Міністерство освіти і науки України
Тернопільський національний економічний університет

Методичні вказівки до вивчення розділу

«Теорія ймовірностей» дисципліни ТІМС

для студентів всіх спеціальностей

Тернопіль – 2019

УДК 519.2

Рецензенти:

В.З. Чорний – к. ф.-м. н., доцент кафедри математики та методики її викладання Тернопільського національного педагогічного університету імені Володимира Гнатюка

Л.М. Буяк – к. е. н., доцент кафедри економічної кібернетики та інформатики Тернопільського національного економічного університету;

Затверджено на засіданні кафедри прикладної математики, протокол № 1 від 27.08.2019 р.

Єрьоменко В. О., Шинкарик М.І., Мартинюк О. М., Березька К.М., Пласконь С.А., Сенів Г.В., Дзюбановська Н.В. Методичні вказівки до вивчення розділу «Теорія ймовірностей» дисципліни ТІМС для студентів всіх спеціальностей, 2019. – 84 с.

Дисципліна «Теорія ймовірностей та математична статистика» спрямована на формування у студентів базових знань з основ застосування імовірнісно-статистичного апарату для розв'язування теоретичних і практичних задач у професійній діяльності, а також розвитку логічного та алгоритмічного мислення при виявленні та дослідженні закономірностей, яким підпорядковуються реальні соціальні та економічні процеси.

Пропоновані методичні вказівки містять необхідний теоретичний матеріал, а також розв'язування великої кількості різнотипових задач економічного спрямування. особливу увагу приділено алгоритмізації розв'язування задач, а також генеруванню ідей (в процесі розв'язування задач), які стають ключовими при доведенні більш складних тверджень.

УДК 519.2

Відповідальний за випуск: О.М. Мартинюк, кандидат фіз..-мат. наук, доцент кафедри ЕММ ТНЕУ

ТЕОРІЯ ІМОВІРНОСТЕЙ

§ 1. ВИЗНАЧЕННЯ ІМОВІРНОСТІ

Події та їх види. Класичне означення імовірності випадкової події. Властивості імовірностей. Елементи комбінаторики в теорії імовірностей. Відносна частота випадкової події. Статистична імовірність. Геометрична імовірність.

КОРОТКІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Під **випробуванням** будемо розуміти здійснення намічених дій і отримання результату при виконанні певного комплексу умов S. При цьому припускається, що ці умови є фіксованими; вони або об'єктивно існують, або створюються штучно і можуть бути відтворені необмежене число разів.

Результатом випробування є подія. Розрізняють події **достовірні**, **неможливі** та **випадкові**.

Достовірною називають подію, яка при випробуванні обов'язково відбувається. **Неможливою** називають подію, яка при випробуванні обов'язково не відбувається. **Випадкова** – це та подія, яка при випробуванні може як відбутися, так і не відбутися.

Достовірну подію позначимо літерою Ω, а неможливу – $\varnothing$.

Розглянемо деякі **властивості випадкових подій**.

Дві події називаються **несумісними** (**сумісними**), якщо при випробуванні відбуття однієї **виключає (не виключає)** відбуття іншої.

Сукупність випадкових подій утворює **повну групу**, якщо одна з них при випробуванні обов'язково відбувається, а ***будь-які*** дві події є несумісними.

Елементарними будемо називати найпростіші випадкові події, які можуть відбутися при випробуванні.

Події, «породжені» одним випробуванням, назвемо **рівноможливими**, якщо є підстави вважати, що жодна з них не є більш можливою, ніж інші.

Чисельну міру можливості відбуття випадкової події дає ймовірність цієї події.

Означення. Класичною імовірністю події *A* називається відношення числа елементарних рівноможливих подій, що сприяють появі події *A*, до загального числа елементарних рівноможливих подій, що утворюють повну групу.

Кожна з елементарних випадкових подій, по суті, є одним із наслідків випробування. Такий підхід є корисним при аналізі задач.

З урахуванням цього зауваження аналітичний вираз класичного означення набере такого виду:

$$P(A) = \frac{m}{n}, \tag{1.1}$$

де *P(A)* – класична імовірність події *A*;

m – число елементарних рівноможливих подій, що сприяють появі події *A* (число наслідків випробування, в яких відбувається подія А);

n – число елементарних рівноможливих подій, що утворюють повну групу (загальне число рівноможливих наслідків випробування).

