МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ТЕРНОПІЛЬСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ЕКОНОМІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ФАКУЛЬТЕТ КОМПЮТЕРНИХ ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ
КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ

Р. Руська, А.Алілуйко,
О. Мартинюк, І. Новосад

ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

Частина I

Навчальний посібник

Тернопіль 2020

УДК 519.6

Розглянуто і затверджено на засіданні кафедри прикладної математики, як навчальний посібник, протокол №1 від 20.08.2020р.

Руська Р.В., Алілуйко А.М., Мартинюк О.М., Новосад І.: Прикладна математика Частина І. *Навчальний посібник. Тернопіль. – 2020.- с.98*

Навчальний посібник відповідає програмі дисципліни «Прикладна математика» для підготовки здобувачів вищої освіти першого бакалаврського рівня. Посібник містить основні поняття, методи розв'язання, теореми та формули, багато розв'язаних типових задач, необхідних і для самостійної роботи студентів.

Передмова

«Прикладна математика» відноситься до циклу природничо-наукової та загальноекономічної підготовки, яка формує фаховий світогляд майбутніх економістів. Посібник спрямований на глибоке та ґрунтовне засвоєння здобувачами вищої освіти основ математичного апарату, необхідного для розв'язання теоретичних і практичних задач економіки. Посібник містить основні поняття, методи розв'язання, теореми та формули, багато розв'язаних типових задач, необхідних для самостійної роботи студентів Такий підхід надає можливість формування висококваліфікованих фахівців, які вміють ставити нові проблеми та розв'язувати їх, мають математичний стиль мислення, вміють аналізувати частинні випадки та знаходити загальні закономірності під час дослідження економічних процесів.

1. Методи і моделі лінійної алгебри

§1.1 Елементи теорії визначників

1.Визначники другого порядку.
2. Визначники третього порядку.
3. Визначники n - го порядку.
4. Поняття про мінори та алгебраїчні доповнення.
5. Розклад визначника за елементами його стрічки (стовпчика).

Розв'язування багатьох економічних задач зводиться до розв'язування систем лінійних рівнянь. В основі методу розв'язування таких систем використовуються вирази, які називаються визначниками (або детермінантами). Для уточнення поняття "визначник" розглянемо два лінійних рівняння з двома невідомими з буквеними коефіцієнтами:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}.$$

Для розв'язування цих рівнянь ми повинні помножити їх на відповідні коефіцієнти, при яких виключається одне із невідомих :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \left| \begin{array}{l} a_{22}, -a_{21} \\ -a_{12}, a_{11} \end{array} \right. .$$

В залежності від використаної пари множників (по вертикалі) виключаємо або x_1 або x_2 і отримаємо такі рівняння:

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2$$
$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - a_{21}b_1 .$$

Для одержання величин невідомих потрібно праву частину рівнянь розділити на коефіцієнти при невідомих:

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \qquad x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} .$$

Ці вирази мають зміст тільки при умові, якщо знаменник не рівний $\mathbf{0}$. Якщо $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$, то система рівнянь або немає розв'язку, або має нескінчену множину розв'язків. Коефіцієнти при невідомих утворюють вирази, які називаються визначниками.
Розглядаючи ці коефіцієнти, ми бачимо, що

1) вони однакові при обох невідомих;
2) складаються з двох добутків, кожний із яких включає два елементи ;

3) в першому добутку індекси при коефіцієнтах розміщені в натуральній послідовності, а в другому – індекси представляють собою інверсію a_{12}, a_{21} .

Визначники другого порядку символічно позначаються так: $\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \\ a_{21} a_{22} \end{vmatrix}$.

Числа $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ називаються елементами визначника. Елементи a_{11}, a_{22} утворюють головну діагональ визначника, а числа a_{12}, a_{21} - другу неголовну діагональ. Перший індекс вказує в якому рядку знаходиться даний елемент, а другий індекс – в якому стовпці. Позначають визначник знаком “ Δ ” (дельта).

Визначником другого порядку називається число, яке знаходиться за формулою

$$\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \\ a_{21} a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Це ілюструється схемою: $\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \\ a_{21} a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \bullet \\ \bullet & a_{22} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \bullet & a_{12} \\ a_{21} & \bullet \end{vmatrix}$.

Наприклад,

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 - (-1) \cdot 2 = 15 + 2 = 17.$$

Визначник 2-го порядку характеризується рядом властивостей.

1. Визначник не зміниться, якщо рядки поміняти на відповідні стовпці, а стовпці – на рядки

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - 1 \cdot 4 = 6 - 4 = 2.$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - 1 \cdot 4 = 6 - 4 = 2.$$

2. При перестановці двох рядків (або стовпців) абсолютна величина не зміниться, а знак зміниться на протилежний.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = 4 - 6 = -2.$$

3. Якщо елементи довільного рядка (або стовпця) рівні нулю, то визначник рівний нулю.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \cdot 3 - 0 \cdot 1 = 0.$$

4. Визначник, у якого є два однакові рядки (або стовпці), рівний нулю.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 - 3 \cdot 1 = 0 .$$

5. Якщо елементи довільного рядка (або стовпця) мають спільний множник, то його можна винести за знак визначника.

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2(1 \cdot 3 - 2 \cdot 1) = 2(3 - 2) = 2 .$$

6. Визначник, у якого елементи одного рядка (або стовпця) пропорційні відповідним елементам іншого рядка (або стовпця) рівний нулю.

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 = 0. .$$

7. Якщо елементи довільного рядка (або стовпця) визначника є сумою двох доданків, то визначник можна представити у вигляді суми двох визначників. При цьому елементи розглянутого рядка(або стовпця) в першому визначнику є першими доданками, а елементи відповідного рядка (або стовпця) другого визначника – другими доданками.

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+1 & 1+3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 - 1 \cdot 1 + 0 = 2 .$$

8. Визначник не зміниться, якщо до елементів довільного рядка (або стовпця) додати відповідні елементи іншого рядка (або стовпця), помножені на одне і теж саме число.

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1+2 \cdot 2 & 3+4 \cdot 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 \cdot 2 & 4 \cdot 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 2$$

.

Визначником 3-го порядку називається число, яке знаходиться за формулою

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} -$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}$$

Знаки, які стоять перед кожним із доданків, слід вибирати з такої схеми:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \bullet & \bullet \\ \bullet & a_{22} & \bullet \\ \bullet & \bullet & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bullet & a_{12} & \bullet \\ \bullet & \bullet & a_{23} \\ a_{31} & \bullet & \bullet \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bullet & \bullet & a_{13} \\ a_{21} & \bullet & \bullet \\ \bullet & a_{32} & \bullet \end{vmatrix} -$$

$$- \begin{vmatrix} \bullet & \bullet & a_{13} \\ \bullet & a_{22} & \bullet \\ a_{31} & \bullet & \bullet \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \bullet & a_{12} & \bullet \\ a_{21} & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & a_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & a_{23} \\ \bullet & a_{32} & \bullet \end{vmatrix}$$

Це правило обчислення визначників 3-го порядку називається правилом трикутників. Простіше запам'ятати правило Саррюса.

У визначників 3-го порядку числа $a_{11}, a_{12}, ..., a_{33}$ називаються їх елементами. Перший індекс вказує, в якому рядку він знаходиться, а другий – в якому стовпці. Елементи визначників, які мають однакові індекси, утворюють головну діагональ. Визначники позначають буквою Δ грецького алфавіту.

Приклад. Обчислити визначник 3-го порядку.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 2\cdot 0\cdot 5 + 1\cdot(-1)\cdot 4 + (-3)\cdot 3\cdot(-2) -$$

$$-(-3)\cdot 0\cdot 4 - 1\cdot 3\cdot 5 - 2(-1)(-2) = 0 - 4 + 18 + 0 - 15 - 4 = -5$$

Правило Саррюса легко запам'ятати, якщо дописати під визначником перший, а потім другий його рядки. Добутки елементів, які знаходяться на діагоналях, відмічених на схемі суцільними лініями, беруться із знаком "+", а добутки елементів, які знаходяться на діагоналях, позначених на схемі пунктиром, із знаком "-". Алгебраїчна сума цих шести добутків і дає значення визначника:

$$\begin{array}{cccccc} & \multicolumn{1}{|c}{a_{11}} & a_{12} & \multicolumn{1}{c|}{a_{13}} & \\ & \multicolumn{1}{|c}{a_{21}} & a_{22} & \multicolumn{1}{c|}{a_{23}} & \\ & \multicolumn{1}{|c}{a_{31}} & a_{32} & \multicolumn{1}{c|}{a_{33}} & \\ - & a_{11} & a_{12} & a_{13} & + \\ - & a_{21} & a_{22} & a_{23} & + \end{array}$$

Обчислимо визначник за цією схемою:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{matrix} 2\cdot 0\cdot 5 + 3\cdot(-2)\cdot(-3) + 4\cdot 1\cdot(-1) - 4\cdot 0\cdot(-3) - \\ -2\cdot(-2)(-1) - 3\cdot 1\cdot 5 = 0 + 18 - 4 + 0 - 4 - 15 = -5 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & -1 \end{matrix}$$

Визначники 3-го порядку мають такі ж властивості як і визначники 2-го порядку.

Визначники n-го порядку.

Визначник *n*-го порядку має вигляд :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Мінором M_{ij} елемента a_{ij} визначника n-го порядку називається визначник $(n-1)$-го порядку, одержаний із попереднього після викреслювання *i*-го рядка і *j*-го стовпця, на перетині яких знаходиться даний елемент.

Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} визначника n-го порядку називається мінор для цього елемента, взятий із знаком ”+”, якщо число $(i+j)$ – парне та із знаком ”-”, якщо воно непарне. Тобто

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Визначником n-го порядку називається число, яке рівне сумі попарних добутків елементів довільного рядка (або стовпця) на їх відповідні алгебраїчні доповнення. При цьому мають місце формули

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} \qquad (i = 1, 2, \dots, n),$$

$$\Delta = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj} \qquad (j = 1, 2, \dots, n).$$

Ці вирази називаються формулами Лапласа (або формулами розкладу).

Означення визначника *n*-го порядку взято за метод його обчислення. За формулами Лапласа можна обчислити визначник довільного порядку.

Приклад. Обчислити визначник 3-го порядку, розклавши його за елементами першого рядка.

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&-2&-3\\2&6&4\\0&0&5\end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}6&4\\0&5\end{vmatrix}+(-2)\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}2&4\\0&5\end{vmatrix}+(-3)\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}2&6\\0&0\end{vmatrix}=$$

$$=1\cdot(-1)^2\cdot(30-0)-2\cdot(-1)^3\cdot(10-0)-3\cdot(-1)^4\cdot(0-0)=30+20=50.$$

Приклад. Обчислити визначник 4-го порядку:

$$\begin{vmatrix}1&2&3&4\\1&0&1&2\\3&-1&-1&0\\1&2&0&-5\end{vmatrix}.$$

Розкладемо визначник за елементами другого рядка:

$$\Delta=1\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2&3&4\\-1&-1&0\\2&0&-5\end{vmatrix}+0\cdot(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}1&3&4\\3&-1&0\\1&0&-5\end{vmatrix}+$$

$$+1\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1&2&4\\3&-1&0\\1&2&-5\end{vmatrix}+2\cdot(-1)^{2+4}\cdot\begin{vmatrix}1&2&3\\3&-1&-1\\1&2&0\end{vmatrix}.$$

Кожен із цих визначників обчислимо, використавши формулу Лапласа. Перший та третій визначники розкладемо за елементами другого рядка:

$$\begin{vmatrix}2&3&4\\-1&-1&0\\2&0&-5\end{vmatrix}=(-1)\cdot(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}3&4\\0&-5\end{vmatrix}+(-1)(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}2&4\\2&-5\end{vmatrix}+$$

$$+0\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}2&3\\2&0\end{vmatrix}=(-1)\cdot(-1)^3\cdot(-15-0)-1\cdot(-1)^4\cdot(-10-8)+0=$$

$$=-15+18=3;$$

$$\begin{vmatrix}1&2&4\\3&-1&0\\1&2&-5\end{vmatrix}=3\cdot(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}2&4\\2&-5\end{vmatrix}+(-1)(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1&4\\1&-5\end{vmatrix}+0\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1&2\\1&2\end{vmatrix}=$$

$$=3\cdot(-1)^3\cdot(-10-8)-1\cdot(-1)^4\cdot(-5-4)+0=-3(-18)-1(-9)=63.$$

Четвертий визначник розкладемо за елементами третього рядка:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + 2(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1\cdot(-1)^4\cdot(-2+3) + 2(-1)^5\cdot(-1-9) + 0 = 1 - 2\cdot(-10) = 21.$$

Отже,

$$\Delta = 1\cdot(-1)^3\cdot 3 + 1\cdot(-1)^5\cdot 63 + 2\cdot(-1)^6\cdot 21 = -3 - 63 + 42 = -24\,.$$

Як бачимо, обчислення визначника 4-го порядку зводиться до обчислення чотирьох визначників 3-го порядку, а обчислення визначника 5-го порядку – до обчислення п’яти визначників 4-го порядку або двадцяти визначників 3-го порядку. Тому доцільно спочатку перетворити визначник так, щоб в одному з рядків (або стовпців) всі елементи, крім одного, стали нульовими. Цього можна досягти, використавши властивості визначників.

Таким чином, обчислення визначника n-го порядку зводиться до обчислення лише одного визначника **(*n*-1)**-го порядку.

Приклад. Обчислити визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}.$$

Від елементів третього стовпця віднімемо відповідні елементи першого стовпця, а до елементів четвертого стовпця додамо відповідні елементи першого стовпця, помножені на ”-2”.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -4 & -6 \\ 1 & 2 & -1 & -7 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^3\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & -4 & -6 \\ 2 & -1 & -7 \end{vmatrix} =$$

Одержаний визначник 3-го порядку можна обчислити, наприклад, за правилом Саррюса, або звести до визначника 2-го порядку, віднявши від елементів другого і третього стовпців відповідні елементи першого стовпця

$$= -\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & -5 \\ 2 & -3 & -9 \end{vmatrix} = -2\cdot(-1)^2\begin{vmatrix} -3 & -5 \\ -3 & -9 \end{vmatrix} =$$

$$-2\cdot((-3)\cdot(-9) - (-3)\cdot(-5)) = -2\cdot 12 = -24$$

Визначники n-го порядку характеризуються такими властивостями, що і визначники 2-го, 3-го порядків.

<u>Зауваження.</u> Значення визначника першого порядку є число, рівне цьому елементу, тобто $|a| = a$. Тому не слід плутати з позначенням модуля.

<u>Вправи</u>

Обчислити визначники

1. $\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$;   2. $\begin{vmatrix} tg\alpha & -1 \\ 1 & tg\alpha \end{vmatrix}$;

3. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$;   4. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -5 & 6 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ -4 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$.

Розв'язати рівняння

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5-x & 2 \\ 8-x & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

§1.2. Матриці і задачі оптимального планування

1. ***Визначення матриці, їх види.***
2. ***Дії над матрицями.***
3. ***Обернена матриця та її знаходження.***
4. ***Поняття про ранг матриці та його обчислення.***
5. ***Економічні задачі з використанням теорії матриць.***

А. *<u>Поняття матриці.</u>* Матрицею називається прямокутна таблиця із $m \times n$ чисел, яка містить **m** рядків та **n** стовпців, взята в квадратні або круглі дужки.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Або коротко $\left[a_{ij}\right] = (\imath = 1,2,\dots,m;\ j = 1,2,\dots,n).$

В цьому випадку вважають, що матриця має розмірність $m \times n$. Матриці позначають латинськими буквами $A, B, C, E, \dots$

Числа a_{ij} називаються елементами матриці, де перший індекс означає номер рядка, а другий $j-$ номер стовпця. Якщо кількість рядків не рівна кількості стовпців, тобто $m \neq n$, то матриця називається прямокутною, якщо $m = n$ - квадратною. В цьому випадку число $m = n$ називається порядком матриці. Елементи квадратної матриці, в яких $i = j$ утворюють головну діагональ.

Квадратна матриця називається діагональною, якщо всі її елементи , крім головної діагоналі, рівні нулю, тобто

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Якщо в діагональній матриці всі елементи головної діагоналі рівні одиниці, то її називають одиничною матрицею. Вона позначається буквою E (від російського слова "единица") і має вигляд

$$E=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Дві матриці A і B називаються рівними, якщо вони мають рівну кількість рядків та стовпців і елементи яких співпадають.

Матриця, в якої всі елементи рівні нулю, називається нуль-матрицею або нульовою. Її позначають буквою **0.**

Якщо матриця складається тільки з одного рядка, то вона називається матрицею-рядком.

Матриця, яка складається з одного стовпця, називається матрицею-стовпцем.

Якщо в матриці A поміняти рядки на стовпці, а стовпці – на рядки, то одержану матрицю називають транспонованою і позначають A'.

Якщо визначник квадратної матриці рівний нулю ($|A| = 0$), то матриця A називається виродженою(або особливою), якщо ($|A| \neq 0$)- невиродженою (або неособливою).

Матриця вигляду

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

називається верхньою трикутною, а матриця

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$ - нижньою трикутною.

Матрицю

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3j} & \dots & a_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{jj} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & & 0 \end{bmatrix}$$

називають матрицею трапецеїдального вигляду, якщо одночасно $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{jj}$ відмінні від нуля.

Б. *Дії над матрицями*. Сумою (різницею) двох матриць A і B називається матриця C, елементи якої дорівнюють сумі (різниці) відповідних елементів матриць A і B, тобто

$$c_{ij}=a_{ij}\pm b_{ij} \qquad (\imath=1,2,\dots,m;\ j=1,2,\dots,n),$$

де a_{ij}, b_{ij} - відповідні елементи матриць A і B.

Приклад. Знайти суму та різницю матриць

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{і} \quad B=\begin{bmatrix} -4 & -2 & 5 \\ 6 & 7 & -5 \end{bmatrix};$$

Розв’язування. За означенням знаходимо

$$A+B=\begin{bmatrix} 2+(-4) & 1+(-2) & -3+5 \\ 3+6 & 4+7 & 0+(-5) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 9 & 11 & -5 \end{bmatrix};$$

$$A-B=\begin{bmatrix} 2-(-4) & 1-(-2) & -3-5 \\ 3-6 & 4-7 & 0-(-5) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 & 3 & -8 \\ -3 & -3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Із означення суми матриць випливає, що мають місце переставний та сполучний закони $A+B=B+A$, $A+(B+C)=(A+B)+C$, а також $A+0=0+A=A$. Це означає, що при додаванні до довільної матриці A нульової матриці, одержимо ту саму матрицю.

Добутком матриці A на довільне число k (або числа k на матрицю A) називається матриця, елементами якої є добутки елементів матриці A на число k, тобто $Ak = kA = [ka_{ij}]$ $(i = 1,2,..., m;\ j = 1,2,..., n)$.

Приклад. Знайти матрицю $4A$, якщо матриця

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & -4 & 5 \end{bmatrix}.$$

За означенням $4A = \begin{bmatrix} 4\cdot 1 & 4\cdot(-2) & 4\cdot 4 \\ 4\cdot 2 & 4\cdot(-3) & 4\cdot 0 \\ 4\cdot 1 & 4\cdot(-4) & 4\cdot 5 \end{bmatrix}.$

Із означення добутку матриці на число (або числа на матрицю) випливає, що

$$1\cdot A = A\cdot 1 = 1, \qquad 0\cdot A = A\cdot 0 = 0,$$

$$k(mA) = (km)A = kmA, \qquad (k+m)A = A(k+m) = kA + mA.$$

Як бачимо, додавання і множення матриці на число характеризується тими властивостями, що і додавання та множення чисел.

Зауваження. Множення матриці на число відрізняється від множення визначника на число. Матрицю множать на число k, помноживши всі її елементи на це число. Якщо визначник множать на число k, то множать на нього всі елементи одного якогось рядка (або стовпця).

Нехай матриця A містить m рядків і p стовпців, а матриця B має p рядків і n стовпців. Тоді добутком матриць A і B називається матриця C, елементи c_{ij} якої рівні сумі добутків елементів i-го рядка матриці A на відповідні елементи j-го стовпця матриці B, тобто

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ... + a_{ip}b_{pj} \qquad (i = 1,2,..., m;\ j = 1,2,..., n).$$

Добуток матриці A на матрицю B позначають AB. Множення матриці A на матрицю B виконується за такою схемою:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1p} \\ a_{i1} & a_{i2} & ... & a_{ip} \\ & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot & b_{1j} & \cdot \\ \cdot & b_{2j} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & b_{pj} & \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & c_{ij} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

Зауваження. Добуток AB має зміст лише тоді, коли кількість стовпців матриці A співпадає з кількістю рядків матриці B

Приклад. Знайти добутки AB і BA, якщо

$$A=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & 4\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}2 & 0\\ -1 & 5\end{bmatrix}$$

і переконатись, що $\quad AB \neq BA.$

$$AB=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0\\ -1 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\cdot 2+(-2)(-1) & 1\cdot 0+(-2)\cdot 5\\ 3\cdot 2+4\cdot(-1) & 3\cdot 0+4\cdot 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & -10\\ 2 & 20\end{bmatrix}.$$

Аналогічно

$$BA=\begin{bmatrix}2 & 0\\ -1 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\cdot 1+0\cdot 3 & 2\cdot(-2)+0\cdot 4\\ (-1)\cdot 1+5\cdot 3 & (-1)\cdot(-2)+5\cdot 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -4\\ 14 & 22\end{bmatrix}.$$

Звідси випливає, що $AB \neq BA.$

Приклад. Знайти добуток AB, якщо

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 3 & 4\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}-3 & -2 & 5\\ 1 & 0 & 2\\ 6 & 4 & 7\end{bmatrix}.$$

$$AB=\begin{bmatrix}1\cdot(-3)+2\cdot 1+(-1)\cdot 6 & 1\cdot(-2)+2\cdot 0+(-1)\cdot(-4) & 1\cdot 5+2\cdot 2+(-1)\cdot 7\\ 0\cdot(-3)+3\cdot 1+4\cdot 6 & 0\cdot(-2)+3\cdot 0+4\cdot(-4) & 0\cdot 5+3\cdot 2+4\cdot 7\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}-7 & 2 & 2\\ 27 & -16 & 34\end{bmatrix}.$$

(Тут добуток BA невизначений, оскільки кількість стовпців першої матриці не дорівнює кількості рядків другої матриці).

