2k-1)}{2N(n-2k-1)+\delta_{2k-1}}. \tag{4.1.17}$$

Условие (4.1.6) эквивалентно выполнению, по крайней мере, одного из двух условий:

$$\lim_{m\to+\infty} \sum_{k=1}^{[m/2]} \frac{\delta_{2k-1}}{m-2k+1} = \infty \tag{4.1.18}$$

или

$$\lim_{m\to+\infty} \sum_{k=1}^{[(m-1)/2]} \frac{\delta_{2k}}{m-2k} = \infty. \tag{4.1.19}$$

Пусть для определенности справедливо соотношение (4.1.18). Тогда при $m = 2r$ из оценки (4.1.16) в силу произвольности n сможем заключить, что ВЦД (4.1.1) равномерно сходится в области D. Действительно, если p и n – произвольные натуральные числа такие что, $n > p \geq m$, то

$$\left|\,f_n(z) - f_p(z)\right| \leq |\,f_n(z) - f_m(z)| + \left|\,f_p(z) - f_m(z)\right|. \blacksquare$$

Теорема 4.1.3. ВЦД (4.1.2), элементами которой являются комплексные функции, заданные в области $D \subset \mathbf{C}^n$, равномерно и абсолютно сходится в области D, если

i) $b_{i(k)}(z) \neq 0$, $k = 0,1,2,\ldots$, $i_0 = 0$, $i_p = \overline{1,N}$, $p = \overline{1,k}$, $z \in D$;

ii) существуют действительные константы $M > 0$ и $0 \leq t \leq 1/2$, что

$$\frac{|\; a_{i(k+1)}(z)\;|}{|\; b_{i(k)}(z) b_{i(k-1)}(z)\;|} \leq \alpha = \frac{t(1-t)}{N},\ k = 1,2,\ldots,\ i_0 = 0,\ i_p = \overline{1,N},\ p = \overline{1,k},\ z \in D,$$

$$\left|\frac{a_0(z)}{b_0(z)}\right| \leq M,\ \ z \in D.$$

Доказательство следует из оценок (3.2.10), (3.2.11), если предварительно ВЦД (4.1.2) привести к виду (3.2.8), используя эквивалентные преобразования (1.5.4), (1.5.15). ■

По аналогии с непрерывными дробями в следующих параграфах будут рассмотрены различные типы функциональных ВЦД. Здесь $a_{i(k)}(z)$, $b_{i(k)}(z)$ – полиномы не выше первой степени. При исследовании сходимости части из них будет применен многомерный аналог теоремы Стилтьеса-Витали. Сама теорема В.18 была использована ранее при доказательстве теорем 3.1.1, 3.1.2 и 3.3.1, 3.3.2.

Рассмотрим вопрос о многомерном аналоге теоремы Стилтьеса-Витали. Пусть D – некоторая область в $\mathbf{C}^n$. Будем говорить, что множество K компактно принадлежит области D ($K \subset\subset D$), если $\overline{K} \subset D$, где $\overline{K}$ – замыкание K. Рассмотрим последовательность $F = \{ f_m(z), z \in D, m = 1,2,\ldots \}$, голоморфных функций в D. Последовательность F называется равномерно ограниченной внутри D, если для произвольного множества K, компактно принадлежащего D, существует константа $M = M(K)$ такая, что $|f_m(z)| \le M$ для всех $z \in D$ и всех $f_m \in F$.

Семейство функций F называется равностепенно непрерывным внутри D, если для произвольного $K \subset\subset D$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon, K) > 0$, что $|f_m(z') - f_m(z'')| < \varepsilon$ для всех z', z'', таких, что $|z' - z''| < \delta$, $z', z'' \in K$ и всех $f_m \in F$, где $|z' - z''|^2 = \sum_{i=1}^{n} |z_i' - z_i''|^2$.

Семейство функций F называется компактным в D, если из последовательности функций этого семейства можно выделить подпоследовательность $\{f_{m_k}\}$, равномерно сходящуюся на множестве $K \subset\subset D$.

Используя методику доказательства теоремы Монтеля [87,142], имеем

Теорема 4.1.4 [20]. Если семейство функций

$F = \{ f_m(z), z \in D, m = 1,2,\ldots, \}$, голоморфных в $D \subset \mathbf{C}^n$, равномерно ограничено внутри D, то и семейства функций

$$F_i = \left\{ \frac{\partial f_m(z)}{\partial z_i},\ z \in D,\ m = 1, 2, \ldots, \right\}, \quad i = \overline{1,n},$$

равномерно ограничены внутри D.

Доказательство. Пусть $U = \{ z : |z_i - a_i| < r_i,\ i = \overline{1,n} \}$ – произвольный поликруг такой, что $U \subset\subset D$. Построим поликруг $V = \{ z : |z_i - a_i| < R_i,\ i = \overline{1,n} \}$ такой, что $V \subset\subset D$ и $R_i > r_i$, $i = \overline{1,n}$. Согласно интегральной формуле Коши для произвольных $z \in V$ и $f_m \in F$ имеем

$$\frac{\partial f_m(z)}{\partial z_i} = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\Gamma}\!\ldots\!\int \frac{f_m(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n)\, d\xi_1 \ldots d\xi_n}{(z_i - \xi_i) \prod\limits_{k=1}^{n} (z_k - \xi_k)}, \ i = \overline{1,n},$$

где Γ – остов поликруга V. Пусть $z \in U$. Так как $|f_m(\xi)| \le M(V)$, то

$$\left| \frac{\partial f_m(z)}{\partial z_i} \right| \le \frac{M(V) \prod\limits_{k=1}^{n} 2\pi R_k}{(2\pi)^n (R_i - r_i) \prod\limits_{k=1}^{n} (R_k - r_k)} = M_1(U).$$

Следовательно, доказана равномерная ограниченность F_i в поликругах. Пусть $K \subset\subset D$. Покроем K поликругами. Из этого покрытия выделим конечное подпокрытие $\{U_\nu\}_{\nu=1}^{s}$. Пусть $M_i(K) = \max\left(M_i(U_\nu) : \nu = \overline{1,s} \right)$. Тогда для всех $z \in K$ и произвольной $f_m \in F$ имеем

$$\left| \frac{\partial f_m(z)}{\partial z_i} \right| \le M_i(K), \quad i = \overline{1,n}. \ \blacksquare$$

Теорема 4.1.5 [20]. Если семейство функций F, голоморфных в $D \subset \mathbf{C}^n$, равномерно ограничено внутри D, то оно также и равностепенно непрерывно внутри D.

Доказательство. Пусть $K \subset\subset D$. Обозначим через 2ρ расстояние между замкнутыми множествами $\overline{K}$ и ∂D, т.е.

$2\rho = \inf\{ |z - \xi| : z \in \overline{K},\ \xi \in \partial D \}$, а через $K^{(\rho)} = \bigcup\limits_{z_0 \in K} \{ z : |z - z_0| < \rho \}$.

Очевидно, $K^{(\rho)} \subset\subset D$. Из теоремы 4.1.4 следует, что существует константа M, что для всех $z \in K^{(\rho)}$ и произвольной $f_m \in F$ $\left|\frac{\partial f_m}{\partial z_i}\right| \le M, \quad i = \overline{1, n}.$

Пусть z', z'' – произвольные точки из K такие, что $|z' - z''| < \rho$. Соединим их отрезком прямой. Если $z \in [z', z'']$, то, очевидно, $z \in K^{(\rho)}$. Так как

$\int\limits_{[z',z'']} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_m}{\partial z_i} dz_i = f_m(z'') - f_m(z')$, то

$$|f_m(z'') - f_m(z')| \le \int\limits_{[z',z'']} \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial f_m}{\partial z_i}\right| |dz_i| \le M \sum_{i=1}^{n} |z_i'' - z_i'|.$$

Применяя неравенство Буняковского-Шварца к последней сумме, получим

$$|f_m(z'') - f_m(z')| \le M\sqrt{n} |z_i'' - z_i'|.$$

Если $\delta = \min\left(\frac{\varepsilon}{M\sqrt{n}}, \rho\right)$, то отсюда следует равностепенная непрерывность.

■

Теорема 4.1.6 [20]. Если семейство функций F, голоморфных в $D \subset \mathbf{C}^n$, равномерно ограничено внутри D, то оно компактно в D.

Доказательство. Докажем сначала, что если последовательность $f_m(z)$ сходится в каждой точке некоторого множества $E \subset D$, всюду плотного в D, то она равномерно сходится на каждом $K \subset\subset D$. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и множество $K \subset\subset D$. Используя равностепенную непрерывность семейства F, выберем разбиение D на гиперкубы с гранями, параллельными координатным плоскостями и настолько мелкими, чтобы для произвольных $z', z'' \in K$, $z', z'' \in q_p$, где q_p – один из пронумерованных гиперкубов, выполнялись условия

$$|f_m(z'') - f_m(z')| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad m = 1, 2, \ldots.$$

Множество K покроем конечным числом гиперкубов q_p, $p=\overline{1,s}$. Так как E всюду плотно в D, то в каждом q_p найдется точка $z^{(p)} \in E$. Так как $f_k(z)$ сходится на E, то существует такое число N, что $\left|f_r\left(z^{(p)}\right)-f_n\left(z^{(p)}\right)\right|<\frac{\varepsilon}{3}$ для всех $r, n>N$ и каждого $z^{(p)} \in E$, $p=\overline{1,s}$. Пусть z – произвольная точка из K. Существует точка $z^{(p)} \in E$, которая лежит в том же гиперкубе, что и z. Тогда для всех $r, n>N$ имеем

$$|f_r(z)-f_n(z)| \le \left|f_r(z)-f_r\left(z^{(p)}\right)\right|+\left|f_r\left(z^{(p)}\right)-f_n\left(z^{(p)}\right)\right|+\left|f_n\left(z^{(p)}\right)-f_n(z)\right|<\varepsilon .$$

Отсюда следует, что последовательность $f_m(z)$ равномерно сходится на K.

Теперь докажем, что из произвольной последовательности $f_m \in F$ можно выделить подпоследовательность, которая сходится в каждой точке множества $E \subset D$, всюду плотного в D. В качестве E выберем множество точек $z=(z_1, z_2, \ldots, z_n) \in D$, $z_k=x_k+i y_k$, $k=\overline{1,n}$, таких, что x_k, y_k – рациональные числа. Пусть $E=\{w_i\}_1^{\infty}$. Очевидно, что E счетно и всюду плотно в D. Числовая последовательность $f_m(w_1)$ ограничена, так как $w_1 \in D$. Из нее выделим сходящуюся подпоследовательность $f_{k1}(z)=f_{m_k}(z)$, $k=1,2,\ldots$. Числовая последовательность $f_{k1}(w_2)$ ограничена. Из нее выделим сходящуюся подпоследовательность $f_{k2}(z)=f_{n_k 1}(z)$. Последовательность $f_{k2}(z)$ сходится, по крайней мере, в точках w_1 и w_2 и т.д. Построим последовательность функций $f_{k,n}(z)$, $k, n=1,2,\ldots$. Диагональная последовательность $f_{n,n}(z)$ сходится в каждой точке $w_k \in E$, так как по построению все члены этой последовательности, начиная с k-го, сходятся в точке w_k. ■

Замечание 4.1.1. В обычной формулировке, как известно, одно из важных свойств голоморфных функций – теорема единственности не переносится на многомерный случай. Например, функция $f(z)=z_n$ обращается в нуль в $(2n-2)$-мерном множестве $\left\{ z \in \mathbf{C}^n : z_n = 0 \right\}$, но не равна нулю тождественно.

Однако верно такое утверждение [143]. Пусть f – голоморфная функция в области $D \subset \mathbf{C}^n$, $z_0 \in D$, тогда $f(z) \equiv 0$ для всех $z \in D$, если $f(z) \equiv 0$ в некоторой $2n$-мерной окрестности точки z_0 или $f(z) \equiv 0$ в некоторой n-мерной действительной или n-мерной мнимой окрестности точки z_0, т.е. на множествах

$\left\{ z_k : x_k + i\, y_k \in D \subset \mathbf{C}^n, |\, x - x_0 \,| < r,\ y = y_0 \right\}$ или

$\left\{ z_k : x_k + i\, y_k \in D \subset \mathbf{C}^n,\ x = x_0, |\, y - y_0 \,| < r \right\}$ соответственно.

Теорема 4.1.7 [20]. Пусть $F = \left\{ f_m(z), z \in D, m = 1,2,... \right\}$ – последовательность голоморфных функций в области $D \subset \mathbf{C}^n$, равномерно ограниченных внутри D.

Если $f_m(z)$ сходится в каждой точке множества $\Delta \subset D$, являющегося $2n$-мерной окрестностью, n-мерной действительной или n-мерной мнимой окрестностью точки $z_0 \in D$, то $f_m(z)$ сходится равномерно на произвольном множестве $K \subset\subset D$ к голоморфной функции в D.

Доказательство. Из предыдущей теоремы следует, что из последовательности $f_m(z)$ можно выделить подпоследовательность $f_{m_k}(z)$, равномерно сходящуюся на произвольном множестве $K \subset\subset D$. Согласно многомерному аналогу теоремы Вейерштрасса [143], $f(z) = \lim\limits_{k \to \infty} f_{m_k}(z)$ является голоморфной функцией в D. Для произвольной точки $z \in \Delta$ в силу условий теоремы имеем $f(z) = \lim\limits_{k \to \infty} f_m(z)$.

Пусть S – произвольное множество такое, что $S \subset\subset D$ и $S \supset K \cup \Delta$. Введем обозначение $\delta = \overline{\lim\limits_{p \to \infty}} \delta_p$, $\delta_p = \sup\left\{ \left| f_p(z) - f(z) \right|, z \in S \right\}$. Если мы докажем, что $\delta = 0$, то сможем заключить, что $f_m(z)$ равномерно сходится к

$f(z)$. Пусть $p_1 < p_2 < \ldots$ – последовательность индексов таких, что $\delta = \lim\limits_{i\to\infty} \delta_{p_i}$. Из последовательности $f_{p_i}(z)$ выделим подпоследовательность, равномерно сходящуюся на каждом $K' \subset\subset D$, в частности, и на S, к аналитической функции в D. Пусть $f^*(z)$ – предел этой последовательности. Так как $f^*(z) = f(z)$ для произвольного $z \in \Delta$, то $f^*(z) = f(z)$ для произвольного $z \in D$. Таким образом, $\delta = 0$, так как

$$\delta = \lim_{i\to\infty} \delta_{p_i} = \sup\left(\left| f^*(z) - f(z) \right|, z \in S \right) = 0. \blacksquare$$

§ 2. Положительно определенные ветвящиеся цепные дроби. Многомерные аналоги J-дробей

По аналогии с одномерным случаем (В.23) рассмотрим ВЦД вида

$$\left(b_0 + z_0 + \mathop{D}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{-a_{i(k)}^2}{b_{i(k)} + z_{i(k)}} \right)^{-1}, \tag{4.2.1}$$

где $b_0, b_{i(k)}, a_{i(k)}$ – комплексные числа, $z_{i(k)}$ – комплексные переменные. Пусть $\left(z = z_0, z_1, z_2, ..., z_{i(k)}, ...\right)$ и $f_n(z), A_n(z), B_n(z)$ обозначают соответственно n-ю аппроксиманту ВЦД (4.2.1), ее числитель и знаменатель.

Пусть $n \in \mathbf{N}$ – фиксировано и $X = \left(x_0, x_1, ..., x_N, ..., x_{i(n)}, ..., x_{\underbrace{NN...N}_{n}} \right)$ – вектор из $\mathbf{C}^s$, элементы которого упорядочены согласно (1.1.14), $s = N + N^2 + ... + N^n$. Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений

$$D_{0s} X = 0, \tag{4.2.2}$$

где D_{0s} – матрица вида (1.2.29), составленная из элементов ВЦД (4.2.1). Каждое p-е уравнение системы (4.2.2) умножим на $\bar{x}_{j(m)}$, где индексы $j_1, j_2, ..., j_m$ определяются из разложения числа p по алгоритму (1.2.30), $\bar{x}_{j(m)} = \bar{x}_0$, если $p = 0$. Просуммировав все уравнения, получим

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{i_1, i_2, ..., i_k = 1}^{N} \left(b_{i(k)} + z_{i(k)}\right) \left| x_{i(k)} \right|^2 - \sum_{k=1}^{n} \sum_{i_1, i_2, ..., i_k = 1}^{N} a_{i(k)} \left(x_{i(k)} \bar{x}_{i(k-1)} - \bar{x}_{i(k)} x_{i(k-1)} \right) = 0, \tag{4.2.3}$$

где $x_{i(0)} = x_0$. Положим

$$\begin{cases} \beta_{i(k)} = \operatorname{Im} b_{i(k)}, \ \ y_{i(k)} = \operatorname{Im} z_{i(k)}, \ \ k = 0, 1, 2, ..., \ \ i_0 = 0, \ \ i_p = \overline{1, N}, \ \ p = \overline{1, k}, \\ \alpha_{i(k)} = \operatorname{Im} a_{i(k)}, \ \ k = 1, 2, ..., \ \ i_p = \overline{1, N}, \ \ p = \overline{1, k}. \end{cases} \tag{4.2.4}$$

Предположим, что при выполнении условий

$$y_{i(k)} > 0, \quad i(k) \in I,\ k \le n, \quad \sum_{k=0}^{n} \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_k = 1}^{N} \left| x_{i(k)} \right|^2 > 0, \tag{4.2.5}$$

где I определяется согласно (3.3.3), выполняется неравенство

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_k = 1}^{N} \left(\beta_{i(k)} + y_{i(k)}\right) \left| x_{i(k)} \right|^2 - \sum_{k=0}^{n} \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_k = 1}^{N} \alpha_{i(k)} \left(x_{i(k)} \bar{x}_{i(k-1)} + \bar{x}_{i(k)} x_{i(k-1)} \right) = 0. \tag{4.2.6}$$

Лемма 4.2.1.[19,20] При выполнении условий (4.2.5) неравенство (4.2.6) эквивалентно неотрицательной определенности действительной квадратичной формы

$$\Phi(\xi) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_k = 1}^{N} \beta_{i(k)} \xi_{i(k)}^2 - 2 \sum_{k=1}^{n} \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_k = 1}^{N} \alpha_{i(k)} \xi_{i(k)} \xi_{i(k-1)} \ge 0, \tag{4.2.7}$$

где $\xi_{i(0)} = \xi_0$, $\xi_{i(k)}$ – произвольные действительные числа.

Доказательство. Пусть выполняется (4.2.6) для произвольных комплексных чисел $x_{i(k)}$, которые удовлетворяют соотношениям (4.2.5). В частности, неравенство (4.2.6) выполняется и тогда, $x_{i(k)} = \xi_{i(k)} \in \mathbf{R}$. Переходя в этом случае к пределу в обеих частях неравенства (4.2.6) при $y_{i(k)} \to 0$, $i(k) \in I$, $k \le n$, получим (4.2.7).

Пусть выполняется неравенство (4.2.7) и пусть $x_{i(k)} = u_{i(k)} + i v_{i(k)}$, $i(k) \in I$, $k \le n$. Тогда левую часть неравенства (4.2.6) можно записать в виде

$$\Phi(u) + \Phi(v) + \sum_{k=0}^{n} \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_k = 1}^{N} y_{i(k)} \left| x_{i(k)} \right|^2 = 0, \tag{4.2.8}$$

откуда в силу условий (4.2.5) следует справедливость (4.2.6). ■

Ветвящаяся цепная дробь (4.2.1) называется положительно определенной, если для всех $n \in \mathbf{N}$ и $\xi_{i(k)} \in \mathbf{R}$, $i(k) \in I$, неотрицательно определены квадратические формы (4.2.7).

Теорема 4.2.1 [14, 20]. Если ВЦД (4.2.1) положительно определена, тогда все $B_n(z) \neq 0$ областях $\operatorname{Im} z_{i(k)} > 0$, $i(k) \in I$, $k \leq n$, где I определяется согласно (3.3.3).

Доказательство. В следствии 1.2.2 установлено, что $B_n(z) = \det D_{0s}$, где $s = N + N^2 + \ldots + N^n$. Определитель $\det D_{0s} \neq 0$, если система (4.2.2) имеет только нулевое решение. Равенство (4.2.3) является следствием системы уравнений (4.2.2). Если мы покажем, что (4.2.3) в условиях теоремы выполняется тогда и только тогда, когда все $x_{i(k)} = 0$, $i(k) \in I$, $k \leq n$, то, очевидно, что система (4.2.2) имеет только тривиальное решение. Если выполняется (4.2.7), то в силу леммы 4.2.1 выполняется (4.2.6) при каждом $n \in \mathbf{N}$. Следовательно, равенство (4.2.3) может выполняться только тогда, когда $x_{i(k)} = 0$, $i(k) \in I$, $k \leq n$.■

Теорема 4.2.2 [14,19]. ВЦД (4.2.1) положительно определена, если выполняются условия:

i) $\beta_{i(k)} \geq 0$, $i(k) \in I$;

ii) существуют такие действительные числа $0 \leq g_{(k)} \leq 1$, $i(k) \in I$, что

$$\alpha_{i(k)}^2 = N^{-1} \beta_{i(k-1)} \beta_{i(k)} \left(1 - g_{i(k-1)}\right) g_{i(k)}, \tag{4.2.9}$$

где I определено согласно (3.3.3), $\alpha_{i(k)}, \beta_{i(k)}$ – согласно (4.2.4), $g_0 = 0$.

Доказательство следует из того, что условие (4.2.7) можно записать в виде

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_k = 1}^{N} \left(\left(\frac{1 - g_{i(k-1)}}{N} \beta_{i(k-1)} \right)^{1/2} \xi_{i(k-1)} \pm \left(g_{i(k)} \beta_{i(k)} \right)^{1/2} \xi_{i(k)} \right)^2 +$$
$$+ \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_k = 1}^{N} \left(1 - g_{i(n)}\right) \beta_{i(n)} \xi_{i(n)}^2 \geq 0,$$

где " + " берем тогда, когда $\alpha_{i(k)} \leq 0$ и " - ", когда $\alpha_{i(k)} > 0$.■

Замечание 4.2.1. Путем подбора чисел $\xi_{i(k)}$, $i(k) \in I, k \leq n$, легко проверить, что условие ***i)*** является также и необходимым для того, чтобы

ВЦД (4.2.1) была положительно определенной. В случав $N=1$ условия ***i)*** и ***ii)*** являются необходимыми и достаточными.

Теорема 4.2.3 [20]. Если при некотором $n \in \mathbf{N}$ квадратическая форма (4.2.7) неотрицательно определена, то квадратическая форма

$$\Phi'(\xi)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{i_1,i_2,\ldots,i_k=1}^{N}\beta_{i(k)}\xi_{i(k)}^2-2\sum_{k=1}^{n}\sum_{i_1,i_2,\ldots,i_k=1}^{N}\alpha'_{i(k)}\xi_{i(k)}\xi_{i(k-1)}, \qquad (4.2.10)$$

где $\alpha'_{i(k)}\in\mathbf{R}$, такие, что $\left|\alpha'_{i(k)}\right|\le\left|\alpha_{i(k)}\right|$, $k=\overline{1,n}$, $i_p=\overline{1,N}$, $p=\overline{1,k}$, также является неотрицательно определенной.