Дане означення дозволяє сформулювати **основні властивості класичної імовірності**:

1) $P(\Omega) = 1$ (імовірність достовірної події дорівнює 1);

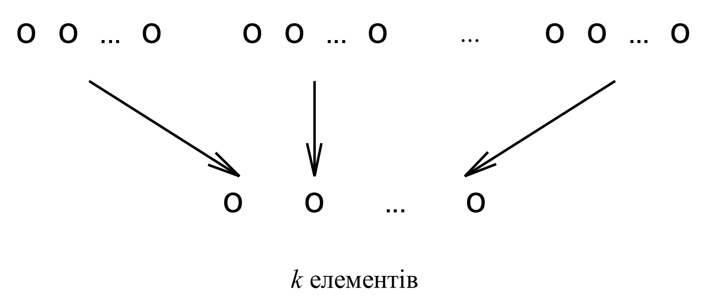
2) $P(\varnothing) = 0$ (імовірність неможливої події дорівнює 0);

3) якщо *A* – випадкова подія, тоді:

$$0 < P(A) < 1. \tag{1.2}$$

Для того, щоб мати деякі стандартні методи при розрахунках по схемі класичної імовірності, наведемо **основну формулу комбінаторики**, а також розглянемо поняття **комбінацій**, **розміщень** та **перестановок**.

Нехай є k груп елементів, чисельність кожної з яких відповідно дорівнює $n_1, n_2, \ldots, n_k$. Виберемо довільним чином по **одному** елементу з кожної групи:



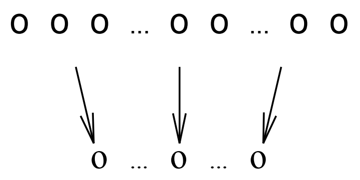
Тоді загальне число N способів, якими можна здійснити такий відбір, визначається співвідношенням

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k, \qquad (1.3)$$

яке називається **основною формулою комбінаторики**.

Розглянемо сукупність **різних** елементів довільної природи, чисельністю n. Будемо утворювати групи по m $(m \le n)$ **різних** елементів із цієї сукупності:

n елементів



m елементів

Такі групи в теорії імовірностей часто називаються **вибірками**.

Нехай $m < n$. **Комбінаціями** називаються такі групи, які відрізняються одна від іншої хоча б одним елементом. Загальне число комбінацій C_n^m (читається: це з n по m) знаходиться за формулою

$$C_n^m = \frac{n(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)}{m!}, \qquad (1.4)$$

де $m! = m(m-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1$ (читається: m факторіал).

Зауваження. В чисельнику (1.4) є m співмножників. Якщо чисельник і знаменник помножити на $(n-m)!$, тоді отримається така рівність:

$$C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!\,m!}. \qquad (1.4^*)$$

Нехай $m \le n$. **Розміщеннями** називаються такі групи, які відрізняються одна від іншої або хоча б одним елементом, або порядком розташування цих елементів в групі. Число розміщень A_n^m (читається: а з n по m) знаходиться за формулою:

$$A_n^m = \underbrace{n(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)}_{m \text{ співмножників}}. \qquad (1.5)$$

Якщо в формулі (1.5) $m = n$, то A_n^m – число таких розміщень, які відрізняються тільки порядком розташування елементів, а не самими елементами. Такі розміщення називаються **перестановками**. Їх число P_n за формулою (1.5)

$$A_n^n = n(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1 = n! = P_n,$$

тобто

$$P_n = A_n^n = n!. \qquad (1.6)$$

Число n може набирати не тільки натуральні значення, воно може також дорівнювати нулю. Порожня множина (вибірка) є підмножиною довільної множини і природно вважати, що вона може бути впорядкована тільки одним способом. Тому вважається, що $\mathbf{0! = 1}$.

Число комбінацій володіє такими властивостями:

1) $C_n^0 = C_n^n = 1$; 2) $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$; 3) $C_n^m = C_n^{n-m}$;

4) $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n$.

Відмітимо, що числа розміщень, перестановок і комбінацій пов’язані рівністю

$$A_n^m = P_m C_n^m.$$

При розв’язуванні задач комбінаторики використовуються такі правила:

Правило суми. Якщо деякий об’єкт α може бути відібраний із сукупності об’єктів k способами, а другий об’єкт β може бути відібраний s способами, то відібрати або α, або β можна $k + s$ способами.

Правило добутку. Якщо об’єкт α можна вибрати із сукупності об’єктів k способами і після кожного такого відбору об’єкт β можна вибрати s способами, то пара об’єктів (α, β) у вказаному порядку може бути вибрана $k \cdot s$ способами.

Зауваження. Ще раз нагадаємо, що в означеннях комбінацій, розміщень і перестановок суттєвим є те, що **всі елементи** в групах **різні**. Якщо ж у комбінаціях, розміщеннях і перестановках деякі із елементів (або всі) можуть виявитися однаковими, то такі групи називаються **комбінаціями з повтореннями**, **розміщеннями з повтореннями** і **перестановками з повтореннями** відповідно. Формули для знаходження числа такого виду груп ми не наводимо, проте в §2 вкажемо методи знаходження імовірностей випадкових подій, в яких фігурують групи (комбінації, розміщення, перестановки) з повтореннями.

Разом із імовірністю до основних понять теорії імовірностей належить відносна частота.