Приклад. Знайти добуток AE, якщо $\quad A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ 0 & -2 & 4\\ -1 & 5 & -4\end{bmatrix}.$

$$AE=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ 0 & -2 & 4\\ -1 & 5 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}1\cdot 1+2\cdot 0+(-3)\cdot 0 & 1\cdot 0+2\cdot 1+(-3)\cdot 0 & 1\cdot 0+2\cdot 0+(-3)\cdot 1\\ 0\cdot 1+(-2)\cdot 0+4\cdot 0 & 0\cdot 0+(-2)\cdot 1+4\cdot 0 & 0\cdot 0+(-2)\cdot 0+4\cdot 1\\ (-1)\cdot 1+5\cdot 0+(-4)\cdot 0 & (-1)\cdot 0+5\cdot 1+(-4)\cdot 0 & (-1)\cdot 0+5\cdot 0+(-4)\cdot 1\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ 0 & -2 & 4\\ 1 & 5 & -4\end{bmatrix}.$$

(Легко переконатись, що має місце і рівність $EA=A$).

Для множення матриць має місце сполучний та розподільчий закон множення

$$A(BC)=(AB)C, \quad (A+B)C=AC+BC, \quad C(A+B)=CA+CB.$$

Відмітимо, що добуток двох матриць може бути нульовою матрицею, хоч кожна із них не є нульовою.

Обернена матриця.

Оберненою для заданої квадратної матриці A називається така матриця A^{-1}, добуток на яку матриці A рівний одиничній матриці, тобто

$$A \cdot A^{-1} = E, \quad \text{або} \quad A^{-1} \cdot A = E.$$

Дамо схему знаходження оберненої матриці для заданої квадратної матриці:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

1. Обчислимо визначник матриці $A(|A|)$.
2. Транспонуємо матрицю A, тобто одержуємо матрицю:

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

3. Знаходимо алгебраїчні доповнення кожного елемента транспонованої матриці A' і запишемо їх у вигляді матриці $\overline{A}$:

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}.$$

4.Поділимо кожен елемент матриці $\overline{A}$ на визначник матриці A, тобто помножимо число $\dfrac{1}{|A|}$ на матрицю $\overline{A}$. Одержана матриця буде оберненою:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\overline{A} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}.$$

Із цієї схеми випливає, що обернена матриця існує тільки для невироджених матриць, тобто коли $|A| \neq 0.$

Матриця, яка складена із алгебраїчних доповнень елементів транспонованої матриці, називається приєднаною (або союзною) до матриці A .

<u>*Зауваження.*</u> Приєднана матриця матиме такий же вигляд $\overline{A}$, якщо транспонувати матрицю, складену із алгебраїчних доповнень елементів матриці A .

Приклад. Знайти обернену матрицю для матриці

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Розв'язування. Визначник цієї матриці

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 24 + 9 - 4 - 18 - 12 = 3.$$

Знайдемо алгебраїчні доповнення кожного елемента даної матриці

$$A_{11} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -2 - (-6) = 4;$$

$$A_{12}=(-1)^3\cdot\begin{vmatrix}3 & -1\\ -3 & 2\end{vmatrix}=-(6-3)=-3;$$

$$A_{13}=(-1)^4\cdot\begin{vmatrix}3 & -1\\ -1 & 2\end{vmatrix}=6-1=5;$$

$$A_{21}=(-1)^3\cdot\begin{vmatrix}3 & 2\\ 4 & 2\end{vmatrix}=-(6-8)=2;$$

$$A_{22}=(-1)^4\cdot\begin{vmatrix}-2 & -1\\ 4 & 2\end{vmatrix}=-4+4=0;$$

$$A_{23}=(-1)^5\cdot\begin{vmatrix}-2 & -1\\ 3 & 2\end{vmatrix}=-(-4-(-3))=1;$$

$$A_{31}=(-1)^4\cdot\begin{vmatrix}3 & -1\\ 4 & -3\end{vmatrix}=-9-(-4)=-5;$$

$$A_{32}=(-1)^5\cdot\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 4 & -3\end{vmatrix}=-(6-12)=6;$$

$$A_{33}=(-1)^6\cdot\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 3 & -1\end{vmatrix}=2-9=-7.$$

Приєднана матриця буде такою:

$$\overline{A}=\begin{bmatrix}4 & 2 & -5\\ -3 & 0 & 6\\ 5 & 1 & -7\end{bmatrix}.$$

Обернена матриця A^{-1} для заданої матриці A має вигляд

$$A^{-1}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}4 & 2 & -5\\ -3 & 0 & 6\\ 5 & 1 & -7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{4}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{5}{3}\\ -1 & 0 & 2\\ \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{7}{3}\end{bmatrix}.$$

Легко перевірити, що

$$A^{-1}A=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}4 & 2 & -5\\ -3 & 0 & 6\\ 5 & 1 & -7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & 3 & 4\\ 3 & -1 & -3\\ -1 & 2 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix};$$

$$AA^{-1}=\begin{bmatrix}2&3&4\\3&-1&-3\\-1&2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{4}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{5}{3}\\-1&0&2\\\frac{5}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{7}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

Приклад. Знайти обернену матрицю для матриці

$$A=\begin{bmatrix}1&-2&3\\-2&4&1\\1&-2&-4\end{bmatrix}.$$

Обчислимо визначник цієї матриці

$$|A|=\begin{vmatrix}1&-2&3\\-2&4&1\\1&-2&-4\end{vmatrix}=-16+12-2-12+16+2=0.$$

Оскільки $|A|=0$, тобто матриця A вироджена, то оберненої для неї не існує.

Вправи.

а) Перемножити матриці.

1. $\begin{bmatrix}2&1\\-1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3&0\\4&5\end{bmatrix};$

2. $\begin{bmatrix}1&1&3\\2&2&1\\3&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&2\\-2&1&2\\1&0&-1\end{bmatrix};$

3. $\begin{bmatrix}1&2\\2&0\\-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1\\-1&2\end{bmatrix};$

4. $\begin{bmatrix}1&2&3\\3&-5&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&-1\\0&2\\1&4\end{bmatrix};$

5. $\begin{bmatrix}3&-1&4\\2&1&0\\-3&-2&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\1\\4\end{bmatrix};$

6. $\begin{bmatrix}3&2&1\\0&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\-3\end{bmatrix};$

7. $\begin{bmatrix}1&-1&2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\3&0\\5&-1\\1&-3\end{bmatrix}.$

8. $\begin{bmatrix}1&2&4&-5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-3\\0\\4\end{bmatrix}.$

б) Знайти матрицю $\boldsymbol{2A^2+3A+5E}$, якщо $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{2} \\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{-3} & \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{4} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{1} \end{bmatrix}$.

в) Знайти обернені матриці для матриць:

1. $\begin{bmatrix} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{2} \\ \boldsymbol{5} & \boldsymbol{1} \end{bmatrix}$; 2. $\begin{bmatrix} \boldsymbol{\cos\alpha} & \boldsymbol{-\sin\alpha} \\ \boldsymbol{\sin\alpha} & \boldsymbol{\cos\alpha} \end{bmatrix}$;

3. $\begin{bmatrix} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{2} & \boldsymbol{-1} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{-1} & \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{2} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{-1} \end{bmatrix}$ 4. $\begin{bmatrix} \boldsymbol{2} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{3} & \boldsymbol{2} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{3} & \boldsymbol{2} \end{bmatrix}$.

§ 1.3 Економічні задачі з використанням теорії матриць

Задача 1. Галузь з трьох заводів виготовляє два види продукції. Матрицею A подано об'єми виготовленої продукції на кожному заводі за перший місяць, матрицею B – за другий місяць:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Знайти: а) об'єм продукції за два місяці; б) приріст об'ємів виробництва за другий місяць у порівнянні з першим за видами продукції і заводами; в) вартісне вираження виробленої продукції за два місяці (у доларах), якщо $\lambda=27$ – курс долара по відношенню до гривні.

Розв'язування. а) Об'єм продукції за два місяці визначається сумою матриць A та B:

$C=A+B=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 1 & 4 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$, де $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ – об'єм продукції j-го виду, який виготовлений i-м заводом за два місяці.

б) Приріст об'ємів виробництва за другий місяць у порівнянні з першим визначається різницею матриць:

$$D=B-A=\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Додатні елементи d_{ij} показують, що на заводі i об'єм виробництва j-ї продукції збільшився; від'ємні d_{ij} – зменшився; нульові d_{ij} – не змінився.

в) Для знаходження вартісного вираження виробленої продукції за два місяці потрібно знайти добуток λC.

Задача 2. Підприємство виготовляє продукцію трьох видів: P_1, P_2, P_3 і використовує сировину двох видів: S_1 і S_2. Норми витрат сировини задані матрицею *A*, де кожен елемент a_{ij} ($i = 1, 2, 3;\ j = 1, 2$) показує витрати кількості одиниць сировини *j*-го виду на виготовлення одиниці продукції *i*-го виду. План виробництва заданий матрицею-рядком *C*, ціна одиниці кожного виду сировини – матрицею-стовпцем *B*.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 100 & 150 & 200 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 20 \\ 30 \end{bmatrix}.$$

Знайти витрати сировини, які необхідні для планового виробництва продукції, і загальна вартість сировини.

Розв'язування. Витрати сировини можна задати матрицю $S = C\,A$, де елементи $s_{1j} = \sum_{k=1}^{3} c_{1k} a_{kj}$ – це витрати сировини *j*-го виду на виготовлення продукції *i*-го виду. Тоді

$$S = \begin{bmatrix} 100 & 150 & 200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 800 & 1450 \end{bmatrix}.$$

Загальна вартість сировини P визначається як добуток матриць $P = S\,B$ або $P = CA\,B$. У даному випадку отримали

$$P = \begin{bmatrix} 800 & 1450 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 30 \end{bmatrix} = 800 \cdot 20 + 1450 \cdot 30 = 59500\ .$$

Задача 3. Робоча бригада виготовляє контролери, 60% яких вимагають додаткового налаштування при встановленні, а 40% не потребують налаштування. Відповідно до статистичних досліджень, ті з контролери, які потребували налаштування, вимагатимуть повторного налаштування через рік в 45% випадках, а в 55% через рік будуть працювати добре. Ті контролери, які не потребували початкового налаштування, будуть потребувати його через рік в 20% випадках і продовжують добре працювати в 80% випадках. Яка частка контролерів будуть працювати добре або потребуватимуть налаштування через 2 та 3 роки після встановлення?

Розв'язування. В момент після встановлення частка добре працюючих контролерів становить 0,6, а частка тих, які потребують налаштування – 0,4. Через рік частка тих добре працюючих складе: $0{,}4\cdot 0{,}8+0{,}6\cdot 0{,}55=0{,}65$. Частка тих, які вимагатимуть налаштування: $0{,}6\cdot 0{,}2+0{,}4\cdot 0.45=0{,}3$.

Введемо позначення:

$X_t=\begin{bmatrix}x_{1t} & x_{2t}\end{bmatrix}$ – матриця-рядок стану в момент часу t, де – x_{1t} – частка добре працюючих контролерів, а x_{2t} – частка контролерів, які потребують налаштування в момент часу t;

$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$ – матриця переходу, де a_{ij} – частка контролерів, які в даний момент знаходяться в стані i (1– потребують налаштування, 2 – не потребують налаштування), а через рік – в стані j.

Враховуючи позначення, маємо:

$$X_0=\begin{bmatrix}0{,}4 & 0{,}6\end{bmatrix},\ A=\begin{bmatrix}0{,}8 & 0{,}2\\ 0{,}55 & 0{,}45\end{bmatrix}.$$

Тоді через рік

$$X_1=X_0A=\begin{bmatrix}0{,}4 & 0{,}6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0{,}8 & 0{,}2\\ 0{,}55 & 0{,}45\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0{,}65 & 0{,}35\end{bmatrix};$$

через 2 роки

$$X_2=X_1A=X_0AA=X_0A^2=$$
$$=\begin{bmatrix}0{,}4 & 0{,}6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0{,}8 & 0{,}2\\ 0{,}55 & 0{,}45\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0{,}8 & 0{,}2\\ 0{,}55 & 0{,}45\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}0{,}713 & 0{,}287\end{bmatrix};$$

через 3 роки

$$X_3=X_2A=X_0A^3=\begin{bmatrix}0{,}4 & 0{,}6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0{,}8 & 0{,}2\\ 0{,}55 & 0{,}45\end{bmatrix}^3=\begin{bmatrix}0{,}728 & 0{,}272\end{bmatrix}.$$

Задача 4. В таблиці наведені дані про денну продуктивність 4 підприємств промислового холдингу, який виробляє 3 види продукції з використанням 2 видів сировини, а також тривалість роботи кожного підприємства за рік та ціна кожного виду сировини.

<table>
<tr><td rowspan="2">Вид продукції</td><td colspan="4">Денна продуктивність підприємств</td><td colspan="2">Витрати видів сировини</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td>1
2
3</td><td>2
2
1</td><td>3
0
2</td><td>6
4
0</td><td>5
1
3</td><td>1
3
2</td><td>4
2
3</td></tr>
<tr><td rowspan="3"></td><td colspan="4">Кількість робочих днів за рік</td><td colspan="2">Ціна видів сировини</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td>200</td><td>120</td><td>150</td><td>170</td><td>100</td><td>200</td></tr>
</table>

Знайти:

1) річну продуктивність кожного підприємства по кожному виду продукції;

2) річні потреби кожного підприємства в кожному виді сировини;

3) річний об’єм фінансування кожного підприємства для постачання сировини, необхідної для виготовлення продукції кожного виду у вказаній кількості.

Розв’язування. Спочатку з приведеної таблиці випишемо матрицю продуктивності підприємств *A*, матрицю витрат сировини *B* та матрицю-рядок цін сировини P.

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 & 5 \\ 2 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix},\ P=\begin{bmatrix} 100 & 200 \end{bmatrix}.$$

1) Кожному стовпцю матриці *A* відповідає денна продуктивність окремого підприємства. Якщо помножити елементи кожного стовпця на кількість робочих днів у році для відповідного підприємства, то отримаємо матрицю річної продуктивності кожного підприємства по кожному виду продукції A_N. Або інакше для обчислення A_N спочатку запишемо діагональну матрицю кількості робочих днів підприємств

$$N = \begin{bmatrix} 200 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 120 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 150 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 170 \end{bmatrix},$$

і тоді

$$A_N = AN = \begin{bmatrix} 400 & 360 & 900 & 850 \\ 400 & 0 & 600 & 170 \\ 200 & 240 & 0 & 510 \end{bmatrix}.$$

2) Річні потреби кожного підприємства в кожному виді сировини B_N можна задати матрицею

$$B_N = BA_N = \begin{bmatrix} 2000 & 840 & 2700 & 2380 \\ 3000 & 2160 & 4800 & 5270 \end{bmatrix}.$$

3) Вартість річного об'єму сировини для кожного підприємства отримаємо, якщо помножимо матрицю P на B_N:

$$P_N = PB_N = \begin{bmatrix} 800000 & 516000 & 123000 & 1292000 \end{bmatrix}.$$

§ 2 Системи лінійних алгебраїчних рівнянь та їх розв'язки

§2.1. Загальна теорія систем лінійних алгебраїчних рівнянь

1. ***Системи лінійних алгебраїчних рівнянь та їх розв'язки:***
2. ***Правило Крамера.***
3. ***Метод Гаусса та Жордана-Гаусса.***
4. ***Матричний спосіб розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь.***
5. ***Дослідження систем лінійних алгебраїчних рівнянь на сумісність. Теорема Кронекера-Капеллі.***

Система n лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими має вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Розв'язком системи лінійних алгебраїчних рівнянь називають таку сукупність чисел $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$, яка при $x_1 = \bar{x}_1$, $x_2 = \bar{x}_2, \ldots, x_n = \bar{x}_n$ перетворює всі рівняння в числові тотожності.

Якщо праві частини всіх рівнянь системи рівні нулеві, то систему рівнянь називають однорідною і неоднорідною, якщо $b_j \neq 0$ $(j = 1,2,\ldots,n)$.

Якщо система лінійних алгебраїчних рівнянь має хоч один розв'язок, то вона називається сумісною, в іншому випадку – несумісною.

Якщо розв'язок системи єдиний, то система лінійних рівнянь називається визначеною. У випадку, коли розв'язок сумісної системи не єдиний, систему рівнянь називають невизначеною.

Правило Крамера.

Система n лінійних рівнянь з n невідомими, визначник якої відмінний від нуля, завжди сумісна і має єдиний розв'язок, який знаходиться за таким правилом: значення кожного із невідомих рівне дробу, знаменником якого є визначник системи, а чисельник одержується з визначника заміною стовпця коефіцієнтів при шуканій змінній стовпцем вільних членів.

Таким чином, розв'язок системи знаходять за формулами:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ldots, \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

які називаються формулами Крамера.

Приклад. Користуючись правилом Крамера, розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = -8 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = -1. \end{cases}$$

Обчислимо визначник системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 4 + 27 - 3 + 6 + 6 = 41.$$

Оскільки $\Delta \neq 0,$ то задана система рівнянь сумісна і має єдиний розв'язок. Обчислимо визначники

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -8 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 16 - 9 + 1 - 24 + 6 = -41;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -8 & -3 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -8 - 2 - 9 + 24 - 2 - 3 = 0;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -8 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 4 + 72 - 3 - 6 + 16 = 82.$$

Значить, за формулами Крамера

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-41}{41} = -1; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{0}{41} = 0; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{82}{41} = 2.$$

Таким чином, $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 2$ - єдиний розв'язок системи.

<u>*Зауваження*</u>. 1. Якщо $\Delta = 0$ і $\Delta_j = 0(j = 1,2,..., n)$), то система лінійних рівнянь має безліч розв'язків.

9. Якщо $\Delta = 0$ і хоч один з визначників $\Delta_j (j = 1,2,..., n)$

не рівний нулю, то система лінійних рівнянь не має розв'язків.

При розв'язуванні системи n лінійних рівнянь з n невідомими за правилом Крамера потрібно обчислювати $(n+1)$ визначники n-го порядку. Тому при $n \geq 4$ знаходження визначників приводить до громіздких обчислень, а значить, користуватись формулами Крамера стає незручно.

Серед інших методів розв'язування систем лінійних рівнянь розглянемо *метод Гаусса* ,який ще називається методом послідовного виключення невідомих. Він полягає в тому, що при виключенні невідомого x_1 із всіх рівнянь, починаючи з другого, x_2 - із всіх рівнянь, починаючи з третього і т.д., система лінійних рівнянь зводиться до системи рівнянь такого вигляду:

$$\begin{cases} x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + \ldots + b_{1n}x_n = c_1 \\ \qquad x_2 + b_{23}x_3 + \ldots + b_{2n}x_n = c_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad x_{n-1} + b_{n-1,n}x_n = c_{n-1} \\ \qquad\qquad\qquad x_n = c_n. \end{cases}$$

Таке перетворення вихідної системи до останньої називається прямим ходом *методу Гаусса*. Обернений хід *методу Гаусса* полягає в тому, що підставивши знайдене з останнього рівняння в передостаннє, одержимо значення x_{n-1} і т.д., і з першого рівняння знаходимо значення x_1.

Приклад. Користуючись методом Гаусса, розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -5. \end{cases}$$

Першим рівнянням краще вибирати те, в якому коефіцієнт при невідомому x_1 рівний одиниці. Для цього ліву і праву частини можна поділити на 2. Однак в даному прикладі зручніше поміняти місцями перше та друге рівняння:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 1 \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -5. \end{cases}$$

Виключимо невідоме x_1 в другому та третьому рівняннях системи. Для цього перше рівняння помножимо на -2, -4 і додамо відповідно до другого та третього рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_2 - 5x_3 = -3 \\ -6x_2 - x_3 = -13. \end{cases}$$

Для виключення невідомого x_2 в третьому рівнянні додамо до нього друге, помножене на 6:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_2 - 5x_3 = -3 \\ 31x_3 = -31. \end{cases}$$

Із останнього рівняння знаходимо $x_3 = \dfrac{-31}{-31}$=1. Підставивши значення $x_3 = 1$ в друге рівняння, одержимо

$$x_2 = -3 + 5x_3 = -3 + 5 = 2.$$

Із першого рівняння

$$x_1 = 2 - x_2 - x_3 = 2 - 2 - 1 = -1.$$

Таким чином, числа 1; 2; -1 є розв'язком вихідної системи лінійних рівнянь.

При розв'язуванні систем лінійних рівнянь досить практичним і вдосконаленим є метод *Жордана-Гаусса*, який полягає в повному виключенні невідомих.

Дамо коротку схему цього методу.

За перше рівняння візьмемо таке рівняння, в якому коефіцієнт (його назвемо ключовим елементом) біля x_1 відмінний від нуля і розділимо на нього все рівняння. З допомогою цього рівняння виключимо невідоме x_1 в усіх рівняннях, починаючи з другого. Аналогічно невідоме x_2 виключимо в усіх рівняннях, крім другого, і т.д. При цьому можливі три випадки.

1. Ліва частина i-го рівняння системи перетворилась в нуль, а права частина рівна деякому числу, відмінному від нуля. Це значить, що система лінійних рівнянь немає розв'язків.
2. Ліва і права частини i-го рівняння системи перетворились в нуль. В цьому випадку i-те рівняння можна відкинути.
3. У випадку використання всіх рівнянь, в процесі виключення невідомих, одержуємо розв'язок даної системи.

Зауваження. Якщо в першому рівнянні вихідної системи коефіцієнт біля x_1 рівній нулю, то можна взяти інше рівняння, в якому за ключовий елемент візьмемо відмінний від нуля коефіцієнт при x_1.

Особливо зручно користуватися методом *Жордана- Гаусса* в матричній формі, яка представлена таблицею.

Приклад. Розв'язати методом Жордана- Гаусса систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 1, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 2, \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 = 5. \end{cases}$$

Запишемо коефіцієнти, які стоять біля невідомих, вільні члени і суми коефіцієнтів та вільних членів у вигляді таблиці 1 (стовпець $\sum$ є контрольним).

Таблиця 1.

x_1	x_2	x_3	b	$\sum$
$\boxed{2}$	1	-4	1	0
3	1	2	2	8
4	-1	2	5	10

За ключовий елемент, який окреслимо рамкою, тут взято коефіцієнт 2 при x_1 в першому рівнянні. Наступну нову таблицю будуємо за спеціальним правилом. Елементи першого рядка нової таблиці ділимо на ключовий елемент 2, а всі елементи першого стовпця (крім одержаної одиниці) замінимо нулями:

x_1	x_2	x_3	b	$\sum$
1	$\frac{1}{2}$	-2	$\frac{1}{2}$	0
0				
0				

Для визначення інших елементів нової таблиці, тобто для заповнення пустих кліток таблиці, користуються так званим "правилом трикутника".

Елемент нової таблиці a_{ij} знаходимо за формулою

$$a_{ij} = b - ac,$$

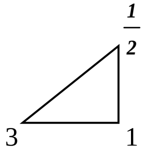
тобто від елемента, який стоїть при вершині прямого кута віднімаємо добуток елементів, які стоять при вершинах гострих кутів. Тут b –

елемент старої таблиці, який знаходиться на тому місці, на якому заповнюємо елемент нової таблиці; ***a*** – елемент старої таблиці, який знаходиться в тому рядку що і число b під (або над) ключовим елементом; ***c*** – елемент нової таблиці, який знаходиться в тому стовпці, що і підраховуваний елемент
a_{ij} і в рядку , одержаному від ділення на ключовий елемент.