Доказательство. Фиксируем произвольный набор действительных чисел $\xi_{i(k)}$, $i(k)\in I, k\le n$. В пространстве $\mathbf{R}^s$, где $s=N+N^2+\ldots+N^n$, рассмотрим дискретное множество точек

$$\Omega=\left(\eta:\ \eta=\left(\eta_0,\eta_1,\eta_{2,}\ldots,\eta_{i(k)},\ldots,\eta_{\underbrace{NN\ldots N}_{k}}\right)\right),\ \ \eta_{i(k)}=\pm\xi_{i(k)}.$$

Пусть $\min\left(\Phi(\eta):\eta\in\Omega\right)=\Phi\left(\eta^*\right)$, $\eta^*\in\Omega$. Методом от противного покажем, что для произвольного набора индексов $i_1,i_2,\ldots,i_p$, $1\le i_p\le N$, $k=\overline{1,p}$, $p\le n$, $\alpha_{i(p)}\eta^*_{i(p)}\eta^*_{i(p-1)}\ge 0$. Пусть при некотором мультииндексе $j(p)$ имеем $\alpha_{j(p)}\eta^*_{j(p)}\eta^*_{j(p-1)}<0$. Определим вектор $\eta'\in\Omega$ следующим образом: $\eta'_{j(p)i_{p+1}\ldots i_r}=\eta^*_{j(p)i_{p+1}\ldots i_r}$, $r=\overline{p+1,n}$, $i_r=\overline{1,N}$, $\eta'_{j(p)}=+\eta^*_{j(p)}$, все остальные $\eta'_{i(k)}=-\eta^*_{i(k)}$. Легко подсчитать, что тогда $\Phi(\eta')=\Phi\left(\eta^*\right)+4\alpha_{j(p)}\eta^*_{j(p)}\eta^*_{j(p-1)}$, что противоречит минимальности формы $\Phi\left(\eta^*\right)$.

Рассмотрим квадратическую форму

$$\overline{\Phi}(\xi)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{i_1,i_2,\ldots,i_k=1}^{N}\beta_{i(k)}\xi_{i(k)}^2-2\sum_{k=1}^{n}\sum_{i_1,i_2,\ldots,i_k=1}^{N}\left|\alpha_{i(k)}\right|\xi_{i(k)}\xi_{i(k-1)}. \qquad (4.2.11)$$

Нетрудно проверить, что

$$\min\left(\Phi(\eta):\ \eta\in\Omega\right)=\min\left(\overline{\Phi}(\eta):\eta\in\Omega\right)=\overline{\Phi}(\overline{\eta}),\quad \overline{\eta}\in\Omega.$$

Если, например, при некотором наборе индексов $\alpha_{j(p)}<0$, то

$$\alpha_{j(p)}\eta^*_{j(p)}\eta^*_{j(p-1)} = \left|\alpha_{j(p)}\right|\eta^*_{j(p)}\left(-\eta^*_{j(p-1)}\right).$$

Далее, изменяя знаки в $\eta^*_{i(k)}$ по алгоритму предложенному выше, т.е. заменяя $\eta^*_{i(k)}$ на $\eta'_{(k)}$, убеждаемся в том, что форма (4.2.11) принимает то же значение. Анало-гичную процедуру проделаем с каждым $\alpha_{i(k)} < 0$. Введем по аналогии с (4.2.11) квадратическую форму $\overline{\Phi}'(\xi)$, где $\Phi'(\xi)$ определяется согласно (4.2.10). Пусть

$$\min\left(\Phi'(\eta): \eta \in \Omega\right) = \min\left(\overline{\Phi}'(\eta): \eta \in \Omega\right) = \overline{\Phi}'(\tilde{\eta}),\ \tilde{\eta} \in \Omega .$$

Так как $\left|\alpha_{i(k)}\right|\overline{\eta}_{i(k)}\overline{\eta}_{i(k-1)} \geq 0,$ $\left|\alpha'_{i(k)}\right|\tilde{\eta}_{i(k)}\tilde{\eta}_{i(k-1)} \geq 0$ и $\overline{\eta}_{i(k)} = \pm\xi_{i(k)}$, $\tilde{\eta}_{i(k)} = \pm\xi_{i(k)}$, то $\overline{\eta}_{i(k)}\overline{\eta}_{i(k-1)} = \tilde{\eta}_{i(k)}\tilde{\eta}_{i(k-1)}$ при всевозможных наборах индексов. Следовательно,

$$\Phi'(\xi) \geq \min\left(\overline{\Phi}'(\eta): \eta \in \Omega\right) = \overline{\Phi}'(\tilde{\eta}) \geq \overline{\Phi}(\tilde{\eta}) = \min\left(\Phi(\eta): \eta \in \Omega\right). \blacksquare$$

Замечание 4.2.2. Условие (4.2.9) теоремы 4.2.2 можно теперь заменить условием

$$\alpha^2_{i(k)} \leq N^{-1}\beta_{i(k-1)}\beta_{i(k)}\left(1 - g_{i(k-1)}\right)g_{i(k)} \qquad (4.2.12)$$

при тех же ограничениях относительно $g_{i(k)}$.

Рассмотрим некоторые примере положительно определенных ВЦД.

Пример 4.2.1. Рассмотрим ВЦД (3.2.8) с комплексными частными числителями. Используя эквивалентные преобразования (1.5.4), где $\rho_{i(k)} = i,\ k \geq 1$, приведём её к виду

$$i\left(i + \underset{k=1}{\overset{\infty}{D}} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{-c_{i(k)}}{i}\right)^{-1}. \qquad - \qquad (4.2.13)$$

Пусть $c_{i(k)} = a^2_{i(k)}$. Так как $\left|z^2\right| - \operatorname{Re}\left(z^2\right) = 2\left(\operatorname{Im} z\right)^2$, то условие (4.2.12) в нашем случае запишется так

$$\left|c_{i(k)}\right| - \operatorname{Re} c_{i(k)} \leq 2N^{-1}\left(1 - g_{i(k-1)}\right)g_{i(k)}.$$

Положив $g_{i(k)} = \frac{1}{2}$, $k = 0,1,\ldots$, $i_0 = 0$, $i_p = \overline{1,N}$, $p = \overline{1,k}$, приходим к рассмотренным ранее параболическим областям.

Пример 4.2.2. Пусть частные числители ВЦД (3.2.8) являются действительными отрицательными числами. Тогда, если положить в (4.2.13) $c_{i(k)} = \left(id_{i(k)}\right)^2$, то условие (4.2.9) в нашем случае запишется в виде $c_{i(k)} = -N^{-1}\left(1 - g_{i(k-1)}\right)g_{i(k)}$. Мы приходим к ветвящимся цепным дробям, рассматриваемых в § 2 гл. 3.

Лемма 4.2.2[19,20]. Пусть

$$t = t_{i(p)}\left(w_{i(p)}^{(1)}\right) = b_{i(p)} + z_{i(p)} - \sum_{i_{p+1}=1}^{N} \frac{a_{i(p+1)}^2}{w_{i(p+1)}}, \ i(p) \in I \ - \qquad (4.2.14)$$

некоторая совокупность многомерных дробно-линейных отображений и пусть $y_0 = \operatorname{Im} z_0 > 0$, $y_{i(k)} = \operatorname{Im} z_{i(k)} \geq 0$, $\beta_{i(k)} = \operatorname{Im} b_{i(k)} \geq 0$, для $\alpha_{i(k)} = \operatorname{Im} a_{i(k)}$ выполняются условия (4.2.12), где $0 \leq g_{i(k)} \leq 1$, $i(k) \in I$, I определяется согласно (3.3.3). Если

$$\operatorname{Im} w_{i(p+1)} \geq \beta_{i(p+1)} g_{i(p+1)}, \qquad i_k = \overline{1,N}, \ k = \overline{1,p+1}, \qquad (4.2.15)$$

то

$$\operatorname{Im} t \geq \beta_{i(p)} g_{i(p)} + y_{i(p)} \,. \qquad (4.2.16)$$

Доказательство. Пусть все $y_{i(k)} > 0$, $i(k) \in I$, и $M = N^{-1}\left(1 - g_{i(p)}\right)\beta_{i(p)} + N^{-1} g_{i(p)}$. Тогда, учитывая условия леммы, имеем $\operatorname{Im} w_{i(p+1)} \geq \frac{\alpha_{i(p+1)}^2}{M}$. Поэтому $\left| w_{i(p+1)} + \frac{i a_{i(p+1)}^2}{2M} \right| \geq \frac{1}{2M} \left| a_{i(p+1)}^2 \right|$ или

$$\left| \frac{w_{i(p+1)}}{a_{i(p+1)}^2} + \frac{i}{2M} \right| \geq \frac{1}{2M}. \qquad (4.2.17)$$

Рассмотрев образ (4.2.17) при отображении $w = z^{-1}$, получим

$$\operatorname{Im} \frac{a_{i(p+1)}^2}{w_{i(p+1)}} \leq M.$$

Поэтому

$$\operatorname{Im} t_{i(p)} = \beta_{i(p)} + y_{i(p)} - \sum_{i_{p+1}=1}^{N} \operatorname{Im} \frac{a_{i(p+1)}^2}{w_{i(p+1)}} \geq g_{i(p)} \beta_{i(p)}.$$

Переходя. в последнем неравенстве к пределу при $y_{i(p)} \to 0$, получим

$$\beta_{i(p)} - \sum_{i_{p+1}=1}^{N} \operatorname{Im} \frac{a_{i(p+1)}^2}{w_{i(p+1)}} \geq g_{i(p)} \beta_{i(p)}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{Im} t_{i(p)} = \beta_{i(p)} + y_{i(p)} - \sum_{i_{p+1}=1}^{N} \operatorname{Im} \frac{a_{i(p+1)}^2}{w_{i(p+1)}} \geq y_{i(p)} + g_{i(p)} \beta_{i(p)}. \ \blacksquare$$

Легко проверить, что образом полуплоскости $\operatorname{Im} w \geq y_0 + g_0 \beta_0 > 0$ при отображении $t_{-1}(w) = w^{-1}$ является круг

$$K_{-1} : \left| w + \frac{i}{2(y_0 + g_0 \beta_0)} \right| \leq \frac{1}{2(y_0 + g_0 \beta_0)}. \qquad (4.2.18)$$

Обозначим K_p образ области $\operatorname{Im} w_{i(p+1)} \geq \beta_{i(p+1)} g_{i(p+1)}$, $i_k = \overline{1, N}$, $k = \overline{1, p+1}$, при отображении

$$T_p\left(w^{(p+1)}\right) = \cfrac{1}{b_0 + z_0 - \sum\limits_{i_1=1}^{N} \cfrac{a_{i(1)}^2}{b_{i(1)} + z_{i(1)} - \ddots - \sum\limits_{i_p=1}^{N} \cfrac{a_{i(p)}^2}{b_{i(p)} + z_{i(p)} - \sum\limits_{i_{p+1}=1}^{N} \cfrac{a_{i(p+1)}^2}{w_{i(p+1)}}}}}, \qquad (4.2.19)$$

где $w^{(p+1)}$ определяется согласно (1.1.3 б). При выполнении условий леммы 4.2.2, учитывая (4.2.16), имеем

$$K_{-1} \supset K_0 \supset K_1 \supset K_2 \supset \ldots . \qquad (4.2.20)$$

Так как $T_p(\infty) = f_p(z)$, то $f_p(z) \in K_p$, $p = 0, 1, 2, \ldots$.

Т е о р е м а 4.2.4 [20]. Если для ВЦД (4.2.1) выполняются условия (4.2.12), где

$$\beta_{i(k)} \geq 0, \ y_0 + g_0 \beta_0 > 0, \ y_{i(k)} > 0, \ k = 1, 2, \ldots, \ i_p = \overline{1, N}, \ p = \overline{1, k}, \qquad (4.2.21)$$

то ее p-е аппроксиманты $f_p(z)$ удовлетворяют соотношениям

$$\operatorname{Im} f_p(z) \le 0, \quad \left| f_p(z) \right| \le \left(y_0 + g_0 \beta_0 \right)^{-1}, \quad p = 1, 2, \dots \ . \qquad (4.2.22)$$

Теорема 4.2.5[20]. Если для ВЦД (4.2.1) выполняется условие (4.2.12), где

$$g_{i(k)} \beta_{i(k)} > 0, \quad i(k) \in I, \qquad (4.2.23)$$

то n-е знаменатели $B_n(z) \ne 0$, $n = 1, 2, \dots$, в области

$$\operatorname{Im}\ z_{i(k)} \ge 0, \quad i(k) \in I, \qquad (4.2.24)$$

где I определено согласно (3.3.3).

Доказательство. Фиксируем произвольное $n \in \mathbf{N}$. Покажем, что квадратическая форма (4.2.7) $\Phi(\xi) \ge 0$, если не все $\xi_{(k)} = 0$, $i(k) \in I$, $k \le n$. Пусть $\alpha'_{i(k)} = \left(N^{-1} \beta_{i(k-1)} \beta_{i(k)} \left(1 - g_{i(k-1)}\right) g_{i(k)} \right)^{1/2}$, $i(k) \in I$, $k \le n$. Рассмотрим квадратическую форму (4.2.10) и запишем ее в виде

$$\Phi'(\xi) = g_0 \beta_0 \xi_0^2 + \sum_{i_1 = 1}^{N} \left(\left(\frac{1 - g_0}{N} \beta_0 \right)^{1/2} \xi_0 - \left(g_{i(1)} \beta_{i(1)} \right)^{1/2} \xi_{i(1)} \right)^2 +$$

$$+ \sum_{i_1, i_2 = 1}^{N} \left(\left(\frac{1 - g_{i(1)}}{N} \beta_{i(1)} \right)^{1/2} \xi_{i(1)} - \left(g_{i(2)} \beta_{i(2)} \right)^{1/2} \xi_{i(2)} \right)^2 + \dots +$$

$$+ \sum_{i_1, i_2, \ , i_n = 1}^{N} \left(\left(\frac{1 - g_{i(n-1)}}{N} \beta_{i(n-1)} \right)^{1/2} \xi_{i(n-1)} - \left(g_{i(n)} \beta_{i(n)} \right)^{1/2} \xi_{i(n)} \right)^2 +$$

$$+ \sum_{i_1, i_2, \ , i_n = 1}^{N} \left(1 - g_{i(n)} \right) \beta_{i(n)} \xi_{i(n)}^2 .$$

Отсюда, учитывая (4.2.23) и то, что не все $\xi_{i(k)} = 0$, $i(k) \in I$, $k \le n$, имеем $\Phi'(\xi) > 0$, так как, если $\xi_{i(k)}$ – первая отличная от нуля компонента вектора $\xi = \left(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{\underbrace{N N \dots N}_{n}} \right) \in \mathbf{R}^s$, $s = N + N^2 + \dots + N^n$, то выражение

$$\left(\left(\frac{1 - g_{i(k-1)}}{N} \beta_{i(k-1)} \right)^{1/2} \xi_{i(k-1)} - \left(\beta_{i(k)} g_{i(k)} \right)^{1/2} \xi_{i(k)} \right)^2 > 0 .$$

Повторяя конец доказательства теоремы 4.2.3 с учетом принятых там обозначений, имеем

$$\Phi(\xi) \geq \min\left(\Phi(\eta):\ \eta \in \Omega\right) = \min\left(\overline{\Phi}(\eta):\ \eta \in \Omega\right) = \overline{\Phi}(\overline{\eta}) \geq \overline{\Phi}'(\overline{\eta}) > 0 .$$

Пусть выполняются условия (4.2.24). В силу теоремы 4.2.1 остается доказать, что справедливо неравенство (4.2.6), если не все $x_{i(k)} = 0$, $i(k) \in I$, $k \leq n$. Последнее следует из представления левой части (4.2.6) в виде (4.2.8).

По аналогии с непрерывными дробями (В.23) ВЦД вида

$$\left(b_0 + \varsigma_0 + \underset{k=1}{\overset{\infty}{D}} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{-a_{i(k)}^2}{b_{i(k)} + \varsigma_{i_k}} \right)^{-1}, \tag{4.2.25}$$

где $\varsigma = (\varsigma_1, \varsigma_2, \ldots, \varsigma_N) \in \mathbf{C}^N$, ς_0 – независимая комплексная переменная или функция от ς; $b_0, b_{i(k)}, a_{i(k)}$ – комплексные константы, называется многомерной J-дробью.

Если существует такая действительная положительная константа $M > 0$, что

$$\left|a_{i(k)}\right| \leq \frac{M}{1 + 2\sqrt{N}}, \qquad \left|b_{i(n)}\right| \leq \frac{M}{1 + 2\sqrt{N}}, \tag{4.2.26}$$

$$k = 1,2,\ldots,\ i_p = \overline{1,N},\ p = \overline{1,k},\ n = 0,1,2,\ldots,\ i_0 = 0,\ i_p = \overline{1,N},\ p = \overline{1,n},$$

то дробь (4.2.25) называется ограниченной. Минимальное число M, при котором справедливо (4.2.26), определим как границу многомерной ограниченной J-дроби.

Т е о р е м а 4.2.6 [20.21] ВЦД (4.2.25) ограничена тогда и только тогда, когда существует действительное число $H > 0$, что

$$\left| \sum_{k=0}^{n} \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_k = 1}^{N} b_{i(k)} u_{i(k)} v_{i(k)} - \sum_{k=1}^{n} \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_k = 1}^{N} a_{i(k)} u_{i(k)} \left(v_{i(k-1)} + u_{i(k-1)} v_{i(k)} \right) \right| \leq$$

$$\leq H \left(\sum_{k=0}^{n} \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_k = 1}^{N} \left| u_{i(k)} \right|^2 \sum_{k=0}^{n} \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_k = 1}^{N} \left| v_{i(k)} \right|^2 \right)^{1/2} \tag{4.2.27}$$

для произвольных комплексных чисел $u_{i(k)}, v_{i(k)}$ и произвольного натурального n.

Доказательство. Необходимость. К левой части (4.2.27) применим неравенство Буняковского-Шварца. С учетом (4.2.26) и обозначения

$$\| x \| = \left(\sum_{k=0}^{n} \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_k = 1}^{N} \left| x_{i(k)} \right|^2 \right)^{1/2}, \tag{4.2.28}$$

получим

$$\frac{M}{1+2\sqrt{N}} \left(\| u \| \cdot \| v \| + \left(\| u \|^2 - | u_0 |^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\| v \|^2 - \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n = 1}^{N} \left| v_{i(n)} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \right.$$

$$\left. + \left(\| u \|^2 - \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n = 1}^{N} \left| u_{i(n)} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\| v \|^2 - | v_0 |^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right).$$

Мы приходим к (4.2.27), где $H \le \dfrac{3M}{1+2\sqrt{N}}$.

Достаточность. Пусть выполняется неравенство (4.2.27). Если здесь положить $u_{j(p)} = v_{j(p)} = 0$ при всех возможных наборах мультииндексов, кроме $i(k)$, то получим $\left| b_{i(k)} \right| \le H$. Положив $u_{j(p)} = 0$, за исключением $u_{i(k)}$, и $v_{j(p)} = 0$, за исключением $v_{i(k-1)}$, получим $a_{i(k)} \le H$. Поэтому справедливо (4.2.26), где $M \le \left(1+2\sqrt{N}\right)H$.■

Минимальное число H, при котором справедливо (4.2.27), называется нормой ограниченной многомерной J-дроби (4.2.25). Норма, вообще говоря, не совпадает с границей. Так, для ВЦД (4.2.25), у которой все $a_{i(k)} = \dfrac{1}{2}$, $b_{i(k)} = 0$, норма $H = 1$, граница $M = \dfrac{1}{2}\left(1+2\sqrt{N}\right)$.

Теорема 4.2.7 [4, 20]. Многомерная ограниченная J-дробь (4.2.25) с границей M равномерно сходится в области $| \varsigma_i | \ge M$, $i = \overline{0, N}$.

Доказательство. Используя эквивалентные преобразования (1.5.4) и (1.5.15), ВЦД (4.2.25) приведем к виду

$$c_0(\varsigma)\left(1+\underset{k=1}{\overset{\infty}{D}}\sum_{i_k=1}^{N}\frac{c_{i(k)}(\varsigma)}{1}\right)^{-1},$$

где

$$c_0(\varsigma)=\frac{1}{b_0+\varsigma_0},\quad c_{i(k)}(\varsigma)=\frac{-a_{i(k)}^2}{\left(b_{i(k)}+\varsigma_{i_k}\right)\left(b_{i(k-1)}+\varsigma_{i_{k-1}}\right)},$$

$\varsigma=(\varsigma_0,\varsigma_1,\ldots,\varsigma_N)$, $i_0=0$, $i_p=\overline{1,N}$, $p=\overline{1,k}$. Из условий теоремы следует, что $|c_0(\varsigma)|\le\frac{2M\sqrt{N}}{1+2\sqrt{N}}$, $|c_{i(k)}(\varsigma)|\le\frac{1}{4N}$, $k\ge1$. Для завершения доказательства воспользуемся теоремой 4.1.3, где $t=\frac{1}{2}$. ■

Пусть $\xi=\left(\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_{i(k)},\ldots,\xi_{\underbrace{NN\ldots N}_{n}}\right)\in\mathbf{R}^s$, $s=N+N^2+\ldots+N^n$, $\|\xi\|$ определяется согласно (4.2.28) и

$$Y_0(\theta)=-\inf\left(\Phi(\xi,\theta):\|\xi\|=1,\ n\ge1\right),\quad 0\le\theta<2\pi,\tag{4.2.29}$$

$$\Phi(\xi,\theta)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{i_1,i_2,\ldots,i_k=1}^{N}\mathrm{Im}\left(b_{i(k)}\,e^{i\theta}\right)\xi_{i(k)}^2-2\sum_{k=1}^{n}\sum_{i_1,i_2,\ldots,i_k=1}^{N}\mathrm{Im}\left(\alpha_{i(k)}\,e^{i\theta}\right)\xi_{i(k)}\xi_{i(k-1)}.$$

Теорема 4.2.8 [20]. Многомерная ограниченная J-дробь (4.2.25) равномерно сходится на каждом замкнутом ограниченном множестве из $\mathbf{C}^{N+1}$, расстояние которого до множества K_0 положительно, где

$$K_0=\left\{z:(z_0,z_1,\ldots,z_N)\in\mathbf{C}^{N+1},\ z_k=x_k+iy_k,\ x_k\sin\theta+y_k\cos\theta\le Y_0(\theta),\right.$$
$$\left.0\le\theta<2\pi,\ k=\overline{0,N}\right\}.\tag{4.2.30}$$

Доказательство. Пусть $a=e^{i\theta}$. Рассмотрим ВЦД

$$a\cdot\left(ab_0+\lambda_0+\underset{k=1}{\overset{\infty}{D}}\sum_{i_k=1}^{N}\frac{-\left(a\cdot a_{i(k)}\right)^2}{a\cdot b_{i(k)}+\lambda_{i_k}}\right)^{-1},\tag{4.2.31}$$

эквивалентную ВЦД (4.2.25), где $\lambda_i=a\varsigma_i$, $i=\overline{0,N}$. Нормы у ВЦД (4.2.25) и (4.2.31) одинаковы. Положим

$$\alpha_{i(k)}(\theta)=\mathrm{Im}\left(aa_{i(k)}\right),\quad \beta_{i(k)}(\theta)=\mathrm{Im}\left(ab_{i(k)}\right).$$

Тогда из того, что ВЦД (4.2.25) является многомерной ограниченной J-дробью, следует, что существует константа $Y(\theta)$, для которой

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{i_1,i_2,\ldots,i_k=1}^{N}\left(\beta_{i(k)}(\theta)+Y(\theta)\right)\xi_{i(k)}^2-2\sum_{k=1}^{n}\sum_{i_1,i_2,\ldots,i_k=1}^{N}\alpha_{i(k)}(\theta)\xi_{i(k)}\xi_{i(k-1)}\geq 0, \quad (4.2.32)$$

где $n=1,2,\ldots$, $\xi\in\mathbf{R}^s$. Можно считать, что $|Y(\theta)|\leq H$, $0\leq\theta<2\pi$, где H – норма многомерной J-дроби (4.2.25). Соотношение (4.2.32) справедливо также, если вместо $Y(\theta)$ взять $Y_0(\theta)$. Очевидно, $|Y_0(\theta)|\leq H$. Сделаем замену переменных $\lambda_k=iY(\theta)+\eta_k$, $k=\overline{0,N}$. Учитывая (4.2.32), заключаем, что ВЦД (4.2.31) является положительно определенной ветвящейся цепной дробью относительно переменных η_k. Из теоремы 4.2.4 следует, что, если $\operatorname{Im}\eta_k\geq\delta>0$, $k=\overline{0,N}$ (вполне достаточно $\operatorname{Im}\eta_0\geq\delta$, $\operatorname{Im}\eta_i>0$, $i=\overline{0,N}$), то для m-х аппроксимант ВЦД (4.2.31) справедливо соотношение

$$|f_m(\eta)|\leq\delta^{-1},\quad m=1,2,\ldots . \quad (4.2.33)$$

Условие $\operatorname{Im}\eta_k\geq\delta$, $k=\overline{0,N}$, эквивалентно условию $\operatorname{Im}\lambda_k\geq Y(\theta)+\delta$ или $x_k\sin\theta+y_k\cos\theta\geq Y(\theta)+\delta$, если $\varsigma_k=x_k+iy_k$, $0\leq\theta<2\pi$. Определим множество

$$K=\Big\{z:(z_0,z_1,\ldots,z_N)\in\mathbf{C}^{N+1},\ z_k=x_k+iy_k,\ x_k\sin\theta+y_k\cos\theta\leq Y(\theta),$$
$$0\leq\theta<2\pi,\ k=\overline{0,N}\Big\}. \quad (4.2.34)$$

Нули всех знаменателей $B_n(\varsigma)$ ВЦД (4.2.25) принадлежат множеству K. Подходящие дроби ВЦД (4.2.25) равномерно ограничены на произвольном ограниченном замкнутом множестве, расстояние которого до K положительно. Если в (4.2.34) вместо $Y(\theta)$ взять $Y_0(\theta)$, то получим множество K_0. Согласно теореме 4.2.7 ВЦД (4.2.25) равномерно сходится в области $|\varsigma_i|\geq M$, $i=\overline{0,N}$. В силу (4.2.33) $f_m(\varsigma)$, $m=1,2,\ldots$, являются голоморфными функциями в области $\mathbf{C}^{N+1}-K_0$. Утверждение теоремы 4.2.8 следует из теоремы 4.1.7.■

С л е д с т в и е 4.2.1. Многомерная ограниченная J-дробь с нормой H равномерно сходится на произвольном компакте области $|\varsigma_i|>H$, $i=\overline{0,N}$.