Відносною частотою випадкової події називається відношення числа випробовувань, в яких подія відбулася, до загального числа фактично проведених випробовувань. Тобто, відносна частота події *A* визначається формулою:

$$W(A) = \frac{M}{N}, \qquad (1.7)$$

де M – число появ події *A*, N – загальне число випробувань.

Співставлення означень імовірності і відносної частоти дозволяє зробити висновок: імовірність обчислюють до випробування (тобто вона є апріорною величиною), а відносну частоту – після випробування (апостеріорна величина).

Із означення (1.7) для **випадкової** події *A* випливає така подвійна нерівність (порівняйте з (1.2)!):

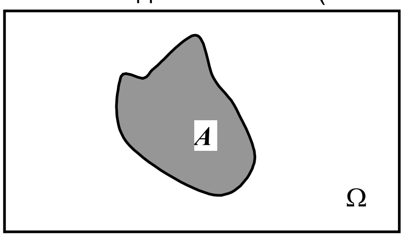
$$0 \le W(A) \le 1.$$

При невеликій кількості випробовувань відносна частота випадкової події може помітно змінюватися від однієї серії випробовувань до іншої. Проте тривалі спостереження показали, що коли в однакових умовах проводиться достатньо велике число випробовувань, то відносна частота виявляє властивість **стійкості**. Ця властивість полягає в тому, що в різних серіях випробовувань відносна частота **змінюється мало** (тим менше, чим більше число випробовувань), коливаючись навколо деякого постійного числа. Виявилось, що це стале число є імовірністю випадкової події. Математичне формулювання цієї властивості стійкості буде дано в темі «Закон великих чисел» (теорема Я. Бернуллі).

Властивість стійкості відносної частоти, а також можливість, хоча б принципово, проводити необмежене число випробовувань відносно випадкової події дозволяють сформулювати **статистичне означення імовірності**: в якості статистичної імовірності випадкової події береться відносна частота цієї події.

Один із недоліків класичного означення імовірності, пов'язаний із неможливістю використання такого означення для випадку випробувань із нескінченним числом наслідків випробування, може бути усунутий з допомогою **геометричної імовірності** – імовірності попадання точки в область (відрізок, частину площини, частину тіла тощо).

Припустимо, що здійснюється випробування – на прямокутник Ω, в якому міститься довільна фігура ***A***, навмання кидається точка (мал. 1.1).



Мал.1.1

При цьому вважається, що виконуються такі припущення: вона може опинитися в будь-якій точці прямокутника Ω, імовірність (можливість) попадання точки на фігуру $\boldsymbol{A}$ пропорційна площі цієї фігури і не залежить ні від розташування $\boldsymbol{A}$ відносно Ω, ні від форми $\boldsymbol{A}$. Хай випадкова подія *A* – точка попала в фігуру $\boldsymbol{A}$. Тоді **геометричне означення імовірності** події *A* дається рівністю:

$$P(A) = \frac{S(\boldsymbol{A})}{S(\Omega)}, \qquad (1.8)$$

де $S(\boldsymbol{A})$ – площа фігури ***A***, $S(\Omega)$ – площа прямокутника Ω.

Означення (1.8) є частинним випадком загального означення геометричної імовірності. Якщо позначити міру (довжину, площу, об'єм) області через mes, то імовірність попадання точки, кинутої навмання (із збереженням вище наведених припущень) в область d – частину області D, визначається рівністю:

$$P = \frac{mes\, d}{mes\, D}. \qquad (1.9)$$

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

Задача 1.1. Перед змаганнями проводиться жеребкування серед спортсменів. В урні є 300 жетонів, пронумерованих від 1 до 300. Знайти імовірність того, що навмання витягнутий жетон першим спортсменом матиме хоча б одну цифру: а) 8; б) 2.

а) Подія *A* полягає в тому, що навмання взятий жетон матиме хоча б одну цифру 8. Випробування – взяття жетона. Число всіх наслідків випробування (елементарних подій) n = 300, оскільки будь-який із жетонів може бути витягнутим. Всі вони рівноможливі. Подія *A* відбувається кожний раз тоді, коли жетон матиме або одну, або дві цифри 8. Для того, щоб підрахувати число всіх таких наслідків випробування, достатньо знайти число жетонів з хоча б однією цифрою 8 в одній сотні (8 не може бути на місці сотень) і результат помножити на три. Зокрема, в першій сотні 8 може зустрітися на місці одиниць в десяти жетонах (8, 18, ..., 88, 98), а на місці десятків також в десяти (80, 81, ..., 88, 89). Проте 88 пораховано в першій серії, тому всього наслідків випробування, в яких подія *A* відбувається, для першої сотні дорівнює 19, а $m = 3 \cdot 19 = 57$.

Згідно з (1.1) $P(A) = 57/300 = 0{,}19$.

б) *B* – витягнутий жетон має хоча б одну цифру 2.