Таблиця 2.

x_1	x_2	x_3	b	$\sum$
1	$\frac{1}{2}$	-2	$\frac{1}{2}$	0
0	$\boxed{-\frac{1}{2}}$	8	$\frac{1}{2}$	8
0	-3	10	3	10

Наприклад, число “$\frac{1}{2}$” одержуємо так:



$$1\text{-}3\cdot\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}.$$

Інші елементи нової таблиці 2 знаходимо аналогічно. Правило трикутника застосовуємо і до стовпця Σ:

$$2-3(-2)=8;$$

$$-1-4\cdot\frac{1}{2}=-3;$$

$$2-3\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2};$$

$$2-4(-2)=10;$$

$$8-3\cdot 0=8;$$

$$5-4\cdot\frac{1}{2}=3;$$

$$10-4\cdot 0=10.$$

Відмітимо, що в контрольному стовпці одержуються суми елементів відповідного рядка.

Розглянутий перехід від однієї матриці-таблиці до іншої за методом Жордана-Гаусса називається сімплексним перетворенням матриць-таблиць.

За ключовий елемент в одержаній таблиці 2 візьмемо число “$-\frac{1}{2}$” , яке знаходиться в другому стовпці і окреслимо рамкою. Знову ділимо рядок , в якому знаходиться ключовий елемент на “$-\frac{1}{2}$”. Інші елементи наступної нової таблиці 3 підраховуємо за правилом , яке розглянуто на першому кроці. Попередня таблиця 2 вже вважається старою.

Таблиця 3.

x_1	x_2	x_3	b	Σ
1	0	6	1	8
0	1	-16	-1	-16
0	0	$\boxed{-38}$	0	-38

Елементи другого стовпця таблиці 3, крім одиниці, можна автоматично записати нулями. Інші елементи таблиці 3 знаходимо так:

$$-2-\frac{1}{2}(-16)=-2+8=6;$$

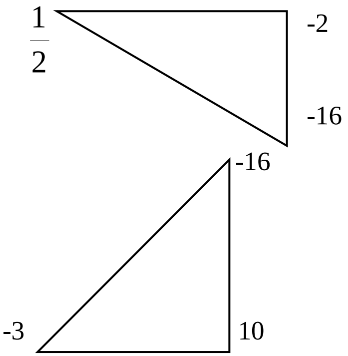
$$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(-1)=1;$$

$$10-(-3)(-16)=-38;$$

$$3-(-3)(-1)=0;$$

$$10-(-3)(-16)=-38.$$

$$0-\frac{1}{2}(-16)=8.$$



За ключовий елемент таблиці 3 візьмемо елемент “-38”. Поділимо на нього останній рядок цієї таблиці. Таблиця 3 вже вважається старою, а таблиця 4 – новою.

Таблиця 4.

x_1	x_2	x_3	b	Σ
1	0	0	1	2
0	1	0	-1	0
0	0	1	0	1

Останній таблиці 4 відповідає система рівнянь

$$\begin{cases} 1\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 0\cdot x_3 = 1 \\ 0\cdot x_1 + 1\cdot x_2 + 0\cdot x_3 = -1 \\ 0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 1\cdot x_3 = 0, \end{cases}$$

тобто $x_1 = 1,\quad x_2 = -1,\quad x_3 = 0,$ що є розв'язком вихідної системи трьох лінійних алгебраїчних рівнянь з трьома невідомими.

Зауваження. Результати обчислень в таблицях 1-4 можна записувати у вигляді однієї підсумкової таблиці.

Матричний метод розв'язування системи алгебраїчних рівнянь

Позначимо через A матрицю, складену із коефіцієнтів при невідомих(так звану основну матрицю системи); X – матрицю-стовпець із невідомих; B – матрицю-стовпець із вільних членів, тобто

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}; \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}. \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Тоді систему рівнянь можна переписати у вигляді матричного рівняння:

$AX=B$. Визначник матриці A $(|A| = \Delta)$ називається визначником системи.

Помноживши зліва в цьому рівнянні на A^{-1}, одержимо $A^{-1}AX = A^{-1}B$ або $(A^{-1}A)X = A^{-1}B.$ Враховуючи, що $A^{-1}A = E$ і $EX = X$, одержимо матричний розв'язок системи $X = A^{-1}B.$ Знаходження матричного розв'язку називається матричним способом розв'язування системи лінійних рівнянь.

Приклад. Записати і розв'язати в матричній формі систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 10, \\ 9x_1 + 8x_2 + 5x_3 = 14. \end{cases}$$

Позначимо через

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 9 & 8 & 5 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 10 \\ 14 \end{bmatrix}.$$

Система лінійних рівнянь запишеться у матричній формі $AX=B.$ Матричний розв'язок системи буде $X= A^{-1}B.$

Для знаходження оберненої матриці A^{-1} обчислимо визначник

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 9 & 8 & 5 \end{vmatrix} = 20 + 24 + 27 - 36 - 15 - 24 = -4.$$

Так як $|A| \neq 0,$ то для матриці A існує обернена A^{-1}, а значить можна знайти єдиний розв'язок вихідної системи.

Знайдемо алгебраїчні доповнення до елементів даної матриці:

$$A_{11} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} = 20 - 24 = -4;$$

$$A_{12} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 9 & 5 \end{vmatrix} = -(15 - 27) = 12;$$

$$A_{!13} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} = 24 - 36 = -12;$$

$$A_{21} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} = -(5 - 8) = 3;$$

$$A_{22} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 9 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 9 = -4;$$

$$A_{23} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} = -(8 - 9) = 1;$$

$$A_{31} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 4 = -1;$$

$$A_{32} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0;$$

$$A_{33} = (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1.$$

Запишемо приєднану матрицю

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} -4 & 3 & -1 \\ 12 & -4 & 0 \\ -12 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Обернена матриця має вигляд $A^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{bmatrix} -4 & 3 & -1 \\ 12 & -4 & 0 \\ -12 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$

Знайдемо розв'язок заданої системи:

$$X = A^{-1}B = -\frac{1}{4}\begin{bmatrix} -4 & 3 & -1 \\ 12 & -4 & 0 \\ -12 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 10 \\ 14 \end{bmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{4}\begin{bmatrix} (-4)\cdot 3 + 3\cdot 10 + (-1)\cdot 14 \\ 12\cdot 3 + (-4)\cdot 10 + 0\cdot 14 \\ (-12)\cdot 3 + 1\cdot 10 + 1\cdot 14 \end{bmatrix} = -\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ -12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Розв'язок системи лінійних рівнянь такий:

$$x_1 = -1; \quad x_2 = 1; \quad x_3 = 3.$$

§ 2.2 Економічні задачі з використанням систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

Для виготовлення чотирьох видів продукції P_1, P_2, P_3, P_4 використовують три види сировини S_1, S_2, і S_3. Запаси сировини та норми витрат наведені в таблиці:

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	7	1	3	2	2
S_2	7	2	1	2	3
S_3	7	2	2	1	2

Визначити кількість продукції P_1, P_2, P_3, P_4, яку можна виготовити, якщо сировину буде повністю вичерпано. Вказати базовий розв'язок.

Розв'язування: Якщо вважати, що x_1, x_2, x_3, x_4 – це кількість одиниць продукції P_1, P_2, P_3, P_4, то дану задачу можна записати в вигляді системи лінійних рівнянь: $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 7, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 7, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 7, \end{cases}$

що представляє собою математичну модель даної економічної задачі.

Розв'яжемо її методом Жордана-Гаусса, використовуючи таблиці:

Табл. 1. В першому рядку за ключовий елемент вибираємо 1. Цей рядок називається ключовим рядком. Переписуємо його без змін першим рядком другої таблиці. До відповідних елементів другого і третього рядків додаємо елементи першого помножені на “-2”. Результати записуємо другим і третім рядком таблиці 2.

	x_1	x_2	x_3	x_4	$в_i$
1	**1**	3	2	2	7
	2	1	2	3	7
	2	2	1	2	7
2	1	3	2	2	7
	0	**-5**	-2	-7	-7
	0	-4	-3	-2	-7
3	1	0	4/5	7/5	14/5
	0	1	2/5	1/5	7/5
	0	0	**-7/5**	-6/5	-7/5
4	**1**	0	0	5/7	2
	0	**1**	0	-1/7	1
	0	0	**1**	6/7	1

Табл. 2. В якості ключового елемента вибираємо “-5”. Результат ділення другого рядка на ключовий елемент, записуємо другим рядком третьої таблиці. Помноживши другий рядок таблиці 3 на “-3”, а потім на ”4”, додаючи отримані рядки відповідно до першого і третього рядків другої таблиці, отримуємо перший і третій рядки третьої таблиці, в яких відбувся процес виключення невідомої x_2.

Табл. 3. В третьому рядку ключовий елемент (-7/5) є коефіцієнтом при невідомій x_3. Тому ділимо третій рядок третьої таблиці на ключовий елемент (-7/5) і записуємо отриманий рядок третім рядком четвертої таблиці. Нам залишається виключити невідому x_3 з перших двох рядків третьої таблиці. Для цього третій рядок множимо спочатку на (-4/5) і додаємо до першого рядка третьої таблиці, а потім, множимо на (-2/5) і додаємо до другого рядка третьої таблиці. Результати дій записуємо першим і другим рядком четвертої таблиці. Таким чином ми отримали результуючу четверту таблицю, в якій кожний рядок має лише дві із чотирьох невідомих. Ця таблиця є розширеною матрицею системи рівнянь: $\begin{cases} x_1 + 5/7x_4 = 2, \\ x_2 - 1/7x_4 = 1, \\ x_3 + 6/7x_4 = 1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - 5/7x_4, \\ x_2 = 1 + 1/7x_4, \\ x_3 = 1 - 6/7x_4. \end{cases}$

В останній системі рівнянь x_1, x_2, x_3 називаються базисними змінними, оскільки матриця, складена з коефіцієнтів при них є одиничною. Невідома x_4 називається вільною, тому що може приймати будь-які значення. Але в нашій задачі невідомі x_i $(i=1, 2, 3, 4)$ виражають кількість реалізованої продукції, тому вони повинні бути невід’ємними, тобто $x_i \geq 0$.

А значить

$$\begin{cases} x_1 = 2 - 5/7x_4 \geq 0, \\ x_2 = 1 + 1/7x_4 \geq 0, \\ x_3 = 1 - 6/7x_4 \geq 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_4 \leq 14/5, \\ x_4 \geq 0, \\ x_4 \leq 7/6; \end{cases} \Rightarrow 0 \leq x_4 \leq min\{14/5; 7/6\} = 7/6.$$

Будь-якому значенню $x_4 \in [0; 7/6]$ відповідає невід'ємний розв’язок, який задовольняє умові задачі. Отже, для $x_4=0, x_1=2, x_2=1, x_3=1$- базовий розв'язок.

4. Три фірми виробили чотири види виробів A_1, A_2, A_3, A_4. Відповідно: 13 шт.; 12 шт.; 4 шт.; 11 шт.; II –13; 7; 21; 15; III – 2; 10; 12; 8. Ціна 1 шт. продукції в місті B_1 відповідно: 5 грн., 4, 3 грн., 2 грн., 1, 5 грн., в B_2 – 1; 1, 4; 3, 2; 1, 3; в B_3 – 2; 3, 6; 2, 5;. 1. Визначити дохід, який одержать фірми від продажу даної продукції в кожному з міст. (Використати добуток матриць).

Розв'язування: Запишемо матрицю продукції A_n, стрічки якої утворюються з чисел - кількості виробленої продукції кожною фірмою. Запишемо матрицю цін $B_ц$, стовпці якої утворені цінами на вироби в кожному з міст. $A_n = \begin{pmatrix} 13 & 12 & 4 & 11 \\ 13 & 7 & 21 & 15 \\ 2 & 10 & 12 & 8 \end{pmatrix}$, $B_ц = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 4,3 & 1,4 & 3,6 \\ 2 & 3,2 & 2,5 \\ 1,5 & 1,3 & 1 \end{pmatrix}$.

Знайдемо добуток матриць A_n та $B_ц$ –

$$\begin{pmatrix} 13 & 12 & 4 & 11 \\ 13 & 7 & 21 & 15 \\ 2 & 10 & 12 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 4,3 & 1,4 & 3,6 \\ 2 & 3,2 & 2,5 \\ 1,5 & 1,3 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 13\cdot 5+12\cdot 4,3+4\cdot 2+11\cdot 1,5 & 13\cdot 1+12\cdot 1,4+4\cdot 3,2+11\cdot 1,3 & 13\cdot 2+12\cdot 3,6+4\cdot 2,5+11\cdot 1 \\ 13\cdot 5+7\cdot 4,3+21\cdot 2+15\cdot 1,5 & 13\cdot 1+7\cdot 1,4+21\cdot 3,2+15\cdot 1,3 & 13\cdot 2+7\cdot 3,6+21\cdot 2,5+15\cdot 1 \\ 2\cdot 5+10\cdot 4,3+12\cdot 2+8\cdot 1,5 & 2\cdot 1+10\cdot 1,4+12\cdot 3,2+8\cdot 1,3 & 2\cdot 2+10\cdot 3,6+12\cdot 2,5+8\cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 141,5 & 56,9 & 90,2 \\ 939,6 & 103,7 & 118,7 \\ 89 & 64,8 & 78 \end{pmatrix}$$

Матриця-добуток дає можливість аналізувати і порівнювати очікуваний дохід від продажу виробленої продукції. Наприклад: ***141,5*** – дохід першої фірми в місті B_1, ***103,7*** – дохід другої фірми в місті B_2, ***118,7*** – дохід другої фірми в місті B_3. З матриці також видно, що перша фірма одержить дохід в першому місті ***141,5*** грн., в другому – ***56,9*** грн., в третьому –***90,2*** грн., друга, відповідно – ***939,6; 103,7; 118,7***; третя – ***89; 64,8; 78***.

5 Приватне підприємство складається з двох відділень, загальний прибуток яких в минулому році склав 150 тис. грн. На цей рік заплановано збільшення прибутків першого відділення на 60%, другого – на 30%, щоб загальний прибуток виріс в 1,4 рази.

Яка величина прибутку кожного відділення: а) в минулому році; б) в цьому році?

Розв'язування. Нехай x та y – прибутки першого і другого відділень в минулому році. Тоді умови задачі можна записати у вигляді системи рівнянь

$$\begin{cases} x+y=150 \\ 1{,}6x+1{,}3y=210 \end{cases},$$

яку розв'яжемо методом Гаусса.

Виключимо невідому величину x із другого рівняння. Для цього перше рівняння помножимо на "– 1,6" і додамо до другого рівняння:

$$\begin{cases} x+y=150 \\ -0{,}3y=-30 \end{cases}.$$

Звідси $y=100$, а $x=150-y=50$.

Отже, а) прибуток в минулому році першого відділення – 50 тис. грн., другого – 100 тис. грн.;

б) прибуток в цьому році першого відділення – 80тис. грн., другого – 130 тис. грн.

6. Підприємство отримало річний прибуток 100000 грн., 10% якого відраховано до благодійного фонду, 7% сплачено у вигляді податку до пенсійного фонду (після відрахувань до благодійного фонду) та 20% до державного бюджету (після відрахувань до пенсійного фонду). Знайти суми виплат до благодійного фонду, пенсійного фонду та державного бюджету.

Розв'язування. Нехай x, y, z – благодійний внесок, пенсійні виплати та виплати до державного бюджету, відповідно. Тоді чистий прибуток становить 1000000 – (y + z), а благодійний внесок – x = 0,1(100000 – (y + z)). Перепишемо останнє рівняння у вигляді

$$x+0{,}1y+0{,}1z=10000 .$$

Об'єм виплат до пенсійного фонду становитимуть $y=0{,}07(100000-x)$, або

$$0{,}07x+y=7000 .$$

Об'єм виплат до держаного бюджету становлять $z=0{,}2[100000-(x+y)]$, або

$$0{,}2x+0{,}2y+z=20000 .$$

Отримали неоднорідну систему трьох лінійних алгебраїчних рівнянь з трьома невідомими

$$\begin{cases} x + 0{,}1y + 0{,}1z = 10000 \\ 0{,}07x + y = 7000 \\ 0{,}2x + 0{,}2y + z = 20000 \end{cases},$$

яку розв'яжемо методом Крамера.

Основний визначник цієї системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}07 & 1 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 0{,}0014 - 0{,}02 - 0{,}007 = 0{,}9744 \neq 0.$$

Обчислимо допоміжні визначники:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 10000 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 7000 & 1 & 0 \\ 20000 & 0{,}2 & 1 \end{vmatrix} = 10000 + 140 - 2000 - 700 = 7440,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 10000 & 0{,}1 \\ 0{,}07 & 7000 & 0 \\ 0{,}2 & 20000 & 1 \end{vmatrix} = 7000 + 140 - 140 - 700 = 6300,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0{,}1 & 10000 \\ 0{,}07 & 1 & 7000 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 20000 \end{vmatrix} = 20000 + 140 + 140 - 2000 - 1400 - 140 = 16740.$$

Тепер знаходимо

$$x = \frac{7440}{0{,}9744} = 7635{,}468; \quad y = \frac{6300}{0{,}9744} = 6465{,}517;$$

$$z = \frac{16740}{0{,}9744} = 17179{,}803.$$

Отже, до благодійного фонду внесено 7635,468 грн., до пенсійного фонду – 6465,517 грн., до державного бюджету – 17179,803 грн.

7. Для виготовлення чотирьох видів продукції P_1, P_2, P_3, P_4 використовують три види сировини S_1, S_2, S_3. Запаси сировини та норми витрат наведені в таблиці:

Вид	Запаси	Витрати сировини на одиницю продукції

сировини	сировини	P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	200	1	3	2	1
S_2	330	2	5	3	4
S_3	280	2	4	3	5

Визначити кількість продукції P_1, P_2, ,P_3, P_4, яку можна виготовити, якщо сировину буде повністю вичерпано. Вказати базовий розв’язок.

Розв’язування: Якщо вважати, що x_1, x_2, x_3, x_4 – це кількість одиниць продукції P_1, P_2, P_3, P_4, тоді математичну модель даної економічної задачі можна записати у вигляді системи трьох лінійних рівнянь з чотирма невідомими:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 200 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 330 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 280 \end{cases}.$$

Розв’яжемо її методом Жордана-Гаусса, використовуючи таблиці:

Табл. 1. В першому рядку за ключовий елемент вибираємо 1. Цей рядок називається ключовим рядком. Переписуємо його без змін першим рядком другої таблиці. До відповідних елементів другого і третього рядків додаємо елементи першого помножені на “– 2”. Результати записуємо другим і третім рядком таблиці 2.

№	x_1	x_2	x_3	x_4	$в_i$
1	**1**	3	2	1	200
	2	5	3	4	330
	2	4	3	5	280
2	1	3	2	1	200
	0	**-1**	–1	2	–70
	0	–2	–1	3	–120
3	1	0	–1	7	–10
	0	1	1	–2	70
	0	0	**1**	–1	20
4	**1**	0	0	6	10
	0	**1**	0	–1	50
	0	0	**1**	–1	20

Табл. 2. В другому рядку за ключовий елемента вибираємо другий елемент “–1”. Результат ділення другого рядка на ключовий елемент, записуємо другим рядком третьої таблиці. Помноживши

другий рядок таблиці 3 на “–3”, а потім на “2” та додавши отримані рядки відповідно до першого і третього рядків другої таблиці, отримаємо перший і третій рядки третьої таблиці, в яких відбувся процес виключення невідомої x_2.

Табл. 3. В третьому рядку коефіцієнтом “1” при невідомій x_3 є ключовим елементом, тому цей рядок з третьої таблиці переписуємо третім рядком четвертої таблиці. Виключимо невідому x_3 з перших двох рядків третьої таблиці. Для цього третій рядок додаємо спочатку до першого рядка третьої таблиці, а потім, множимо на “–1” і додаємо до другого рядка третьої таблиці. Результати дій записуємо першим і другим рядком четвертої таблиці. Таким чином в результуючій четвертій таблиці кожний рядок має лише дві із чотирьох невідомих. Ця таблиця є розширеною матрицею системи рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + 6x_4 = 10 \\ x_2 - x_4 = 50 \\ x_3 - x_4 = 20 \end{cases}, \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 10 - 6x_4 \\ x_2 = 50 + x_4 \\ x_3 = 20 + x_4. \end{cases}$$

В останній системі рівнянь x_1, x_2, x_3 називаються базисними змінними, оскільки матриця, складена з коефіцієнтів при них є одиничною. Невідома x_4 називається вільною, тому що може приймати будь-які значення. Але в нашій задачі невідомі x_i (i = 1, 2, 3, 4) виражають кількість реалізованої продукції, тому вони повинні бути невід’ємними, тобто $x_i \geq 0$. А тому

$$\begin{cases} x_1 = 10 - 6x_4 \geq 0 \\ x_2 = 50 + x_4 \geq 0, \\ x_3 = 20 + x_4 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_4 \leq 5/3 \\ x_4 \geq -50, \\ x_4 \geq -20 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq x_4 \leq 5/3.$$

Будь-якому значенню $x_4 \in [0;5/3]$ відповідає невід'ємний розв’язок, який задовольняє умові задачі. Отже, для $x_4 = 0$, $x_1 = 10$, $x_2 = 50$, $x_3 = 20$ – базовий розв’язок.

§3. Матричний аналіз в задачах економіки

1. ***Матрична модель Леонтьєва міжгалузевого балансу.***
2. ***Лінійна модель міжнародної торгівлі.***
3. ***Модель формування штатного розпису фірми***
4. ***Модель оптимізації процесу фінансування з урахуванням часового фактору***

§ 3.1 Модель Леонтєва багатогалузевої економіки

Рівняння системи

$$\begin{cases} x_1 = x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n} + y_1 \\ x_2 = x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2n} + y_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots. \\ x_n = x_{n1} + x_{n2} + \ldots + x_{nn} + y_n \end{cases}$$

називаються *балансовими співвідношеннями*, де x_i – загальний об'єм продукції, виробленої в i-ій галузі (план валового виробництва продукції) ($x_i \geq 0$), i = 1, 2, …, n; x_{ij} – об'єм продукції i-ї галузі, який використовується j-ю галуззю в процесі виробництва об'єму продукції x_i ; y_i – об'єм продукції i-ї галузі, який призначений для реалізації (кінцевий продукт) ($y_i \geq 0$).