З а м е ч а н и е 4.2.3. Пусть элементы $b_0, b_{i(k)}, a_{i(k)}, i(k)\in I, k\geq 1$, ограниченной многомерной J-дроби (4.2.25) являются действительными числами. Так как в этом случае $\beta_{i(k)}(\theta)=b_{i(k)}\sin\theta$, $\alpha_{i(k)}(\theta)=a_{i(k)}\sin\theta$, $Y_0(0)=Y_0(\pi)=0$. Учитывая определение K_0 (4.2.30), имеем $y_k\leq 0$, $k=\overline{0,N}$, если $\theta=0$ и $y_k\geq 0$, $k=\overline{0,N}$, если $\theta=\pi$. Следовательно, в этом случае $y_k=0$ и K_0 содержится в множестве

$$\operatorname{Im}\eta_i=0, \qquad |\operatorname{Re}\eta_i|\leq H, \qquad i=\overline{0,N}. \tag{4.2.35}$$

ВЦД вида (4.2.25) называется действительной многомерной J-дробью, если коэффициенты $b_0, b_{i(k)}, a_{i(k)}$, $k=1,2,...$, $i_p=\overline{1,N}$, $p=\overline{1,k}$, являются действительными числами. Действительная многомерная J-дробь всегда положительно определена. Вместе с ВЦД (4.2.25) рассмотрим ей эквивалентную ВЦД

$$-\left(-b_0-\varsigma_0+\overset{\infty}{\underset{k=1}{D}}\sum_{i_k=1}^{N}\frac{-a_{i(k)}^2}{-b_{i(k)}-\varsigma_{i_k}}\right)^{-1},$$

которая является тоже положительно определенной. Поэтому в силу теоремы 4.2.1 n-е знаменатели подходящих дробей ВЦД (4.2.25) $B_n(\varsigma)\neq 0$ в области $\operatorname{Im}\varsigma_i>0$, $i=\overline{0,N}$, или в области $\operatorname{Im}\varsigma_i<0$, $i=\overline{0,N}$.

Из теоремы 4.2.8 и замечания 4.2.3 следует

Т е о р е м а 4.2.9 [20,21]. Действительная ограниченная многомерная J-дробь (4.2.25) с нормой H равномерно сходится в каждом ограниченном замкнутом множестве $\mathbf{C}^{N+1}$, расстояние которого до области (4.2.35) положительно.

Исследуем сходимость действительной многомерной J-дроби

$$\left(\varsigma_0+\overset{\infty}{\underset{k=1}{D}}\sum_{i_k=1}^{N}\frac{-a_{i(k)}^2}{\varsigma_{i_k}}\right)^{-1}. \tag{4.2.36}$$

Т е о р е м а 4.2.10 [20]. Действительная ограниченная J-дробь (4.2.36) имеет норму $H\leq 1$, если

$$a_{i(k)}^2 \le N^{-1}\left(1-g_{i(k-1)}\right)g_{i(k)}, \qquad i(k)\in I,\ k\ge 1, \tag{4.2.37}$$

где $0\le g_{i(k)}\le 1,\ g_{i(0)}=g_0=0$, I определено согласно (3.3.3).

Доказательство. Если выполняются условия (4.2.37), то, учитывая замечание 4.2.2, имеем

$$\sum_{k=0}^{n}\ \sum_{i_1,i_2,\dots,i_k=1}^{N}\xi_{i(k)}^2-2\sum_{k=1}^{n}\ \sum_{i_1,i_2,\dots,i_k=1}^{N}\left|a_{i(k)}\right|\xi_{i(k)}\xi_{i(k-1)}\ge 0,$$

где $n=1,2,\dots$, $\xi_{i(k)}\in\mathbf{R}$, $i(k)\in I,\ k\le n$, откуда следует, что

$$2\left|\sum_{k=1}^{n}\ \sum_{i_1,i_2,\dots,i_k=1}^{N}\left|a_{i(k)}\right|\xi_{i(k)}\xi_{i(k-1)}\right|\le\sum_{k=0}^{n}\ \sum_{i_1,i_2,\dots,i_k=1}^{N}\left|\xi_{i(k)}^2\right| \tag{4.2.38}$$

для произвольных комплексных чисел $\xi_{i(k)}$. Подставляя в (4.2.38) $\xi_{i(k)}=u_{i(k)}+iv_{i(k)}$, где $u_{i(k)}\ge 0,\ v_{i(k)}\ge 0$, $i(k)\in I$, $k\le n$, и $\|u\|=\|v\|=1$ (см.(4.2.28)), получим

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\ \sum_{i_1,i_2,\dots,i_k=1}^{N}\left|a_{i(k)}\right|\left(u_{i(k)}\,v_{i(k-1)}+u_{i(k-1)}\,v_{i(k)}\right)\right|\le 1$$

или

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\ \sum_{i_1,i_2,\dots,i_k=1}^{N}\left|a_{i(k)}\right|\left(\left|u_{i(k)}\right|\left|v_{i(k-1)}\right|+\left|u_{i(k-1)}\right|\left|v_{i(k)}\right|\right)\right|\le\|u\|\cdot\|v\|,$$

где $u_{i(k)}, v_{i(k)}$ – произвольные комплексные числа. Отсюда следует (4.2.27) в предположении, что все $b_{i(k)}=0$ и $H=1$.■

Теорема 4.2.11 [20]. ВЦД (4.2.36), где $a_{i(k)}$, $k=1,2,\dots$, $i_p=\overline{1,N}$, $p=\overline{1,k}$, – действительные числа, удовлетворяющие неравенствам (4.2.37), $\varsigma\in\mathbf{C}^{N+1}$, равномерно сходится на каждом компакте $\mathbf{C}^{N+1}$, расстояние которого до области

$$\operatorname{Im}\varsigma_i=0,\ \left|\operatorname{Re}\varsigma_i\right|\le 1, \qquad i=\overline{0,N}, \tag{4.2.39}$$

положительно.

§ 3. Многомерные аналоги C-, S- и g-дробей

По аналогии с непрерывными дробями (В.24) ВЦД вида

$$b_0 + \mathop{D}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{a_{i(k)} z_{i_k}}{1}, \tag{4.3.1}$$

или вида

$$\left(1 + \mathop{D}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{a_{i(k)} z_{i_k}}{1}\right)^{-1}, \tag{4.3.2}$$

где $a_{(k)} \neq 0, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad i_p = \overline{1, N}, \quad p = \overline{1, k}$, – комплексные числа, $z = (z_1, z_2, \ldots, z_N) \in \mathbf{C}^N$, называется многомерной регулярной C-дробью.Если же все $a_{(k)} > 0, k = 1,2,\ldots, i_p = \overline{1, N}, p = \overline{1, k}$, то дроби вида (4.3.1) или (4.3.2) будем называть многомерными S-дробями. S-дробь, у которой $a_{(k)} = g_{i(k)}\left(1 - g_{i(k-1)}\right)$, где $0 \le g_{i(k)} \le 1$, $k = 1, 2, \ldots, i_p = \overline{1, N}, p = \overline{1, k}$, называется многомерной g-дробью.

Пусть L – формальный N-кратный степенной ряд

$$L = 1 + \sum_{n=\mathbf{1}}^{\infty} L_n, \qquad L_n = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n = 1}^{N} c_{i(n)} z_{i_1} z_{i_2} \ldots z_{i_n} \qquad . \tag{4.3.3}$$

ВЦД (4.3.1) или (4.3.2) называется соответствующей степенному ряду (4.3.3), если

$$f_k - L = 1 + \sum_{n=k+1}^{\infty} L_n^*, \qquad L_n^* = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n = 1}^{N} c_{i(n)}^* z_{i_1} z_{i_2} \ldots z_{i_n}, \;\; k = 1, 2, \ldots, \tag{4.3.4}$$

т.е.каждая k-я аппроксиманта ВЦД (4.3.1) или (4.3.2) f_k разлагается в формальный степенной ряд вида (4.3.3), совпадающий с рядом (4.3.3) по формам до степени k включительно.

Для определенности рассмотрим ВЦД (4.3.1)

Т е о р е м а 4.3.1[20]. Для многомерной регулярной C-дроби (4.3.1) существует единственный формальный N-кратный степенной ряд (4.3.3), для которого эта дробь будет соответствующей.

Доказательство. Для ВЦД (4.3.1) определим, следуя (1.3.2), выражения $Q_{i(k)}^{(n)}(z)$. Так как $Q_{i(k)}^{(n)}(0)=1$, то $1/Q_{i(k)}^{(n)}(z)$ формально разлагается в N-кратный степенной ряд вида (4.3.3). Пусть ряды

$$L^{(k)}=1+\sum_{n=1}^{\infty}L_n^{(k)},\qquad L_n^{(k)}=\sum_{i_1,i_2,\ldots,i_n=1}^{N}c_{i(n)}^{(k)}\,z_{i_1}z_{i_2}\ldots z_{i_n}\,,\ k=1,2,\ldots,\qquad(4.3.5)$$

являются формальными разложениями k-х аппроксимант f_k ВЦД (4.3.1). Учитывая (1.3.3), для $r>m$ имеем

$$f_r-f_m=\sum_{i_1,i_2,\ldots,i_{m+1}=1}^{N}\frac{(-1)^m\prod_{k=1}^{m+1}a_{i(k)}z_{i_k}}{\prod_{k=1}^{m}Q_{i(k)}^{(m)}(z)\prod_{k=1}^{m}Q_{i(k)}^{(r)}(z)}.$$

Следовательно, для произвольного $r\geq m$ для коэффициентов (4.3.5) справедливы соотношения

$$c_{i(n)}^{(m)}=c_{i(n)}^{(r)}=c_{i(n)},\qquad n=\overline{1,m},\ i_p=\overline{1,N},\ p=\overline{1,n}.$$

Поэтому ряд (4.3.3) является соответствующим дроби (4.3.1). Единственность следует из того, что коэффициенты разложения k-й аппроксиманты f_k ВЦД (4.3.1) в формальный степенной ряд (4.3.5) определяются однозначно. ■

Теорема 4.3.2 [34]. Пусть (4.3.1) – многомерная C-дробь такая, что

$$\lim_{k\to\infty}a_{i(k)}=0.\qquad(4.3.6)$$

Тогда

i) для произвольного положительного числа M существует номер n, зависящий от M, что для произвольного $i(n)$ мультииндекса ВЦД

$$\left(1+\underset{k=}{\overset{\infty}{D}}\sum_{i_k=1}^{N}\frac{a_{i(k)}\,z_{i_k}}{1}\right)^{-1}\qquad(4.3.7)$$

равномерно сходится к голоморфной функции в поликруге $|z_i|<M$, $i=\overline{1,N}$;

ii) ВЦД (4.3.1) сходится к мероморфной функции f в $\mathbf{C}^N$, причем f голоморфна в области $|z_i|<\dfrac{1}{4N\alpha}$, $i=\overline{1,N}$, где

$$\alpha = \sup\left\{\left| a_{i(k)} \right| : \ k = 1,2,\ldots, \quad i_p = 1,N, \ p = \overline{1,k} \ \right\}.$$

Доказательство. Для заданного M существует номер n, что для всех $k \geq n$

$$\left| a_{i(k)} \right| < \frac{1}{4N\alpha}, \quad i_p = 1,N, \ p = \overline{1,k} \ .$$

Утверждение теоремы следует из теоремы 3.2.1. В силу произвольности M функции, определенные в различных поликругах, являются аналитическим продолжением друг друга. ■

Теорема 4.3.2 [36]. Пусть (4.3.1) – многомерная C-дробь такая, что

$$\lim_{k \to \infty} a_{i(k)} = a \neq 0,$$

где a – комплексная константа,

$$\Omega^{(N)} = \bigcup_{\gamma \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)} \Omega_{a,\gamma}^{(N)}, \tag{4.3.8}$$

где $\Omega_{a,\gamma}^{(N)} = \Omega_{a,\gamma} \times \Omega_{a,\gamma} \times \cdots \times \Omega_{a,\gamma}$ – декартово произведение N областей

$$\Omega_{a,\gamma} = \left\{ w \in \mathbf{C} : |\, w \,| - \mathrm{Re}\big(w \exp\big(i \left(\arg a - 2\gamma \right) \big)\big) < \frac{\cos^2 \gamma}{2N|\, a \,|} \right\}.$$

Тогда

i) если K – произвольный компакт области (4.3.8), то существует область $D_K \subset \Omega^{(N)}$ и номер n, зависящий K, что для произвольного мульти-индекса $i(n)$ ВЦД (4.3.7) равномерно сходится на произвольных компактах D_K к функции, голоморфной в D_K;

ii) ВЦД (4.3.1) сходится к функции f, мероморфной в D_K, или тождественно равной бесконечности.

Доказательство. Вложим множество K в связный компакт K'. Определим K' как множество точек отрезков, соединяющих точки K с началом координат. Очевидно, что $K' \subset \Omega^{(N)}$. Обозначим $U_r(z)$ открытый поликруг $U_r(z) = \left\{ w \in \mathbf{C}^N : |w_i - z_i| < r_i, \, i = \overline{1,N} \ \right\}$. Для каждой точки

$z^{(0)}=\left(z_1^{(0)},z_2^{(0)},\ldots,z_N^{(0)}\right)\in K'$ существует угол $\gamma_0\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, что $z^{(0)}\in\Omega_{a,\gamma_0}^{(N)}$.

Так как $\Omega_{a,\gamma_0}^{(N)}$ – открытое множество, то существует поликруг $U_{3r^{(0)}}\left(z^{(0)}\right)\subset\Omega_{a,\gamma_0}^{(N)}$. Каждую точку $z^{(0)}\in K'$ покроем поликругом $U_{r^{(0)}}\left(z^{(0)}\right)$ Так как K' – замкнутое, ограниченное множество, то из этого покрытия можно выделить конечное подпокрытие $U_{r^{(1)}}\left(z^{(1)}\right),U_{r^{(2)}}\left(z^{(2)}\right),\ldots,U_{r^{(s)}}\left(z^{(s)}\right)$, где $z^{(p)}\in K'$, $p=\overline{1,s}$, $r^{(p)}=\left(r_1^{(p)},r_2^{(r)},\ldots,r_N^{(p)}\right)$, $r_k^{(p)}>0,\ k=\overline{1,N}$. Определим

$$D_K=\bigcup_{k=1}^{s}U_{r^{(k)}}\left(z^{(k)}\right).$$

Фиксируем $k, 1\le k\le s$. Пусть $w\in\overline{U}_{2r^{(k)}}\left(z^{(k)}\right)$ и $\varepsilon_k=1-2\frac{N\delta}{\cos^2\gamma_k}$, где $\overline{U}$ – замыкание множества U, угол γ_k определяется из условия

$$\delta=\max\left(\delta_m, m=\overline{1,N}\right),\ \delta_m=\max_{\left|w_m-z_m^{(k)}\right|=2r_m^{(k)}}\left(|aw_m|-\mathrm{Re}\left(aw_m e^{-2\gamma i}\right)\right).$$

Тогда легко проверить, что $a\,w_m\in P_{\varepsilon_k,\gamma_k}$, $m=\overline{1,N}$, где $P_{\varepsilon_k,\gamma_k}$ определяется согласно (3.3.16). Пусть

$$\rho_m^{(k)}=\min\left(|\,\xi_m-a\,z_m\,|:\ \xi_m\in\partial P_{\varepsilon_k,\gamma_k},\ \left|z_m-z_m^{(k)}\right|=r_m^{(k)}\right).$$

Возьмем номер n настолько большим, чтобы

$$\left|\,a_{i(p)}-a\,\right|\le\min\left(\rho_m^{(k)}\left(r_m^{(k)}+\left|\,z_m^{(k)}\right|\right)^{-1}:\ m=\overline{1,N},\ k=\overline{1,s}\right)$$

для всех мультииндексов $i(p)$ таких, что $p\ge n$. Тогда для тех же значений $i(p)$ каждого $z\in\overline{U}_{r^{(k)}}\left(z^{(k)}\right)$ имеем $\left|\,a_{i(p)}\,z_m-a\,z_m\,\right|\le\rho_m^{(k)}$. Отсюда следует, что для каждого $z\in\overline{U}_{r^{(k)}}\left(z^{(k)}\right)$ элементы $a_{i(p)}\,z_{i_p}$, $p=n,n+1,\ldots$, $i_k=\overline{1,N}$, $k=\overline{1,p}$, ВЦД (4.3.7) принадлежат ограниченному множеству параболической области $P_{\varepsilon_k,\gamma_k}$. В силу теоремы 3.3.2 ветвящаяся цепная дробь (4.3.7) сходится в каждой точке $z\in\overline{U}_{r^{(k)}}\left(z^{(k)}\right)$. Для завершения доказательства теоремы необходимо воспользоваться теоремой 4.1.7. ■

В случае $N=1$ область (4.3.8) совпадает с плоскостью с разрезом

$$\left\{\ z\in\mathbf{C}:\left|\arg\left(a\,z+\frac{1}{4}\right)\right|<\pi\right\}.$$

Теорема 4.3.3 [20]. Пусть (4.3.2) – многомерная S-дробь и G – некоторая область из $\mathbf{C}^N$, содержащая действительную N-мерную окрестность $\Delta = \left\{ z \in \mathbf{C}^N : \operatorname{Im} z_i = 0, m \le \operatorname{Re} z_i \le M, i = \overline{1,N} \right\}$, где m, M – действительные положительные числа. Если в области G все подходящие дроби (4.3.2) равномерно ограничены, то

i) четные и нечетные аппроксиманты сходятся равномерно на каждом компакте области G к голоморфной функции в G;

ii) S-дробь (4.3.2) сходится равномерно на каждом компакте G к голоморфной функции в G, если расходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \min\left(\frac{1}{a_{i(k)}} : i_p = \overline{1,N},\ p = \overline{1,k} \right). \tag{4.3.9}$$

Доказательство следует из теоремы 4.1.7. Если $z \in \Delta$, то ВЦД (4.3.2) сходится согласно теореме 2.5.2. ■

Теорема 4.3.4 [20]. ВЦД

$$\left(1 + \mathop{D}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{a_{i(k)}\, z_{i_k} z_{i_{k-1}}}{1} \right)^{-1}, \tag{4.3.10}$$

где $z_{i_0} = z_0 = 1$, $a_{i(k)} > 0$, $k = 1,2,...,$ $i_p = \overline{1,N}$, $p = \overline{1,k}$, $z = (z_1, z_2, ..., z_N) \in \mathbf{C}^N$, равномерно сходится на каждом компакте области $\operatorname{Re} z_i > 0$, $i = \overline{1,N}$, если расходится ряд (4.3.9).

Доказательство. Используя эквивалентные преобразования, ВЦД (4.3.10) приведем к виду

$$-i\left(\varsigma_0 + \mathop{D}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{-a_{i(k)}}{\varsigma_{i(k)}} \right)^{-1}, \tag{4.3.11}$$

где $\varsigma_0 = i$, $\varsigma_{i_k} = i z_{i_k}^{-1}$. Дробь (4.3.11) является положительно определенной многомерной J-дробью. Утверждение (4.2.22) теоремы 4.2.4 гарантирует равномерную ограниченность ее подходящих: дробей. Для завершения доказательства достаточно воспользоваться предыдущей теоремой. ■

Исследуем сходимость многомерных аналогов g-дробей. Сначала рассмотрим ВЦД более общего вида

$$b_0 + \mathop{D}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{g_{i(k)}\left(1-g_{i(k-1)}\right) z_{i(k)}}{1} \tag{4.3.12}$$

или вида

$$\left(b_0 + \mathop{D}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{g_{i(k)}\left(1-g_{i(k-1)}\right) z_{i(k)}}{1}\right)^{-1}, \tag{4.3.13}$$

где $b_0 \in \mathbf{C}$, $g_{i(k)}$, $k = 0,1,2,...,$ $i_0 = 0,$ $i_p = \overline{1,N},$ $p = \overline{1,k}$ – действительные константы такие, что $0 \le g_{i(k)} \le 1,$ $i(k) \in I_N$, $z_{i(k)}$, $i(k) \in I_N$, – вообще говоря, независимые комплексные переменные, в частности, функции многих переменных и

$$I_N = \left\{ i(k) : k = 1,2,...,\ i_p = \overline{1,N},\ p = \overline{1,k} \right\}. \tag{4.3.14}$$

Из теоремы 3.2.2 следует

Теорема 4.3.5 [20,31]. Пусть для ВЦД (4.3.12) выполняются условия:

$$g_0 = 0, \quad 0 \le g_{i(k)} < 1, \qquad i(k) \in I_N, \tag{4.3.15}$$

или

$$g_0 = 0, \quad 0 < g_{i(k)} \le 1, \qquad i(k) \in I_N, \tag{4.3.16}$$

где I_N определяется согласно (4.3.14). Тогда ВЦД (4.3.12) абсолютно и равномерно сходится, если

$$\left| z_{i(k)} \right| \le N^{-1}, \qquad i(k) \in I_N. \tag{4.3.17}$$

Из теоремы 3.2.4 следует

Теорема 4.3.6 [20]. Пусть для ВЦД (4.3.13) выполняются условия (4.3.15) и (4.3.17). Тогда дробь (4.3.13) сходится, если существует такое натуральное число n и набор индексов $i_1, i_2, ..., i_n$, $i_k = \overline{1,N}$, $k = \overline{1,n}$, что $g_{i(n)} = 0$ или $z_{i(n)} \ne -N^{-1}$.