Очевидно, що $n = 300$. В першій сотні є 19 жетонів з хоча б однією цифрою 2, в другій – 20 (вона завершується числом 200), в третій (201, 202, ..., 299, 300) – 99. Отже, $m = 19 + 20 + 99 = 138$ і $P(B) = 138/300 = 0{,}46$. ●

Зауваження. Отримані результати вказують на те, що подія *B* в 2,42 рази більш імовірніша в порівнянні із подією *A*.

Наступну задачу пов'язують із помилкою відомого французького математика і філософа Д'Аламбера (1717–1783), яка полягала в ігноруванні рівноможливості елементарних подій – однієї із основних вимог класичного означення імовірності.

Задача 1.2. Знайти імовірність всіх можливих значень суми очок на верхніх гранях двох кинутих гральних кубиків.

Очевидно, що мінімальним значенням суми є число 2, а максимальним – 12. Тому потрібно буде знайти імовірності випадкових подій $(\sum = 2)$, $(\sum = 3)$, ..., $(\sum = 12)$, де $\sum$ – сума очок на верхніх гранях кубиків. Проаналізуйте, чому кожна із цих подій є випадковою. Випробуванням є кидання двох кубиків, наслідками є сукупність пар очків на верхніх гранях. Підрахуємо число цих пар. «Одиниця» першого кубика може зустрітися з 1, 2, ..., 6 другого, тобто вона «породжує» 6 наслідків випробування. Таку ж кількість «породжує» і «двійка». При цьому слід мати на увазі, що наслідки випробування $(1 \div 2)$ і $(2 \div 1)$ – різні (перша цифра відповідає числу очок на верхній грані першого кубика, друга – другого). Аналогічна ситуація з рештою чисел першого кубика. Отже, $n = 6 \cdot 6 = 36$. Кожен із цих наслідків відповідає вимогам означення імовірності: вони рівноможливі і утворюють повну групу. Справді, вони попарно несумісні, оскільки поява одного із наслідків при випробуванні виключає появу будь-якого іншого в цьому ж випробуванні. При випробуванні обов'язково відбудеться один із наслідків. Нарешті, рівноможливість досягається за рахунок симетричності кубиків та однорідності матеріалу, з яких вони виготовлені.

Події $(\sum = 2)$ сприяє тільки один наслідок $(1 \div 1)$. Тому $P(\sum = 2) = 1/36$. Події $(\sum = 3)$ сприяють вже два наслідки випробування: $(1 \div 2)$, $(2 \div 1)$. Тому $P(\sum = 3) = 2/36$. Продовжуючи обчислення ймовірностей решти випадкових подій, отримаємо таку таблицю:

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(\sum = k)$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

Аналіз таблиці дозволяє зробити висновок, зокрема, що імовірність події $(\sum = 7)$ в шість разів більша від імовірностей подій $(\sum = 2)$ та $(\sum = 12)$. ●

Задача 1.3. Навісний замок із «секретом» має шість восьмикутних призм, кожна з яких повертається навколо своєї осі незалежно від інших. Бічні грані кожної із призм пронумеровані цифрами від 1 до 8. Замок відкривається, якщо обертанням призм на чільній стороні замка буде набрано певне шестизначне число. Знайти імовірність того, що після довільного набору шестизначного числа на чільній стороні замок відкриється. Зробити висновок про надійність цього замка.

Випробування – обертання кожної із шести призм. Подія *A* – набір секретного шестизначного числа. Наслідок випробування – шестизначне число. Для знаходження всіх наслідків випробування потрібно порахувати число всіх різних шестизначних чисел. Ці числа відрізняються одне від іншого або цифрами, або порядком їх розташування. На перший погляд групи із шести елементів (цифр) є розміщеннями. Проте необхідною вимогою як розміщень, так і комбінацій є те, що **всі** елементи групи є **різними**. В той час як в даній задачі групи (числа) можуть містити деякі або всі однакові елементи (цифри). Аналіз схеми утворення груп елементів, для якої виведена основна формула комбінаторики (1.3), дає підстави стверджувати про можливість застосування її в даному випадку:

1-а призма (8 цифр) 1, 2, …, 8 | 2-а призма (8 цифр) 1, 2, …, 8 | … | 6-а призма (8 цифр) 1, 2, …, 8

o o ... o

6 цифр

Згідно з даною формулою комбінаторики (1.3), де $k = 6$,
$n_1 = n_2 = ... = n_6 = 8$, отримуємо
$n = N = 8 \cdot 8 \cdot ... \cdot 8 = 8^6 = 262\ 144$.

З усіх наслідків випробування тільки в одному замок відкривається (коли буде набрано секретне число), тому $m = 1$. Остаточно $P(A) = 1/262\ 144 = 0{,}0000038$.