Величини $a_{ij} = \dfrac{x_{ij}}{x_j}$ (i, j = 1, 2, …, n) називаються *коефіцієнтами прямих витрат*, які показують витрати i-ї галузі на виготовлення одиниці продукції j-ї галузі. Тоді балансові співвідношення можна записати у вигляді

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + y_1 \\ x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + y_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots \\ x_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + y_n \end{cases},$$

або у матричному вигляді (модель Леонтєва)

$$X = A \cdot X + Y,$$

де

$$X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix},\ Y=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix},\ A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Вектор X називається *вектором валового виробництва*; вектор Y – *вектором кінцевого продукту*; матриця A – *матрицею прямих витрат*.

3. Вектор валового виробництва X при відомій матриці прямих витрат A і заданому векторі кінцевого продукту Y за деякий період часу знаходиться за формулою:

$$X=(E-A)^{-1}Y=BY.$$

4. Матриця $B=(E-A)^{-1}$ називається *матрицею повних витрат*, кожен елемент b_{ij} якої показує об'єм виробленої продукції i-ї галузі, який необхідний для виготовлення одиниці продукції j-ю галуззю.

5. Матриця $C=B-A$ називається *матрицею непрямих* (посередницьких) *витрат*.

6. Матриця A називається *продуктивною*, якщо для будь-якого вектора $Y\geq 0$ ($y_i\geq 0$, $i=1,\ 2,\ \dots,\ n$) існує розв'язок $X\geq 0$ ($x_i\geq 0$, $i=1, 2, \dots, n$) рівняння $X=A\cdot X+Y$.

Економічний зміст непродуктивності полягає в тому, що внутрішнє споживання окремих галузей перевищує їх валове виробництво.

Критерії продуктивності матриці:

1) Матриця A продуктивна тоді і тільки тоді, коли матриця $B=(E-A)^{-1}$ існує і її елементи невід'ємні.

2) Матриця A з невід'ємними елементами продуктивна, якщо сума елементів по будь-якому стовпцю (рядку) не перевищує одиниці та для хоча б одного стовпця (рядка) ця сума строго менша одиниці.

7. *Запасом продуктивності* продуктивної матриці A називається число $\alpha>0$, таке що всі матриці λA, де $1<\lambda<1+\alpha$, продуктивні, а матриця $(1+\alpha)A$ – непродуктивна.

8. *Модель рівноважних цін* (двоїста модель Леонтєва) описується системою балансових рівнянь

$$\begin{cases} p_1 = a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \ldots + a_{n1}p_n + v_1 \\ p_2 = a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + \ldots + a_{n2}p_n + v_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_n = a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + \ldots + a_{nn}p_n + v_n \end{cases},$$

де a_{ij} ($i, j = 1, 2, \ldots, n$) – коефіцієнти прямих витрат; p_i – ціна одиниці продукції i-ї галузі; v_i – норма доданої вартості, яка показує величину доданої вартості (частина доходу, яка йде на виплату зарплати та податків, підприємницький прибуток та інвестиції) на одиницю виробленої продукції.

Систему балансових рівнянь можна записати в матричному вигляді

$$P = A^T \cdot P + V,$$

де

$$P = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \ldots \\ p_n \end{bmatrix},\ V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \ldots \\ v_n \end{bmatrix},\ A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Вектор P називається *вектором цін*; вектор V – *вектором норм доданої вартості*; матриця A^T – *транспонованою матрицею прямих витрат*.

Вектор рівноважних цін P при відомій транспонованій матриці прямих витрат A^T і заданому векторі норм доданої вартості V за деякий період часу знаходиться за формулою:

$$P = (E - A^T)^{-1}V = B^T Y,$$

де $B^T = (E - A^T)^{-1}$ – транспонована матриця повних витрат.

Модель рівноважних цін дозволяє, знаючи величини норм доданої вартості, здійснювати прогноз цін на продукцію галузей. Вона також дає можливість прогнозувати зміни цін та інфляцію, яка є наслідком змін цін в одній з галузей.

Приклад 1. Прямі витрати двох галузей виробництва, а також обсяги кінцевих продуктів (у грошових одиницях) задані у таблиці:

Продукція цехів	Прямі витрати		Кінцевий продукт
	1	2	

1	0,11	0,06	154
2	0,21	0,11	157

Знайти:

а) матрицю повних витрат та перевірити її на продуктивність; б) вектор кінцевого продукту; в) вектор валового виробництва; г) міжгалузеві витрати; д) матрицю непрямих витрат.

Розв'язування. а) З таблиці видно, що матриця прямих витрат буде:

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}11 & 0{,}06 \\ 0{,}21 & 0{,}11 \end{bmatrix}.$$

Сума елементів кожного стовпця (рядка) менша одиниці, тому, згідно другого критерію продуктивності матриці, матриця A є продуктивною.

б) $Y = \begin{bmatrix} 154 \\ 157 \end{bmatrix}$ є вектором кінцевого продукту.

в) Знайдемо вектор валового виробництва за формулою $X = (E - A)^{-1} Y$.

$$E - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0{,}11 & 0{,}06 \\ 0{,}21 & 0{,}11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}89 & -0{,}06 \\ -0{,}21 & 0{,}89 \end{bmatrix}.$$

Для знаходження матриці $B = (E - A)^{-1}$, обчислимо визначник:

$$|E - A| = \begin{vmatrix} 0{,}89 & -0{,}06 \\ -0{,}21 & 0{,}89 \end{vmatrix} = 0{,}7921 - 0{,}0126 = 0{,}7795 \neq 0.$$

Знайдемо алгебраїчні доповнення до елементів матриці $E - A$:

$$A_{11} = (-1)^2 |0{,}89| = 0{,}89; \qquad A_{12} = (-1)^3 |-0{,}21| = 0{,}21;$$

$$A_{21} = (-1)^3 |-0{,}06| = 0{,}06; \qquad A_{22} = (-1)^4 |0{,}89| = 0{,}89.$$

Обернена матриця (матриця повних витрат) має вигляд:

$$B = (E - A)^{-1} = \frac{1}{0{,}7795} \begin{bmatrix} 0{,}89 & 0{,}06 \\ 0{,}21 & 0{,}89 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1{,}14 & 0{,}08 \\ 0{,}27 & 1{,}14 \end{bmatrix}.$$

Остаточно маємо:

$$X = BY = \begin{bmatrix} 1{,}14 & 0{,}08 \\ 0{,}27 & 1{,}14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 154 \\ 157 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 188 \\ 221 \end{bmatrix}.$$

Отже, валове виробництво першої галуззі становить 188 у. од., а другої – 221 у. од.

г) Міжгалузеві витрати знайдемо за формулами $x_{ij} = a_{ij}x_j$:

$x_{11} = a_{11}x_1 = 0{,}11 \cdot 188 = 20{,}68$, $x_{12} = a_{12}x_2 = 0{,}06 \cdot 221 = 13{,}26$,

$x_{21} = a_{21}x_1 = 0{,}21 \cdot 188 = 39{,}48$, $x_{22} = a_{22}x_2 = 0{,}11 \cdot 221 = 24{,}31$.

д) Запишемо матрицю непрямих витрат C:

$$C = B - A = \begin{bmatrix} 1{,}14 & 0{,}08 \\ 0{,}27 & 1{,}14 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0{,}11 & 0{,}06 \\ 0{,}21 & 0{,}11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}03 & 0{,}02 \\ 0{,}06 & 0{,}03 \end{bmatrix}.$$

Приклад 2. Перевірити на продуктивність матрицю

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}3 & 0{,}5 \\ 0{,}8 & 0{,}4 \end{bmatrix}$$

та знайти її запас продуктивності.

Розв'язування. Використаємо перший критерій продуктивності матриці. Для цього знайдемо матрицю $E - A$ та обернену до неї:

$$E - A = \begin{bmatrix} 0{,}7 & -0{,}5 \\ -0{,}8 & 0{,}6 \end{bmatrix}, \quad (E - A)^{-1} = \begin{bmatrix} 30 & 25 \\ 40 & 35 \end{bmatrix}.$$

Видно, що матриця $(E - A)^{-1}$ існує і має невід'ємні елементи. Отже, A продуктивна.

Для знаходження запасу продуктивності знову будемо користуватися першим критерієм продуктивності матриці. У даному випадку

$$E - \lambda A = \begin{bmatrix} 1 - 0{,}3\lambda & -0{,}5\lambda \\ -0{,}8\lambda & 1 - 0{,}4\lambda \end{bmatrix}.$$

Визначник цієї матриці

$$\Delta = |E - \lambda A| = (1 - 0{,}3\lambda)(1 - 0{,}4\lambda) - 0{,}4\lambda^2 = -0{,}28\lambda^2 - 0{,}7\lambda + 1.$$

Тоді обернена матриця має вигляд:

$$(E - \lambda A)^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{1 - 0{,}3\lambda}{\Delta} & \dfrac{0{,}5\lambda}{\Delta} \\ \dfrac{0{,}8\lambda}{\Delta} & \dfrac{1 - 0{,}4\lambda}{\Delta} \end{bmatrix}.$$

Матриця λA буде продуктивною, якщо всі елементи матриці $(E - \lambda A)^{-1}$ будуть невід'ємними. Це можливо лише тоді, коли

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ 1-0{,}3\lambda \ge 0 \\ 1-0{,}4\lambda \ge 0 \\ \lambda > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3{,}515 < \lambda < 1{,}015 \\ \lambda < 10/3 \\ \lambda \le 2{,}5 \\ \lambda > 1 \end{cases} \Rightarrow \lambda \in (1;1{,}015)\,.$$

При $\lambda \in (1;1{,}015)$ матриця λA продуктивна, а при $\lambda = 1{,}015$ – непродуктивною. Отже, запас продуктивності матиці A дорівнює 0,015.

Приклад 3. Баланс двох галузей промисловості за деякий період (у грошових одиницях) наведений в таблиці.

Галузь	Споживання		Кінцевий продукт	Валове виробництво
	Промисловість	Сільське господарство		
Промисловість	11	12	77	100
Сільське господарство	21	24	155	200

Знайти об'єм валового виробництва кожного виду продукції, якщо кінцевий продукт за галузями збільшився вдвічі.

Розв'язування. Знайдемо матрицю прямих витрат:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{x_{11}}{x_1} & \dfrac{x_{12}}{x_2} \\ \dfrac{x_{21}}{x_1} & \dfrac{x_{22}}{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}11 & 0{,}06 \\ 0{,}21 & 0{,}12 \end{bmatrix}.$$

Матриця повних витрат:

$$B = (E-A)^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}89 & -0{,}06 \\ -0{,}21 & 0{,}88 \end{bmatrix}^{-1} \approx \begin{bmatrix} 1{,}14 & 0{,}08 \\ 0{,}27 & 1{,}15 \end{bmatrix}.$$

Відповідно до умови задачі вектор кінцевої продукції повинен бути рівним

$$Y = 2 \cdot \begin{bmatrix} 77 \\ 155 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 154 \\ 310 \end{bmatrix}.$$

Вектор валового виробництва становить

$$X = BY = \begin{bmatrix} 1{,}14 & 0{,}08 \\ 0{,}27 & 1{,}15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 154 \\ 310 \end{bmatrix} \approx [\ ].$$

Отже, валове виробництво в промисловості потрібно збільшити на 53,6 у. од., а в сільському господарстві – на 182,8 у. од.

Приклад 4. Економічна система складається з трьох галузей. Нехай транспонована матриця прямих витрат та вектор норм добавленої вартості мають вигляд

$$A^T = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,4 \\ 0,1 & 0,4 & 0,2 \\ 0,2 & 0,2 & 0,1 \end{bmatrix}, \; V = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Знайти вектор рівноважних цін P та зміну вектора рівноважних цін ΔP після підвищення норми доданої вартості в першій галузі на 10%.

Розв'язування. Спочатку знайдемо транспоновану матрицю повних витрат:

$$B^T = (E - A^T)^{-1} \approx \begin{bmatrix} 1,64 & 1,15 & 0,98 \\ 0,43 & 2,1 & 0,66 \\ 0,46 & 0,72 & 1,48 \end{bmatrix}.$$

Тоді рівноважні ціни становлять

$$P = B^T V = \begin{bmatrix} 11,48 \\ 10,98 \\ 7,21 \end{bmatrix}.$$

Після зміни норми доданої вартості, тобто $V = \begin{bmatrix} 3,3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$, новий вектор рівноважних цін становитиме $P_1 = \begin{bmatrix} 11,97 \\ 11,11 \\ 7,35 \end{bmatrix}$, а вектор зміни цін буде мати вигляд $\Delta P = P_1 - P = \begin{bmatrix} 0,49 \\ 0,13 \\ 0,14 \end{bmatrix}$.

Таким чином, продукція першої галузі подорожчала на 4,27%, другої – на 1,18%, третьої галузі – на 1,94%.

§ 3.2 Лінійна модель міжнародної торгівлі

Розглянемо лінійну модель обміну, котру часто інтерпретують як модель міжнародної торгівлі, що дає змогу визначити торговельні доходи країн, або їх співвідношення для збалансованої торгівлі. Нехай маємо групу з ***n*** країн K_1, K_2, … K_n, які ведуть між собою торгівлю. Позначимо через x_j торгівельний дохід *j*-ї країни, який формується з продажу власних товарів як на внутрішньому, так і на зовнішньому ринках. Структуру торгівельних відносин між країнами вважаємо встановленою: частина q_{ij} торговельного доходу x_j яку *j*-та країна витрачає на купівлю товарів *і*-ї країни, є сталою.

Матриця

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & \cdots & q_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n1} & \cdots & q_{nm} \end{pmatrix}$$

є структурною матрицею торгівлі.

Вважають, що весь торгівельний дохід витрачається або на закупівлю товарів на своїй території, або на імпорт з інших країн, тобто сума елементів будь-якого стовпчика матриці дорівнює одиниці:

$$\sum_{i=1}^{n} q_{ij} = 1, j = \overline{1,n}$$

Для країни K_i дохід від внутрішньої та зовнішньої торгівлі становить

$$x_i = q_{i1}x_1 + q_{i2}x_2 + \cdots q_{in}x_n$$

Для збалансованої торгівлі необхідно знайти таку матрицю торгівельних доходів

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Щоб справджувалося матричне рівняння

$$QX=X$$

З якого можна визначити *X*.

Приклад 1.. Розглядаються три країни: США, Німеччину і Кувейт – учасниці торгівлі з торгівельними доходами X_1, X_2, X_3. вважатимемо, що весь торгівельний дохід кожної країни витрачається або на закупівлю товарів на своїй території, або на імпорт з інших країн. Нехай США половину торгівельного доходу витрачають на закупівлю товарів на своїй території, чверть – на закупівлю товарів із Німеччини та ще чверть – товарів із Кувейту. Німеччина порівну витрачає торгівельний дохід на закупівлю товарів зі США, на своїй території та з Кувейту. Кувейт половину торговельного доходу витрачає на закупівлю товарів зі США, іншу половину – з Німеччини й нічого не закуповує на своїй території. Визначити доходи країн, які задовольняли б збалансовану бездефіцитну торгівлю, якщо сума їхніх доходів становить 9000 умов. грош. од.

Розв'язання: Напишемо структурну матрицю торгівлі:

$$\begin{array}{cccc} & \textit{США} & \textit{Німеччина} & \textit{Кувейт} \\ Q = & \multicolumn{3}{c}{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}} \end{array}$$

Нехай q_{ij} – частина доходу, яку j-та країна витрачає на закупівлю товарів i-ї країни. Зазначимо, що сума елементів матриці $\boldsymbol{Q}$ у кожному стовпці дорівнює одиниці.

Після підбиття підсумків торгівлі за рік i-та країна одержить прибуток

$x_i = q_{i1}X_1 + q_{i2}X_2 + q_{i3}X_3,\ i = 1,2,3.$

напишемо систему рівнянь для відшукання матриці X:

$QX = X$ або $(Q - E)X = 0,$

тобтоС

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Розв'язок цієї системи:

$$X_1 = 2X_3,\ \ X_2 = X_3,\ X_3 \in R.$$

Добутий результат означає, що збалансованість торгівлі даних країн досягається за співвідношення їхніх доходів $2 : (3/2) : 1$.

Знайдемо доходи країн, які задовольняли б збалансовану бездефіцитну торгівлю за умови, що сума доходів становить $X_1 + X_2 + X_3 = 9000$ умов.грош.од. Підставимо в цю рівність значення

$$X_1 = 2C,\ \ X_2 = \frac{3}{2}C,\ X_3 = C, \text{де } C = const.$$

Дістанемо

$$2C + \frac{3}{2}C + C = 9000$$

4,5C=9000

C=2000

Отже $X_1 = 4000,\ \ X_2 = 3000\ \ X_3 = 2000$ умов. гр. од.

Приклад 2. Структурна матриця торгівлі трьох країн має вигляд

$$A=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Знайти співвідношення між національними доходами країн, при якому буде торгівля збалансована.

Розв'язування. Позначимо національні доходи відповідно x_1, x_2, x_3. Тоді знаходимо власний вектор $\vec{x}=(x_1, x_2, x_3)^T$, який відповідає власному значенню $\lambda=1$, розв'язавши рівняння $(A-E)X=0$ або систему рівнянь $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Неважко знайти загальний розв'язок цієї системи:

$$\begin{cases} x_1=\frac{3}{2}x_3 \\ x_2=\frac{3}{2}x_3 \end{cases},$$

тому за власний вектор можна взяти вектор $\vec{x}=\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2},1\right)$.

Одержаний результат означає, що збалансованість торгівлі цих трьох країн досягається при співвідношенні доходів $\frac{3}{2}:\frac{3}{2}:1$ або $3:3:2$.

Задача 2. З'ясувати при яких значеннях $a>0$ матриця

$$A=a\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 6 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

буде продуктивною.

Розв'язування. Запишемо характеристичне рівняння матриці A

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} a-\lambda & 3a & 0 \\ 3a & a-\lambda & 0 \\ 6a & 6a & 9a-\lambda \end{vmatrix}=(9a-\lambda)\left((2a+\lambda)^2-9a^2\right)=$$

$$=(9a-\lambda)(2a+\lambda)(\lambda-4a)=0\,.$$

Корені цього рівняння (власні значення):

$$\lambda_1=9a\,,\ \lambda_2=4a\,,\ \lambda_3=-2a\,.$$

Матриці A буде продуктивною, якщо виконується умова $\max\{|\lambda_1|,|\lambda_2|,|\lambda_3|\}<1$, тобто $9a<1$.

Отже, для будь-якого $a\in(0;1/9)$ матриця A буде продуктивною.

§ 3.3 Модель формування штатного розпису фірми

Припустимо, що деяка фірма здійснює процедуру формування штатного розпису. Позначимо: j – індекс посад, $j=\overline{1,m}$; i – індекс групи кандидатів на займані посади, $i=\overline{1,n}$. У цей момент часу фірма має n груп різних посад, у кожній із яких є b_j вільних. Претенденти на вакансії проходять тестування, за результатами якого їх ділять на n груп по a_i кандидатів у кожній групі. Для кожного кандидата з i-тої групи необхідні певні витрати c_{ij} на навчання для призначення його на j-ту посаду. Тут можливі випадки, за яких кандидат повністю відповідає посаді, якщо c_{ij}=0; кандидат взагалі не може обіймати посаду, якщо $c_{ij}=\infty$.

Ставиться завдання про оптимальний розподіл кандидатів на відповідні посади, за умови мінімальних фінансових витрат на їхнє навчання.

Для знаходження оптимальної стратегії дій припустимо, що число претендентів відповідає числу запропонованих вакансій. У цьому випадку отримуємо транспортну задачу закритого типу. В протилежному випадку маємо справу з транспортною задачею відкритого типу. Тут постачальником виступає група претендентів на вакансії, а в ролі споживача виступають групи вакантних посад.

Витрати на навчання кандидатів c_{ij} будуть слугувати тарифними перевезеннями.

Невідомими величинами задачі будуть x_{ij} – кількість кандидатів i-тої групи, які призначаються на j-ту посаду.

З урахуванням введених позначень, економіко-математична модель задачі матиме вигляд:

Знайти такий розв'язок $\{x_{ij} \geq 0,\ i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,m}\}$, який забезпечить

$$Z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} \cdot x_{ij} \rightarrow min,$$

при виконанні умов:

1) усі кандидати на посади повинні бути працевлаштованими

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i ,\ i = \overline{1,n};$$

2) усі вакантні посади повинні бути заповненими

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j, j = \overline{1,m};$$

3) рівноваги попиту та пропозиції

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j .$$

§ 3.4 Модель оптимізації процесу фінансування з урахуванням часового фактору

На відміну від евристичного розподілу фінансових ресурсів, коли для кожного об'єкту та кожного періоду часу задається строго визначена величина, при оптимальному фінансуванні для кожного об'єкту і кожного періоду задаються не конкретні значення, а нижня та верхня граничні умови, тобто інтервали, в яких повинні знаходитися шукані невідомі величини. В цих інтервалах здійснюється фінансування з метою максимізації його ефективного використання, яке визначається з допомогою цільової функції.

Припустимо, що виробнича система складається з n об'єктів, функціонування яких проходить в T часових періодах. Введемо позначення: i – індекс об'єкту фінансування, $i = \overline{1,n}$; t– індекс періоду фінансування, $t = \overline{1,T}$; a_i – задана величина фінансових ресурсів, виділених i-му об'єкту; b_t – задана величина фінансових ресурсів, потрібних в t-му періоді; A – загальний обсяг виділених фінансових ресурсів; C_{it} – величина кількісної оцінки ефективності розподілу фінансових ресурсів в i-му об'єкті в період t; x_{it} - невідома величина, яка визначає оптимальний обсяг фінансування i-го об'єкту в періоді t; α_{it}, β_{it} – відповідно, нижня та верхня границі фінансування s-го об'єкту в періоді t.

Розглянемо можливі варіанти кількісної оцінки величини ефективності розподілу ресурсів.

1. З допомогою величини C_{it} можна встановити пріоритет фінансування i-го об'єкту в періоді t. У такому випадку чим важливіше фінансування, тим більше значення C_{it}. Наприклад, його можна оцінювати в бальній системі в інтервалі від 0 до 10.

2. Якщо C_{it} є мірою кількісної оцінки результату фінансування, то цільова функція максимізується. Наприклад, C_{it} означає величину отриманого прибутку i-им об'єктом від одиниці вкладених коштів у періоді t.

3. Якщо C_{it} характеризує витрати, то цільова функція мінімізується.

Враховуючи введені позначення, математична модель оптимального фінансування може бути сформульована наступним чином.