Из теоремы 3.2.3 следует

Теорема 4.3.7 [20]. ВЦД (4.3.13) абсолютно и равномерно сходится, если выполняются условия (4.3.17) и

$$0 < g_0 \le 1, \quad 0 \le g_{i(k)} < 1 \quad \text{или} \quad 0 < g_{i(k)} \le 1, \;\; i(k) \in I_N. \qquad (4.3.18)$$

Однако для указанного типа ВЦД можно установить и более общие утверждения.

Теорема 4.3.8[20]. ВЦД (4.3.12), для которой выполняются условия (4.3.15) или (4.3.16), абсолютно сходится, если для произвольного набора индексов $i_1, i_2, ..., i_{k-1}$, $i_p = \overline{1,N}$, $p = \overline{1,k-1}$

$$\sum_{i_k=1}^{N} \left| z_{i(k)} \right| \le 1, \;\; k = 1,2,.... \qquad (4.3.19)$$

ВЦД (4.3.12) сходится абсолютно и равномерно, если, кроме того,

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1-m_k}{m_k} = 0, \qquad (4.3.20)$$

где

$$m_k = \min\left(g_{(k)} \colon i_p = \overline{1,N}, \;\; p = \overline{1,k} \right). \qquad (4.3.21)$$

Доказательство. Используя схему, предложенную при доказательстве теоремы 3.2.2, легко проверить, что ВЦД

$$\left| b_0 \right| + \mathop{D}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{-g_{i(k)} \left(1 - g_{i(k-1)}\right) \left| z_{i(k)} \right|}{1} \qquad (4.3.22)$$

является мажорантой ВЦД (4.3.12). В частности, если ввести обозначения

$$\hat{Q}_{i(s)}^{(s)} = 1, \quad \hat{Q}_{i(p)}^{(s)} = 1 + \sum_{i_k=1}^{N} \frac{-g_{i(p+1)} \left(1 - g_{i(p)}\right) \left| z_{i(p+1)} \right|}{\hat{Q}_{i(p+1)}^{(s)}}, \qquad (4.3.23).$$

$s = 1,2,...,$ $p = s-1, s-2, ..., 1,$ $i_p = \overline{1,N}$, $p = \overline{1,k}$, то по аналогии можно установить неравенства (3.2.28)–(3.2.30) и убедиться в справедливости оценки (3.2.31), где f_k, $\hat{g}_k$ – k-е подходящие дроби ВЦД (4.3.12) и (4.3.22) соответственно.

Воспользуемся формулой (1.3.4). Для $n > m$ имеем

$$\hat{g}_n - \hat{g}_m = -\sum_{i_1, i_2, ..., i_{m+1}=1} \frac{\prod_{k=1}^{m+1} g_{i(k)} \left(1 - g_{i(k-1)}\right) \left| z_{i(k)} \right|}{\prod_{k=1}^{m+1} \hat{Q}_{i(k)}^{(n)} \prod_{k=1}^{m} \hat{Q}_{i(k)}^{(m)}}. \qquad (4.3.24)$$

Так как $\hat{g}_n$ – монотонно убывающая и ограниченная снизу последовательность, то отсюда следует абсолютная сходимость ВЦД (4.3.12). Если в (4.3.24) применить оценки (4.3.19) и (4.2.29) или (3.2.30) и учесть, что $\frac{1-g_{i(k)}}{g_{i(k)}} \le \frac{1-m_k}{m_k}$, то получим

$$\hat{g}_m - \hat{g}_n < \prod_{k=1}^{m} \frac{1-m_k}{m_k}, \tag{4.3.25}$$

где m_k определяются согласно (4.3.21).■

Теорема 4.3.9 [20]. ВЦД (4.3.13) абсолютно сходится, если выполняются условия (4.3.18) и (4.3.19). ВЦД (4.3.13) сходится абсолютно и равномерно, если, кроме того, выполняется условие (4.3.20).

Доказательство. Исходя из оценок (3.2.28)–(3.2.30), справедливых для ВЦД (4.3.12), где приняты обозначения (4.3.23), убеждаемся в том, что областью значений ВЦД (4.3.12) является круг $|z-b_0| \le 1-g_0$. Поэтому применима методика доказательства теоремы 3.2.3, откуда следует первая часть теоремы. Вторая часть следует из оценки (4.3.25).■

Рассмотрим вопрос о возможности расширения области сходимости ВЦД (4.3.13) путем использования теоремы 4.2.11.

Теорема 4.3.10 [20]. ВЦД

$$\left(1 + \mathop{D}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{-a_{i(k)}^2 z_{i_{k-1}} z_{i_k}}{1}\right)^{-1}, \tag{4.2.26}$$

где $a_{i(k)}$ – действительные числа, удовлетворяющие условиям (4.2.37), равномерно сходится в каждой ограниченной замкнутой области из $\mathbf{C}^{N+1}$, расстояние которой до области

$$\operatorname{Im} z_i = 0, \quad |\operatorname{Re} z_i| \ge 1, \quad i = \overline{0,N}, \tag{4.3.27}$$

положительно, к голоморфной функции в области (4.3.27).

Если в теореме 4.3.9 положить $g_{i(k)} = 1/2$, то получим обобщение теоремы 3.2 1.

С л е д с т в и е 4.3.1. ВЦД (3.2.8) с комплексными частными числителями сходится, если

$$\sum_{i_k=1}^{N} \left| c_{i(k)} \right| \le \frac{1}{4}, \quad i(k) \in I_N, \tag{4.3.28}$$

где I_N определяется согласно (4.3.14).

§ 4. Соответствующие ВЦД к двойному степенному ряду с линейными частными числителями.

Напомним, что ВЦД называется соответствующей кратному степенному ряду, если разложение ее каждой n-й подходящей дроби ($n = 1,2,...$) в формальный степенной ряд совпадает с исходным рядом до всех членов степени n включительно. В отличие от одномерного случая для каждого кратного степенного ряда, удовлетворяющего определенным условиям, существуют различные конструкции соответствующих ВДЦ. Пусть

$$\sum_{i,j=0}^{\infty} q_{ij} z_1^i z_2^j \; - \tag{4.4.1}$$

формальный степенной ряд, В работах [80,154,176] рассматривались двумерные соответствующие цепные дроби вида

$$1 + \Phi_0 + \mathop{D}_{i=1}^{\infty} \frac{c_{ii} z_1 z_2}{1 + \Phi_i}, \; \Phi_i = \mathop{D}_{p=1}^{\infty} \frac{c_{p+i,i} z_1}{1} + \mathop{D}_{p=1}^{\infty} \frac{c_{i,p+i} z_2}{1}, \tag{4.4.2}$$

в работе [190] – вида

$$1 + F_{00} + \mathop{D}_{i=1}^{\infty} \frac{b_{i0} z_1}{1 + F_{i,0}} + \mathop{D}_{i=1}^{\infty} \frac{b_{0,i} z_2}{1 + F_{0,i}}, \tag{4.4.3}$$

Условие линейности частных числителей, имеющее место в одномерном случае для нормальных рядов, естественным образом приведет нас к следующей конструкции соответствующей ВЦД

$$b_0 + \mathop{D}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{2} \frac{b_{i(k)} \, z_{i_k}}{1}. \tag{4.4.4}$$

Пусть

$$f_n(z) = \sum_{i,j=0}^{\infty} q_{ij}^{(n)} z_1^i z_2^j \; - \tag{4.4.5}$$

разложение n-ой подходящей дроби (4.4.4) в формальный степенной ряд. Запишем условие соответствия ВЦД (4.4.4) к ряду (4.4.1)

$$q_{ij}^{(n)} = q_{ij}, \quad i + j \le n. \tag{4.4.6}$$

Из (4.4.6) следует, что для определения 2^n элементов $b_{i(n)}$, $i_p = 1,2$, $p = \overline{1,n}$, ВЦД (4.4.4) можем записать только $(n+1)$ уравнение

$$q_{ij}^{(n)} = q_{ij}, \quad i + j = n. \tag{4.4.7}$$

Поэтому соответствующая ВЦД вида (4.4.4) к ряду (4.4.1) определяется неоднозначно. Естественными представляются два пути образования недостающих уравнений: положить определенное количество элементов $b_{i(n)}$ равными нулю или равными друг другу. В первом случае приходим к соответствующей ВЦД с неравноправными переменными z_1 и z_2 вида

$$b_0 + F_0(z_2) + \underset{k=1}{\overset{\infty}{D}} \frac{b_{k,0} z_1}{1 + F_k(z_2)}, \quad F_k(z_2) = \underset{i=1}{\overset{\infty}{D}} \frac{b_{k,i} z_2}{1}. \tag{4.4.8}$$

$$Q_{0,0} = a_{0,0} + \underset{k=1}{\overset{\infty}{D}} \sum_{i_k=1}^{2} \frac{b_{i(k)} z_{i_k}}{1}, \tag{4.4.9}$$

где

$$b_{i(k)} = a_{2k-|i(k)|,|i(k)|-k} - \tag{4.4.10}$$

некоторые комплексные числа, $|i(k)| = i_1 + i_2 + \ldots + i_k$, т.е.

$$Q_{00} = a_{00} + \cfrac{a_{10} z_1}{1 + \cfrac{a_{20} z_1}{1 + \cfrac{a_{30} z_1}{1 + \ddots} + \cfrac{a_{21} z_2}{1 + \ddots}} + \cfrac{a_{11} z_2}{1 + \cfrac{a_{21} z_1}{1 + \ddots} + \cfrac{a_{12} z_2}{1 + \ddots}}} +$$

$$+ \cfrac{a_{01} z_2}{1 + \cfrac{a_{11} z_1}{1 + \cfrac{a_{21} z_1}{1 + \ddots} + \cfrac{a_{12} z_2}{1 + \ddots}} + \cfrac{a_{02} z_2}{1 + \cfrac{a_{12} z_1}{1 + \ddots} + \cfrac{a_{03} z_2}{1 + \ddots}}},$$

возникающие во втором случае, станут предметом исследований в данном параграфе. Заметим, что $b_{i(k)}$ не зависит от перестановки индексов в мультииндексе $i(k)$. Введем обозначения

$$Q_{n,m} = 1 + \underset{k=1}{\overset{\infty}{D}} \sum_{i_k=1}^{2} \frac{b_{\underbrace{11\ldots1}_{n}\underbrace{22\ldots2}_{m} i(k)} z_{i_k}}{1}, \;? \tag{4.4.11}$$

где n, m – целые неотрицательные числа такие, что $n+m\geq 1$. Тогда справедливы рекуррентные соотношения

$$Q_{n,m}=1+\frac{a_{n+1,m}\,z_1}{Q_{n+1,m}}+\frac{a_{n,m+1}\,z_2}{Q_{n,m+1}}, \tag{4.4.12}$$

Если в (4.4.9) $a_{ij}\neq 0$, $i,j=0,1,\ldots$, заданы, то каждой ВЦД соответствует формальный степенной ряд

$$\sum_{i+j\geq 0} q_{ij}^{(n,m)} z_1^i z_2^j, \tag{4.4.13}$$

где $q_{00}^{(n,m)}=1$. Пусть

$$\sum_{i+j\geq 0} p_{ij}^{(n,m)} z_1^i z_2^j \;- \tag{4.4.14}$$

ряд, обратный к (4.4.13). Так как $q_{00}^{(n,m)}=1$, то формальный ряд (4.4.14) всегда существует, причем $p_{00}^{(n,m)}=1$. Учитывая рекуррентные соотношения (4.4.12), имеем

$$\sum_{i+j\geq 0} q_{ij}^{(n,m)} z_1^i z_2^j=1+a_{n+1,m}z_1\sum_{i+j\geq 0} p_{ij}^{(n+1,m)} z_1^i z_2^j+a_{n,m+1}z_2\sum_{i+j\geq 0} p_{ij}^{(n,m+1)} z_1^i z_2^j, \tag{4.4.15}$$

откуда

$$q_{10}^{(n,m)}=a_{n+1,m},\qquad q_{01}^{(n,m)}=a_{n,m+1} \tag{4.4.16}$$

и

$$q_{ij}^{(n,m)}=q_{10}^{(n,m)}p_{i-1\,j}^{(n+1,m)}+q_{01}^{(n,m)}p_{ij-1}^{(n,m+1)},\quad i,j=0,1,2,\ldots, \tag{4.4.17}$$

где

$$p_{i,-1}^{(n,m+1)}=p_{-1,j}^{(n+1,m)}=0,\quad p_{00}^{(n,m)}=q_{00}^{(n,m)}=1.$$

При фиксированных n и m вычислим коэффициенты $p_{ij}^{(n,m)}$ ряда (4.4.14), обратного к (4.4.13). Из равенства

$$\left(\sum_{i+j\geq 0} q_{ij}^{(n,m)} z_1^i z_2^j\right)\left(\sum_{i+j\geq 0} p_{ij}^{(n,m)} z_1^i z_2^j\right)=1,$$

сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, получим

$$p_{00}^{(n,m)}=1,\quad \sum_{k=0}^{i}\sum_{l=0}^{j} p_{i-k,j-l}^{(n,m)}q_{k,l}^{(n,m)}=0,\qquad i+j\geq 1,$$

откуда

$$p_{ij}^{(n,m)}=-\sum_{k+l=1}^{i+j} p_{i-k,j-l}^{(n,m)}q_{k,l}^{(n,m)},\qquad i+j\geq 1, \tag{4.4.18}$$

причем $p_{rt}^{(n,m)} = 0$, если $r < 0$ или $t < 0$. Исходя из рекуррентных соотношений (4.4.18), методом математической индукции легко устанавливаются явные формулы для элементов $p_{ij}^{(n,m)}$

$$p_{ij}^{(n,m)} = -q_{ij}^{(n,m)} + \delta_{ij}^{(n,m)}, \qquad (4.4.19)$$

где $\delta_{10}^{(n,m)} = \delta_{01}^{(n,m)} = 0$ и

$$\delta_{ij}^{(n,m)} = -\sum_{s=2}^{i+j} (-1)^s \sum_{\substack{k_1+k_2+\ldots+k_s=i \\ l_1+l_2+\ldots+l_s=j}} q_{k_1,l_1}^{(n,m)} q_{k_2,l_2}^{(n,m)} \ldots q_{k_s,l_s}^{(n,m)} \qquad (4.4.20)$$

в предположении, что $i, j = 0,1,2,\ldots,\ i + j \ge 2,\quad k_r + l_r \ne 0,\ r = 1,2,\ldots$. В частности, учитывая (4.4.19), (4.4.20), имеем

$$p_{10}^{(n,m)} = -q_{10}^{(n,m)},\ \ p_{01}^{(n,m)} = -q_{01}^{(n,m)},$$

$$p_{20}^{(n,m)} = -q_{20}^{(n,m)} + \left(q_{10}^{(n,m)}\right)^2,\quad p_{11}^{(n,m)} = -q_{11}^{(n,m)} + 2q_{10}^{(n,m)} q_{01}^{(n,m)},$$

$$p_{02}^{(n,m)} = -q_{02}^{(n,m)} + \left(q_{01}^{(n,m)}\right)^2,\quad p_{30}^{(n,m)} = -q_{30}^{(n,m)} + 2q_{20}^{(n,m)} q_{10}^{(n,m)} - \left(q_{10}^{(n,m)}\right)^3,$$

$$p_{21}^{(n,m)} = -q_{21}^{(n,m)} + 2q_{20}^{(n,m)} q_{01}^{(n,m)} + 2q_{10}^{(n,m)} q_{11}^{(n,m)} - 3\left(q_{10}^{(n,m)}\right)^2 q_{01}^{(n,m)},$$

$$p_{12}^{(n,m)} = -q_{12}^{(n,m)} + 2q_{02}^{(n,m)} q_{01}^{(n,m)} + 2q_{01}^{(n,m)} q_{11}^{(n,m)} - 3\left(q_{01}^{(n,m)}\right)^2 q_{10}^{(n,m)}, ?$$

$$p_{03}^{(n,m)} = -q_{03}^{(n,m)} + 2q_{02}^{(n,m)} q_{01}^{(n,m)} - \left(q_{01}^{(n,m)}\right)^3$$

…………………………………………………….

Пусть задан формальный степенной ряд (4.4.1). Построим ВЦД вида (4.4.9), соответствующе этому ряду, и установим условия, при выполнении которых такая дробь существует.

На первом шаге алгоритма вычислим элементы a_{00}, a_{10}, a_{01} дроби (4.4.9). Из условия соответствия

$$(S - f_n)(z) = O\left(z^{n+1}\right), \qquad (4.4.22)$$

где f_n – n-я подходящая дробь ВЦД (4.4.9), S – формальный степенной ряд (4.4.1), $O\left(z^{n+1}\right)$ – некий формальный степенной ряд вида $\sum c_{ij} z_1^i z_2^j$ в предположении, что $i \ge 0,\ j \ge 0,\ i + j \ge n+1$. При $n = 1$ имеем

$$q_{00} + q_{10} z_1 + q_{01} z_2 \equiv a_{00} + a_{10} z_1 + a_{01} z_2, \qquad (4.4.23)$$

откуда

$$a_{00}=q_{00},\ a_{10}=q_{10},\ a_{01}=q_{01}. \tag{4.4.24}$$

На втором шаге вычислим элементы a_{20}, a_{11}, a_{02} ВЦД (4.4.9) и коэффициенты $q_{10}^{(1,0)}$, $q_{10}^{(0,1)}$, $q_{01}^{(1,0)}$, $q_{01}^{(0,1)}$, возникающие при обращении рядов и играющие вспомогательную роль. Всюду в дальнейшем предполагается, что

$$q_{ij}^{(0,0)}=q_{ij}, \qquad i,j=0,1,2,\dots . \tag{4.4.25}$$

Из (4.4.17), где $n=m=j=0$, $i=2$ и (4.4.16) следует, что

$$q_{20}=q_{10}p_{10}^{(1,0)},\ a_{20}=q_{10}^{(1,0)}.$$

Учитывая (4.4.21), находим $a_{20}=q_{10}^{(1,0)}=-\dfrac{q_{20}}{q_{21}}$. Аналогично устанавливается, что $a_{02}=q_{01}^{(0,1)}=-\dfrac{q_{02}}{q_{01}}$. Из (4.4.17), где $n=m=0$, $i=j=1$, и (4.4.16) следует, что

$$q_{11}=q_{10}p_{01}^{(1,0)}+q_{01}p_{10}^{(0,1)},\ a_{11}=q_{10}^{(0,1)}=q_{01}^{(1,0)},$$

откуда с учетом (4.4.21) имеем $a_{11}=q_{10}^{(0,1)}=q_{01}^{(1,0)}=-\dfrac{q_{11}}{q_{10}+q_{01}}$.

Следовательно,

$$\begin{cases} a_{20}=-\dfrac{q_{20}}{q_{10}},\ a_{11}=-\dfrac{q_{11}}{q_{10}+q_{01}},\ a_{02}=-\dfrac{q_{02}}{q_{01}}, \\ q_{10}^{(1,0)}=a_{20},\ q_{10}^{(0,1)}=q_{01}^{(1,0)}=a_{11},\ q_{01}^{(0,1)}=a_{02}. \end{cases} \tag{4.4.26}$$

Пусть при некотором $k\ge 2$ уже вычислены элементы a_{ij}, $i+j\le k$, ВЦД (4.4.9) и коэффициенты преобразованных рядов

$$q_{ij}^{(n,m)},\ n+m+i+j\le k,\ 1\le n+m\le k-1,\ 1\le i+j\le k.$$

Используя (4.4.16), (4.4.17) и (4.4.19), вычислим a_{ij}, $i+j=k+1$ и $q_{ij}^{(n,m)}$, $n+m+i+j=k+1$, $1\le n+m\le k$, $1\le i+j\le k$. Обозначим

$$X_{k+1}=:\left\{\ q_{ij}^{(n,m)}:\ n+m+i+j=k+1,\ 1\le n+m\le k,\ 1\le i+j\le k\ \right\},$$

$$X_{r,l}=:\left\{\ q_{ij}^{(n,m)}:\ n+i=r,\ m+j=l,\ i+j\ge 1\ \right\}.$$

Тогда $X_{k+1} = \bigcup\limits_{r+l=k+1} X_{r,l}$. Фиксируем r и l. Для обозначения элементов множества $X_{r,l}$ в этом случае используем сокращенную запись $x_{ij} = q_{ij}^{(r-i,l-j)}$, $i = \overline{0,r}$, $j = \overline{0,l}$, $1 \le i + j < r + l$. Из формулы (4.4.20) следует, что величины $\delta_{ij}^{(n,m)}$ можно считать известными, так как они выражаются через $q_{ij}^{(n,m)}$, найденные на предыдущих шагах алгоритма. Пусть

$$\varepsilon_{ij}^{(r-i,l-j)} = a_{r-i+1,l-j}\delta_{i-1,j}^{(r-i+1,l-j)} + a_{r-i,l-j+1}\delta_{i,j-1}^{(r-i,l-j+1)}, \tag{4.4.28}$$

где $i = \overline{0,r}$, $j = \overline{0,l}$, $i + j \ge 1$ и $\delta_{-1,j}^{(r+1,l-j)} = \delta_{i,-1}^{(r-i,l+1)} = \delta_{0,0}^{(r,l)}$. На основании (4.4.16), (4.4.17) получим систему из $(r+1)(l+1) - 2$ уравнений для нахождения такого же количества неизвестных

$$\begin{cases} q_{r,l} = -a_{1,0}x_{r-1,l} - a_{0,1}x_{r,l-1} + \varepsilon_{r,l}^{(0,0)}, \ x_{1,0} = x_{0,1}, \\ x_{i,j} = -a_{r-i+1,l-j}x_{i-1,j} - a_{r-i,l-j+1}x_{i,j-1} + \varepsilon_{i,j}^{(r-i,l-j)}, \\ r + l - 1 \ge i + j \ge 2, \ 0 \le i \le r, \ 0 \le j \le l / \end{cases} \tag{4.4.29}$$

Определим $\mu_{i,j}$ с помощью рекуррентных соотношений

$$\mu_{i,j} = a_{i,j-1}\mu_{i,j-1} + a_{i-1,j}\mu_{i-1,j}, \qquad i = \overline{0,r}, \ j = \overline{0,l}, \tag{4.4.30}$$

при начальных условиях: $\mu_{00} = a_{00} = 1$, $\mu_{i,-1} = \mu_{-1,j} = 0$. Умножив каждое из уравнений (4.4.29), содержащее $\varepsilon_{i,j}^{(r-i,l-j)}$ на $(-1)^{i+j} a_{r-i,l-j}\mu_{r-i,l-j}$ соответственно, почленно их просуммируем. С учетом последнего равенства и (4.4.16) получим $x_{10} = x_{01} = a_{rl}$ и

$$\begin{cases} a_{r,l} = \mu_{r,l}^{-1}\left((-1)^{r+l+1} q_{r,l} + \sum\limits_{i+j=2}^{r+l} (-1)^{i+j} \varepsilon_{i,j}^{(r-i,l-j)} a_{r-i,l-j}\mu_{r-i,l-j} \right), \\ 0 \le i \le r, \ 0 \le j \le l, \end{cases} \tag{4.4.31}$$

где $r + l \ge 2$. Остальные $x_{i,j}$ находятся по рекуррентной формуле

$$x_{i,j} = -a_{r-i+1,l-j}x_{i-1,j} - a_{r-i,l-j+1}x_{i,j-1} + \varepsilon_{i,j}^{(r-i,l-j)} \tag{4.4.32}$$

при начальных условиях, $x_{i,-1} = x_{-1,j} = 0$, $x_{10} = x_{01} = a_{rl}$.