Характеристика надійності замка визначається числом n: не знаючи секретного числа, потрібно здійснити всього 262 144 набори різних шестизначних чисел. ●

Задача 1.4. Банк протягом місяця може видати в кредит позику п’ятьом своїм клієнтам, в той час як поступили замовлення на кредит від 15 клієнтів першого району і 10 клієнтів другого району. Для збереження клієнтів банк розглядає як тимчасову вимушену міру – розігрування випадковим чином п’яти позик серед тих, від кого поступило замовлення. Знайти імовірність того, що число клієнтів першого району, яким дістанеться позика, дорівнює: а) 5; б) 0; в) 3.

Випробування – проведення розігрування серед клієнтів банку. Наслідок випробування – п’ятірка клієнтів. Число наслідків випробування дорівнює числу всеможливих п’ятірок, які можна утворити із сукупності чисельністю 25 елементів (клієнтів банку).

Для таких груп елементів характерним є те, що вони відрізняються одна від іншої хоча б одним елементом. Крім того, як основна сукупність елементів (з 25 клієнтів), так і утворені групи по 5 елементів, складаються з **різних** елементів (відсутність повторів). Це дає підстави зробити висновок, що такі групи є комбінаціями. І їх число для всіх трьох підзадач дорівнює:

$$n = C_{25}^{5} = \frac{25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 53130.$$

а) A – власниками кредиту є п’ять клієнтів першого району. Число наслідків випробування, для яких відбувається подія A, дорівнює числу всеможливих п’ятірок клієнтів, котрі можна утворити із загального числа 15 клієнтів першого району. Ці п’ятірки знову є комбінаціями і їх загальне число

$$m = C_{15}^{5} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 3003.$$

За класичним означенням імовірності

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3003}{53130} \approx 0,057.$$

б) B – власниками кредиту є п’ять клієнтів другого району. Число наслідків випробування m, для яких відбувається подія B, дорівнює числу всеможливих п’ятірок клієнтів, що можна утворити із 10 клієнтів другого району. Знову ж ці п’ятірки є комбінаціями і

$$m = C_{10}^{5} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 252,$$

а

$$P(B) = \frac{m}{n} = \frac{252}{53130} \approx 0,005.$$

в) C – власниками кредиту є три клієнти першого району і два клієнти другого району. Всеможливі трійки клієнтів першого району можна утворити C_{15}^{3} способами, а всеможливі двійки клієнтів другого району – C_{10}^{2}. Використавши **правило добутків**, отримаємо:

$$m = C_{15}^{3} \cdot C_{10}^{2} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{10 \cdot 9}{2 \cdot 1} = 455 \cdot 45 = 20475,$$

звідки

$$P(C) = \frac{20475}{53130} \approx 0,385. \ ●$$

Задача 1.5. Керівництво приватизованого підприємства оголосило конкурс з виплатою трьох перших премій на кращий проект модернізації виробництва. На конкурс поступило 9 проектів. Скільки можна скласти всіх можливих трійок власників премій?

З дев'яти **різних** елементів утворюються групи по три **різних** елементи. Порядок «розташування» елементів суттєвий для них. Справді, нехай проекти під номерами 5, 6, 8 вибороли премії. Але, зокрема, трійки: 1) № 5 – I-а премія, № 6 – II-а, № 8 – III-я; 2) № 5 – III-я, № 6 – I-а, № 8 – II-а – різні. Тому такі групи є розміщеннями і їх число дорівнює $A_9^3 = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$. ●

Зауваження. Нехай задача 1.6 доповнена таким чином: «Знайти імовірність того, що після підведення підсумків конкурсу власниками трьох перших премій стануть автори проектів під номерами: № 7 – I-а премія, № 5 – II-а премія, № 9 – III-я премія». Тоді цю імовірність, взагалі кажучи, не можна знайти за класичним означенням імовірності, оскільки наслідки випробувань не будуть рівноможливими випадковими подіями (проекти суттєво можуть відрізнятися один від одного, а тому можуть мати різні шанси бути відзначеними).

Задача 1.6. На чотирьох картках написані літери *Е*, *У*, *Н*, *Т*. Картки перемішуються і розкладаються в ряд. Знайти імовірність того, що в результаті буде отримане слово «*ТНЕУ*».

Випробування – розкладання карток в ряд після перемішування. Подія *А* – отримання слова «ТНЕУ». Тільки один наслідок випробування сприяє появі цієї події, тобто $m = 1$. Наслідки випробування – це всеможливі групи по 4 елементи (літери), для яких суттєвий порядок розташування елементів, і їх число $n = P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. Отже, $P(A) = 1/24$. ●

Задача 1.7. На книжковій полиці розташовано 26 книг, вартості яких відповідно рівні: 8 по 5 грн., 12 по 4 грн. і 6 по 3 грн. Навмання беруться дві книги. Яка імовірність того, що їх сумарна вартість складає 8 грн.?