Знайти такий невід'ємний розв'язок $\{x_{it} \geq 0,\ i = \overline{1,n};\ t = \overline{1,T}\}$, який забезпечить

$$Z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{t=1}^{T} C_{it} x_{it} \to \max(\min),$$

при виконанні наступних умов:

1) за розміром виділених лімітів відповідним об'єктам

$$\sum_{t=1}^{T} x_{it} \leq a_i,\ i = \overline{1,n};$$

за розміром потреби фінансових ресурсів у відповідних періодах

$$\sum_{t=1}^{n} x_{it} \leq b_t,\ t = \overline{1,T};$$

2) за загальним обсягом фінансування виробничої системи

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{t=1}^{T} x_{it} \leq A;$$

3) за граничними обсягами розподілу фінансових ресурсів

$$\alpha_{it} \leq x_{it} \leq \beta_{it},\ i \in M_i,\ t \in M_t,$$

де M_i – множина об'єктів, а M_t – множина періодів, для яких встановлюються відповідні граничні рівні.

У даній моделі повинна виконуватися додаткова умова, яка полягає в тому, що потреби у фінансових ресурсах не повинні перевищувати загального обсягу виділених бюджетних коштів:

$$\sum_{t=1}^{T} b_t \leq A.$$

Проте у практичній діяльності зустрічаються випадки, коли потреби перевищують наявні фінансові кошти, тобто нерівність не виконується, а отже, має місце дефіцит фінансових ресурсів. Нехай для нашої виробничої системи дефіцит фінансових ресурсів складає

$$\sum_{t=1}^{T} b_t - \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot$$

Тоді виникає необхідність у залученні додаткових фінансових ресурсів шляхом створення інвестиційних фондів або взяття кредитів. Припустимо, що для забезпечення фінансування в повному обсязі планується взяти m кредитів у відповідних банках обсягом не більше Q_j під P %, відповідно j – індекс банку, $j = \overline{1,m}$.

Введемо додаткову невідому величину y_{ij}, яка означає обсяг взятих кредитів у j-му банку для i-го об'єкта. За критерій оптимальності приймемо величину отриманого прибутку виробничою системою. Тоді економіко-математична модель матиме наступний вид.

Знайти оптимальний розв'язок

$$\{x_{it} \geq 0, y_{ij} \geq 0\};\ i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,m};\ t = \overline{1,T}$$

задачі повного забезпечення фінансовими ресурсами та їх розподілу, який забезпечить максимум чистого прибутку:

$$Z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{T} C_{it} x_{it} - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \frac{100 + P_j}{100} y_{ij}\,(\max)$$

при виконанні наступних умов:

1) за повним забезпеченням елементів виробничої системи фінансовими ресурсами

$$\sum_{t=1}^{T} x_{it} = a_i + \sum_{j=1}^{m} y_{ij},\ i = \overline{1,n},$$

за розміром потреби фінансових ресурсів у відповідних періодах

$$\sum_{i=1}^{n} x_{it} = b_t,\ t = \overline{1,T};$$

2) за граничними розмірами обсягів виділених банками кредитів

$$\sum_{i=1}^{n} y_{ij} \leq Q_j,\quad j = \overline{1,m};$$

3) за граничними обсягами розподілу фінансових ресурсів

$$\alpha_{it} \leq x_{it} \leq \beta_{it},\ i \in M_i,\ t \in M_t,$$

4) за розміром покриття дефіциту фінансових ресурсів

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} y_{ij} = d.$$

Приклад. Виробниче об'єднання складається з п'яти суміжних підприємств. Протягом півріччя для організації виробничих процесів місячна потреба об'єднання у фінансових ресурсах становить відповідно 20, 30, 50, 60, 70 та 80 млн. грн. Величина виділених лімітів для відповідних підприємств становить 60, 40, 50 та 70 млн. грн. Наявний дефіцит фінансових ресурсів можна покрити за рахунок взяття кредитів у трьох банках під відповідні відсотки: 40 %, 50 % та 60 %. Розміри фактичних кредитів не повинні перевищувати 20, 30 та 40 млн. грн.

відповідно. Величини отриманого прибутку *i*-м підприємством від одиниці вкладених коштів в періоді *t* у виробничий процес задаються з допомогою матриці (C_{it}) ($i = \overline{1,5},\ t = \overline{1,6}$):

$$(C_{it}) = \begin{Bmatrix} 0{,}21 & 0{,}32 & 0{,}41 & 0{,}36 & 0{,}26 & 0{,}45 \\ 0{,}34 & 0{,}64 & 0{,}48 & 0{,}38 & 0{,}21 & 0{,}62 \\ 020 & 0{,}48 & 0{,}72 & 0{,}92 & 0{,}41 & 0{,}38 \\ 0{,}38 & 0{,}15 & 0{,}12 & 0{,}68 & 0{,}94 & 0{,}41 \\ 0{,}45 & 0{,}18 & 0{,}32 & 0{,}26 & 0{,}41 & 0{,}39 \end{Bmatrix}$$

Нижні та верхні обсяги можливого фінансування підприємств протягом півріччя задаються з допомогою матриць (α_{it}) та (β_{it}), відповідно:

$$\alpha_{it} = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \beta_{it} = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Визначити оптимальний варіант фінансування підприємств об’єднання, який забезпечить максимум прибутку ВО.

Розв’язування. Для побудови числової математичної моделі позначимо через $x_{it}\left(i = \overline{1,5}, t = \overline{1,6}\right)$ – обсяг фінансування *i*-го підприємства в періоді *t*. Оскільки величина дефіциту фінансових ресурсів $d = \sum_{t=1}^{6} b_t - \sum_{i=1}^{5} a_i = 280 - 220 = 60$млн. грн., нам необхідно взяти кредити y_{ij}, ($i = \overline{1,6};\ j = \overline{1,3}$) у трьох банках.

Математична модель задачі буде мати вигляд:

Знайти

$$Z = 0{,}21x_{11} + 0{,}32x_{12} + 0{,}41x_{13} + 0{,}36x_{14} + 0{,}26x_{15} + 0{,}45x_{16} +$$
$$+ \cdots + 0{,}45x_{51} + 0{,}18x_{52} + 0{,}32x_{53} + 0{,}26x_{54} + 0{,}41x_{55} + 0{,}39x_{56} -$$
$$-1{,}4y_{11} - 1{,}5y_{12} - 1{,}6y_{13} - \cdots - 1{,}4y_{51} - 1{,}5y_{52} - 1{,}6y_{53} \to max$$

при виконанні наступних умов:

1) за розмірами виділених лімітів і кредитів відповідним об’єктам:

– першому $x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} = 30 + y_{11} + y_{12} + y_{13}$, або

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} - y_{11} - y_{12} - y_{13} = 30;$$

– другому $x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} + x_{26} = 60 + y_{21} + y_{22} + y_{23}$, або

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} + x_{26} - y_{21} - y_{22} - y_{23} = 60;$$

третьому $x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} + x_{36} = 40 + y_{31} + y_{32} + y_{33}$, або

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} + x_{36} - y_{31} - y_{32} - y_{33} = 40;$$

четвертому $x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} + x_{46} = 50 + y_{41} + y_{42} + y_{43}$, або

$$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} + x_{46} - y_{41} - y_{42} - y_{43} = 50;$$

– п’ятому

$x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} + x_{55} + x_{56} = 70 + y_{51} + y_{52} + y_{53}$, або

$x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} + x_{55} + x_{56} - y_{51} - y_{52} - y_{53} = 70$;

2) за розміром потреби фінансових ресурсів у відповідних періодах:

– першому $x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} = 20$;

– другому $x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52} = 30$;

– третьому $x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} + x_{53} = 50$;

– четвертому $x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} + x_{54} = 60$;

– п’ятому $x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} + x_{55} = 70$;

– шостому $x_{16} + x_{26} + x_{36} + x_{46} + x_{56} = 80$;

3) за граничними розмірами можливих обсягів виділених банками кредитів:

– першим $y_{11} + y_{21} + y_{31} + y_{41} + y_{51} \leq 20$;

– другим $y_{21} + y_{22} + y_{32} + y_{42} + y_{52} \leq 30$;

– третім $y_{13} + y_{23} + y_{33} + y_{43} + y_{53} \leq 40$;

4) за граничними обсягами розподілу фінансових ресурсів між об’єктами:

– першому $min\, x_{11} \geq 5$, $max x_{16} \leq 10$;

– другому $min\, x_{21} \geq 10$, $max\, x_{22} \leq 20$;

– третьому $min\, x_{31} \geq 5$, $max\, x_{34} \leq 15$;

– четвертому $min\, x_{43} \geq 5$, $max\, x_{45} \leq 25$;

– п’ятому $min\, x_{52} \geq 10$, $max\, x_{51} \leq 20$.

Розв’язок даної задачі представимо у вигляді табл

Об’єкт	Поступлення власних коштів у відповідні періоди, млн.грн.					
	1	2	3	4	5	6
1	5		15			10
2	10	20				55
3	5		30	15		
4			5	45	25	
5		10			45	15
Потреба в коштах	20	30	50	60	70	80

Обсяг власних коштів, млн.грн.	Кредити відповідних банків, млн.грн.		
30			
60		15	10
40	10		

50	10		
70			
	20	15	10

Отже, нами отримано оптимальну динамічну схему фінансових потоків для структурних підрозділів виробничого об’єднання. Дефіцит фінансових ресурсів буде покритий за рахунок взяття відповідних кредитів на суму 45 млн. грн. Завдяки одержаному оптимальному сценарію руху фінансових ресурсів об’єднання отримає чистий прибуток розміром 90,2 млн. грн.

Задачу можна розв’язати на основі багатокритеріального підходу. Проміжним критерієм оптимальності можна взяти максимум прибутку для окремих структурних підрозділів об’єднання, використавши запропоновані вище методи побудови компромісних планів.

4. Математичний інструментарій знаходження оптимальних бізнес-рішень

§ 4.1. Основні задачі математичного програмування

Задачі математичного програмування в залежності від виду моделі можна поділити на два великі класи: *лінійні* та *нелінійні*. Якщо цільова функція та обмеження задачі є лінійними функціями, тобто вони містять змінні x_j у першому та нульовому ступені, то це задачі лінійного програмування, в усіх інших випадках – нелінійного. Важливою перевагою лінійних задач є те, що для їх розв'язання існує універсальний метод, який називається симплексним методом.

До задач *квадратичного* програмування належать задачі, цільова функція яких містить невідомі у другому степені, а обмеження лінійні.

Задачі математичного програмування можуть бути *дискретними* чи *неперервними*. Задачі, в яких одна або всі змінні набувають лише дискретних значень, називаються задачами дискретного програмування. Окремий клас становлять задачі, в яких одна або декілька змінних набувають цілочислових значень, тобто задачі *цілочислового програмування*. Задачі, в яких всі змінні набувають будь-якого значення в деяких інтервалах числової осі, називаються неперервними.

Також задачі математичного програмування поділяють на *детерміновані* та *стохастичні*. Детерміновані задачі не містять змінних і параметрів, котрі набувають значень відповідно до функцій розподілу. Якщо ж економіко-математична модель містить випадкові функції та величини, то мова йде про задачі стохастичного програмування.

Економічні процеси розвиваються в часі, а тому відповідні моделі повинні відображати динаміку. Це означає, що для знаходження оптимального розв'язку потрібно використовувати такі класи задач математичного програмування, як *статичні* (однокрокові) і *динамічні* (багатокрокові).

Загальну лінійну математичну модель економічних процесів і явищ, так звану загальну задачу лінійного програмування, можна подати у вигляді:

Знайти максимум (мінімум) функції

$$Z = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \qquad (2.1)$$

за умов

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n\{\le, =, \ge\}b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n\{\le, =, \ge\}b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n\{\le, =, \ge\}b_m. \end{cases} \qquad (2.2)$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0 \qquad (2.3)$$

Отже, потрібно знайти значення змінних x_1, x_2,…, x_n, які задовольняють умови (2.2) і (2.3), при яких цільова функція (2.1) набуває екстремального (максимального чи мінімального) значення.

Існуючі методи розв'язування задач лінійного програмування передбачають певні вимоги до системи основних обмежень (2.2), тому розрізняють дві стандартні форми запису задач лінійного програмування:

I – з обмеженнями-рівняннями;

II – з обмеженнями-нерівностями.

Запишемо задачу лінійного програмування в першій стандартній формі:

$$Z = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \qquad (extr) \tag{2.4}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m; \\ x_i \geq 0 \qquad (i = \overline{1,n}.) \end{cases} \tag{2.5}$$

Розв'язати задачу (2.4)-(2.5) означає знайти такі невід'ємні розв'язки системи рівнянь (2.5), при яких цільова функція (2.4) набуває екстремального значення.

Задача лінійного програмування, записана в другій стандартній формі, в загальному випадку має вигляд:

$$F = s_0 + s_1x_1 + s_2x_2 + \dots + s_kx_k \qquad (extr) \tag{2.6}$$

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1k}x_k \leq \beta_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \dots + \alpha_{2k}x_k \leq \beta_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_{l1}x_1 + \alpha_{l2}x_2 + \dots + \alpha_{lk}x_k \leq \beta_l \\ x_i \geq 0 \qquad (i = \overline{1,k}.) \end{cases} \tag{2.7}$$

Знайти розв'язок задачі лінійного програмування, записаної в другій стандартній формі, означає знайти такі невід'ємні розв'язки системи нерівностей (2.7), при яких цільова функція (2.6) набуватиме екстремального значення.

Розглянемо найпростіші моделі задач лінійного програмування, наприклад модель задачі про використання ресурсів.

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на виготовлення одиниці продукції	
		$\boldsymbol{\Pi}_1$	$\boldsymbol{\Pi}_2$
$\boldsymbol{S}_1$	b_1	a_{11}	a_{12}
$\boldsymbol{S}_2$	b_2	a_{21}	a_{22}
$\boldsymbol{S}_3$	b_3	a_{31}	a_{32}
Ціна одиниці продукції		c_1	c_2

Для виготовлення двох видів продукції $\boldsymbol{\Pi}_1$ та $\boldsymbol{\Pi}_2$ використовуються три види сировини $\boldsymbol{S}_1$, $\boldsymbol{S}_2$, $\boldsymbol{S}_3$. Запаси сировини, норми витрат сировини на виготовлення одиниці продукції кожного виду та ціна одиниці продукції кожного виду наведені в таблиці:

Необхідно знайти такий план виробництва продукції, який забезпечить найбільший дохід.

Побудуємо математичну модель задачі. Позначимо: x_1, x_2–загальна кількість продукції $\boldsymbol{\Pi}_1$ та $\boldsymbol{\Pi}_2$ відповідно; Z – сумарний дохід, який отримаємо від реалізації всієї продукції $\boldsymbol{\Pi}_1$ та $\boldsymbol{\Pi}_2$.

Запишемо цільову функцію даної задачі. Ціна одиниці продукції становить c_1, а всього цієї продукції плануємо випустити x_1 одиниць, тому перемноживши c_1 на x_1, отримаємо весь дохід, який матимемо від реалізації всієї продукції Π_1. Аналогічно, дохід від реалізації продукції Π_2 становитиме c_2x_2. Додамо ці два доданки ($c_1x_1+c_2x_2$) і отримаємо дохід від реалізації всієї продукції Π_1 та Π_2. Оскільки ми хочемо отримати найбільший дохід, то будемо знаходити максимальне значення цільової функції:

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 \qquad (max).$$

Тепер потрібно записати обмеження задачі. Нам відомий обсяг ресурсів кожного виду, що затрачається на виготовлення одиниці продукції кожного виду. Так, на виготовлення одиниці продукції Π_1 ресурсу (сировини) S_1 витрачаємо a_{11}, всього продукції Π_1 плануємо виготовити x_1 одиниць. Перемножимо a_{11} на x_1 і отримаємо ту кількість ресурсу S_1, яка піде на виготовлення всієї продукції Π_1. Цього ж ресурсу S_1 на виготовлення одиниці продукції Π_2 затрачаємо a_{12}, а плануємо виготовити x_2 одиниць продукції Π_2, тому, коли перемножимо a_{12} на x_2, будемо мати кількість ресурсу S_1, затрачену на виготовлення всієї продукції Π_2. Якщо додамо $a_{11}x_1$ та $a_{12}x_2$, то отримаємо сумарні витрати ресурсу S_1 на виготовлення всієї продукції Π_1 та Π_2. Але запас кожного виду ресурсу обмежений і використати більше, ніж ми маємо, не можемо. Запас ресурсу S_1 становить b_1. Тому обмеження по використанню ресурсу S_1 матиме вигляд: $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1$. Аналогічно запишемо обмеження по використанню ресурсів S_2 та S_3:

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2;$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \le b_3.$$

Очевидно, що невідомі x_1, x_2 не можуть бути від'ємними. Причому, рівність нулю однієї з них означає, що даний вид продукції виготовляти недоцільно.

Ми отримали таку задачу лінійного програмування:

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 \qquad (max) \tag{2.8}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \le b_3; \\ x_1 \ge 0; \\ x_2 \ge 0. \end{cases} \tag{2.9}$$

Функція (2.8) – це цільова функція, або функція мети, (2.9) – система обмежень нашої задачі, причому перші три обмеження (2.9) називають основними обмеженнями, а останні два (обмеження на знак змінних x_1 і x_2) – природними чи економічними.

Далі розглянемо постановку задачі про раціональний розкрій матеріалів. Значна частина матеріалів надходить на підприємство у вигляді певних одиниць стандартних розмірів. Для використання його доводиться розрізати на частини, щоб отримати заготовки потрібних розмірів. Виникає проблема мінімізації відходів матеріалів.

Для побудови математичної моделі задачі введемо певні позначення. Нехай: m – кількість різних заготовок; B_i – план випуску заготовок i-го виду; n – кількість різних способів (варіантів) розкрою стандартного матеріалу; a_{ij} – число заготовок i-го виду, одержаних за допомогою j-го способу розкрою; c_j – величина відходів при j-му варіанті розкрою.

Схематично дану задачу можна представити у вигляді таблиці:

Варіант (спосіб) розкрою	Вихід заготовок з одиниці матеріалу				Відходи
	1-го виду	2-го виду	…	m-го виду	
1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1m}	c_1
2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2m}	c_2
…	…	…	…	…	…
n	a_{n1}	a_{n2}	…	a_{nm}	c_n
План випуску заготовок	B_1	B_2	…	B_m	

Через невідому x_j позначимо кількість одиниць вихідного матеріалу, які потрібно розрізати j-тим способом, а через Z – загальну кількість відходів. Кількість заготовок i-го виду, одержана за всіма варіантами розкрою становитиме $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n$, а нам потрібно цих заготовок у кількості B_i одиниць. Тому обмеженням по i-му виду заготовок буде рівність:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = B_i.$$

У загальному випадку математична модель задачі раціонального розкрою матеріалу матиме вигляд:

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \qquad (min) \tag{2.10}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{n1}x_n = B_1; \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{n2}x_n = B_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1m}x_1 + a_{2m}x_2 + \ldots + a_{nm}x_n = B_m; \\ x_j \geq 0, \qquad j = \overline{1, n}. \end{cases} \tag{2.11}$$

§4.2. Графічний метод розв'язування задач лінійного програмування

Графічний метод використовується для розв'язування певного класу задач лінійного програмування, а саме задач, число невідомих яких не перевищує 3. Хоча вже у трьохвимірному просторі важко побудувати многогранник допустимих розв'язків, а задачу лінійного програмування, яка містить більше трьох змінних графічно зобразити практично неможливо. Тому найчастіше графічним методом розв'язують задачі лінійного програмування, які містять дві невідомі і записані в першій стандартній формі (з обмеженнями-нерівностями):

$$z = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 \qquad (extr) \tag{2.12}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 \le b_k; \\ a_{k+11}x_1 + a_{k+12}x_2 \le b_{k+1}; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m; \\ x_1 \ge 0, \qquad x_2 \ge 0. \end{cases} \tag{2.13}$$

Розглянемо основні етапи знаходження розв'язку задач ЛП графічним методом:

1) На координатній площині x_10x_2 будуємо граничні прямі, які відповідають системі обмежень задачі: $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i, \qquad i = \overline{1,m}.$

2) Визначаємо півплощини, які є розв'язками нерівностей. Для цього беремо координати точки з довільної півплощини і підставляємо в нерівність. Якщо нерівність справджується, то півплощина розв'язків направлена в сторону вибраної точки, якщо ж не справджується, то в протилежну сторону.

3) Знаходимо область, де перетинаються всі півплощини розв'язків, тобто – многокутник розв'язків. Якщо перетин – не порожня опукла множина, то переходимо до наступного етапу. В протилежному випадку робимо висновок, що задача не має розв'язку.

4) Будуємо вектор нормалі $\vec{N}$, початок якого знаходиться в точці (0,0), а кінець у точці (c_1, c_2) (коефіцієнти при невідомих у цільовій функції). Вектор нормалі вказує напрямок зростання функції.

5) Перпендикулярно до вектора нормалі будуємо лінію рівнів $c_1x_1 + c_2x_2 = const$. Для зручності знаходження оптимальних точок лінію рівнів будуємо так, щоб вона мала спільні точки з многокутником розв'язків (перетинала многокутник розв'язків).

6) Визначаємо оптимальні точки. Для цього лінію рівнів переносимо паралельно в напрямку вектора нормалі. Остання вершина многокутника, яку перетне лінія рівнів, буде точкою максимуму. Потім лінію рівнів переносимо

паралельно в напрямку, протилежному напрямку вектора нормалі. Остання вершина многокутника розв'язків, яку перетне лінія рівнів у цьому випадку, є точкою мінімуму.

7) Знаходимо найбільше та найменше значення функції *Z*. Для цього підставимо координати оптимальних точок, знайдених шляхом розв'язування систем рівнянь граничних прямих (перетином яких є оптимальна точка), в цільову функцію.

Приклад 2.1. Графічним методом розв'язати задачу лінійного програмування: $z = 3x_1 + 7x_2 - 5 \quad (extr)$

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 \le 12; \\ 10x_1 + 13x_2 \le 130; \\ -6x_1 + 8x_2 \le 48; \\ 2x_1 + 5x_2 \ge 10; \\ 4x_1 - x_2 \le 0; \\ x_1 \ge 0; \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Розв'язування.

Будуємо граничні прямі, що відповідають нерівностям системи обмежень задачі (кожне обмеження розглядаємо як рівняння). Для побудови довільної прямої нам потрібно дві точки. Якщо права частина рівняння не дорівнює нулю, то для простоти знаходження координат двох точок, через які проходить гранична пряма (наприклад L_1) беремо спочатку x_1=0 і знаходимо x_2: 4·0–3x_2=12, звідси –3x_2=12, а значить x_2=–4. Ми маємо координати однієї точки (0, –4). Потім беремо x_2=0 і знаходимо x_1: 4x_1–3·0=12, звідси 4x_1=12, а значить x_1=3. Отже, координати другої точки (3,0). Аналогічно знаходимо координати точок для побудови граничних прямих L_2, L_3 та L_4.

У правій частині граничної прямої, що відповідає п'ятому обмеженню – нуль, тому для знаходження координат двох точок цієї прямої один раз візьмемо x_1=0, тоді отримаємо, що x_2=0. Для визначення координат другої точки беремо довільне значення однієї з невідомих, тільки не 0, наприклад x_1=1 і знаходимо значення x_2: 4·1–x_2=0, звідси x_2= 4.