Учитывая (4.4.31), заключаем, что описанный выше алгоритм выполним тогда и только тогда, когда все $\mu_{i,j} \neq 0,\ i+j \geq 1$. Для иллюстрации предложенной выше схемы алгоритма вычислим элементы множества X_3. Предварительно, используя (4.4.30), находим $\mu_{i,j} \neq 0,\ i+j \leq 3$.

$$\mu_{i,-1} = \mu_{-1,j} = 0,\ \mu_{00} = a_{00} = 1,\ \mu_{10} = a_{01} = 1,$$

$$\mu_{20} = a_{10},\ \mu_{11} = a_{10} + a_{01},\ \mu_{02} = a_{01},\ \mu_{03} = a_{02}a_{01},\ \mu_{30} = a_{20}a_{10},$$

$$\mu_{21} = a_{20}\mu_{20} + a_{11}\mu_{11},\ \mu_{12} = a_{02}\mu_{02} + a_{11}\mu_{11}.$$

Учитывая представление $X_3 = X_{30} \bigcup X_{21} \bigcup X_{12} \bigcup X_{03}$, последовательно находим элементы множеств $X_{i,j},\ i,j = \overline{0,3},\ i+j=3$. Ключевым моментом алгоритма является вычисление при каждом фиксированном наборе индексов i и j коэффициентов $a_{i,j}$. Из (4.4.28) следует, что $\varepsilon_{i,j}^{(r-i,l-j)} = 0$, если $i,j = 0,1,2,\ \ i+j \leq 2$. Так как $X_{3,0} = \left\{q_{1,0}^{(2,0)}, q_{2,0}^{(1,0)}\right\}$, то, используя (4.4.31), имеем

$$a_{3,0} = q_{1,0}^{(2,0)} = \mu_{3,0}^{-1}\left(q_{3,0} - \varepsilon_{3,0}^{(0,0)}\right)$$

Учитывая (4.4.19), (4.4.21), (4.4.26), (4.4.28), находим

$$\varepsilon_{3,0}^{(0,0)} = a_{1,0}\delta_{2,0}^{(1,0)},\ \ \delta_{2,0}^{(1,0)} = \left(q_{1,0}^{(1,0)}\right)^2 = a_{2,0}^2.$$

Таким образом,

$$a_{3,0} = \frac{q_{3,0} - a_{1,0}a_{2,0}^2}{a_{2,0}a_{1,0}} = -\frac{q_{3,0}}{q_{2,0}} - \frac{q_{2,0}}{q_{1,0}},$$

и с учетом (4.4.32) $x_{2,0} = q_{2,0}^{(1,0)} = -a_{2,0}a_{3,0}$.

Вычислим элементы множества $X_{2,1} = \left\{q_{1,0}^{(1,1)}, q_{0,1}^{(2,0)}, q_{2,0}^{(0,1)}, q_{11}^{(1,0)}\right\}$.

Согласно предлагаемой схеме имеем

$$a_{21} = q_{10}^{(1,1)} = q_{01}^{(2,0)} = \mu_{21}^{-1}\left(q_{21} - \varepsilon_{21}^{(0,0)}\right), \qquad \varepsilon_{21}^{(0,0)} = a_{10}\delta_{11}^{(1,0)} + a_{01}\delta_{20}^{(1,0)},$$

$$\delta_{11}^{(1,0)} = 2q_{10}^{(1,0)}q_{01}^{(1,0)} = 2a_{20}a_{11}, \qquad \delta_{20}^{(0,1)} = \left(q_{10}^{(0,1)}\right)^2 = (a_{11})^2.$$

Следовательно ,

$$a_{21}=\frac{q_{21}-2a_{10}\,a_{20}\,a_{11}-a_{01}a_{11}^2}{a_{20}\,a_{10}+a_{11}(a_{10}+a_{01})}=-\frac{q_{21}+2q_{20}\,a_{11}-q_{01}\,a_{11}^2}{q_{20}+q_{11}}$$

и $\quad x_{20}=q_{20}^{(0,1)}=-a_{11}a_{21}, \qquad x_{11}=q_{11}^{(1,0)}=-(a_{20}+a_{11})a_{21}.$

Аналогично устанавливаются. что

$$a_{12}=-\frac{q_{12}+2q_{02}a_{11}-q_{10}a_{11}^2}{q_{02}+q_{11}},\ \ a_{03}=-\frac{q_{03}}{q_{02}}+\frac{q_{02}}{q_{01}},$$

$$q_{02}^{(1,0)}=-a_{11}a_{12},\ \ q_{11}^{(0,1)}=-(a_{02}+a_{11})a_{12},\ \ q_{02}^{(0,1)}=-a_{02}a_{03}.$$

Теорема 4.4.1 [25,30,33,36]. ВЦД (4.4.9) с элементами $b_{i(k)}$ вида (4.4.10) является соответствующей формальному степенное ряду (4.4.1) с комплексными элементами, если a_{pq}, $p,q=0,1,...$, определяются с помощью следующего рекуррентного алгоритма. Пусть a_{ij}, $i+j\le k$, и вспомогательные коэффициенты $q_{ij}^{n,m}$, $n+m+i+j=k+1$, $1\le n+m\le k-1$, $1\le i+j\le k-1$, известны (начальные их значения определяются согласно (4.4.24), (4.4.26)). Тогда a_{ij}, $i+j=k+1$, $q_{ij}^{(n,m)}$, $n+m+i+j=k+1$, $1\le n+m\le k$, $1\le i+j\le k$, вычисляются следующим образом. Фиксируем r и l, $r\ge 0$, $l\ge 0$, $r+l=k+1$. a_{rl} находим по формуле (4.4.31), где μ_{ij}, $\varepsilon_{ij}^{(r-i,l-j)}$ вычисляются согласно (4.4.30), (4.4.28), $\delta_{ij}^{(r-i,l-j)}$ – согласно (4.4.20). Числа $x_{ij}=q_{ij}^{(r-i,l-j)}$ находятся по рекуррентной формуле (4.4.32).

Алгоритм преобразования ряда (4.4.22) в соответствующую ВЦД (4.4.9) выполним тогда и только тогда, когда все $\mu_{ij}\ne 0$, $i+j\ge 1$.

Доказательство. С целью компактной записи индексов элементов (4.4.10) ВЦД (4.4.9) используем обозначение

$\nu(i_1,i_2,...,i_n)=\nu_n=2n-(i_1+i_2+...+i_n), \quad n=1,2,...,\ i_k=1,2,\ k=\overline{1,n},$

откуда следует, что

$$\nu_n=\nu_{n-1}+2-i_n, \qquad n=1,2,...,\ \nu_0=0.$$

Учитывая (4.4.10) и (4.4.16) в предположении неотрицательности всех индексов, имеем

$$a_{\nu_n, n-\nu_n} = q_{10}^{(\nu_n - 1, n-\nu_n)} = q_{01}^{(\nu_n, n-\nu_n - 1)}.$$

Пусть f_n обозначает n-ю подходящую дробь ВЦД (4.4.9). Тогда

$$f_n - q_{00} = \sum_{i_1=1}^{2} \frac{a_{\nu_1, 1-\nu_1} z_{i_1}}{1} + \sum_{i_2=1}^{2} \frac{a_{\nu_2, 2-\nu_2} z_{i_2}}{1} + \cdots + \sum_{i_n=1}^{2} \frac{a_{\nu_n, n-\nu_n} z_{i_n}}{1}.$$

Сворачиваем эту дробь снизу вверх, учитывая (4.4.16), (4.4.17) и (4.4.24). На первом шаге получим

$$\left(1 + \sum_{i_n=1}^{2} a_{\nu_n, n-\nu_n} z_{i_n}\right)^{-1} = \left(1 + a_{\nu_{n-1}+1, n-1-\nu_{n-1}} z_1 + a_{\nu_{n-1}, n-\nu_{n-1}} z_2\right)^{-1} =$$

$$= \left(1 + q_{10}^{(\nu_{n-1}, n-1-\nu_{n-1})} z_1 + q_{01}^{(\nu_{n-1}, n-1-\nu_{n-1})} z_2\right)^{-1} =$$

$$= 1 + p_{10}^{(\nu_{n-1}, n-1-\nu_{n-1})} z_1 + p_{01}^{(\nu_{n-1}, n-1-\nu_{n-1})} z_2 + O\left(z^2\right)$$

После второго шага имеем

$$\left[1 + \sum_{i_{n-1}=1}^{2} a_{\nu_{n-1}, n-1-\nu_{n-1}} z_{i_{n-1}} \left(1 + p_{10}^{(\nu_{n-1}, n-1-\nu_{n-1})} z_1 + p_{01}^{(\nu_{n-1}, n-1-\nu_{n-1})} z_2 + O\left(z^2\right)\right)\right] =$$

$$= \Big[1 + q_{10}^{(\nu_{n-2}, n-2-\nu_{n-2})} z_1 \left(1 + p_{10}^{(\nu_{n-2}+1, n-2-\nu_{n-2})} z_1 + p_{01}^{(\nu_{n-2}+1, n-2-\nu_{n-2})} z_2\right) +$$

$$+ q_{01}^{(\nu_{n-2}, n-2-\nu_{n-2})} z_2 \left(1 + p_{10}^{(\nu_{n-2}, n-1-\nu_{n-2})} z_1 + p_{01}^{(\nu_{n-2}, n-1-\nu_{n-2})} z_2\right) + O\left(z^3\right)\Big]^{-1} =$$

$$= \left[1 + \sum_{\substack{i+j=1 \\ i\ge 0,\, j\ge 0}}^{2} q_{ij}^{(\nu_{n-2}, n-2-\nu_{n-2})} z_1^i z_2^j + O\left(z^3\right)\right]^{-1} =$$

$$= 1 + \sum_{\substack{i+j=1 \\ i\ge 0,\, j\ge 0}}^{2} p_{ij}^{(\nu_{n-2}, n-2-\nu_{n-2})} z_1^i z_2^j + O(z)$$

и т .д. После $(n-1)$-го шага получим

$$\sum_{i_1=1}^{2} a_{\nu_1,1-\nu_1} z_{i_1}\left(1+\sum_{i+j=1}^{n-1} p_{ij}^{(\nu_1,1-\nu_1)} z_1^i z_2^j + O\left(z^n \right)\right) =$$

$$= q_{10}^{(0,0)} z_1 \left(1+\sum_{i+j=1}^{n-1} p_{ij}^{(1,0)} z_1^i z_2^j \right) + q_{01}^{(0,0)} z_2 \left(1+\sum_{i+j=1}^{n-1} p_{ij}^{(0,1)} z_1^i z_2^j \right) + O\left(z^{n+1} \right) =$$

$$= \sum_{i+j=1}^{n} q_{ij}^{(0,0)} z_1^i z_2^j + O\left(z^{n+1} \right) = \sum_{i+j=1}^{n} q_{ij} z_1^i z_2^j + O\left(z^{n+1} \right),$$

так как $q_{ij}^{(0,0)} = q_{ij}$, $i, j = 0,1,2,...,$ согласно (4.4.25). ■

Утверждение 4.4.1 [33,36]. Если ряд (4.4.22) является разложением функции $f(z_1 + z_2)$, то при выполнении условий теоремы 4.4.1 соответствующая ВЦД (4.4.9) вырождается в непрерывную дробь вида

$$a_0 + \underset{k=1}{\overset{\infty}{D}} \frac{a_k (z_1 + z_2)}{1}. \tag{4.4.33}$$

Доказательство. Если (4.4.22) является разложением функции $f(z_1 + z_2)$, то

$$q_{ij} = \binom{i+j}{i} q_{i+j}, \quad i, j = 0,1,2,... .$$

Учитывая (4.4.26) и (4.4.24), имеем

$$a_{00} = q_0, \quad a_{10} = a_{01} = a_1 = q_1, \quad a_{20} = a_{11} = a_{02} = a_2 = -q_2 q_1^{-1},$$

$$q_{10}^{(1,0)} = q_{10}^{(0,1)} = q_{01}^{(1,0)} = q_{01}^{(0,1)} = a_2, \quad p_{10}^{(1,0)} = p_{10}^{(0,1)} = p_{01}^{(1,0)} = p_{01}^{(0,1)} = -a_2 .$$

Докажем методом математической индукции по k, что в предположениях утверждения

$$q_{ij}^{(n,m)} = (-1)^{i+j+1} \binom{i+j}{i} L_{i+j,n+m}, \quad p_{ij}^{(n,m)} = (-1)^{i+j} \binom{i+j}{i} K_{i+j,n+m}, \tag{4.4.34}$$

где $n+m+i+j = k$, $1 \le n+m \le k-1$, $1 \le i+j \le k-1$, $k = 2,3,...,$ $L_{i+j,n+m}$, $K_{i+j,n+m}$ – некоторые константы. При $k = 2$ равенства (4.4.34) справедливы и $L_{1,1} = K_{1,1} = a_2$. Легко проверяется справедливость (4.4.34) и при $k = 3$, причем $L_{1,2} = K_{1,2} = a_3$, $L_{2,1} = a_2 a_3$, $K_{2,1} = a_2(a_2 + a_3)$. Пусть равенства

(4.4.34) выполняются при $n+m+i+j \le k$. Докажем их справедливость при $n+m+i+j = k+1$. В частности, из (4.4.34) при $n+m+i+j \le k$, $i+j \le k$ следует, что

$$a_{ij} = q_{10}^{(i-1,j)} = L_{1,i+j-1} = a_{i+j}, \; i \ge 1, \; a_{ij} = q_{01}^{(i,j-1)} = L_{1,i+j-1} = a_{i+j}, \quad j \ge 1.$$

Используя (4.4.30), получим

$$\mu_{ij} = \binom{i+j}{i} \prod_{s=1}^{i+j-1} a_s, \text{ если } \quad i,j = \overline{0,k+1}, \quad 2 \le i+j \le k+1.$$

Учитывая предположение индукции, известные тождества из комбинаторики [53], формулы (4.4.18), (4.4.19), в случае $n+m+i+j = k+1$ имеем $\delta_{10}^{(n,m)} = \delta_{01}^{(n,m)} = 0$ и для $2 \le i+j \le k$

$$\delta_{i,j}^{(n,m)} = -\sum_{k+l=1}^{i+j-1} p_{i-k,j-l}^{(n,m)} q_{k,l}^{(n,m)} =$$

$$= (-1)^{i+j} \sum_{k+l=1}^{i+j-1} \binom{i+j-k-l}{i-k} \binom{k+l}{k} K_{i+j-k-l,n+m} L_{k+l,n+m} =$$

$$= (-1)^{i+j} \sum_{r=0}^{i+j-1} K_{i+j-r,n+m} L_{r,n+m} \sum_{k=0}^{r} \binom{i+j-r}{i-k} \binom{r}{k} = (-1)^{i+j} \binom{i+j}{i} M_{i+j,n+m}.$$

Из (4.4.28) следует, что

$$\varepsilon_{i,j}^{(r-i,l-j)} = a_{r+l-i-j+1} \left(\delta_{i-1,j}^{(r-i+1,l-j)} + \delta_{i,j-1}^{(r-i,l-j+1)} \right) =$$
$$= (-1)^{i+j+1} \binom{i+j}{i} M_{i+j-1,r+l-i-j+1} a_{r+l-i-j+1},$$

если $i = \overline{0,r}$, $\quad j = \overline{0,l}$, $3 \le i+j \le k+1$, $r = \overline{0,k+1}$, $l = \overline{0,k+1}$, $r+l = \overline{0,k+1}$.

Таким образом, учитывая (4.4.31), где $r = \overline{0,k+1}$, $l = \overline{0,k+1}$, $r+l = k+1$, имеем

$$a_{rl} = (-1)^{r+l+1} q_{r+l} \left(\prod_{s=1}^{r+l-1} a_s \right)^{-1} - \sum_{p=3}^{r+l} \left(\prod_{s=r+l-p+2}^{r+l-1} a_s \right)^{-1} M_{p-1,r+l-p+1} = a_{r+l}.$$

Так как

$$p_{i,j}^{(n,m)} = -q_{i,j}^{(n,m)} + \delta_{i,j}^{(n,m)} = -q_{i,j}^{(n,m)} + (-1)^{i+j}\binom{i+j}{i} M_{i+j,n+m},$$

то для завершения доказательства утверждения достаточно убедиться в справедливости равенств (4.4.34) только для $q_{i,j}^{(n,m)}$, $n+m+i+j=k+1$. Пусть r и l – произвольные фиксированные индексы такие, что $0 \le r \le k+1$, $0 \le l \le k+1$ и $r=l=k+1$. Учитывая (4.4.32) и обозначения $x_{ij} = q_{ij}^{(r-i,l-j)}$, $i=\overline{0,r}$, $j=\overline{0,l}$, имеем

$x_{10} = x_{01} = a_{r+l} = a_{k+1} = L_{1,k}$,

$x_{20} = x_{02} = -a_k L_{1,k} = -L_{2,k-1}$, $\quad x_{11} = -a_k(x_{10} + x_{01}) = -\binom{2}{1} L_{2,k-1}$,

$x_{30} = a_{k-1} L_{2,k-1} + \varepsilon_{30}^{(r-3,l)} = a_{k-1}(L_{2,k-1} + M_{2,k-1}) = L_{3,k-2}$,

$x_{21} = -a_{k-1}(x_{11} + x_{20}) + \varepsilon_{21}^{(r-2,l-1)} = \binom{3}{1} a_{k-1}(L_{2,k-1} + M_{2,k-1}) = \binom{3}{1} L_{3,k-2}$,

$x_{03} = L_{3,k-2}$, $x_{12} = \binom{3}{1} L_{3,k-2}$

и т.д. Используя метод математической индукции, находим

$$x_{ij} = -a_{k+1-i-j}(x_{i-1,j} + x_{i,j-1}) + \varepsilon_{ij}^{(r-i,l-j)} = (-1)^{i+j+1} a_{k+1-i-j} \times$$

$$\times \left(L_{i+j-1,k+1-i-j}\left(\binom{i+j-1}{i-1} + \binom{i+j-1}{i}\right) + \binom{i+j}{i} M_{i+j-1,k+1-i-j} \right) =$$

$$= (-1)^{i+j+1} L_{i+j,k-i-j}.$$

ВЦД (4.4.9), у которой все $a_{ij} = a_{i+j}$, $i,j = 0,1,2,\ldots$, тождественна непрерывной дроби (4.4.33). ■

Последнее утверждение не справедливо для других типов соответствующих ВЦД. В качестве контрпримера рассмотрим соответствующие дроби вида (4.4.2) и (4.4,8), являющиеся разложением функции e^{x+y} Их вторые подходящие дроби соответственно равны

$$g_2 = 1 + \frac{x}{1 - \frac{1}{2}x} + \frac{y}{1 - \frac{1}{2}y} + \frac{xy}{1} = \frac{(1 + xy)(2 - x)(2 - y) + 4(x + y - xy)}{(2 - x)(2 - y)},$$

$$h_2 = 1 + \frac{y}{1 - \frac{1}{2}y} + \frac{x}{1 - y - \frac{1}{2}x} = \frac{4 + 2x - 2y - 2y^2 - 3xy}{(2 - y)(2 - 2y - x)}.$$

Вторая же подходящая дробь непрерывной дроби (4.4.33), в которую разлагается функция e^{x+y}, равна

$$h_2 = 1 + \frac{x + y}{1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y} = \frac{1 + x + y}{2 - (x + y)}.$$

Очевидно, что $f_2 \neq g_2$ и $f_2 \neq h_2$.

§5. Гипергеометрические функции двух переменных и ветвящиеся цепные дроби

Гипергеометрические функции являются наиболее важными специальными функциями в приложениях [85,94]. Используя α-метод, В.К.Дзядык в работе [67] построил асимптотически наилучшие рациональные с фиксированным знаменателем приближения аналитических частей специальных функций. С помощью разложения отношения двух гипергеометрических функций в непрерывные дроби строятся эффективные алгоритмы представления в виде непрерывных дробей многих элементарных и специальных функций математической физики [65,202]. Аппель в [145] ввел гипергеометрические ряды от двух переменных и перенёс на них многие известные в одномерном случае результаты. Эти исследования подытожены в монографии [146]. Ряды (В.35), (В.37) сходятся в области $|z_1|<1, |z_2|<1$, ряд (В.36) – в области $|z_1|+|z_2|<1$, ряд (В.38) в области $\sqrt{|z_1|}+\sqrt{|z_2|}<1$.