Подія *А* – сумарна вартість відібраних двох книг дорівнює 8 грн. Випробування – відбір двох книг. Число наслідків дорівнює числу всеможливих способів відбору двох книг. Такі групи по дві книги є комбінаціями, бо для них несуттєвий порядок розташування в групі елементів (книг). Тому $n = C_{26}^2 = \dfrac{26 \cdot 25}{2 \cdot 1} = 325.$

Подія *А* відбувається або тоді, коли обидві книги коштують по 4 грн. (таких наслідків випробування є C_{12}^2), або одна книга коштує 5 грн., а друга – 3 грн. (таких наслідків є $8 \cdot 6 = C_8^1 \cdot C_6^1$). Згідно з правилом суми комбінаторики $m = C_{12}^2 + C_8^1 \cdot C_6^1 = 66 + 48 = 114.$ Остаточно Р(А) = 114/325 = 0,351. ●

В деяких випадках при знаходженні числа комбінацій доцільніше користуватися формулою (1.4*), а не (1.4). При цьому корисним є використання основних властивостей числа комбінацій.

Задача 1.8. Партія із 1000 плиток шоколаду, серед яких 4 із призами, довільним чином розподілена на дві рівні частини, кожна з яких відправлена двом споживачам. Знайти ймовірність того, що: а) всі призи дістануться одному споживачу; б) обом споживачам порівну.

а) Випробування – відбір 500 плиток шоколаду із 1000. Подія A – всі призи дістануться одному споживачу. Загальне число наслідків випробування $n = C_{1000}^{500}$. Подія A відбувається , коли із 500 плиток, відправлених одному споживачу, буде або 496 без призів із 996 і всі 4 із призами, або 500 без призів і 0 із призами. Число таких наслідків $m = C_{996}^{496} \cdot C_4^4 + C_{996}^{500} \cdot C_4^0$. За першою властивістю числа комбінацій $C_4^4 = C_4^0 = 1$, а за третьою $C_{996}^{500} = C_{996}^{996-500} = C_{996}^{496}$. Тому

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_{996}^{496} \cdot C_4^4 + C_{996}^{500} \cdot C_4^0}{C_{1000}^{500}} = \frac{2 \cdot C_{996}^{496}}{C_{1000}^{500}} = 2 \cdot \frac{\dfrac{996!}{500! \cdot 496!}}{\dfrac{1000!}{500! \cdot 500!}} =$$

$$= 2 \cdot \frac{996! \cdot 500! \cdot 500!}{1000! \cdot 500! \cdot 496!} = 2 \cdot \frac{996! \cdot 496! \cdot 497 \cdot 498 \cdot 499 \cdot 500}{996! \cdot 997 \cdot 998 \cdot 999 \cdot 1000 \cdot 496!} =$$

$$= \frac{2 \cdot 497 \cdot 498 \cdot 499 \cdot 500}{997 \cdot 998 \cdot 999 \cdot 1000} \approx 0{,}124,$$

де $1000! = 996! \cdot 997 \cdot 998 \cdot 999 \cdot 1000, \ 500! = 496! \cdot 497 \cdot 498 \cdot 499 \cdot 500.$

б) Подія B – в одній частині продукції є 2 призи. Тоді такою ж властивістю буде володіти і друга частина. Подія B відбуватиметься, якщо із 500 плиток, відправлених одному споживачу, буде 498 без призів і дві з призами з чотирьох. Число таких наслідків $m = C_{996}^{498} \cdot C_4^2$. Тому

$$P(B) = \frac{C_{996}^{498} \cdot C_4^2}{C_{1000}^{500}} = \frac{\dfrac{996!}{498! \cdot 498!} \cdot \dfrac{4!}{2! \cdot 2!}}{\dfrac{1000!}{500! \cdot 500!}} = \frac{996! \cdot 500! \cdot 500! \cdot 4!}{1000! \cdot 498! \cdot 498! \cdot 2! \cdot 2!} =$$

$$= \frac{996!\cdot(498!\cdot 499\cdot 500)^2\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{996!\cdot 997\cdot 998\cdot 999\cdot 1000\cdot (498!)^2\cdot (2\cdot 1)^2} =$$

$$= \frac{(499\cdot 500)^2\cdot 6}{997\cdot 998\cdot 999\cdot 1000} \approx 0{,}376 \text{ .}$$ ●

Розв’язування наступної задачі ілюструє можливість отримання додаткової інформації на підставі знання імовірності випадкової події.

Задача 1.9. В контейнері знаходяться стандартні і браковані деталі. Імовірність того, що навмання витягнуті три деталі будуть стандартними, дорівнює 2/3. Яка мінімальна кількість деталей в контейнері?