L_1: $4x_1 - 3x_2 = 12$, $(0; -4)$; $(3; 0)$.
L_2: $10x_1 + 13x_2 = 130$, $(0; 10)$; $(13; 0)$.
L_3: $-6x_1 + 8x_2 = 48$, $(0; 6)$; $(-8; 0)$.
L_4: $2x_1 + 5x_2 = 10$, $(0; 2)$; $(5; 0)$).
L_5: $4x_1 - x_2 = 0$, $(0; 0)$; $(1; 4)$.
L_6: $x_1 = 0$, вісь Ox_2.
L_7: $x_2 = 0$, вісь Ox_1.

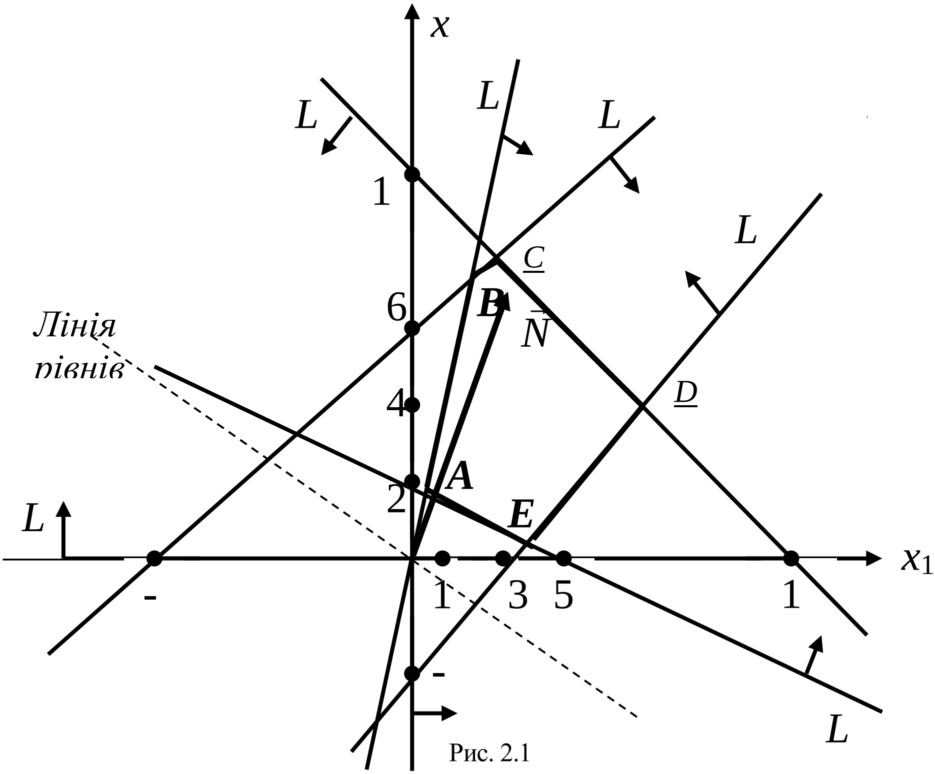


Рис. 2.1

Знаходимо півплощини розв'язків, що відповідають нерівностям системи обмежень. Для цього беремо дові точку координатної площини, через яку не проходить гранична пряма L $3x_2 = 12$ (для простоти розрахунків візьмемо (0,0)) і підставляємо в першу нерівність. Отримаємо 4·0 – 3·0 < 12; 0<12, отже нерівність справджується. А це значить, що півплощина розв'язків, яка відповідає першому обмеженню задачі, розміщена в напрямку точки (0,0). На рисунку вказуємо стрілкою, в якому напрямку від прямої L_1 розміщена наша півплощина розв'язків. Аналогічні розрахунки проводимо з усіма граничними прямими. Для визначення півплощини розв'язків, що відповідає п'ятому обмеженню, беремо координати довільної точки, що не лежить на даній прямій, тільки не точку (0,0), оскільки гранична пряма L_5 проходить через початок системи координат. Шукаємо спільну область, де перетинаються всі півплощини розв'язків. У нашому випадку многокутником розв'язків є фігура ABCDE.

Будуємо вектор нормалі $\vec{N}$={(0;0);(3;7)}. Перпендикулярно до нього – лінію рівнів. Переносимо паралельно цю лінію в напрямку вектора нормалі. Останньою вершиною многокутника, яку перетне лінія рівнів є т. С – точка максимуму. Тоді переносимо паралельно лінію рівнів у напрямку, протилежному до напрямку вектора нормалі. Крайньою вершиною, яку перетне лінія рівнів, є т. А – точка мінімуму.

Знайдемо координати оптимальних точок і найбільше та найменше значення функції *Z*. Точка С лежить на перетині граничних прямих L_2 та L_3, тому її координати обчислимо, розв'язавши систему рівнянь цих граничних прямих:

$$\begin{cases} 10x_1 + 13x_2 = 130; \\ -6x_1 + 8x_2 = 48. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + \frac{13}{10}x_2 = 13; \\ -6x_1 + 8x_2 = 48. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{13}{10}x_2 + 13; \\ -6(-\frac{13}{10}x_2 + 13) + 8x_2 = 48. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{13}{10}x_2 + 13; \\ -78 + \frac{39}{5}x_2 + 8x_2 = 48. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{13}{10}x_2 + 13; \\ \frac{79}{5}x_2 = 126. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{13}{10}x_2 + 13; \\ x_2 = 7{,}97. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{13}{10} \cdot 7{,}97 + 13 = 2{,}64; \\ x_2 = 7{,}97. \end{cases}$$

Ми отримали наступні координати т. С (2,64; 7,97).

Тоді

$$z_{\max} = z(C) = 3 \cdot 2{,}64 + 7 \cdot 7{,}97 - 5 = 7{,}92 + 55{,}79 - 5 = 58{,}71.$$

Точка *A* – перетин L_4 та L_5. Запишемо систему рівнянь цих граничних прямих і розв'яжемо її:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 10; \\ 4x_1 - x_2 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 10; \\ x_2 = 4x_1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + 5 \cdot 4x_1 = 10; \\ x_2 = 4x_1. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 22x_1 = 10; \\ x_2 = 4x_1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0{,}45; \\ x_2 = 4 \cdot 0{,}45 = 1{,}8. \end{cases}$$

Отже, т. А (0,45; 1,8).

А

$$z_{\min} = z(A) = 3 \cdot 0{,}45 + 7 \cdot 1{,}8 - 5 = 1{,}35 + 12{,}6 - 5 = 8{,}95.$$

Приклад Меблева фабрика “Нова” випускає дві моделі підставок під телевізор. Підставки обох моделей обробляють на першому та другому станках. Тривалість обробки (у хвилинах) однієї підставки кожної моделі подано в таблиці.

Станки	Тривалість обробки підставки (хв.) за моделями	
	A	***B***
1	18	20
2	21	29

Час обробки першого та другого станків відповідно дорівнює 30 і 32 години на тиждень. Прибуток фабрики від реалізації однієї підставки моделі *A* дорівнює 80 грн., а моделі *B* – 60 грн. Вивчення ринку збуту показало, що тижневий попит на підставки моделі *A* ніколи не перевищує попиту на модель *B* не більше, ніж на 20 одиниць, а попит на підставки моделі *B* не перевищує 50 одиниць на тиждень. Визначити обсяги виробництва підставок під телевізор обох моделей, які максимізують прибуток фабрики. Побудувати економіко-математичну модель задачі та розв'язати її графічно.

Розв'язування. Нехай x_1 - кількість підставок моделі *A*, виготовлених фабрикою за тиждень, а x_2 – відповідна кількість підставок моделі *B*.

Цільова функція – максимізація прибутку фабрики від реалізації продукції, тобто

$$Z = 80x_1 + 60x_2 \quad (max).$$

Обмеження математичної моделі враховують час роботи станків (першого та другого) для обробки продукції та попит на підставки для телевізорів обох моделей. Обмеження на час роботи першого та другого станків матимуть вигляд:

$$18x_1 + 20x_2 \le 30 \cdot 60 = 1800 \text{ хв. – для першого станка,}$$

$$21x_1 + 29x_2 \le 32 \cdot 60 = 1920 \text{ хв. – для другого станка.}$$

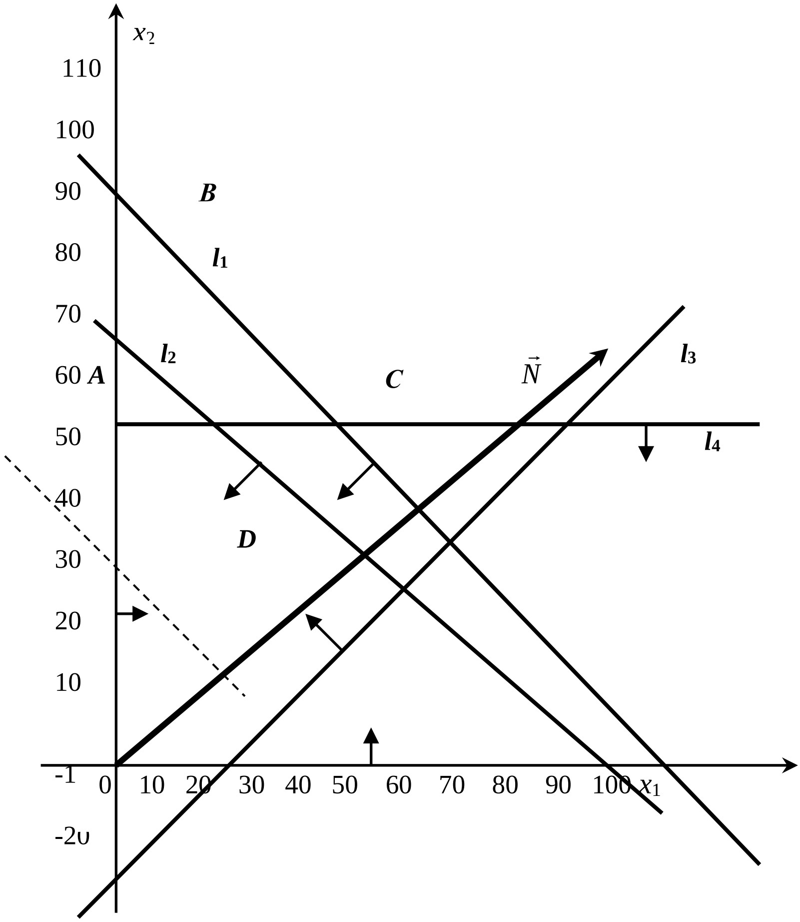
Обмеження на попит $x_1 - x_2 \le 20, x_2 \le 50$.

Отже, економіко-математичну модель задачі записуємо так:

$$\begin{cases} 18x_1 + 20x_2 \le 1800 \\ 21x_1 + 29x_2 \le 1920 \\ x_1 - x_2 \le 20 \\ x_2 \le 50 \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$Z = 80x_1 + 60x_2 \left(\max\right).$$

Задачу розв'язуємо графічним методом за відомим алгоритмом.



$$Z = 80x_1 + 60x_2 \ (\max).$$

$$\begin{cases} 18x_1 + 20x_2 = 1800, & l_1(0;90);(100;0); \\ 21x_1 + 29x_2 = 1920, & l_2\left(0;66\frac{6}{29}\right);\left(91\frac{3}{7};0\right); \\ x_1 - x_2 = 20, & l_3(0;-20);(20;0); \\ x_2 = 50, & l_4 - \textit{пряма} \,||\, \textit{осі } OX_1 \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0 & \end{cases}$$

Будуємо многокутник розв'язків.

Утворився многокутник розв'язків *OABCD*. Вектор нормалі $\overline{N}(80;60)$ і перпендикулярно до нього лінія рівня

За дослідженням (паралельним перенесенням лінії рівня в напрямку вектора нормалі) точка *C* є точкою максимуму. Координати цієї точки визначають оптимальний план задачі, тобто обсяги виробництва підставок під телевізор моделей *A* та *B*, що максимізують прибуток від їх реалізації.

Координати точки $C(l_2 \cap l_3)$ знайдемо, розв'язавши систему рівнянь

$$\begin{cases} 21x_1 + 29x_2 = 1920 \\ x_1 - x_2 = 20 \end{cases}.$$

З другого рівняння знаходимо $x_1 = 20 + x_2$. Підставимо цей результат у перше рівняння. Маємо:

$$21(20 + x_1) + 29x_2 = 1920;$$

$$420 + 21x_2 + 29x_2 = 1920;$$

$$50x_2 = 1500; \; x_2 = 30, \; a \; x_1 = 50.$$

Отже, $Z = 80x_1 + 60x_2 = 80 \times 50 + 60 \times 30 = 5800$.

Це означає, що якщо фабрика щотижня вготовлятиме 50 підставок під телевізор першої моделі (*A*) та 30 – другої моделі (*B*), то вона отримає максимальний прибуток у розмірі 5800 грн. При цьому тижневий фонд роботи станків буде використано повністю.

§4.3_Симплексний метод та його застосування

1. ***Поняття про симплексний метод та канонічну форму ОЗЛП з ОР.***
2. ***Основні характеристики симплексного - методу.***
3. ***Робота з симплекс - таблицями.***

1. Симплексний метод – один з основних методів розв'язування задач лінійного програмування. Розглянемо його ідею на конкретному прикладі задачі про використання ресурсів з двома видами ресурсів та двома видами продукції.

Означення 1. *Невід'ємний базисний розв'язок (план) будемо називати* ***опорним.***

Приклад 1. Знайти найбільше значення функції

$$z = 12 + x_1 + 2x_2$$

при таких обмеженнях

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 12, \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 16, \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1,2,3,4). \end{cases}$$

Розв'язування. Очевидно, що тут x_3, x_4 — базисні невідомі, а x_1, x_2 — вільні. Візьмемо початковий опорний план так: $x_1 = x_2 = 0$ (вільні невідомі нульові), тоді $x_3 = 12, x_4 = 16$.

$$x^{(1)} = (0{,}0{,}12{,}16),\ z\left(x^{(1)}\right) = 12.$$

Такий розв'язок відповідає ситуації, коли продукція не виробляється. Будемо збільшувати ту з вільних невідомих, яка має додатній коефіцієнт у цільовій функції (причому, більший), тому що значення цільової функції при цьому зростатиме. Це означає, що при випуску продукції прибуток збільшуватиметься. Тобто збільшуватимемо x_2.

Нехай $x_1 = 0$. Система набуває вигляду

$$\begin{cases} 3x_2 + x_3 = 12, \\ 2x_2 + x_4 = 16, \\ x_j \geq 0 \quad (j = 2,3,4). \end{cases}$$

Щоб x_3, x_4 були додатними, то в першому рівнянні x_2 можна надати найбільшого значення $\frac{12}{3} = 4$, а в другому рівнянні $\frac{16}{2} = 8$. Ясно, що x_2 не повинно бути більше 4, бо, інакше, в другому рівнянні x_3 буде від'ємною. x_2 вибираємо як найменшу частку від ділення вільних членів на відповідні коефіцієнти при x_2.

Нехай тепер $x_2 = 4$, тоді $x_3 = 0, x_4 = 8$. Ми дістали другий опорний план і відповідну йому цільову функцію

$$x^{(2)} = (0,4,0,8), z\left(x^{(2)}\right) = 20.$$

Тепер базисними невідомими є x_2, x_4, а x_1, x_3 — вільні. Розв'язавши вихідну систему рівнянь відносно нового базису методом Жордана – Гаусса, отримаємо

$$\begin{cases} \frac{2}{3}x_1 + x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 4, \\ -\frac{1}{2}x_1 - \frac{2}{3}x_3 + x_4 = 8; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = 4 - \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_3, \\ x_4 = 8 + \frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_3. \end{cases}$$

Запишемо цільову функцію через нові вільні невідомі

$$z = 12 + x_1 + 2\left(4 - \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_3\right) = 20 - \frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_3.$$

Видно, що при збільшенні вільних невідомих значення цільової функції буде спадати, тому знайдений розв'язок вважатимемо оптимальним.

Отже, **ідея методу** полягає в тому, щоб переходити від одного опорного плану до іншого таким способом, щоб цільова функція оптимізовувалась (зростала чи спадала в залежності від умови задачі). Змінні які переходять з базисних у вільні повинні зберігати умову невід'ємності і на кожному кроці можна міняти місцями лише одну базисну невідому з однією вільною.

Ми бачили, що кожному опорному плану відповідає певним чином записана ОЗЛП з ОР. Форма її запису має деякі закономірності

1. Система рівнянь записана так, що кожна базисна невідома входить лише до одного рівняння системи, з коефіцієнтом, що дорівнює одиниця. Якщо рівняння розмістити так, щоб нумерація базисних невідомих була строго зростаючою, то матриця базисних невідомих буде одиничною.
2. Вільні члени системи обмежень – невід'ємні
3. Оптимізуюча форма залежить лише від вільних невідомих.

Означення 2. *ОЗЛП з ОР, яка задовольняє умови* (*1*) – (*3*) *називають* ***канонічною формою.***

Означення 3. *Систему обмежень, що задовольняє умови* (*1*) – (*2*) *називають* ***канонічною системою обмежень.***

Якщо система обмежень – канонічна, а форма залежить ще від базисних невідомих, то ЗЛП називається майже канонічною.

2. При розв'язуванні задач на практиці будемо застосовувати метод ітерації, коли при виборі кожного опорного плану, починаючи з першого, за допомогою деяких правил визначають, чи знайдено розв'язок задачі, чи треба переходити до наступного опорного плану. Такий метод назвемо ***симплексним методом*** (чи ***симплекс-методом***).

Розглянемо основні властивості методу:

1. **Повнота**. Вказуємо чи правила роботи є однозначними, чи ні, як практично побудувати перший опорний план, чи буде останній побудований план точним розв'язком задачі.
2. **Область застосовності**. Вказуємо, для яких задач можна застосувати такий метод та визначити чи підпадає конкретна задача під дія методу. Якщо розв'язок існує, але останній опорний план його не дає, то треба вказати якої помилки припущено.
3. **Властивість збіжності**. Вказуємо, чи завжди алгоритм забезпечує збіжність, чи завжди збіжність приводить до правильного результату, скільки ітерацій треба зробити для отримання розв'язку, чи можна вважати план оптимальним, якщо проведення ітерацій було припинено на деякому кроці?
4. **Вимоги до обчислень**. З'ясовуємо наскільки складними та громіздкими є обчислення методу та при якій точності обчислень ми одержимо задовільні результати.

Зазначимо, що вперше симплексний метод застосував американський вчений Дж. Данціг в 1949 році, хоча сам алгоритм методу, крім правил вибору ключового елемента, був відомий ще у XIX столітті.

3. Зауважимо, що немає потреби при кожній ітерації виписувати формули переходу. Цей процес можна формалізувати, використовуючи спеціальні симплекс-таблиці. При роботі з ними не будемо розрізняти де обмеження, а де оптимізуюча функція, а перетворення проведемо методом Жордана –Гаусса, дещо модифікованим.

Критерій оптимальності за симплекс – таблицями: Якщо форма максимізується і в нульовому рядку відсутні від'ємні числа (за винятком, можливо, стовпця опорного плану), то опорний план є ***оптимальним.***

Коефіцієнти рядка 0 можна інтерпритувати як приріст функції z при збільшені вільної невідомої на одиницю. Приріст буде додатним, якщо коефіцієнт від'ємний, і від'ємним - якщо коефіцієнт додатний.

Запишемо ***алгоритм роботи з симплекс - таблицями:***

1. Зведемо задачу до канонічної форми.
2. Формально заповнюємо таблицю коефіцієнтами цільової функції (нульовий рядок) та коефіцієнтами рівнянь системи обмежень.
3. Перевіряємо задачу на оптимальність за критерієм.
4. Для вибору ***ключового стовпця*** знаходимо найбільший елемент в 0-рядку при дослідження цільової функції на максимум, чи найменший елемент при дослідженні її на максимум.
5. Для вибору ***ключового елемента*** складаємо відношення вільних членів (чисел стовпчика "опорний план") до відповідних додатних чисел ключового стовпчика і вибираємо серед них менше.
6. На перетині ключового рядка і ключового стовпця маємо ***ключовий елемент***.
7. Замість базисної невідомої ключового рядка вводимо нову базисну невідому - невідому ключового стовпчика.
8. Для заповнення ключового рядка ділимо всі відповідні елементи на ключовий елемент і розміщуємо на своїх місцях у новій таблиці. Цей рядок для нової таблиці будемо називати ***ведучим.***
9. Всі інші рядки заповнюємо за методом Жордана-Гаусса

а) знаходимо рядок, який будемо заповнювати у попередній таблиці і позначаємо в ньому число колишнього ключового стовпчика;

б) множимо всі числа клітинок провідного рядка на число, протилежне до позначеного;

в) додаємо число рядка, що заповнюється, попередньої таблиці до чисел відповідних стовпчиків, утворених в п.б), і розміщуємо на своїх місцях у новій таблиці.

10. Перевіряємо новий опорний план на оптимальність. Якщо він не оптимальний, то повертаємось до пункту 4, якщо – оптимальний, то виписуємо отриманий розв'язок.

Розглянемо правила роботи із симплекс-таблицями на прикладі.

Приклад 2. Задачу лінійного програмування задано у вигляді таблиці

Види сировини	Види продукції		**Запаси сировини**
S_1	2	1	224
S_2	3	2	428
S_3	4	1	336
Прибуток	24	9	

Знайти оптимальний план виробництва.

Розв'язування. Позначимо x_1 – план випуску першого виду продукції, x_2- другої продукції. Складемо математичну модель отриманої задачі лінійного програмування.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 224, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 428, \\ 4x_1 + x_2 \le 336; \end{cases}$$
$$z = 24x_1 + 9x_2 (max)$$

Зведемо її до стандартної форми ввівши додаткові базисні невідомі x_3, x_4, x_5.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 224, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 428, \\ 4x_1 + x_2 + x_5 = 336; \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, j = 1,2,3,4,5.$$
$$z - 24x_1 - 9x_2 = 0 (max)$$

Складемо симплекс – таблицю та проведемо всі необхідні перетворення за алгоритмом, описаним вище.

Номер ітерації	Номер рядка	Базисні невідомі	Опорний розв'язок	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
I	0	z	0	-24↓	-9	0	0	0
	1	x_3	224	2	3	3	0	0

	2	x_4	428	3	2	0	1	0
	3	$x_5 \rightarrow$	336	$\boxed{(4)}$	1	0	0	1
II	0	z	2016	0	-3↓	0	0	6
	1	$x_3 \rightarrow$	56	0	$\boxed{\frac{1}{2}}$	1	0	$-\frac{1}{2}$
	2	x_4	176	0	$\frac{5}{4}$	0	1	$-\frac{3}{4}$
	3	x_1	84	1	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{1}{4}$
III	0	z	2352	0	0	6	0	3
	1	x_2	112	0	1	2	0	-1
	2	x_4	36	0	0	-2,5	1	0,5
	3	x_1	56	1	0	-0,5	0	0,5

Зауваження. Базисні стовпчики заповнюються формально і поки що для аналізу задачі не використовуються. Тому можна заповнювати таблиці і без стовпчиків базисних невідомих. Такі таблиці називають *редукованим*.