Разложим отношение гипергеометрических функций Аппеля $\dfrac{F_2(a+1,b,b';c+1,c';z_1,z_2)}{F_2(a,b,b';c,c';z_1,z_2)}$ в ветвящуюся цепную дробь. В одномерном случае для разложения отношения гипергеометрических рядов в непрерывную дробь Гаусса используются следующие соотношения [65,202]:

$$F(a,b;c;z)=F(a,b+1;c+1;z)-\frac{a(c-b)}{c(c+1)}zF(a+1,b+1;c+2;z),$$

$$F(a,b;c;z)=F(a+1,b;c+1;z)-\frac{c(c-a)}{c(c+1)}zF(a+1,b+1;c+2;z).$$

В [111] приведены различные соотношения для гипергеометрических функций двух переменных. Двумерные аналоги последних формул в литературе, по-видимому, не рассматривались. Докажем, что для функций Аппеля F_2 справедливы следующие тождества:

$$F_2(a,b,b';c,c';z_1,z_2)=F_2(a+1,b,b';c+1,c';z_1,z_2)=$$

$$=-\frac{b(c-a)}{c(c+1)}z_1F_2(a+1,b+1,b';c+2,c';z_1,z_2)-$$
$$-\frac{b'}{c'}z_2F_2(a+1,b,b'+1;c+1,c'+1;z_1,z_2), \tag{4.5.1}$$

$$F_2(a,b,b';c,c';z_1,z_2)-F_2(a,b+1,b';c+1,c';z_1,z_2)=$$
$$=-\frac{a(c-b)}{c(c+1)}z_1F_2(a+1,b+1,b';c+2,c';z_1,z_2), \tag{4.5.2}$$

$$F_2(a,b,b';c,c';z_1,z_2)-F_2(a+1,b,b';c,c'+1;z_1,z_2)=$$
$$=-\frac{b}{c}z_1F_2(a+1,b+1,b';c+1,c'+1;z_1,z_2)-$$
$$-\frac{b'(c'-a)}{c'(c'+1)}z_2F_2(a+1,b,b'+1;c,c'+2;z_1,z_2), \tag{4.5.3}$$

$$F_2(a,b,b';c,c';z_1,z_2)-F_2(a,b,b'+1;c,c'+1;z_1,z_2)=$$
$$=-\frac{a(c'-b')}{c'(c'+1)}z_2F_2(a+1,b,b';c,c'+2;z_1,z_2). \tag{4.5.4}$$

Действительно, пусть m и n – произвольные натуральные числа. Сравнивая коэффициенты в правой и левой частях (4.5.1) при $z_1^m z_2^n$, имеем

$$\frac{(a+1)_{m+n}(b)_m(b')_n}{(c+1)_m(c')_n m!n!}-\frac{(c-a)b}{c(c+1)}\frac{(a+1)_{m+n-1}(b+1)_{m-1}(b')_n}{(c+2)_m(c')_n(m-1)!n!}-$$
$$-\frac{b'}{c'}\frac{(a+1)_{m+n-1}(b)_m(b'+1)_{n-1}}{(c+1)_m(c'+1)_{n-1}m!(n-1)!}=$$

$$=\frac{(a+1)_{m+n-1}(b)_m(b')_n}{(c+1)_m(c')_n(m-1)!(n-1)!}\left(\frac{a+m+n}{m\cdot n}-\frac{c-a}{c\cdot n}-\frac{1}{m}\right)=$$
$$=\frac{(a+1)_{m+n-1}(b)_m(b')_n}{(c+1)_m(c')_n(m-1)!(n-1)!}\cdot\frac{a(c+m)}{c\cdot m\cdot n}=\frac{(a)_{m+n}(b)_m(b')_n}{(c)_m(c')_n m!n!}.$$

Рассмотрим случай, когда m или n равно нулю. Пусть для определённости $m=0,\ n\geq 1$. Тогда, сравнивая в (4.5.1) коэффициенты при z_2^n, получим

$$\frac{(a+1)_n(b')_n}{(c')_n n!}-\frac{b'}{c'}\frac{(a+1)_{n-1}(b'+1)_n}{(c'+1)_{n-1}!(n-1)!}=$$

$$=\frac{(a+1)_{n-1}(b')_n}{(c')_n(n-1)!}\left(\frac{\alpha+n}{n}-1\right)=\frac{(a)_n(b')_n}{(c')_{n-1}!(n)!}.$$

Убедимся в справедливости (4.5.2). Пусть n – целое неотрицательное, m – натуральное. Сравнивая коэффициенты при $z_1^m z_2^n$ в (4.5.2), имеем

$$\frac{(a)_{m+n}(b+1)_m(b')_n}{(c+1)_m(c')_n m!n!}-\frac{(c-b)a}{c(c+1)}\cdot\frac{(a+1)_{m+n-1}(b+1)_{m-1}(b')_n}{(c+2)_{m-1}(c')_n(m-1)!n!}=$$

$$=\frac{(a)_{m+n}(b+1)_{m-1}(b')_n}{(c+1)_m(c')_n(m-1)!n!}\left(\frac{b+m}{m}-\frac{c-b}{c}\right)=\frac{(a)_{m+n}(b)_m(b')_n}{(c)_m(c')_n m!n!}.$$

Если же $m=0$, то, сравнивая коэффициенты при z_2^n, в обеих частях (4.5.2), получим одинаковые выражения. Аналогичным образом проверяются соотношения (4.5.3) и (4.5.4).

Введём сокращенные обозначения

$$X_{pq}=\frac{F_2(a+p+q+1,b+p,b'+q;c+2p+1,c'+2q;z_1,z_2)}{F_2(a+p+q,b+p,b'+q;c+2p,c'+2q;z_1,z_2)},\quad p,q=0,1,2,\ ...$$

$$X'_{pq}=\frac{F_2(a+p+q+1,b+p,b'+q;c+2p+1,c'+2q;z_1,z_2)}{F_2(a+p+q,b+p,b'+q;c+2p+1,c'+2q-1;z_1,z_2)},\tag{4.5.5а}$$
$$p=0,1,2,\ ...,\ q=1,2,...\ ,$$

$$Y_{pq}=\frac{F_2(a+p+q,b+p,b'+q;c+2p,c'+2q;z_1,z_2)}{F_2(\alpha+p+q,b+p-1,b'+q;c+2p-1,c'+2q;z_1,z_2)},$$
$$p=1,2,...,\quad q=0,1,2,\ ...\ ,$$

$$Y'_{pq}=\frac{F_2(a+p+q,b+p,b'+q;c+2p+1,c'+2q-1;z_1,z_2)}{F_2(a+p+q,b+p,b'+q-1;c+2p-1,c'+2q-2;z_1,z_2)},\tag{4.5.5б}$$
$$p,=0,1,2,\ ...,\ q=1,2,...\ .$$

$$a_{pq}=\frac{(c-a+p-q)(b+p)}{(c+2p)(c+2p+1)},\quad p,q=0,1,2,...,$$
$$a'_{pq}=\frac{(c'-a-p+q-1)(b'+q)}{(c'+2q)(c'+2q-1)},\quad p=0,1,2,...,\ q=1,2,...,$$
$$a_p=\frac{b+p}{c+2p+1},\ p=0,1,2,...,\quad a'_q=\frac{c'+q}{c'+2q},\ q=0,1,2,...,\tag{4.5.6}$$

$$b_{pq}=\frac{(c-b+p)(a+p+q)}{(c+2p-1)(c+2p)},\quad p=1,2,\ ...,\ q=0,1,2,...,$$
$$b'_{pq}=\frac{(c'-b'+q-1)(a+p+q)}{(c'+2q-2)(c'+2q-1)},\quad p=0,1,2,...,\ q=1,2,....$$

Подставив в (4.5.1) вместо a, b, b', c и c' соответственно $a+p+q,\ b+p,\ \beta_2,\ c+2p,\ c'+2q$ и разделив обе части этого равенства на $F_2(a+p+q, b+p, b'+q; c+2p+1, c'+2q; z_1, z_2)$, имеем

$$X_{pq}^{-1} = 1 - a_{pq} z_1 Y_{p+1,q} - a'_q z_2 Y'_{p,q+1}.$$

Аналогичные формулы устанавливаются, если исходить из (4.5.2)–(4.5.4). После обращения этих тождеств получим

$$\begin{cases} X_{pq} = \left(1 - a_{pq} z_1 Y_{p+1,q} - a'_q z_2 Y'_{p,q+1}\right)^{-1}, \\ X'_{pq} = \left(1 - a_p z_1 Y_{p+1,q} - a'_{pq} z_2 Y'_{p,q+1}\right)^{-1}, \\ Y_{pq} = \left(1 - b_{pq} z_1 X_{pq}\right)^{-1}, \quad Y'_{pq} = \left(1 - b'_{pq} z_2 X'_{pq}\right)^{-1}. \end{cases} \tag{4.5.7}$$

Используя (4.5.7), легко построить разложение отношения гипергеометрических функций Аппеля $\dfrac{F_2(a+1, b, b'; c+1, c'; z_1, z_2)}{F_2(a, b, b'; c, c'; z_1, z_2)}$ в ВЦД. Имеем:

$$\frac{F_2(a+1, b, b'; c+1, c'; z_1, z_2)}{F_2(a, b, b'; c, c'; z_1, z_2)} = X_{0,0} = \frac{1}{1 - a_{00} z_1 Y_{1,0} - a'_0 z_2 Y'_{0,1}} =$$

$$= \cfrac{1}{1 - \cfrac{a_{0,0} z_1}{1 - b_{1,0} z_1 X_{1,0}} - \cfrac{a'_0 z_2}{1 - b'_{0,1} z_2 X'_{01}}} =$$

$$= \cfrac{1}{1 - \cfrac{a_{0,0} z_1}{1 - \cfrac{b_{1,0} z_1}{1 - a_{1,0} z_1 Y_{2,0} - a'_0 z_2 Y'_{1,1}}} - \cfrac{a'_0 z_2}{1 - \cfrac{b'_{0,1} z_2}{1 - a_0 z_1 Y_{1,1} - a'_{01} z_2 Y'_{0,2}}}} = \ldots$$

Продолжая этот процесс, приходим к формальному разложению в ВЦД отношения гипергеометрических функций Аппеля.

Т е о р е м а 4.5.1 [28, 35]. Справедливо разложение

$$\frac{F_2(a+1, b, b'; c+1, c'; z_1, z_2)}{F_2(a, b, b'; c, c'; z_1, z_2)} = \left(1 - \sum_{i_1=1}^{2} \frac{u_{i(1)} z_{i_1}}{1} - \frac{v_{i(1)} z_{i_1}}{1} - \right.$$

$$\left. - \sum_{i_2=1}^{2} \frac{u_{i(2)} z_{i_2}}{1} - \frac{v_{i(2)} z_{i_2}}{1} - \ldots - \sum_{i_n=1}^{2} \frac{u_{i(n)} z_{i_n}}{1} - \frac{v_{i(n)} z_{i_n}}{1} - \ldots - \right)^{-1}, \tag{4.5.8}$$

где

$$v_{i(n)} = \begin{cases} b_{pq}, & если\ i_n = 1, \\ b'_{pq}, & если\ i_n = 2, \end{cases} \tag{4.5.9}$$

$$u_1 = a_{0,0},\ u_2 = a'_0$$

и

$$u_{i(n+1)} = \begin{cases} a_{pq}, & если\ i_n = i_{n+1} = 1, \\ a'_{pq}, & если\ i_n = i_{n+1} = 2, \\ a_p, & если\ i_n = 2,\ i_{n+1} = 1, \\ a'_q, & если\ i_n = 1,\ i_{n+1} = 2, \end{cases} \tag{4.5.10}$$

p обозначает количество единиц в мультииндексе $i(n)$, $q = n - p$, a_{pq}, a'_{pq}, a_p, a'_q, b_{pq}, b'_{pq} определяются согласно (4.5.6).

Доказательство. Используем метод математической индукции. При $n = 1,2,$ формулы (4.5.9), (4.5.10) проверяются непосредственно. Пусть они справедливы при $n = k$. Тогда, останавливая разложение X_{00} в ВЦД на элементах $v_{i(k)}$, получим конечную ветвящуюся цепную дробь, последние тупиковые элементы которой имеют вид $v_{i(k)}\, z_{i_k} X_{pq}$ либо $v_{i(k)}\, z_{i_k} X'_{pq}$, где p – количество единиц в мультииндексе $i(k)$, $q = k - p$. Учитывая (4.5.7), имеем

$$v_{i(k-1)1} z_1 X_{pq} = \cfrac{v_{i(k-1)1} z_1}{1 - \cfrac{u_{i(k-1)11} z_1}{1 - v_{i(k-1)11} z_1 X_{p+1,q}} - \cfrac{u_{i(k-1)12} z_2}{1 - v_{i(k-1)12} z_2 X'_{p,q+1}}},$$

$$v_{i(k-1)2} z_2 X'_{pq} = \cfrac{v_{i(k-1)2} z_2}{1 - \cfrac{u_{i(k-1)21} z_1}{1 - v_{i(k-1)21} z_1 X_{p+1,q}} - \cfrac{u_{i(k-1)22} z_2}{1 - v_{i(k-1)22} z_2 X'_{p,q+1}}},$$

где p – количество единиц в мультииндексе $i(k-1)1$ или $i(k-1)2$ соответственно. Таким образом,

$$u_{i(k-1)11} = a_{pq},\ u_{i(k-1)12} = a'_q,\ u_{i(k-1)21} = a_p,\ u_{i(k-1)22} = a'_{pq},$$

$$v_{i(k)1} = b_{p+1,q},\ v_{i(k)2} = b'_{p,q+1},$$

т.е. формулы (4.5.9), (4.5.10) справедливы при $n = k + 1$. ■

Аналогично можно построить разложение отношения гипергеометрических функций Аппеля $\dfrac{F_2\left(a+1,b,b';c,c'+1;z_1,z_2\right)}{F_2\left(a,b,b';c,c';z_1,z_2\right)}$, $\dfrac{F_2\left(a,b+1,b';c+1,c';z_1,z_2\right)}{F_2\left(a,b,b';c,c';z_1,z_2\right)}$ в ВЦД.

Теорема 4.5.2. Справедливо разложение

$$\frac{F_2\left(a,b+1,b';c+1,c';z_1,z_2\right)}{F_2\left(a,b,b';c,c';z_1,z_2\right)}=\left(1-v_0 z_1\left(1-\sum_{i_1=1}^{2}\frac{u_{i(1)}z_{i_1}|}{|1}-\frac{v_{i(1)}z_{i_1}|}{|1}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\sum_{i_2=1}^{2}\frac{u_{i(2)}z_{i_2}|}{|1}-\frac{v_{i(2)}z_{i_2}|}{|1}-\ldots-\sum_{i_n=1}^{2}\frac{u_{i(n)}z_{i_n}|}{|1}-\frac{v_{i(n)}z_{i_n}|}{|1}-\ldots\right)^{-1}\right)^{-1},$$

где $v_0=b_{0,0}$, $u_1=a_{0,0}$, $u_2=a'_0$, $v_{i(n)}$ определяются согласно (4.5.9), $u_{i(n+1)}$ – согласно (4.5.10) и

$$a_{pq}=\frac{(c-a+p-q+1)(b+p+1)}{(c+2p+1)(c+2p+2)},\quad p,q=0,1,2,\ldots,$$

$$a'_{pq}=\frac{(c'-a-p+q-1)(b'+q)}{(c'+2q-1)(c'+2q)},\quad p=0,1,2,\ldots,\ q=1,2,\ldots,$$

$$a_p=\frac{b+p+1}{c+2p+2},\ p=0,1,2,\ldots,\quad a'_q=\frac{b'+q}{c'+2q},\ q=0,1,2,\ldots,$$

$$b_{pq}=\frac{(c-b+p)(a+p+q)}{(c+2p)(c+2p+1)},\quad p.q=0,1,2,\ldots,$$

$$b'_{pq}=\frac{(c'-b'+q-1)(a+p+q)}{(c'+2q-2)(c'+2q-1)},\quad p=0,1,2,\ldots,\ q=1,2,\ldots\ .$$

Теорема 4.5.3 [35]. ВЦД (4.5.8) является соответствующей к формальному степенному ряду, в который разлагается функция

$$X_{0,0}^{(1)}=\frac{F_2\left(a+1,b,b';c+1,c';z_1,z_2\right)}{F_2\left(a,b,b';c,c';z_1,z_2\right)}. \qquad (4.5.11)$$

Доказательство. Используя алгоритм разложения $X_{0,0}$ в ветвящуюся цепную дробь, можно записать тождества, справедливые для произвольного натурального k.

$$X_{0,0}^{-1}=1-\sum_{i_1=1}^{2}\frac{u_{i(1)}z_{i_1}}{1}\,-\,\frac{v_{i(1)}z_{i_1}}{1}\,-\ldots-$$
$$-\sum_{i_{k-1}=1}^{2}\frac{u_{i(k-1)}z_{i_{k-1}}}{1}\,-\,\frac{v_{i(k-1)}z_{i_{k-1}}}{1}\,-\,\sum_{i_k=1}^{2}\frac{u_{i(k)}z_{i_k}}{1-v_{i(k)}z_{i_k}\xi_{i(k)}},\tag{4.5.12}$$

$$X_{0,0}^{-1}=1-\sum_{i_1=1}^{2}\frac{u_{i(1)}z_{i_1}}{1}\,-\,\frac{v_{i(1)}z_{i_1}}{1}\,-\ldots-\sum_{i_{k-1}=1}^{2}\frac{u_{i(k-1)}z_{i_{k-1}}}{1}\,-\,\frac{v_{i(k-1)}z_{i_{k-1}}}{1-\sum\limits_{i_k=1}^{2}u_{i(k)}z_{i_k}\eta_{i(k)}},\tag{4.5.13}$$

где

$$\xi_{i(k)}=\begin{cases}X_{pq}, & если\quad i_k=1,\\ X'_{pq}, & если\quad i_k=2,\end{cases}\qquad \eta_{i(k)}=\begin{cases}Y_{pq}, & если\quad i_k=1,\\ Y'_{pq}, & если\quad i_k=2,\end{cases}\tag{4.5.14}$$

и p – количество единиц в мультииндексе $i(k)$, $q=k+p$. Используя методику вывода формулы (1.3.4) разности подходящих дробей f_i для ВЦД (1.3.1), легко доказать, что

$$X_{0,0}-f_{2k}=\sum_{i_1,i_2,\ldots,i_k=1}^{2}\frac{\prod\limits_{r=1}^{k}\left(u_{i(r)}v_{i(r)}\right)\prod\limits_{r=1}^{k}\left(z_{i_r}\right)^2\left(\xi_{i(k)}-1\right)}{\prod\limits_{r=0}^{k-1}\left(\hat{u}_{i(r)}^{(2k)}u_{i(r)}^{(2k)}\right)\prod\limits_{r=1}^{k}\left(\hat{v}_{i(r)}^{(2k)}v_{i(r)}^{(2k)}\right)},\tag{4.5.15}$$

$$X_{0,0}-f_{2k-1}=\sum_{i_1,i_2,\ldots,i_k=1}^{2}\frac{\prod\limits_{r=1}^{k-1}v_{i(r)}\prod\limits_{r=1}^{k}u_{i(r)}\prod\limits_{r=1}^{k-1}\left(z_{i_r}\right)^2\cdot z_{i_k}\left(\eta_{i(k)}-1\right)}{\prod\limits_{r=0}^{k-1}\left(\hat{u}_{i(r)}^{(2k-1)}u_{i(r)}^{(2k-1)}\right)\prod\limits_{r=1}^{k}\left(\hat{v}_{i(r)}^{(2k-1)}v_{i(r)}^{(2k-1)}\right)},\tag{4.5.16}$$

где f_k – k-я аппроксиманта ВЦД (4.5.8), $i_0=0$, $\xi_{i(k)},\eta_{i(k)}$ определяются согласно (4.5.14),

$$u_{i(r)}^{(2k)}=1-\sum_{i_{r+1}=1}^{2}\frac{u_{i(r+1)}z_{i_{r+1}}}{1}\,-\,\frac{v_{i(r+1)}z_{i_{r+1}}}{1}\,-\ldots-$$
$$-\sum_{i_{k-1}=1}^{2}\frac{u_{i(k-1)}z_{i_{k-1}}}{1}\,-\,\frac{v_{i(k-1)}z_{i_{k-11}}}{1}\,-\,\sum_{i_k=1}^{2}\frac{u_{i(k)}z_{i_k}}{1-v_{i(k)}z_{i_k}},$$

$$u_{i(r)}^{(2k-1)}=1-\sum_{i_{r+1}=1}^{2}\frac{u_{i(r+1)}z_{i_{r+1}}}{1}\,-\,\frac{v_{i(r+1)}z_{i_{r+1}}}{1}\,-\ldots-$$
$$-\sum_{i_{k-1}=1}^{2}\frac{u_{i(k-1)}z_{i_{k-1}}}{1}\,-\,\frac{v_{i(k-1)}z_{i_{k-11}}}{1}\,-\,\sum_{i_k=1}^{2}\frac{u_{i(k)}z_{i_k}}{1},$$

$$\hat{u}_{i(r)}^{(2k)} = 1 - \sum_{i_{r+1}=1}^{2} \frac{u_{i(r+1)} z_{i_{r+1}}}{1} - \frac{v_{i(r+1)} z_{i_{r+1}}}{1} - \ldots -$$

$$- \sum_{i_{k-1}=1}^{2} \frac{u_{i(k-1)} z_{i_{k-1}}}{1} - \ldots - \frac{v_{i(k-1)} z_{i_{k-1}}}{1} - \ldots - \sum_{i_k=1}^{2} \frac{u_{i(k)} z_{i_k}}{- v_{i(k)} z_{i_k} \xi_{i(k)}},$$

$$\hat{u}_{i(r)}^{(2k-1)} = 1 - \sum_{i_{r+1}=1}^{2} \frac{u_{i(r+1)} z_{i_{r+1}}}{1} - \frac{v_{i(r+1)} z_{i_{r+1}}}{1} - \ldots -$$

$$- \sum_{i_{k-1}=1}^{2} \frac{u_{i(k-1)} z_{i_{k-1}}}{1} - \frac{v_{i(k-1)} z_{i_{k-1}}}{1} - \sum_{i_k=1}^{2} \frac{u_{i(k)} z_{i_k} \eta_{i(k)}}{1},$$

$$v_{i(r)}^{(m)} = 1 - \frac{v_{i(r)}}{u_{i(r)}^{(m)}}, \quad \hat{v}_{i(r)}^{(m)} = \frac{v_{i(r)}}{\hat{u}_{i(r)}^{(m)}}, \quad (m = 2k-1, 2k).$$

При выводе формулы (4.5.15) используем представление $X_{0,0}$ в виде (4.5.12), а при выводе формулы (4.5.16) – представление (4.5.12). Так как все выражения, стоящие в знаменателях (4.5.15) и (4.5.16), а также $\xi_{i(k)}, \eta_{i(k)}$ равны единице, если $z_1 = z_2 = 0$, то в некоторой окрестности точки $(0,0) \in \mathbf{C}^2$ они отличны от нуля. Разложив формально в степенные ряды величины, обратные к знаменателям (4.5.15) и (4.5.16), а также $\xi_{i(k)}, \eta_{i(k)}$, легко убеждаемся в том, что

$$X_{0,0} - f_{2k} = \sum_{i \ge 0, j \ge 0, i+j \ge 2k+1} \alpha_{ij} (z_1)^i (z_2)^j, \quad X_{0,0} - f_{2k-1} = \sum_{i \ge 0, j \ge 0, i+j \ge 2k} \beta_{ij} (z_1)^i (z_2)^j,$$

т.е. ВЦД (4.5.8) является соответствующей к ряду, в который формально разлагается функция (4.5.11).■