Позначимо: *k* – число всіх деталей в контейнері, *s* – кількість стандартних серед них. Випробування – відбір трьох деталей. Подія *A* – три деталі стандартні. Згідно з умовою *P*(*A*)=2/3. За класичною формулою

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_s^3}{C_k^3} = \frac{s\cdot(s-1)\cdot(s-2)}{k\cdot(k-1)\cdot(k-2)}.$$

Отже,
$$\frac{s\cdot(s-1)\cdot(s-2)}{k\cdot(k-1)\cdot(k-2)} = \frac{2}{3}.$$

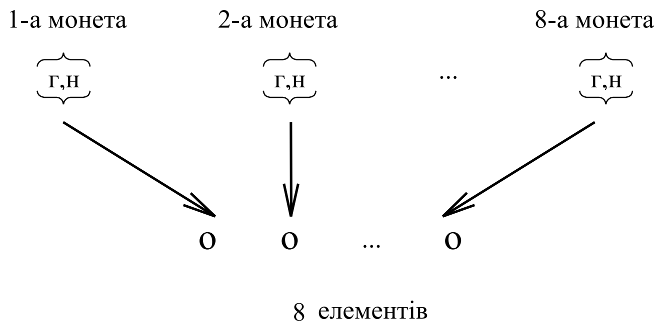
Ціле число s задовольняє подвійну нерівність $3 \le s \le k-1$, оскільки для s=0, 1, 2 подія A стає неможливою, а для s=k – достовірною. Замінивши s в попередньому рівнянні числом k-1, отримаємо нерівність

$$\frac{(k-1)\cdot(k-2)\cdot(k-3)}{k\cdot(k-1)\cdot(k-2)} \ge \frac{2}{3},$$

рівносильну нерівності $3\cdot(k-3) \ge 2\cdot k,$ звідки $k \ge 9.$ Залишається тільки з’ясувати існування цілого числа s, яке задовольняє умову задачі. Проста перевірка показує, що значенням s є число 8. ●

Задача 1.10. Знайти імовірність того, що при киданні восьми монет герб випаде на шести з них.

Випробування – кидання восьми монет. Подія A – герб випадає на шести монетах (і при цьому не випадає на двох). Наслідки випробування – це всеможливі групи з восьми елементів, які утворюються за такою схемою:



Тут г – герб, н – напис. Приклад наслідка випробування: “нггнгннн”. Загальне число різних наслідків випробування знаходиться за основною формулою комбінаторики (1.3): $n = 2^8$. При цьому всі вони є **рівноможливими** випадковими подіями, оскільки для кожної із монет поява герба чи напису має **однакову імовірність**, рівну 0,5. Знайдемо число наслідків випробування, для яких подія A відбувається. Приклади таких наслідків: “гггггнн”, “ггггнгн”, ... Всіх їх є стільки, скільки можна утворити груп різних елементів чисельністю 6 із загальної сукупності з восьми різних елементів (зверніть увагу на те, що герб на 1-й монеті і герб на 2-й монеті – це два різні елементи). Ці групи відрізняються одна від іншої тільки складом елементів (хоча б одним елементом). Тому вони є комбінаціями і, отже, $m = C_8^6$.

Остаточно

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_8^6}{2^8} = \frac{C_8^2}{2^8} = \frac{8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 2^8} = \frac{7}{2^6} \approx 0{,}1094,$$

де за третьою властивістю числа комбінацій $C_8^6 = C_8^{8-6} = C_8^2$. ●

Зауваження 1. В умові попередньої задачі вважалося, що для всіх монет імовірність випадання герба дорівнює 0,5. Якщо ж ця умова порушується (наприклад, якась із монет деформована), тоді наслідки випробування перестають бути рівноможливими, а тому класичну формулу вже не можна використовувати.

Зауваження 2. Результат попередньої задачі отримується і у випадку, коли 8 разів кидається **одна** монета (проаналізуйте).

Задача 1.11. Цифри 1,2,3,4,5,6,7 написані на однакових картках, які перемішані. Тричі навмання беруть по одній картці і кладуть їх зліва направо. Знайти імовірності того, що утворене тризначне число виявиться: а) парним; б) кратним трьом; в) кратним 5.

Випробування – відбір трьох карток. Загальне число наслідків випробування дорівнює числу всеможливих тризначних чисел, які можна утворити із семи цифр. Вони відрізняються або складом цифр, або їх розташуванням. Отже $n = A_7^3$.

а) Подія A – отримане тризначне число є парним. Цій події сприяють всі ті наслідки випробування, в яких остання цифра є парною, тобто або 2 , або 4, або 6. Зокрема, якщо остання цифра 2, то перші дві можуть бути відібрані з решти шести (включаючи 4 та 6). Ці двійки цифр є розміщеннями з шести по два і їх число дорівнює $A_6^2 = 6 \cdot 5 = 30$. Це ж саме число отримується і для останніх цифр 4 та 6. Отже, $m = 3 \cdot 30 = 90$ і

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{90}{A_7^3} = \frac{90}{7 \cdot 6 \cdot 5} = \frac{3}{7} \approx 0,4286.$$