З останньої таблиці виписуємо оптимальний план

$$x_{опт} = (56{,}112{,}0{,}36{,}0),\ z_{max} = 2352.$$

З економічної точки зору це означає, що оптимального плану ми досягнемо при випуску 56 одиниць першої продукції і 112 одиниць другої продукції.

§ 4.4. Теорія двоїстості

1. Правила побудови двоїстих задач. Основні теореми двоїстості
2. Економічна інтерпретація двоїстої задачі

Кожній задачі лінійного програмування відповідає двоїста, яка формується за допомогою певних правил безпосередньо з умов прямої задачі. Нехай задача лінійного програмування має вигляд:

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \qquad (max) \tag{2.20}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m; \\ x_i \ge 0, \quad i = \overline{1,n}. \end{cases} \tag{2.21}$$

Побудова двоїстої задачі лінійного програмування здійснюється за такими правилами:

1. У відповідність кожному основному обмеженню початкової задачі ставимо двоїсту змінну: першому обмеженню – $\boldsymbol{y_1}$, другому – y_2, ..., m-му – $\boldsymbol{y_m}$. Кількість невідомих двоїстої задачі дорівнює кількості основних обмежень прямої задачі лінійного програмування:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m \\ x_i \ge 0, \quad i = \overline{1,n}. \end{cases} \left| \begin{array}{l} y_1; \\ y_2; \\ \ldots \\ y_m; \\ \end{array} \right. \tag{2.22}$$

2. Якщо цільова функція вихідної задачі досліджується на максимум, то двоїстої – на мінімум, і навпаки.

3. Щоби записати цільову функцію двоїстої задачі, потрібно праві частини основних обмежень початкової задачі почленно перемножити на двоїсті змінні, що відповідають кожному з цих обмежень і додати. Отже, коефіцієнтами при невідомих в цільовій функції двоїстої задачі є праві частини основних обмежень прямої задачі:

$$z^* = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m \qquad (min). \tag{2.23}$$

4. Обмеження двоїстої задачі формуємо таким чином: коефіцієнти при невідомій кожного основного обмеження системи (2.23) почленно множимо на відповідні двоїсті змінні і додаємо. В результаті отримуємо ліві частини обмежень двоїстої задачі: $a_{1i}y_1 + a_{2i}y_2 + \ldots + a_{mi}y_m$. Правими частинами обмежень двоїстої задачі є коефіцієнти при невідомій $\boldsymbol{x_i}$ в цільовій функції початкової задачі ($\boldsymbol{c_i}$). Отже, кількість змінних прямої задачі дорівнює кількості основних обмежень двоїстої.

5. Враховуючи, що в основних обмеженнях початкової задачі знак нерівності “≤”, то в обмеженнях двоїстої задачі знак нерівності буде “≥”.

6. Вільний член цільової функції прямої задачі переноситься без змін у цільову функцію двоїстої.

7. Матриця

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

що складається із коефіцієнтів при невідомих у системі обмежень прямої задачі, і матриця коефіцієнтів при невідомих системи обмежень двоїстої задачі лінійного програмування

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

утворюються одна з одної транспонуванням, тобто заміною рядків стовпчиками, а стовпчиків – рядками.

У результаті отримаємо двоїсту задачу:

$$z^* = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \ldots + b_m y_m \quad (min) \tag{2.24}$$

$$\begin{cases} a_{11} y_1 + a_{21} y_2 + \ldots + a_{m1} y_m \ge c_1; \\ a_{12} y_1 + a_{22} y_2 + \ldots + a_{m2} y_m \ge c_2; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1n} y_1 + a_{2n} y_2 + \ldots + a_{mn} y_m \ge c_n; \\ y_j \ge 0, \quad j = \overline{1, m}. \end{cases} \tag{2.25}$$

Двоїсті пари задач лінійного програмування бувають симетричні та несиметричні.

У симетричних задачах обмеження прямої та двоїстої задач є нерівностями, а змінні обох задач можуть набувати лише невід'ємних значень.

У несиметричних задачах обмеження прямої задачі можуть бути записані у вигляді рівнянь, а двоїстої – лише у вигляді нерівностей. У цьому випадку відповідні змінні двоїстої задачі можуть набувати будь-якого значення, необмеженого знаком.

Зауваження. Якщо в системі обмежень прямої задачі містяться нерівності і рівняння, то в двоїстій задачі невідомі, що відповідають обмеженням-нерівностям прямої задачі, повинні набувати тільки невід'ємні значення, а двоїсті змінні, що відповідають обмеженням-рівнянням прямої задачі, можуть набувати значення довільного знаку.

Між прямою та двоїстою задачами лінійного програмування існує тісний взаємозв'язок, який випливає з наведених далі теорем.

Перша теорема двоїстості. Якщо одна з пари двоїстих задач має оптимальний план, то інша задача також має оптимальний розв'язок, причому значення цільових функцій для оптимальних планів дорівнюють одне одному, тобто max Z = min Z^* і навпаки.

Якщо ж цільова функція однієї з пари двоїстих задач необмежена, то друга задача взагалі не має розв'язків.

Якщо одна з пари не має розв'язку, то цільова функція другої задачі або необмежена, або також не має розв'язку.

Друга теорема двоїстості. Якщо в результаті підстановки оптимального плану прямої задачі в систему обмежень цієї задачі ***i***-те обмеження виконується як строга нерівність, то відповідний ***i***-тий компонент оптимального плану двоїстої задачі дорівнює нулю.

Якщо i-тий компонент оптимального плану двоїстої задачі додатний, то відповідне i-те обмеження прямої задачі виконується для оптимального плану як рівняння.

Третя теорема двоїстості. Двоїста оцінка характеризує приріст цільової функції, який зумовлений малими змінами вільного члена відповідного обмеження.

Економічну інтерпретацію двоїстої задачі розглянемо на прикладі оптимального використання обмежених ресурсів.

Для виробництва ***n*** видів продукції використовується ***m*** видів ресурсів, запаси яких обмежені значеннями b_i $(i = \overline{1,m})$. Норма витрат кожного виду ресурсу на одиницю продукції становить a_{ij} $(i = \overline{1,m};\ \ j = \overline{1,n})$. Ціна одиниці продукції j-го виду дорівнює c_j $(j = \overline{1,n})$. Знайти план виробництва продукції, що забезпечить максимальний дохід.

Математична модель задачі:

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n (max()) \tag{2.26}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m; \\ x_j \ge 0, \qquad j = \overline{1,n}. \end{cases} \tag{2.27}$$

Пряма задача полягає у визначенні такого оптимального плану виробництва продукції $X_{опт}$, який дасть найбільший дохід. Двоїста задача до даної матиме вигляд:

$$z^* = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m (min()) \tag{2.28}$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \ge c_1; \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m \ge c_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m \ge c_n; \\ y_i \ge 0, \qquad i = \overline{1,m}. \end{cases} \tag{2.29}$$

Економічний зміст двоїстої задачі полягає в тому, щоб визначити таку оптимальну систему двоїстих оцінок y_i ресурсів, що використовуються для виробництва продукції, при яких загальна вартість усіх ресурсів буде найменшою. Оскільки двоїсті змінні означають цінність одиниці ресурсу, то їх інколи ще називають *тіньовою ціною відповідного ресурсу.*

За допомогою двоїстих оцінок можна визначити статус кожного ресурсу прямої задачі та рентабельність продукції, що виготовляється.

Ресурси, що використовуються для виробництва продукції, умовно можна поділити на *дефіцитні* та *недефіцитні*, залежно від того, повне чи часткове їх використання передбачене оптимальним планом прямої задачі. Якщо двоїста оцінка y_i в оптимальному плані двоїстої задачі дорівнює нулю, то відповідний i-тий ресурс при виробництві продукції використовується не повністю і є недефіцитним. Якщо ж двоїста оцінка $y_i>0$, то i-тий ресурс використовується повністю для оптимального плану виробництва продукції і називається дефіцитним. У цьому випадку величина двоїстої оцінки вказує, на скільки збільшиться значення цільової функції Z, якщо запас відповідного ресурсу збільшити на одну одиницю.

Аналіз *рентабельності продукції*, що виготовляється, виконується за допомогою двоїстих оцінок і обмежень двоїстої задачі. Ліва частина кожного обмеження є вартістю всіх ресурсів, які використовуються для виробництва одиниці j-тої продукції. Якщо ця величина перевищує ціну одиниці продукції (c_j), то виготовляти цю продукцію не вигідно, вона нерентабельна і в оптимальному плані прямої задачі відповідна $x_j=0$. Якщо ж загальна оцінка всіх ресурсів дорівнює ціні одиниці продукції, то виготовляти таку продукцію доцільно, вона рентабельна і в оптимальному плані прямої задачі відповідна змінна $x_j > 0$.

Приклад 2.4.

1. Скласти двоїсту задачу до вихідної задачі прикладу 2.2.
2. Виписати оптимальний план двоїстої задачі з останньої симплекс-таблиці розв'язаної задачі і зробити її економічний аналіз.

Розв'язування.

1. Математична модель прямої задачі мала вигляд:

$$Z = 9x_1 + 6x_2 \qquad (max)$$
$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 \le 275; \\ 13x_1 + 8x_2 \le 680; \\ x_1 + x_2 \le 60; \\ x_1 \ge 0; \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Побудуємо двоїсту задачу до вихідної:

У відповідність кожному основному обмеженню початкової задачі ставимо двоїсту змінну: першому обмеженню – y_1, другому – y_2, третьому – y_3:

$$Z = 9x_1 + 6x_2 \qquad (max)$$
$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 \le 275 \\ 13x_1 + 8x_2 \le 680 \\ x_1 + x_2 \le 60 \\ x_1 \ge 0; \\ x_2 \ge 0. \end{cases} \left| \begin{array}{l} y_1; \\ y_2; \\ y_3; \\ \\ \\ \end{array} \right.$$

Якщо цільова функція вихідної задачі досліджується на максимум, то двоїстої – на мінімум. Запишемо цільову функцію двоїстої задачі. Для цього праві частини основних обмежень початкової задачі почленно перемножимо на двоїсті змінні, що відповідають кожному з цих обмежень і додамо. Отримаємо:

$$z^* = 275y_1 + 680y_2 + 60y_3 \qquad (min).$$

Запишемо обмеження двоїстої задачі. Для цього коефіцієнти при невідомій x_1 з системи обмежень почленно множимо на двоїсті змінні і додаємо, одержимо ліву частину першого обмеження двоїстої задачі. Враховуючи, що в основних обмеженнях початкової задачі знак нерівності "$\le$", то в обмеженні двоїстої задачі знак нерівності буде "$\ge$". Правою частиною обмеження двоїстої задачі є коефіцієнт при невідомій x_1 в цільовій функції початкової задачі. Ми отримали перше обмеження двоїстої задачі: $4y_1 + 13y_2 + y_3 \ge 9$. Аналогічно отримаємо друге обмеження: $5y_1 + 8y_2 + y_3 \ge 6$. У результаті маємо двоїсту задачу:

$$z^* = 275y_1 + 680y_2 + 60y_3 \qquad (min)$$

$$\begin{cases} 4y_1 + 13y_2 + y_3 \ge 9; \\ 5y_1 + 8y_2 + y_3 \ge 6; \\ y_1, y_2, y_3 \ge 0. \end{cases}$$

2. Розв'язок двоїстої задачі виписуємо з нульового рядка останньої (в нашій задачі – третьої) симплекс-таблиці:

№ таблиці	№ рядка	Базис	Опорний план	Коефіцієнти при невідомих				
				x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
3	0	Z	480	0	0	0	3/5	6/5
	1	x_3	15	0	0	1	1/5	-33/5
	2	x_1	40	1	0	0	1/5	-8/5
	3	x_2	20	0	1	0	-1/5	13/5

$$Z^*_{\min} = Z_{\max} = 480 \quad \text{при} \quad y_1 = 0, \quad y_2 = \frac{3}{5}, \quad y_3 = \frac{6}{5}.$$

Значення двоїстих змінних беремо із клітинок нульового рядка, що відповідають базисним змінним початкової задачі, тобто $y_1 \to x_3, y_2 \to x_4,$

$y_3 \to x_5$.

Перевірка:

$$z^*_{\min} = 275 \cdot 0 + 680 \cdot \frac{3}{5} + 60 \cdot \frac{6}{5} = 408 + 72 = 480.$$

Невідомі $y_2 = \frac{3}{5}$, $y_3 = \frac{6}{5}$, а це означає, що ресурси S_2, S_3 використані повністю і є дефіцитними. Збільшення запасу ресурсу S_2 на одиницю приведе до збільшення цільової функції початкової задачі (доходу) на $\frac{3}{5}$, а збільшення запасу ресурсу S_3 на одиницю призведе до збільшення доходу на $\frac{6}{5}$. Оскільки значення $\boldsymbol{y}_3$ більше значення y_2, то ресурс S_3 є дефіцитнішим за S_2. Двоїста змінна $\boldsymbol{y}_1=0$, а значить ресурс S_1 не використаний повністю (є надлишок цього ресурсу) і він є недефіцитним. Це підтверджується тим, що додаткова невідома $\boldsymbol{x}_3$, яка була введена в перше обмеження (по використанню ресурсу S_1) для того, щоби звести задачу до канонічного виду і по своїй суті є різницею між правою та лівою частинами цього обмеження, не дорівнює нулю (x_3=l5) в оптимальному плані. Значить, надлишок ресурсу S_1 становить 15 одиниць.

§ 4.5. Основи цілочислового програмування.

1. ***Задачі цілочисельного програмування.***
2. ***Нерівність Гоморрі.***
3. ***Метод Гоморрі розв'язування задач цілочисельного програмування.***
4. ***Геометричне трактування методу Гоморрі.***

Існує досить широкий клас задач математичного програмування, в оптимальному розв'язку яких змінні набувають дробових значень, що з економічної точки зору не має змісту, наприклад, коли мова йде про випуск певної продукції (комп'ютерів, меблів і т.д.). Тому це привело до нового класу задач – задач цілочислового програмування.

У загальному випадку така задача має вигляд;

Знайти максимум (мінімум) функції

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \qquad (2.37)$$

за умов

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n\{\le, =, \ge\}b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n\{\le, =, \ge\}b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n\{\le, =, \ge\}b_m; \\ x_j \ge 0, \qquad j = \overline{1, n}. \end{cases} \qquad (2.38)$$

$$x_j \quad - \quad цілі, \quad j = \overline{1, n}. \qquad (2.39)$$

де c_{ij} – відстань між містами i та j.

У деяких реальних задачах ставиться умова цілочислових значень не до всіх змінних, а однієї чи декількох. Такі задачі називають частково цілочисловими.

Для знаходження оптимального розв'язку цілочислових задач використовують спеціальні методи. Найпростішим методом розв'язування цілочислової задачі є знаходження її оптимального розв'язку, як задачі, що має лише неперервні змінні, з подальшим округленням останніх. Такий підхід часто є виправданим. Проте, якщо мова йде про випуск продукції великої вартості (наприклад, турбіни до електростанцій чи агрегати в сушильний цех), то будь-які заокруглення недопустимі.

Нехай маємо задачу цілочислового програмування (2.37)-(2.39). Для її розв'язування можна скористатися ітеративним методом Гоморі, суть якого полягає ось у чому:

1. Використовуючи симплекс-метод, знаходять розв'язок послабленої задачі, тобто задачі без вимог цілочисловості змінних – (2.37)-(2.39). Якщо серед елементів умовно-оптимального плану немає дробових чисел, то цей план є оптимальним планом задачі цілочислового програмування (2.37)-(2.39).

2**.** Якщо в умовно-оптимальному плані є дробові значення, то вибирається змінна, яка має найбільшу дробову частину. На базі цієї змінної та елементів рядка останньої симплекс-таблиці, що відповідає цій змінній будується додаткове обмеження Гоморі:

$$\sum_{j=1}^{n}\{a_{ij}\}\,x_j \geq \{b_j\}, \tag{2.40}$$

де символ { } означає дробову частину числа.

Для визначення дробової частини будь-якого числа від цього числа віднімають цілу його частину – найбільше ціле число, що не перевищує даного. Цілу частину числа позначають [ ]. Наприклад,

[2,4]= 2; [–2,4] = –3;
{2,4}=2,4–[2,4]=2,4–2=0,4; {–2,4}=–2,4–[–2,4]= –2,4–(–3)=3–2,4=0,6.

3. Додаткове обмеження після зведення його до канонічної форми приєднується до останньої симплекс-таблиці, яка містить умовно-оптимальний розв'язок задачі. Отриману розширену задачу розв'язують, а потім перевіряють її розв'язок на цілочисловість. Якщо він не цілочисловий, то повертаються до пункту 2. Процедуру повторюють до тих пір, поки не буде знайдено цілочислового оптимального розв'язку або доведено, що задача не має допустимих розв'язків у множині цілих значень.

Досвід показує, що процес розв'язування задач великої розмірності методом Гоморі повільно збіжний.

Детальніше алгоритм методу Гоморі розглянемо на конкретному прикладі.

Приклад 2.7. Знайти розв'язок задачі цілочислового програмування методом Гоморі:

$$Z = x_1 - x_2 + 2x_3 + 5 \qquad (max)$$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 \leq 1; \\ x_1 + 3x_2 - x_3 \leq 2; \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \leq 4; \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0; \\ x_1, x_2, x_3 - \quad цілі. \end{cases}$$

Розв'язування.

Будемо розв'язувати цю задачу, нехтуючи умовою цілочисловості. Зведемо задачу до канонічного виду і цільову функцію запишемо так само, як обмеження:

$$Z - x_1 + x_2 - 2x_3 = 5 \qquad (max)$$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1; \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + x_5 = 2; \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_6 = 4; \\ x_i \geq 0, \qquad i = \overline{1,6}. \end{cases}$$

Заповнимо початкову симплекс-таблицю і розв'яжемо дану задачу.

Оскільки в нульовому рядку немає від'ємних чисел, а цільова функція досліджується на максимум, то це означає, що ми отримали оптимальний розв'язок задачі з послабленими умовами (без умов цілочисловості):

$$Z\frac{17}{2}_{max} \qquad x_{опт.} = (0;\quad \frac{3}{2};\quad \frac{5}{2};\quad 0;\quad 0;\quad 5).$$

Але ми бачимо, що компоненти оптимального плану дробові, тому запишемо нерівність Гоморі для однієї з базисних невідомих останньої таблиці (наприклад, для x_2), оскільки дробові частини обох рівні:

$$\{5\}x_1 + \{0\}x_2 + \{1\}x_3 + \left\{\frac{3}{2}\right\}x_4 + \left\{\frac{1}{2}\right\}x_5 + \{0\}x_6 \geq \left\{\frac{5}{2}\right\} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_5 \geq \frac{1}{2}.$$

№ таблиці	№ рядка	Базис	Опорний план	*Коефіцієнти при невідомих*					
				x_1	x_2	$x_3\downarrow$	x_4	x_5	x_6
1	0	Z	5	–1	1	–2	0	0	0
	1	x_4 ←	1	3	–1	$\boxed{1}$	1	0	0
	2	x_5	2	1	3	–1	0	1	0
	3	x_6	4	2	1	–1	0	0	1
2	0	Z	7	5	–1↓	0	2	0	0
	1	x_3	1	3	-1	1	1	0	0
	2	x_5 ←	3	4	$\boxed{2}$	0	1	1	0
	3	x_6	5	5	0	0	1	0	1
3	0	Z	$\frac{17}{2}$	7	0	0	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
	1	x_3	$\frac{5}{2}$	5	0	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
	2	x_2	$\frac{3}{2}$	2	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
	3	**x_6**	**5**	**5**	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**

Зведемо дане обмеження до канонічної форми (від лівої частини віднімемо додаткову невід'ємну змінну x_7, щоб отримати рівняння, а тоді введемо штучну невідому u і, включивши це обмеження до останньої симплекс-таблиці, дальше будемо розв'язувати дану задачу методом штучного базису.

$$\frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_5 - x_7 + u = \frac{1}{2}.$$

Штучна оптимізуюча форма буде мати вигляд:

$$f = u = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_5 + x_7 \qquad (min).$$

або $$f+\frac{1}{2}x_4+\frac{1}{2}x_5-x_7=\frac{1}{2} \qquad (min).$$

Заповнимо початкову симплексну таблицю:

№ таблиці	№ рядка	Базис	Опорний план	Коефіцієнти при невідомих						
				x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
4	0	f	$\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{1}{2}\downarrow$	$\frac{1}{2}$	0	-1
	0'	Z	$\frac{17}{2}$	7	0	0	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0
	1	x_3	$\frac{5}{2}$	5	0	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0
	2	x_2	$\frac{3}{2}$	2	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0
	3	x_6	5	5	0	0	1	0	1	0
	4	u←	$\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
5	0	f	0	0	0	0	0	0	0	0
	0'	Z	6	6	0	0	0	-2↓	0	5
	1	x_3	1	5	0	1	0	-1	0	3
	2	x_2	1	2	1	0	0	0	0	1
	3	x_6	4	5	0	0	0	-1	1	3
	4	x_4←	1	0	0	0	1	$\boxed{1}$	0	-2

Ми отримали f_{min}=0, а це означає, що задача зведена до канонічного виду і дальше ми можемо розв'язувати її звичайним симплексним методом. Тому відкидаємо нульовий рядок з штучною оптимізуючою формою. Оскільки функція *Z* досліджується на максимум, а в 0' рядку є від'ємне число (-2), то здійснюємо ще одну ітерацію і переходимо до наступної таблиці:

№ таблиці	№ рядка	Базис	Опорний план	Коефіцієнти при невідомих						
				x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
6	0	Z	8	6	0	0	2	0	0	1
	1	x_3	2	5	0	1	1	0	0	1
	2	x_2	1	2	1	0	0	0	0	1
	3	x_6	5	5	0	0	1	0	1	1
	4	x_5	1	0	0	0	1	1	0	−2

Ми отримали оптимальний розв'язок нашої задачі:

$$Z_{max} \quad x_{опт.} = (0;\ \ 1;\ \ 2;\ \ 0;\ \ 1;\ \ 5;\ \ 0)$$

причому всі значення змінних оптимального плану – цілі числа, а це означає, що ми отримали розв'язок вихідної задачі.

Розглянемо виробничу ситуацію, що зводиться до задачі цілочислового програмування.