Разложим отношение двух гипергеометрических функций Аппеля $\dfrac{F_2(a+1, b; c+1, c'; z_1, z_2)}{F_2(a, b; c, c'; z_1, z_2)}$ в ветвящуюся цепную дробь. По аналогии с (4.5.1)–(4.5.4) доказываются тождества

$$\begin{aligned} F_4(a, b; c, c'; z_1, z_2) &= F_4(a+1, b; c+1, c'; z_1, z_2) = \\ &= -\frac{b(c-a)}{c(c+1)} z_1 F_4(a+1, b+1; c+2, c'; z_1, z_2) - \\ &- \frac{b}{c'} z_2 F_4(a+1, b+1; c+1, c'+1; z_1, z_2), \end{aligned} \tag{4.5.17}$$

$$F_4(a,b;c,c';z_1,z_2) - F_4(a,b+1;c+1,c';z_1,z_2) = \\ = -\frac{a(c-\beta)}{c(c+1)} z_1 F_4(a+1,b+1;c+2,c';z_1,z_2) - \\ - \frac{a}{c'} z_2 F_4(a+1,b+1;c+1,c'+1;z_1,z_2), \tag{4.5.18}$$

$$F_4(a,b;c,c';z_1,z_2) - F_4(a,b+1;c,c'+1;z_1,z_2) = \\ = -\frac{a}{c} z_1 F_4(c+1,b+1;c+1,c'+1;z_1,z_2) - \\ - \frac{a(c'-b)}{c'(c'+1)} z_2 F_4(a+1,b+1;c,c'+1;z_1,z_2), \tag{4.5.19}$$

$$F_4(a,b;c,c';z_1,z_2) - F_4(a+1,b;c,c'+1;z_1,z_2) = \\ = -\frac{b}{c} z_1 F_4(a+1,b+1;c+1,c'+1;z_1,z_2) - \\ - \frac{b(c'-a)}{c'(c'+1)} z_2 F_4(a+1,b+1;c,c'+2;z_1,z_2). \tag{4.5.20}$$

Введём сокращенные обозначения

$$X_{pq} = \frac{F_4\left(a+\left[\frac{p+q}{2}\right]+1, b+\left[\frac{p+q+1}{2}\right]; c+p+1, c'+q; z_1, z_2\right)}{F_4\left(a+\left[\frac{p+q+1}{2}\right], b+\left[\frac{p+q}{2}\right]; c+p, c'+q; z_1, z_2\right)}, \; p,q=0,1,2,..., \tag{4.5.21}$$

$$X'_{pq} = \frac{F_4\left(a+\left[\frac{p+q}{2}\right]+1, b+\left[\frac{p+q+1}{2}\right]; c+p+1, c'+q; z_1, z_2\right)}{F_4\left(a+\left[\frac{p+q+1}{2}\right], b+\left[\frac{p+q}{2}\right]; c+p+1, c'+q-1; z_1, z_2\right)}, \; p,q=0,1,2,..., \tag{4.5.22}$$

где $[\alpha]$ – целая часть α. Пусть

$$a_{pq} = \frac{\left[c-a+\frac{p-q}{2}\right]\cdot\left[b+\frac{p+q}{2}\right]}{(c+p)(c+p+1)}, \quad b_{pq} = \frac{b+\frac{p+q}{2}}{c+p+1}, \\ a'_{pq} = \frac{\left[c'-a+\frac{q-p}{2}-1\right]\cdot\left[b+\frac{p+q}{2}\right]}{(c'+q-1)(c'+q)}, \quad b'_{pq} = \frac{b+\frac{p+q+1}{2}}{c'+q}, \tag{4.5.23}$$

если $p+q$ четное ($p,q=0,1,2,...$) и

$$a_{pq}=\frac{\left[c-b+\frac{p+1-q}{2}\right]\cdot\left[a+\frac{p+q+1}{2}\right]}{(c+p)(c+p+1)},\quad b_{pq}=\frac{a+\frac{p+q+1}{2}}{c+p+1},$$
$$a'_{pq}=\frac{\left[c'-b+\frac{q-p-1}{2}\right]\cdot\left[a+\frac{p+q+1}{2}\right]}{(c'+q-1)(c'+q)},\quad b'_{pq}=\frac{a+\frac{p+q+1}{2}}{c'+q}, \tag{4.5.24}$$

если $p+q$ нечетное ($p,q=0,1,2,...$). Тогда по аналогии с (4.5.7), используя тождества (4.5.17)–(4.5.20) и обозначения (4.5.21), (4.5.22), легко устанавливается, что

$$X_{pq}=\left(1-a_{pq}z_1X_{p+1,q}-b'_{pq}z_2X'_{p,q+1}\right)^{-1},$$
$$X'_{pq}=\left(1-b_{pq}z_1X_{p+1,q}-a'_{pq}z_2X'_{p,q+1}\right)^{-1}. \tag{4.5.25}$$

Последовательно включая друг в тождества (4.5.25), получим разложение в ВЦД отношения

$$X_{0,0}=\frac{F_4(a+1,b;c+1,c';z_1,z_2)}{F_4(a,b;c,c';z_1,z_2)}. \tag{4.5.26}$$

Теорема 4.5.4 [29, 35]. Справедливо разложение

$$X_{00}=\frac{F_4(a+1,b;c+1,c';z_1,z_2)}{F_4(a,b;c,c';z_1,z_2)}=\left(1+\mathop{D}_{k=1}^{\infty}\sum_{i_k=1}^{2}\frac{-c_{i(k)}z_{i_k}}{1}\right)^{-1}, \tag{4.5.27}$$

где $c_1=a_{00}$, $c_2=b'_{00}$ и при $k\geq 2$

$$c_{i(r)}=\begin{cases} a_{pq}, & \textit{если } i_{k-1}=i_k=1,\\ a'_{pq}, & \textit{если } i_{k-1}=i_k=2,\\ b_{pq}, & \textit{если } i_{k-1}=2,\ i_k=1,\\ b'_{pq}, & \textit{если } i_{k-1}=1,\ i_k=2,\end{cases} \tag{4.5.28}$$

p – количество единиц в мультииндексе $i(k-1)$, $q=k-p-1$.

Аналогично теореме 4.5.3 доказывается следующее утверждение.

Теорема 4.5.5. ВЦД (4.5.27) является соответствующей к формальному степенному ряду, в который разлагаеся отношение (2.5.26) гипергеометрических функций Аппеля.

Используя тождество [146]

$$F_1(\alpha,\beta,\beta';\gamma;x,y)=x^{\beta'}y^{-\beta'}F_2\left(\beta+\beta',\alpha,\beta';\gamma,\beta+\beta';x,1-\frac{x}{y}\right) \quad (4.5.29)$$

имеем

$$\frac{F_1(\alpha+1,\beta,\beta';\gamma+1;x,y)}{F_1(\alpha,\beta,\beta';\gamma;x,y)}=\frac{F_2(a,b+1,b';c+1,c';z_1,z_2)}{F_2(a,b,b';c,c';z_1,z_2)},$$

где $a=\beta+\beta'$, $b=\alpha$, $b'=\beta'$, $c=\gamma$, $c'=\beta+\beta'$, $z_1=x$, $z_2=1-\dfrac{x}{y}$. Из теоремы 4.5.2 следует

Теорема 4.5.6. Справедливо разложение

$$\frac{F_1(a+1,b,b';c+1;x,y)}{F_1(a,b,b';c;x,y)}=\left(1-v_0z_1\left(1-\sum_{i_1=1}^{2}\frac{u_{i(1)}z_{i_1}}{1}-\frac{v_{i(1)}z_{i_1}}{1}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\sum_{i_2=1}^{2}\frac{u_{i(2)}z_{i_2}}{1}-\frac{v_{i(2)}z_{i_2}}{1}-\ldots-\sum_{i_n=1}^{2}\frac{u_{i(n)}z_{i_n}}{1}-\frac{v_{i(n)}z_{i_n}}{1}-\ldots\right)^{-1}\right)^{-1}, \quad (4.5.30)$$

где $z_1=x$, $z_2=1-x/y$, $v_0=b_{00}$, $u_1=a_{00}$, $u_2=a'_0$, $v_{i(n)}$ определяются согласно (4.5.9), $u_{i(n+1)}$ – согласно (4.5.10) и

$$a_{pq}=\frac{(c-b-b'+p-q+1)(a+p+1)}{(c+2p+1)(c+2p+2)},\quad p,q=0,1,2,\ldots,$$

$$a'_{pq}=\frac{(q-p+1)(b'+q)}{(b+b'+2q-1)(b+b'+2q)},\quad p=0,1,2,\ldots,\ q=1,2,\ldots,$$

$$a_p=\frac{a+p+1}{c+2p+2},\quad p=0,1,2,\ldots,\quad a'_q=\frac{b'+q}{b+b'+2q},\quad q=0,1,2,\ldots,$$

$$b_{pq}=\frac{(c-a+p)(b+b'+p+q)}{(c+2p)(c+2p+1)},\quad p.q=0,1,2,\ldots,$$

$$b'_{pq}=\frac{(b+q-1)(b+b'+p+q)}{(b+b'+2q-2)(b+b'+2q-1)},\quad p=0,1,2,\ldots,\ q=1,2,. \quad (4.5.31)$$

Учитывая (В.35), (В.36), (В.38), имеем

$$F_1(0,b,b';c;z_1,z_2)=F_2(0,b,b';c,c';z_1,z_2)=F_4(0,b;c,c';z_1,z_2)=1.$$

Поэтому, исходя из (4.5.8), (4.5.27) и (4.5.30), получим формальные разложения в ВЦД гипергеометрических функций

$$F_1(1,b,b';c;z_1,z_2),\ F_2(1,b,b';c,c';z_1,z_2),\ F_4(1,b;c,c';z_1,z_2).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Аптекарев А.И. Асимптотика определителей Адамара и сходимость строк аппроксимаций Паде для суммы экспонент //Мат. сб.–1980.–**113**, № 4. – С.520–537.

2. Бейкер Дж., Грейвс-Моррис П. Аппроксимации Паде. Пер. с англ. – М.: Мир, 1986. – 502с.

3. Березкина Л.Л. О скорости сходимости строк тригонометрической таблицы Паде для некоторых функций, аналитических в горизонтальной полосе //Теория функций и приближений: Труды 4-й Саратовской зимней школы 25 января – 5 февраля 1988г. Саратов. В 3 ч.– Саратов. 1990. Ч.2. – С. 47–51.

4. Боднар Д.И. Некоторые применения ветвящихся цепных дробей в вычислительной математике //Вычисл. матем. в современном научно-техн. прогрессе. Вычисл. методы в алгебре, прикладной матем., в системах обработки данных и АСУ: Науч. конф. 26 – 28 сентября 1974. – Киев, 1974.– С. 94 – 103.

5. Боднар Д.И. Оценка погрешности вычисления ветвящихся цепных дробей //Докл. АН УССР. Сер.А – 1975. – № 12. – С. 1059 – 1062.

6. Боднар Д.И. Элементы аналитической теории ветвящихся цепных дробей: Дис. ... канд. физ.-мат. наук.– Львов, 1975. – 118 с.

7. Боднар Д.И. Аналог признака сходимости Ворпитского для ветвящихся цепных дробей //Мат. сб. – Киев: Наукова думка, 1976. – С. 40 – 43.

8. Боднар Д.И. Исследование сходимости одного класса ветвящихся цепных дробей //Цепные дроби и их применения.- Киев: Наукова думка, 1976. – С. 41 – 44.

9. Боднар Д.И. Об одном обобщении признака сходимости Зейделя для ветвящихся цепных дробей //Мат. сб.- Киев: Наукова думка, 1976. – С.44–47.

10. Боднар Д.И. Аналог признака сходимости Ворпитского для ветвящихся цепных дробей //Вопросы качественной теории дифференциальных урав-

нений и их приложения. – Киев: ИМ АН УССР, 1978. – С.7–8. На укр. яз.

11. Боднар Д.И. Необходимый признак сходимости ветвящихся цепных дробей с положительными компонентами //Мат. методы и физ.-мех. поля. 1979. – Вып. 10. – С. 15–19.
12. Боднар Д.И. Необходимый и достаточный признак сходимости ветвящихся цепных дробей с положительными членами //Там же. – 1981.– Вып. 13. – С. 12–15.
13. Боднар Д.И. Признаки сходимости ветвящихся цепных дробей с частными звеньями вида $\frac{(1-g_{i_1 i_2 .. i_k})\hat{g}_{i_1 i_2 .. i_k} x_{i_1 i_2 .. i_k}}{1}$ //Там же. –1982. – Вып. 15.– С. 30–35.
14. Боднар Д.И. Признаки сходимости ветвящихся цепных дробей //Докл. АН УССР. Сер. А. – 1983. – №8. – С. 3- 7.
15. Боднар Д.И. Признаки сходимости некоторых типов ветвящихся цепных дробей // Теория приближения функций: Тез. докл. межд. конф. 30 мая – 6 июня 1983. – Киев 1983. – С.28.
16. Боднар Д.И. Применение ветвящихся цепных дробей для решения интегральных уравнений //Интегральные уравнения в прикладном моделировании: Тез. докл. республ. научно-техн. конф. Октябрь 1983: В 2 ч. – Киев, 1983, ч.2. – С. 30 – 31.
17. Боднар Д.И. Современное состояние аналитической теории ветвящихся цепных дробей // Числ. методы решения задач мат. физики: Тез. докл. Всесоюзной школы молодых ученых 26 мая – 4 июня 1983, Львов: В 3 ч.– М., 1983, ч. 3. – С. 16 – 18.
18. Боднар Д.И. О сходимости и вычислительной устойчивости ветвящихся цепных дробей //Межд. конф. по конструктивной теории функций. Варна 27 мая – 2 июня 1984: Дополнительно представленные тез. докладов. – София, 1984. – С.15.
19. Боднар Д.И. Многомерные положительно определенные дроби //Мат. методы и физ.–мех. поля. – 1985. – Вып. 22. – С. 25–29.

20. Боднар Д.И. Ветвящиеся цепные дроби. – Киев: Наукова думка, 1986. – 176 с.
21. Боднар Д. И. Положительно определенные ветвящиеся цепные дроби //Теория функций и приближений: Труды 2-й Саратовской зимней школы 24 января–5 февраля 1984, Саратов. В 3 ч. – Саратов, 1986, ч.2. – С. 45–49.
22. Боднар Д.И. Области сходимости и области устойчивости для ветвящихся цепных дробей //Теория функций и приближений: Труды 3-й Саратовской зимней школы 27 января – 7 февраля 1986, Саратов. В 3 ч. – Саратов, 1987, ч.2. – С. 6 – 8.
23. Боднар Д.И. Признаки сходимости ветвящихся цепных дробей //Теория функций и смежные вопросы анализа: Труды МИ АН СССР им. В.А.Стеклова. – 1987. – 180. – С.52 – 53.
24. Боднар Д.И. Признаки сходимости некоторых типов ветвящихся цепных дробей // Теория приближения функций: Труды межд. конф. 31 мая – 5 июня 1983, Киев.- М.: Наука, 1987. – С.63 – 65.
25. Боднар Д.И. Признаки сходимости различных типов функциональных ветвящихся цепных дробей //Новые подходы к решению диф. уравнений: Тез. докл. Всесоюзной конф. Май 1987, Дрогобыч. – М., 1987. – С. 15–16.
26. Боднар Д.И. Аналоги признаков сходимости Прингсгейма для ветвящихся цепных дробей //Докл. АН УССР. Сер.А.– 1988. – № 10.-С 36-39.
27. Боднар Д.И. Ветвящиеся цепные дроби и интегральные уравнения //Интегральные уравнения в прикладном моделировании: Тез. докл. Ш республ. научно-техн. конф. 14 – 16 ноября 1989, Одесса. В 2 ч. Киев, 1989, Ч.1. – С. 32 – 33.
28. Боднар Д.И. Гипергеометрические функции Аппеля и ветвящиеся цепные дроби //Новые подхода к решению диф. уравнений: Тез. докл. второй всесоюз. конф. 30 мая – 1 июня 1989, Дрогобыч. – М., 1989. – С.25.
29. Боднар Д.И. Гипергеометрические функции двух переменных и ветвящиеся цепные дроби //Теория приближения функций: Тез. докл. Всесоюзн. школы 31 августа – 8 сентября 1989, Луцк.- Киев, 1989. –С. 19– 20.

30. Боднар Д.И. Двумерные соответствующие ветвящиеся цепные дроби с линейными относительно переменных компонентами //Современные проблемы теории функций: Тез. докл. Всесоюзн. школы-конф. 19 – 29 мая 1989. – Баку, 1989. – С.22 – 23.
31. Боднар Д.И. Признаки сходимости многомерных g-дробей //Методы исследования дифференциальных и интегральных операторов. – Киев: Наукова думка, 1989. – С. 22 – 27.
32. Боднар Д.И. Признаки сходимости типа Прингсгейма для ветвящихся цепных дробей //Укр. мат. журнал. – 1989. – **41**, № 11. – С 1559 – 1563.
33. Боднар Д И. Двумерные соответствующие ветвящиеся цепные дроби с линейными относительно переменных частными числителями //Докл. АН УССР. Сер. А. – 1990. – № 10. – С 3 – 6.
34. Боднар Д.И. Некоторые типы функциональных ветвящихся цепных дробей и свойства функций, которые они представляют //Экстремальные задачи теории приближения и их приложения: Тез. докл. научн. конф. 29–31 мая 1990. – Киев, 1990. – С.18.
35. Боднар Д.И. разложение отношения гипергеометрических функций двух переменных в ветвящиеся цепные дроби //Мат. методы и физ. –мех. поля.– 1990. – Вып. 32. – С.40 – 44.
36. Боднар Д.И. Соответствующие ветвящиеся цепные дроби с линейными частными числителями для двойного степенного ряда //Укр. мат. журнал – 1991. – **43**, № 4. – С.
37. Боднар Д.И., Кучминская Х.И. О сходимости разложений функций двух переменных в соответствующую ветвящуюся цепную дробь //Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1980. – Вып. 11. – С. 3 – 6.
38. Боднар Д.И., Кучминская Х.И. Абсолютная сходимость четной и нечетной части двумерной соответствующей цепной дроби //Там же. – 1983. – Вып. 18. – С. 30 – 34.
39. Боднар Д.И., Олексив И.Я. Достаточные признаки сходимости ветвящейся цепной дроби с положительными членами //Там же. – 1975. –

Вып. 2. – С. 160 – 161.

40. Боднар Д.И., Олексив И.Я. О сходимости ветвящихся цепных дробей с неотрицательными членами //Укр. мат. журнал. – 1976. – **28**, № 3. – С.373–377.

41. Боднар Д.И., Шевчук С.П. Аналог теоремы Ворпитского для двумерных соответствующих ветвящихся цепных дробей //Вестн. Львов. политехн ин-та. – 1982. – № 169. – С. 7 – 9.

42. Боднарчук П.И. Некоторые преобразования ветвящихся цепных дробей //Мат. методы и физ. –мех. поля. – 1975. – Вып. 2. – С. 153 – 155.

43. Боднарчук П.И. Исследование по теории дробно-рациональных приближений и решению жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений: Дис. ... докт. физ.-мат. наук.– Львов, 1988.

44. Боднарчук П.И., Кучминская Х.И. Интерполяционная и функциональная формулы для функций многих переменных в виде ветвящихся цепных дробей //Мат. методы и физ. –мех. поля. – I975. – Вып. 2. – С.31 – 36.

45. Боднарчук П.И., Скоробогатько В.Я. Ветвящиеся цепные дроби и их применения. – Киев: Наукова думка, 1974. – 272 с. На укр. яз.

46. Болтарович Е.А. Круговые области сходимости для ветвящихся цепных дробей с частными числителями равными единице //Материалы 11-ой конф. молодых ученых Ин-та прикл. пробл. мех. и мат. АН УССР. – Львов, 1987. – С.20 – 24. – Деп. в ВИНИТИ 17.02.87, №:1088-В8'

47. Болтарович Е.А. Аналог признака сходимости Уолла–Лейтона для ветвящихся цепных дробей //Методы исследования дифференциальных и интегральных операторов. – Киев: Наукова думка, 1989. – С. 32 – 36.

48. Болтарович Е.А. Области сходимости ветвящихся цепных дробей //Теория приближения функций: Тез. докл. Всесозн. школы 31 августа – 8 сентября 1989, Луцк. – Киев, 1989. – С.23.

49. Брудный Ю.А. Рациональная аппроксимация и теоремы вложения //Докл. АН СССР. – 1979. – **247**, №2. – С. 269 – 272.

50. Буланов А.П. О порядке приближения выпуклых функций рациональ-

ными //Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1969. – **33**, № 5. – С.1132 – 1148.

51. Буслаев В.И., Гончар А.А., Суетин С.П. О сходимости подпоследовательностей -ой строки таблицы Паде //Мат. сб. – 1983. – **120**, № 4. – С. 540 – 545.
52. Вавилов В.В. О сходимости аппроксимаций Паде мероморфных функций /Мат. сб. – 1976. – **101,** № 1. – С. 44 – 56.
53. Виленкин Н.Я. Комбинаторика. М.: Наука, 1969. – 328 с.
54. Вороной Г.Ф. 0б одном обобщении алгоритма непрерывных дробей. Дис. ... .– Варшава, 1896. – 160 с.
55. Габович Я.А. Периодические непрерывные дроби высших иррациональностей: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Тарту, 1950. – 121 с.
56. Голуб А.П. Применение обобщенной проблемы моментов к аппроксимации Паде некоторых функций //Обобщенная проблема моментов и аппроксимация Паде. – Киев, 1981. – С. 16 – 56. – /Препринт/ АН УССР, Ин-т математики: № 81.58.
57. Голузин Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. – М.: Наука. – 1966. – 628 с.
58. Гончар А.А. 0 наилучших приближениях рациональными функциями //Докл. АН СССР. – 1955. – **100**, № 2. – С. 205 – 208.
59. Гончар А.А. О скорости рациональной аппроксимации непрерывных функций с характерными особенностями //Мат. сб. – 1967. – **73**, № 4. – С.630 – 638.
60. Гончар А.А. Скорость приближения рациональными дробями свойства функций //Тр. Междунар. конфер математиков, Москва, 1966. – М.: Мир. – 1968. – С. 329 – 316.
61. Гончар А.А. О сходимости аппроксимаций Паде для некоторых: классов меромофных функций //Мат. сб. – 1975. – **97**, №4. – С.607 – 629.
62. Гончар А.А. О сходимости обобщенных аппроксимаций Паде мероморфных функций //Там же. – 1975. – **98**, № 4. – С. 564 – 577.
63. Гончар А.А. О равномерной сходимости диагональных аппроксимаций

Паде //Там же. – 1982. – **118**, №4. – С. 535 – 555.

64. Гончар А.А., Равшанов Е.А. О сходимости совместных аппроксимаций Паде для системы функций марковского типа //Тр. мат. ин-та им. В.А.Стеклова АН СССР. – 1981. – 157. – С. 31 – 48.
65. Джоунс У., Трон В. Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения. Пер. с англ. – М.: Мир. – 1985. – 414 с.
66. Дзядык В. К. Об асимптотике диагональных аппроксимаций Паде функций $\sin z, \cos z, \mathbf{sh}\, z$ и $\mathbf{ch}\, z$ //Мат. сб. – 1979. – **108**, №2. – С.247 – 267.
67. Дзядык В. К. К теории специальных функций и их приближений // Там же. – 1986. – **131**, № 4. – С. 438 – 464.
68. Дзядык В.К. Аппроксимацинные методы решения дифференциальных: и интегральных уравнений. – Киев: Наукова думка, 1988. – 304 с.
69. Дзядык В.К., Филозоф Л.И. О скорости сходимости аппроксимаций Паде для некоторых элементарных функций //Мат. сб.– 1978. – **107**, № 3. – С.347 – 363.
70. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. Изд. 4-е испр. – М.: Наука, 1970. – 664 с.
71. Долженко Е.П. Скорость приближения рациональными дробями и свойства функций //Мат. сб. – 1962. – **56**, № 4. – С. 403 – 432.
72. Долженко Е.П. О зависимости граничных свойств аналитических функций от скорости ее приближения рациональным функциями //Там же. – 1977. – **103,** № 1. – С.131 – 142.
73. Дронюк Н.С. Разложение некоторых функций в ветвящиеся цепные дроби //Вторая научн, конф. молодых математиков Украины. – Киев: Наукова думка, 1966. – С. 185 – 189. На укр. яз.
74. Ерохов И. В. Возможность применения аппарата цепных ветвящихся дробей для электрических расчетов //Теорет. электротехника. – 1978. – Вып. 24. – С.46 – 51.
75. Иванов В.В. Бесараб Н.Н.. Данильченко Л.С. и др. Оценка погрешностей округления для цепных и ветвящихся цепных дробей //Цепные дроби и их

применения. – Киев: ИМ АН УССР, 1976. – С. 20 – 24.