Припустимо, що для виконання *n* робіт фірма має *n* працівників. Позначимо: *i* – індекс претендента на виконання певної роботи,

$i = \overline{1, n}$; c_{ij} – сумарні витрати на виконання *i*-го виду роботи *j*-тим працівником; *j* – індекс виду роботи, $j = \overline{1, n}$. Приймемо таку умову: кожний претендент може бути призначеним тільки на одну роботу, а кожна робота може бути виконаною тільки одним працівником.

Невідомою величиною в задачі буде

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & якщо\ i - й\ кандидат\ виконує\ j - ту\ роботу; \\ 0, & в\ протилежному\ випадку. \end{cases}$$

Необхідно розрахувати оптимальну стратегію призначення кандидатів на виконання обсягу робіт, при якій сумарні витрати на виконання були би мінімальними.

Тоді економіко-математична модель задачі матиме вигляд.

Знайти

$$Z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij} \rightarrow min \qquad (2.41)$$

при виконанні таких умов:

1) кожним кандидатом виконується тільки одна робота

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = \overline{1, n}; \qquad (2.42)$$

2) кожна робота може виконуватися одним працівником

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1\ , j = \overline{1, n}; \qquad (2.43)$$

3) відносно двійкових змінних

$$x_{ij} \in \{0;1\}\ ,i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,n}; \qquad (2.44)$$

§ 4.6. Основи нелінійного програмування

1. Постановка задачі нелінійного програмування та її характерні особливості.

2. Графічний метод розв'язання задач не лінійного програмування.

3. Метод множників Лагранжа

До цього часу ми розглядали задачі лінійного програмування, тобто всі невідомі і в цільову функцію і в обмеження задачі входили лінійно (в першому степені). Проте взаємозв'язки між економічними показниками досить часто носять нелінійний характер і побудована лінійна модель у такому випадку буде неадекватна реальній дійсності. Тому доводиться будувати нелінійні моделі.

У загальному випадку задача нелінійного програмування має вигляд:

$$Z = f(x_1,x_2,\dots,x_n) \qquad max(min) \qquad (2.45)$$

$$\begin{cases} q_1(x_1,x_2,\dots,x_n)\{\le,=,\ge\}b_1; \\ q_2(x_1,x_2,\dots,x_n)\{\le,=,\ge\}b_2; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ q_m(x_1,x_2,\dots,x_n)\{\le,=,\ge\}b_m; \\ x_j \ge 0, \qquad j = \overline{1,n}. \end{cases} \qquad (2.46)$$

де $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ та $q_i(x_1,x_2,\dots,x_n)$ – нелінійні функції.

При розв'язуванні задач нелінійного програмування її намагаються звести до лінійного виду, але це призводить до значних похибок. Деякі задачі нелінійного програмування можна розв'язати графічно.

Приклад 2.8.

Знайти найменше та найбільше значення функції

$$z = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - 2x_2 + 5$$

за обмежень

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 5; \\ x_1,x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Розв'язування.

Знайдемо розв'язок даної задачі графічно. Оскільки обмеження лінійні, то областю допустимих розв'язків буде многокутник розв'язків. Побудуємо його. Многокутником розв'язків є трикутник OBC.(Рис.2.2).

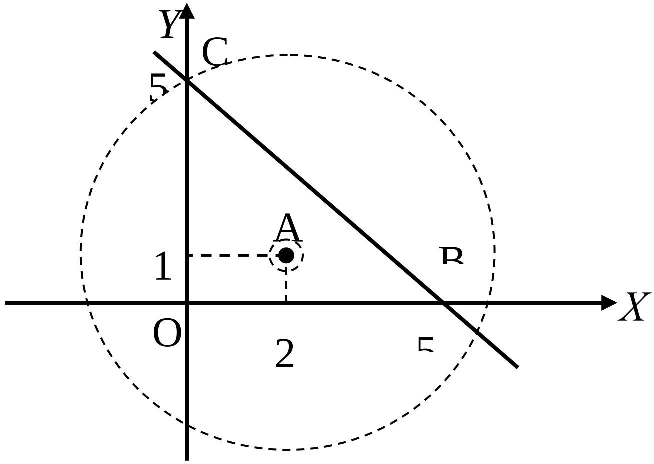


Рис. 2.2

Цільову функцію запишемо у вигляді

$$z = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - 2x_2 + 5 = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2.$$

Ми отримали рівняння кола з центром в точці (2;1) та радіусом $R = \sqrt{z}$. Значить, значення функції z буде зростати, якщо збільшуватиметься радіус кола і, навпаки, буде зменшуватися, якщо буде зменшуватися радіус кола. Ми бачимо, що коло найбільшого радіуса, яке перетинає крайню точку многокутника розв'язків – це коло з центром у точці А і яке проходить через точку С. Точка С має координати (0;5). Підставимо їх у цільову функцію і маємо

$$z_{\max} = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 = (0-2)^2 + (5-1)^2 = 4 + 16 = 20.$$

Очевидно, що найменшого значення функція досягатиме в точці А(2;1):

$$z_{\min} = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 = (2-2)^2 + (1-1)^2 = 0.$$

У даному прикладі ми бачимо, що точка максимуму є граничною, а точка мінімуму – внутрішньою точкою многокутника розв'язків.

Для розв'язування задач нелінійного програмування не існує універсального методу, а тому доводиться застосовувати багато методів і обчислювальних алгоритмів, які в основному ґрунтуються на теорії диференціального числення. Вибір методу залежить від конкретної постановки задачі та форми економіко-математичної моделі.

Розглянемо метод множників Лагранжа на прикладі такої задачі нелінійного програмування:

$$Z = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \qquad max(min) \tag{2.47}$$

$$q_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_i, \qquad i = \overline{1, m}, \tag{2.48}$$
де $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ та $q_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – диференційовані.

Ідея методу Лагранжа полягає в заміні даної задачі простішою: на знаходження екстремуму складнішої функції, але без обмежень. Ця функція називається ***функцією Лагранжа*** і записується у вигляді:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^{m} (b_i - q_i(x_1, x_2, \dots, x_n)), \tag{2.49}$$

де λ_i – не визначені поки що величини, так звані множники Лагранжа.

Необхідною умовою екстремуму функції багатьох змінних є рівність нулю частинних похідних по всіх змінних функції. Візьмемо ці частинні похідні і прирівняємо їх до нуля:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_j} = 0, & j = \overline{1, n}. \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_i} = 0, & i = \overline{1, m}. \end{cases} \tag{2.50}$$

або

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \dfrac{\partial q_i(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_j} = 0, & j = \overline{1, n}. \\ b_i - q_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 & i = \overline{1, m}. \end{cases} \tag{2.51}$$

Дана система, як правило, є нелінійною. Розв'язавши дану систему, знайдемо $X^* = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ та $\lambda_0 = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ – стаціонарні точки. Оскільки їх знайдено з необхідної умови екстремуму, то в них можливий максимум або мінімум. Іноді стаціонарна точка є сідловою (точка перегину графіка функції).

Розв'яжемо методом множників Лагранжа наступну задачу.

Приклад 2.9. Визначити оптимальні значення функції

$$z = 3x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_1 + 3x_2$$

при обмеженні

$$x_1 + x_2 = 3.$$

Розв'язування.

Перед тим, як будувати функцію Лагранжа, обмеження запишемо у такому вигляді, щоб у правій частині був нуль: $x_1 + x_2 - 3 = 0$. Тоді функція Лагранжа матиме вигляд:

$$L(x_1, x_2, \lambda) = 3x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_1 + 3x_2 + \lambda(x_1 + x_2 - 3).$$

Візьмемо частинні похідні цієї функції і прирівняємо їх до нуля:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x_1 + 2x_2 - 2 + \lambda = 0; \\ 4x_2 + 2x_1 + 3 + \lambda = 0; \\ x_1 + x_2 - 3 = 0. \end{cases}$$

Віднімемо від першого рівняння друге, щоб виключити λ, отримаємо наступну систему рівнянь:

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 - 5 = 0; \\ x_1 + x_2 - 3 = 0. \end{cases}$$

Розв'яжемо її:

$$\begin{cases} 4(3 - x_2) - 2x_2 - 5 = 0; \\ x_1 = 3 - x_2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12 - 4x_2 - 2x_2 - 5 = 0; \\ x_1 = 3 - x_2. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 6x_2 = 7; \\ x_1 = 3 - x_2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{7}{6}; \\ x_1 = 3 - \frac{7}{6} = \frac{11}{6}. \end{cases}$$

Точка $x^* = \left(\frac{11}{7}; \frac{7}{6}\right)$ є підозрілою на оптимальність. Для визначення типу оптимальності обчислюємо частинні похідні другого порядку

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} = 6; \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} = 4; \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1} = 2,$$

а потім визначник

$$M_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 24 - 4 = 20.$$

Оскільки $M_1 = \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} = 6 > 0$ і $M_2 > 0$, то це означає, що в точці $x^* = \left(\frac{11}{7}; \frac{7}{6}\right)$ функція досягає мінімуму:

$$z_{\min} = 3x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_1 + 3x_2 =$$

$$= 3 \cdot \left(\frac{11}{6}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{7}{6}\right)^2 + 2 \cdot \frac{11}{6} \cdot \frac{7}{6} - 2 \cdot \frac{11}{6} + 3 \cdot \frac{7}{6} = \frac{609}{6} = 101{,}5.$$

Якщо $M_1 = \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} < 0$, а $M_2 > 0$, то це означає, що в точці, підозрілій на екстремум, функція досягала би максимуму.

Розглянемо економічний зміст множників Лагранжа. Для цього розглянемо задачу нелінійного програмування стосовно визначення оптимального плану виробництва продукції при обмежених ресурсах:

$$Z = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \to max \tag{2.54}$$

$$q_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \le b_i, \quad i = \overline{1, m},$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, n}. \tag{2.55}$$

Головною метою виробництва продукції є отримання найбільшого прибутку від її реалізації, тому цільовою функцією Z задачі є прибуток від реалізації продукції обсягом $X=(x_1, x_2, \dots x_n)$ одиниць. Зауважимо, що функція $f(x_1, x_2, \dots x_n)$ – нелінійна.

Для виробництва продукції використовується m видів сировини, обсяги запасів яких обмежені і становлять $b_i \quad (i = \overline{1,m})$ одиниць. Запишемо систему нерівностей

$$q_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \le b_i, \quad (i = \overline{1,m}) \qquad (2.56)$$

у вигляді

$$d_i(X) = b_i - q_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \ge 0, \quad (i = \overline{1,m}). \qquad (2.57)$$

Тобто, якщо $q_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – обсяг сировини і-го виду, що використовується для виробництва всієї продукції, то $d_i(X)$ – залишок цього ресурсу після її виробництва. Якщо $d_i(X)=0$, то сировина використана повністю; якщо $d_i(X)>0$, то на виробництво продукції використана не вся сировина; якщо $d_i(X) <0$, то наявної сировини не вистачає для виробництва продукції.

Розглянемо функцію Лагранжа для описуваної задачі:

$$L(x,\lambda,b) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (q_i(x) - b_i). \qquad (2.58)$$

Очевидно, що $\frac{\partial L(x,\lambda,b)}{\partial b_i} = \lambda_i$, тобто ця похідна показує, як змінюється значення цільової функції залежно від обмежень. Множники Лагранжа є двоїстими змінними задачі про використання ресурсів. Вони можуть бути ціною, за якою на ринку продається чи купується одиниця i-го виду сировини. Якщо $\lambda_i \ge 0$ і $d_i(X)>0$, то можна продати залишки сировини і отримати додатковий прибуток у розмірі $\lambda_i d_i(X)$. Якщо ж $d_i(X)<0$, то можна купити потрібну кількість, витративши $\lambda_i d_i(X)$ грошових одиниць і забезпечити виробництво продукції обсягом $X=(x_1, x_2, \dots x_n)$. Функцію Лагранжа можна трактувати як загальний прибуток від виробництва, який містить прибуток від реалізації виготовленої продукції $f(x)$ та прибуток від продажу залишків сировини (або витрати на придбання потрібної кількості сировини) $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i d_i(X)$.

Розглянемо деякі приклади розв’язання економічних задач з допомогою методу множників Лагранжа розв’язування задач нелінійного програмування.

Приклад 2. 10. Фірма планує витрати 20000 грн. на рекламу. Одна хвилина реклами на телебаченні коштує 1000 грн., а на радіо – 500 грн. Аналітики фірми прогнозують збільшення приросту доходу фірми від використання рекламних засобів за такою функцією:

$$Z(x,y) = -x^2 - y^2 + xy + 10x + 5y,$$

де $Z(x,y)$ – приріст доходу фірми (тис. грн.) від реклами; x – тривалість (хв.) рекламного ролика на телебаченні; y – тривалість (хв.) рекламного ролика на радіо. Яким чином потрібно поєднати рекламу на телебаченні та радіо, щоби отримати максимальне значення приросту доходу фірми, економно використавши при цьому наявні грошові засоби на рекламу?

Розв’язування.

Цільова функція – це максимум приросту доходу фірми

$$Z(x,y) = -x^2 - y^2 + xy + 10x + 5y \to max$$

при виконанні наступних умов:

а) з наявності обсягів грошових ресурсів на рекламу

$$1000x + 500y = 20000;$$

б) стосовно невід'ємності змінних

$$x \geq 0, y \geq 0.$$

Оптимальне рішення знаходимо з допомогою методу множників Лагранжа.

Функція Лагранжа набуває вигляду:

$$L(x, y, \lambda) = -x^2 - y^2 + xy + 10x + 5y + \lambda \cdot (20000 - 1000x - 500y)$$

.

Частинні похідні прирівнюємо до нуля:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -2x + y + 10 - 1000\lambda = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = -2y + x + 5 - 500\lambda = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 20000 - 1000x - 500y = 0.$$

Ми отримали систему рівнянь такого виду:

$$\begin{cases} -2x + y + 10 - 1000\lambda = 0, \\ -2y + x + 5 - 500\lambda = 0, \\ 20000 - 1000x - 500y = 0. \end{cases} \qquad (2.59)$$

Зробимо відповідні перетворення:

$$\begin{cases} -2x + y - 1000\lambda = -10, \\ -2y + x - 500\lambda = -5, \\ -1000x - 500y = -20000. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x + y - 1000\lambda & = -10 \\ \quad x - 2y - 500\lambda & = -5 \\ \quad -2x - y & = -40 \end{cases} \Bigg| \times -2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2x + y - 1000\lambda & = -10, \\ -2x + 4y + 1000\lambda & = 10, \\ -2x - y & = -40. \end{cases}$$

Додамо перші два рівняння останньої системи і отримаємо:

$$-4x + 5y = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{4}{5}x.$$

Підставимо в третє рівняння: $-2x - \frac{4}{5}x = -40 \Rightarrow x = \frac{100}{7} = 14\frac{2}{7}$.

Звідси, $y = \frac{4}{5} \cdot \frac{100}{7} = \frac{80}{7} = 11\frac{3}{7}$. Знайдемо значення множника Лагранжа з другого рівняння системи (2.59):

$$\lambda = \frac{x - 2y + 5}{500} = \frac{\frac{100}{7} - 2 \cdot \frac{80}{7} + 5}{500} = \frac{-\frac{25}{7}}{500} = -\frac{1}{140}.$$

Отже, розв'язком цієї системи є:

$$x = 14\frac{2}{7}; \qquad y = 11\frac{3}{7}; \qquad \lambda = -\frac{1}{140}.$$

Переконаємося, чи досягає наша функція екстремального значення у знайденій точці.

Для цього на основі вищезгаданої теореми знайдемо частинні похідні першого порядку заданої функції:

$$Z(x,y) = -x^2 - y^2 + xy + 10x + 5y.$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = -2x + y + 10;$$

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = -2y + x + 5.$$

Знаходимо частинні похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = -2; \qquad \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} = -2; \qquad \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 Z}{\partial y \partial x} = 1.$$

Звідси,

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \qquad H_1(x,y) = -2 < 0,$$

$$H_2(x,y) = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - 2 \cdot (-2) - 1 \cdot 1 = 3 > 0.$$

Відповідно до умови теореми стверджуємо, що точка з координатами $\left(14\frac{2}{7}; 11\frac{3}{7}\right)$ буде точкою максимуму функції.

Максимальним значенням функції є

$$Z\left(14\frac{2}{7}; 11\frac{3}{7}\right) \left(\frac{100}{7}\right)^2 \left(\frac{80}{7}\right)^2 \frac{100}{7}\frac{80}{7}\frac{100}{7}\frac{80}{7}_{max}$$

$$= -\frac{10000}{49} - \frac{6400}{49} + \frac{8000}{49} + \frac{1000}{7} + \frac{400}{7} = \frac{-16400 + 8000 + 9800}{49} =$$

$$= \frac{1400}{49} = \frac{200}{7} = 28\frac{4}{7}.$$

Фірма отримає додатковий дохід від використання реклами у розмірі $28\frac{4}{7}$ тис. грн. якщо гроші, призначені на рекламу будуть використані на $14\frac{2}{7}$хвилини реклами на телебаченні та $11\frac{3}{7}$хвилини – на радіо.

Приклад 2.11. Компанія виробляє два види взаємозамінної продукції виду *A* і *B*. Аналітики фірми експертно визначили функцію сумарних витрат, які необхідні для випуску продукції

$$Z(x,y) = 8x^2 - xy + 12y^2.$$

Відомо, що сумарний обсяг продукції обох видів дорівнює 42 одиниці. Перед менеджерами компанії поставлене завдання: визначити обсяги продукції *A* і *B*, при яких сумарні затрати на виробництво будуть мінімальними.

Розв'язування.

Введемо позначення: *x* – кількість продукції виду *A* (одиниць);

y – кількість продукції виду *B* (одиниць).

Математична модель задачі набуває вигляду: знайти мінімум сумарних витрат

$$Z(x,y) = 8x^2 - xy + 12y^2 \to min$$

за обмежень:

а) стосовно необхідного сумарного обсягу продукції обох видів

$$x + y = 42;$$

б) стосовно невід'ємності змінних

$$x \geq 0, y \geq 0.$$

Задачу розв'язуємо з допомогою методу множників Лагранжа. Для цього виконаємо перетворення першого обмеження, представивши його таким чином: $42 - x - y = 0$.

Функція Лагранжа має вигляд:

$$L(x, y, \lambda) = 8x^2 - xy + 12y^2 + \lambda \cdot (42 - x - y).$$

Знаходимо частинні похідні першого порядку та прирівнюємо їх до нуля.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 16x - y - \lambda, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = -x + 24y - \lambda\,, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 42 - x - y. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 16x - y - \lambda = 0, \\ -x + 24y - \lambda = 0, \\ 42 - x - y = 0. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} 16x - y - \lambda = 0, \\ -x + 24y - \lambda = 0, \\ x + y = 42. \end{cases}$$

Розв'язуємо отриману систему трьох рівнянь із трьома невідомими за формулами Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 16 & -1 & -1 \\ -1 & 24 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 16 \cdot 24 \cdot 0 + (-1) \cdot (-1) \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) \cdot 1 - 1 \cdot 24 \cdot (-1) -$$

$$-1 \cdot (-1) \cdot 16 - 0 \cdot (-1) \cdot (-1) = 0 + 1 + 1 + 24 + 16 - 0 = 42,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 24 & -1 \\ 42 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 42 + 24 \cdot 42 = 25 \cdot 42 = 1050,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 16 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 42 & 0 \end{vmatrix} = 42 + 16 \cdot 42 = 17 \cdot 42 = 714,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 16 & -1 & 0 \\ -1 & 24 & 0 \\ 1 & 1 & 42 \end{vmatrix} = 16 \cdot 24 \cdot 42 - 42 = 383 \cdot 42 = 15286,$$

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{25 \cdot 42}{42} = 25,$$
$$y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{17 \cdot 42}{42} = 17,$$
$$\lambda = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{383 \cdot 42}{42} = 383.$$

Знаходимо частинні похідні другого порядку та формуємо матрицю $H(x, y)$.

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 16; \quad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 24; \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = -1; \quad \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} = -1.$$

$$H(x, y) = \begin{bmatrix} 16 & -1 \\ -1 & 24 \end{bmatrix}.$$

$$H_1(x, y) = 16; \quad H_2(x, y) = \begin{vmatrix} 16 & -1 \\ -1 & 24 \end{vmatrix} = 16 \cdot 24 - 1 = 383.$$

Зважаючи на те, що $H_1(x, y) = 16 > 0$, $H_2(x, y) = 383 > 0$, стверджуємо: знайдена точка екстремуму з координатами $(25;\ 17)$ є точкою мінімуму функції.

Отже, компанія понесе мінімальні сумарні затрати, якщо випускатиме продукції виду *A* – 25 одиниць, продукції виду *B* – 17 од. Ці затрати становитимуть:

$$Z_{\min} = Z(25;17) = 8 \cdot 25^2 - 25 \cdot 17 + 12 \cdot 17^2 = 5000 - 425 + 3468 = 8043 \quad (\textit{грн.})$$
.♦

Література

1. Алілуйко А.М., Дзюбановська Н.В., Лесик О.Ф., Неміш В.М., Шинкарик М.І Методичні вказівки для проведення тренінгів з вищої математики /. — Тернопіль: ТНЕУ, 2016. – 90 с.
2. Буценко Ю. П., Диховичний О. О., Тимошенко О. А. Математичні моделі в економічних задачах. Практикум (І курс) /– К: НТУУ «КПІ», 2014. – 57 с.
3. Вища та прикладна математика: навч. посіб. для студ. вищ. навч. зак. / С.І.Резніков, О.П.Зінькевич, В.М. Сафонов та ін. – К.:НУХТ, 2016. – 343с.
4. Засуха В. А. Прикладна математика. Підручник / Засуха В. А., Лисенко В. П., Голуб Б. Л. — К., «Арістей», 2004. — 227 с.
5. Прикладна математика : навчальний посібник для студентів денної і заочної форми навчання / Т. П. Білоусова, І. В. Вигоднер, Т. П. Ляхович. Херсон : Олді-плюс, 2019. 160 с.
6. Руденко І. Б. Вища та прикладна математика: навч. посіб. / І. Б. Руденко, О. Б. Чернобай ; Держ. фіскальна служба України, Ун-т ДФС України. – Ірпінь, 2017.– 374 с.
7. Синєкоп М. С. Вища та прикладна математика: навч. посібник. Частина1. Вища математика. Теорія ймовірностей та математична статистика / М.С. Синєкоп, Н.О. Жилюк, М.С. Сафронова; Харк. держ. ун-т харчування та торгівлі. – Харків: ХДУХТ, 2015. – 205 с.
8. Стислий курс вищої математики. Т.1: Аналітична геометрія та елементи лінійної алгебри / Г.М.Тимченко, О.В.Одинцова, О.С.Мазур, Н.О.Кириллова. Стислий курс вищої математики. Т.1: Аналітична геометрія та елементи лінійної алгебри: навч. посібн. – К.: Кондор-Видавництво, 2016.- 176 с.

Зміст