76. Калягин В.А. Об одном классе полиномов, определяемых двумя соотношениями ортогональности //Мат. сб. – 1979. – **110,** № 4. - С.609 – 627.
77. Картузов В.К. О построении математических моделей динамических процессов по конечному числу экспериментов: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – М., 1983. – 16 с.
78. Крупка З.И. Цепные дроби с ветвлением вверх-вниз //Материали VII конф. молодых ученых Ин-та прикл. проблем мех. и мат. АН УССР, 1980.– С. 94 – 99.- Деп. в ВИНИТИ 26 марта 1981, № 1379 – 81 Деп.
79. Крупка З.И., Шмойлов В.И. О параллельной вычислении алгоритмов, представленных ветвящимися цепными дробями //Многопроцессорные вычисл. структуры. – 1980. – Вып. 2. – С. 78 – 80.
80. Кучминская Х.И. Соответствующая и присоединенная ветвящиеся цепные дроби для двойного степенного рада //Докл. АН УССР, Сер.А. – 1978. – № 7. – С. 614 – 617.
81. Кучминская Х.И. О приближений функций цепными и ветвящимися цепными дробями // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1980. – Вып.12. – С.3– 10.
82. Кучминская Х.И. Признаки сходимости двумерных непрерывных дробей с комплексными компонентами // Методы исследования дифференциальных и интегральных операторов. – Киев: Наукова думка. – 1989. – С.122 – 127.
83. Кучминская Х.И., Боднар Д.И. Вычислительная устойчивость разложения функций многих переменных в ветвящиеся цепные дроби //Qднородные цифровые вычисл. и интегрирующие структуры. – Таганрог, 1977. – Вып. 8. – С. 145 – 151.
84. Кучминская Х.И., Сусь О.Н. Два признака сходимости двумерных цепных дробей //Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1986. – Вып.23. – С. 37 – 41.
85. Люк Ю. Специальные математические функции и их аппроксимации. Пер. с анг.– М.: Мир, 1980.– 608 с.

86. Марков А.А. Избранные труды по теории непрерывных дробей и теории функций, наименьшее уклоняющихся от нуля. – М.-Л.: Гостехиздат, 1948. – 412 с.

87. Маркушевич А.И. Теория аналитических функций. 2-е изд. исправл. и доп.: В 2 т. – М.: Наука, 1967. Т.1. – 488 с

88. Михальчук Р.И. Об одном признаке сходимости интегральных цепных дробей //Вопросы качественной теории диф. уравнений и их применения. – Киев: ИМ АН УССР, 1976. – С. 39 – 40. На укр. яз.

89. Михальчук Р.И. Континуальный аналог цепных дробей: Автореф. дис.... канд. физ.-мат. наук. – Донецк. – 1986. – 16 с.

90. Монтель П. Нормальные семейства аналитических функций. Пер. с франц. – М.-Л.: ОНТИ, 1936. – 240 с.

91. Недашковский Н.А. Сходимость и вычислительная устойчивость ветвящихся цепных дробей, удовлетворяющих условиям типа Прингсгейма //Вопросы качественной теории диф. уравнений и их применения. – Киев: ИМ АН УССР, 1978. – С. 43 – 44. На укр. яз.

92. Недашковский Н.А. Прямой метод решения линейных алгебраических уравнений ветвящимися цепными дробями //Докл. АН УССР. Сер. А.– 1980. – № 8. – С. 24 – 28.

93. Недашковский Н.А. О сходимости и вычислительной устойчивости ветвящихся цепных дробей некоторых типов //Мат. метода и физ.-мех. поля. – 1984. – Вып. 20. – С. 27 – 31.

94. Никифоров А.Ф. Уваров В.Б. Специальные функции математической физики. 2-е изд. перераб.и доп. – М.: Наука, 1984. – 344 с.

95. Никишин Е.М. О сходимости диагональных аппроксимаций Паде для некоторых функций //Мат. сб. – 1976.- **101**, № 2. – С. 280 – 292.

96. Никишин Е.М., Сорокин В.Н. Рациональные аппроксимации и ортогональность. – М.: Наука, 1988. – 256 с.

97. Одноволова Т.Н. Некоторые оценки погрешности вычисления интегральных цепных дробей //Докл. АН УССР. Сер. А. – 1984. – №7. – С. 19 – 22.

98. Озерский А.В. Цепные алгоритмы. – Рига: изд-во Латв. ун-та, 1981.
99. Пагиря М.М. Интерполирование функций ветвящейся цепной дробью. – Ужгород, 1987. – 22 с. – Деп. в Укр НИИНТИ 23.05.87, № 1496– Ук 87.
100. Парусников В.И. Алгоритм Якоби-Перрона и совместные приближения функций //Мат. сб. – 1981. – **114**, № 2. – С. 322 – 334.
101. Пасичняк Ф.О. 0 разложении алгебраических иррациональностей в ветвящиеся цепные дроби //Цепные дроби и их применения. - Киев: ИМ АН УССР. – 1976. – С. 85 – 86.
102. Пекарский А.А. Рациональная аппроксимация непрерывных функций с заданным модулем непрерывности и моделем? изменения //Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1978. – № 5. – С. 34 – 39.
103. Пекарский А.А. Наилучшие рациональные приближения в комплексной области //Теория функций: Труды МИАН СССР им. В.А.Стеклова. – 1989. – **190**. – С. 222 – 233.
104. Пелех Я.Н., Крупка З.И., Солодяк М.Т. Применение непрерывных дробей к решению уравнений, описывающих электромагнитное поле в ферромагнитных телах //Методы исследования диф. и интегральных операторов. – Киев: Наукова думка, 1989. – С. 165 – 171.
105. Пеллер В. В. Операторы Ганкеля класса σ_p и их приложения (рациональная аппроксимация, гауссовские процессы, проблема мажорации операторов) //Мат. сб. – 1980. – **113**, № 4. – С. 539 – 581.
106. Пеллер В.В. Описание операторов Ганкеля класса σ_p, $p > 0$, исследование скорости рациональной аппроксимации и другие приложения //Мат. сб. – 1983. – **122**, № 4. – С. 481 – 510.
107. Подсыпанин Е.В. Об одном обобщении алгоритма дробей, связанном с алгоритмом Вигго Бруна //Записки науч. семинаров исслед. по теории чисел ЛОМИ. – 1977. – **67**, № 4. – С. 184 – 194.
108. Попов В.А. Рациональная равномерная аппроксимация класса ? и ее применения //Докл. Болг. АН. – 1976. – **29**, № 6. – С. 1 – 4.

109. Попов В.А., Петрушев П.П. Точный порядок равномерного приближения выпуклых функций рациональными функциями //Мат. сб. – 1977. – **103**, № 2. – С. 285 – 292.

110. Привалов И.И. Граничные свойства аналитических функций. Изд.2-е перераб. и доп. – М.–Л.: Гостехиздат, 1950. – 336 с.

111. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Дополнительные главы. – М.: Наука, 1986. – 800 с.

112. Рахманов Е.А. О сходимости диагональных аппроксимаций Паде//Мат. сб. – 1977. – **104**, № 2. – С. 271 – 291.

113. Рахманов Е.А. 0 сходимости аппроксимаций Паде в классах голоморфных функций //Там же. – 1980. – **112**, № 2. – С. 162 – 169.

114. Русак В.Н. Рациональные функции как аппарат приближения. – Минск: Изд-во Белорус. ун-та, 1979. – 176 с.

115. Русак В.Н. Сравнение строк рациональной таблицы Чебышева для индивидуальных аналитических функций //Докл. АН БССР. – 1986. – **30**, №11.- С. 969 – 971. '

116. Русак В.Н. Точные порядки наилучших рациональных приближений на классах функций, представимых в виде свертки //Докл. АН СССР. – 1984.– **279**, № 4. – С. 810 – 812.

117. Севастьянов Е.А. О зависимости дифференциальных свойств функции от скорости ее рациональных приближений в метриках //Мат. заметки.- 1974. – **15**, вып 1. – С. 79 – 90.

118. Севастьянов Е.А. Рациональная аппроксимация и абсолютная сходимость радов Фурье //Мат. сб. – 1978. – **107,** № 2. – С. 227 – 244.

119. Скоробогатько В.Я., Дронюк Н.С, Бобик О.И., Пташник Б.И. Ветвящиеся цепные дроби и их применения //Вторая научн. конф. молодых математиков Украины. – Киев: Наукова думка, 1966. – С. 561 – 565. На укр. яз.

120. Скоробогатько В.Я., Дронюк Н.С., Бобик О.Й., Пташник Б.И. Ветвящиеся цепные дроби //Докл. АН УССР. Сер. А. – 1967. – №2. –

С.131 – 133. На укр. яз.

121. Скоробогатько В.Я. Признаки сходимости ветвящихся цепных дробей //Докл. АН УССР. Сер.А. – 1972. – № 1. – С.27 – 29. На укр. яз.

122. Скоробогатько В. Я. Теория ветвящихся цепных дробей и ее применения в вычислительной математике. – М.: Наука, 1983. – 312 с.

123. Слешинский И.В. О сходимости непрерывных дробей //Зап. мат. отд-ния о-ва естествоиспытателей. – 1889. – **10**. – С. 201 – 255.

124. Старовойтов А.П. Сравнение скоростей рациональных и полиномиальных аппроксимаций дифференцируемых функций //Мат. заметки. – 1988. – **44**, № 4. – С. 528 – 535.

125. Стилтьес Т.Н. Исследования о непрерывных дробях. Пер. с франц. – Харьков-Киев: ОНТИ, 1936. – 155 с.

126. Суетин С. П. О полюсах ? -й строки таблицы Паде //Мат. сб. – 1983. – **120**, № 4. – С. 500 – 504.

127.Сусь О.Н. Сходимость к функции ее формального разложения в двумерную соответствующую цепную дробь //Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1984. – Вып. 20. – С. 23 – 27.

128. Сявавко М.С. Дробно-аналитическая аппроксимация решений линейных задач. – Львов, 1988. – 62 с. – (Препринт) АН УССР, Ин-т прикл. проблем мех. и мат.: № 12-88.

129. Сявавко М.С., Батюк Ю.Р. Некоторые признаки сходимости цепных дробей для функционалов //Вестн. Львов, политехн. ин-та. – 1977. – № 119. – С. 144 – 146. На укр. яз.

130. Терских В. П. Метод цепных дробей в применении к исследованию колебаний механических систем: В 2 т. – Л.: Судпромгиз. – 1955. Т.2. – 332с.

131. Ткач Н.В. Система точных уравнений для массового оператора квазичастиц, взаимодействующих с фононами // Теоретическая и мат. физика. – 1984. – **61**, № 3. – С. 400 – 407.

132. Туран П.О. О приближении кусочно-аналитических функций рацио-

нальными функциями //Современные проблемы теории аналитических функций. – М.: Наука, 1966. – С. 296 – 300.

133. Уилкинсон Дж.Х. Алгебраическая проблема собственных значений. Пер с англ. – М.: Наука, 1970. – 564 с.

134. Философ Л.И. Об одной характеристике функций класса Герглотца // Укр. мат. журнал. – 1978. – **30**, № 5. – С. 689 – 692.

135. Хинчин А.Я. Цепные дроби. 4-е изд.– М.: Наука, 1978. – 112с.

136. Хлопонин С.С. Приближение функций цепными дроби // Цепные дроби. – Ставрополь: Ставроп. пед. ин-т. – 1977. – С. 3 – 102.

137. Хованский А.Н. Приложение цепных дробей и их обобщений к вопросам приближенного анализа. – М.: Гостехиздат, 1956. – 203 с.

138. Чебышев П.Л. Полное собрание сочинений: В 5 т.-М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1947. Т.2. – 520 с.

139. Чебышев П.Л. Полное собрание сочинений: В 5 т.- М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1948. Т.3. – 416 с.

140. Чип М.Н. Диагональные приближения Паде некоторых пси-функций. – Львов, 1988. – 24 с.- /Препринт/ АН УССР, Ин-т прикл. проблем мех. и мат.: № 20 – 88.

141. Чорноус К.А. Непрерывные операторные дроби //Вестн. Киев. ун-та. Сер. мат. та мех. – 1973. – № 15. – С. 72 – 80. На укр. яз.

142. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Функции одного переменного. 3-е изд. перераб. и доп.: В 2 ч. – М.: Наука, 1985. Ч.1. – 336 с.

143. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Функции многих переменных. 3-е изд. перераб. и доп.: В 2 ч. – М.: Наука, 1985. Ч. 2. - 464 с.

144. Эйлер Л. Введение в анализ бесконечных. 2-е изд.: В 2 т. – М.: Физматгиз. – 1961. Т.1. – 315 с.

145. Appell P. Sur les fonctions hypergeometriques de deux variable //Jornal de Mathematiques pures et appliqués. – 1882. – **8**, № 3. – P. 173.

146. Appell P., Kampe de Feriet J. Fonction hypergeometriquus et hyperspheriques. Polynomes d'Hermite. P.: Gauthier–Villars 1926. – 434 p.

147. Aptekarev A.I. Kalyagin V.A. Analytic properties of two-dimension continued P-fraction expansion with periodical coefficients and their simultaneous Pade-Hermite approximants //Rational Approximation and its Applications in Mathematics and Physics. – Berlin: Springer-Verlag. – 1985. – **1237**. – P. 145 – 159.

148. Arndt De fractionibus continuis. – Sundiae. – 1845.

149. Bernoulli D. Adversaria analytica miscellanea de fractionibus continuis //Novi Commenterii Academiae scietiarum Imperialis Petropolitanae. – 1775. – **20**.

150. Blanch G. Numerical evaluation of continued fractions //SIAM rev. – 1964. – **6**. – P. 383 – 421.

151. Bresinski C.A. Pade type approximation and general orthogonal poilynomials. – Basel etc.: Birkhäuser, 1980. – 250 p.

152. Bruin M.G. de. Some convergence results in simultaneous rational approximation to the set of hypergeometric functions $\{ {}_1F_1(1;c_i;z), 1 \le i \le n \}$//Pade Approximation and its Applications. – Berlins Springer-Verlag, 1984. – **1065**. – P. 12 – 33.

153. Cichochki A. Generalized continued fraction expansion of mulidimensional rational functions and its applications in synthesic //Europ. Gonf. Circuit Th. and Design, 1980, 2 – 5 sept. Warsaw. – 1980.

154. Cuyt A., Verdonk B. Multivariate rational interpolation //Computing. – 1985. – N. 4. – P. 41 – 61.

155. Edrei A. Convergence of the complete Pade tables of trigonometrie //J. Appr. Theory. – 1975. – **15**, N. 4. – P. 278 – 293.

156. Euler L. De inventione quoteun que mediarum proportionalium citra radicum extractinem //Novi Comm. Acad. Petropol. – 1771. – **14**: 1. – S. 188.

157. Fair W. A convergence theorem for noncommutative continued fractions //J. Appox. theory. 1972. – **5**. – P. 74 – 76.

158. Freud G. On an approximation of the real functions by rational function //Acta math. Acad. Sei. hung. – 1966. – **17**, N. 3 – 4.– P. 313 – 324.

159. Gilewicz J. Approximants de Pade. – Lecture Notes in Mathematics, No. 667.

– New York: Springer, 1978. – 511 p.

160. Gragg W. Truncation error bounds for g-fractions //Numer. Math. – 1968. – **11**. – P. 370 – 379.

161. Henrici P. Applied and Computational Complex Analysic. Vol.2. – Special Functions, Integral Transfomrs, Asymptotics and Continued Fractions – New York: Wiley, 1977. – 662 p.

162. Henrici P, Pfluger P. Truncation error estimates for Stieltjes Fraction //Numer Math. – 1966. – **9**, N: 2. – P. 120 – 138.

163. Hermite C. Sur la fonction exponentielle //C.R.Acad. Sci. – Paris. – 1873. – **77**. – P. 18 – 24, 74 – 79, 226 – 233, 285 – 293.

164. Jacobi C. G. T. Allgemeine Theorie der Kettenbruchahnlichen Algorithmem, in welchen jede Zahl aus drei vorgegehenden gebilded wird //J. fur die reine und angevandte Mathematik. – 1868. – **69**. – S. 29 – 64.

165. Jacobsen L. General convergence of continued fractions //Trans. Amer. Math. Soc. – 1986. – 294. – P. 477 – 485.

166. Jacobsen L., Thron W.J. Oval convergence region and circuler limit regions for continued fractions $K(a_n/1)$ //Analytic Theory of Continued fractions. – Berlin: Springer-Verlag, 1987. – **1199**. – P. 90 – 126.

167. Jones William B., Njastad 0., Thron W.J. Perron-Caratheodory continued fraction //Rational Approximation and its Application in Mathematics and Physics. – Berlin: Springer-Verlag, 1987. – **1237**. – P. 188 – 206.

168. Jones William B., Thron W.J. Convergence of continued fractions //Canad. J. Math. – 1968. – **20**. – P. 1037 – 1055.

169. Jones William B., Thron W.J. Numerical stability in evaluating continued fractions //Math. comput. – 1974. – **28**, N. 127. – P. 795 – 810.

170. Koch H. von. Quelques theoremes concernant la theorie generale des fractions continues //Öfversingt af Kongl. Vetens Kaps-Akad. Forhandlinger. – 1895. – **52**.

171. Koch H. von. Sur un theoreme de Stieltjes et sur les fractions continues //Bull. Soc. Math. de France. – 1895. – **23 –** P. 23 – 40.

172. Lambert J.H. Memoire sur quelques proprietes remarquables des quantites transcendantes circulaires et logarithmiques //Memoires de l'Acad. de Berlin, Annee 1761. – 1768. – P. 265 – 322.

173. Lange L.J. δ-fraction expansions of analytic functions //SIAM J. Math. Anal. – 1983. – **14**, N. 2. – P. 323 – 368.

174. Leighton W., Wall H.S. On the transformation and convergence of continued fraction //Amer. J. Math. – 1936. – **58** – P. 267 – 281.

175. Magnus A. Expansion of power series into P-fractions //Math Z. – 1962. – **80**. – P. 209 – 216.

176. Murphy J.A., O'Donohoe M.R. A two-variable generalization of the Stieltjes-type continued fractions //J. Comp. and Appl. Math. – 1978. – **4**, N. 3. – P. 181–190.

177. Nuttall J. The convergence of Pade approximants of meromorphic functions //J. Math. Anal. Appl. – 1970. – 31. – P. 147 – 153.

178. Oppermann Tijdskift for Math., Zeuthen 5. – 1883.

179. Perron O. Grundlagen für eine theorie des Jacobicshen Kettenbrüch-algorithmus //Math. Ann. – 1907. – **64**. – S. 1 – 76.

180. Perron O. Die Lehre von den Kettenbrüchen. Band 1. – Stuttgart: Teubner, 1954. – 194 s.

181. Perron O. Die Lehre von den Kettenbrüchen. Band 2. – Stuttgart: Teubner, 1957. – 316 s.

182. Pindor M., Turchetti G. Pade approximants and variational series for operator series //Nuovo Cimento A 71. – 1982. – P.171 – 186.

183. Pommerenke Ch. Pade approximants and convergence in capacity //J. Math. Anal. Appl. – 1973. – **41**. – P. 775 – 780.

184. Pratje Ilse. Iteration der Joukowski //Abbildung und ihre Strecken-Komplexe. – Mitt. math. Semin. Giessen. – 1954. – N. 48. – S. 1 – 54.

185. Pringsheim A. Über die Konvergenz unendlicher Kettenbrüche //S.-B. Bayer Akad. Wiss. Math. Nat. Kl. – 1898. – **28**. – P. 295 – 324.

186. Pringsheim A. Über ein Konvergenz-Kriterium fur die Kettenbrüche mit

positiven Gliedern //Sitzungsber. der math.-phys. Klasse der Kgl. Bayer Akad. Wiss., München – 1899. – **29**. – S. 261 – 268.

187. Roach F.A. Continued fractions over on immer product space //Proc. Amer. Math. Soc. – 1970. – **24**, N. 3. – P. 576 – 582.

188. Saff E.B., Varga R.S. Pade and rational approximation. Theory and application. – New York: Acad. press., 1977. – 491 p.

189. Seidel L. Untersuchungen uber die Konvergenz and Divergenz der Kettenbruche: Habilschrift. – Munchen, 1946.

190. Siemaszko W. Branched continued fraction for double series //J. Comp. and Appl. Math. – 1980. – **6**, N. 2. – P. 121 – 125.

191. Siemaszko W. On some conditions for convergence of branched continued fraction //Lect. Notes Math. – 1981. – **888**. – P.367 – 370.

192. Siemaszko W. Thiele-type branched continued fractions for two-variable functions //J. Comp. Appl. Math. – 1983. – N. 9. – P. 137 – 153.

193. Stern M.A. Theorie der Kettenbruche und ihre Anwendung //J. Reine Angew. Math. – 1832. – **10**, **11**.

194. Stern M.A. Uber die Kennzeichen der Konvergenz eines Kettenbruch//J. Reine Angew. Math. – 1848. – **37**. – S. 255 – 272.

195. Szekeres G. Multidimensional continued fraction //Ann. Univ. Sci. Budapest. Sec. math. – 1970. – **13** – P. 113 – 140.

196. Thron W.J. Two families of twin convergence regions for continued fractions //Duke Math. Journal. – 1943. – **10**. – P. 677- 685.

197. Thron W.J., Waadeland H. Truncation error hounds for limit periodic continued fraction //Mathematics of Computation. – 1983. – **40**, No 162. – P.589– 597.

198. Van Vleck E.B. On the convergence of continued fractions with complex elements //Trans. Amer. Math. Soc. – 1901. – **2**. – P. 215 – 233.

199. Van Vleck E.B. On the convergence and character of the continued fraction $\frac{a_1 z|}{|1} + \frac{a_2 z|}{|1} + \dots$ //Trans. Amer. Math. Soc. – 1901. – **2**. – P. 476 – 483.

200. Van Vleck E.B. On the convergence of algebraie continued fractions whose coefficients have limiting values //Trans. Amer. Math. Soc. – 1904. – **5**. – P.253 – 262.

201. Vitali G. Sull serie di funsioni analitiche //Rend del R. ist Lombard. – 1903.– **36**, No.2. – P. 771– 774.

202. Wall H.S. Analytic theory of continued fractions.- New York: Van Nostrand, 1948. – 433 p.

203. Walsh J.L. Pade approximants as limits of rational functions of best approximation //J. Math. and Mech.– 964.– **13**.– P. 305 – 312.

204. Worpitzky J. Untersuchungen uber die Entwickelung der Monodromen und Monogenen Funktionen durch Ketterbruche //Jahresbericht Friedrichsgymnasium und Realschule, Berlin.– 1865. – S. 3 – 39.