б) Подія B – утворене тризначне число ділиться на 3. Число ділиться на 3 тоді і тільки тоді, коли сума його цифр ділиться на три. Тому із даних семи цифр потрібно виділити всеможливі трійки таким чином, щоб їхня сума була кратною трьом. Всі вони вичерпуються такими трійками: (1,2,3), (1,2,6), (1,3,5), (1,4,7), (1,5,6), (2,3,4), (2,3,7), (2,4,6), (2,6,7), (3,4,5), (3,5,7), (4,5,6), (5,6,7). Кожна з цих тринадцяти трійок “породжує” $P_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ різних тризначних чисел, а всього їх буде $m = 13 \cdot 6 = 78$. Отже,

$$P(B) = \frac{m}{n} = \frac{78}{210} \approx 0,3714.$$

в) Подія C – отримане тризначне число є кратним 5. Оскільки число ділиться на 5 тоді і тільки тоді, коли його останньою цифрою є 0 або 5, то сприятливими для події C є наслідки випробування, в яких останньою є цифра 5, попередні дві – будь-які з решти шести цифр. Тобто, $m = A_6^2 = 6 \cdot 5 = 30$. Остаточно

$$P(C) = \frac{m}{n} = \frac{30}{210} \approx 0,1429.$$ ●

Задача 1.12 Представниками кожної із п’яти фірм є директор і референт. Після підписання угоди планується провести товариську вечерю. Згідно із домовленістю місця за столом розігруються випадковим чином. Знайти імовірність того, що представники фірми K займуть сусідні місця.

Випробування – спроба посадовити 10 осіб. Подія A - представники фірми K сидітимуть поруч. Всіх наслідків випробування є стільки, скільки є різних десяток, для яких суттєвий порядок розташування осіб. Тобто $n = P_{10} = 10!$

Знайдемо число наслідків випробування, сприятливих для настання події A. Директор фірми K може зайняти кожне із десяти місць, а його референт може сісти двома способами поруч біля нього (зліва або справа). Тобто, вони можуть зайняти 20 різних позицій, перебуваючи поруч. В той же час вісімка їх партнерів може сісти за стіл 8! різними способами, утворивши перестановки із восьми осіб. Тому $m = 20 \cdot 8!$,

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{20 \cdot 8!}{10!} = \frac{20 \cdot 8!}{8! 9 \cdot 10} = \frac{2}{9} \approx 0,2222.$$ ●

Задача 1.13 В партії з 300 деталей відділ технічного контролю виявив шість нестандартних деталей. Знайти відносну частоту нестандартних деталей.

A – деталь нестандартна, випробування – перевірка деталі відділом технічного контролю. За умовою $N = 300$, $M = 6$. Тому згідно з (1.7) $W(A) = 6/300 = 0,02$. ●

Задача 1.14. Із 1000 навмання взятих деталей 4 браковані. Скільки бракованих виявиться серед 2400 деталей (приблизно)?

A – деталь бракована, випробування – перевірка деталі. За умовою $W(A) = 0,004$. Якщо серед 2400 деталей x бракованих, то $P(A) = \frac{x}{2400}$. Оскільки $P(A) \approx W(A)$, то $\frac{x}{2400} \approx 0,004$, звідки $x \approx 10$. ●

Задача 1.15. Після буревію з’ясувалося, що телефонна лінія пошкоджена на ділянці між 20-м і 40-м кілометрами. Яка імовірність того, що пошкодження сталося між 25-м і 30-м кілометрами лінії?

Припустимо, що імовірність знаходження точки розриву лінії на відрізку l пропорційна довжині цього відрізка і не залежить від його розташування відносно відрізка L. Тоді згідно із формулою

(1.9)

$$P(A) = \frac{довжина \quad l}{довжина \quad L},$$

де випадкова подія $A = \{x \in l\}$, x – координата точки розриву на числовій осі.
В даному випадку

$$P(A) = P(25 \le x \le 30) = \frac{30-25}{40-20} = \frac{5}{20} = 0{,}25. \quad \bullet$$

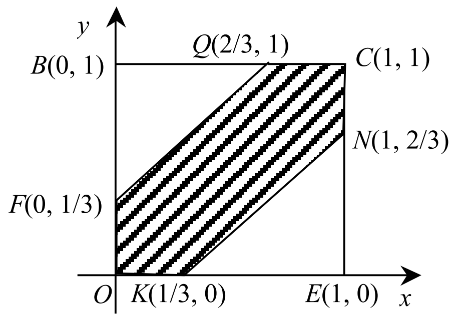
Задача 1.16. Два студенти домовилися зустрітися в певному місці між 14 і 15 годинами. Студент, який прийде першим, чекає другого протягом 20 хвилин, після чого залишає місце зустрічі. Знайти імовірність того, що зустріч відбудеться.

Розглянемо спочатку більш простий випадок, коли зустріч повинна відбутися між 0 і 1 годинами. Нехай x та y – моменти приходу першого та другого студентів відповідно. Тоді за умови спрощеної задачі виконуються подвійні нерівності $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$. Символічний запис випадкової події A – зустріч відбудеться, має такий вид:

$$A = \{|x - y| \le 1/3\},$$

де 1/3 відповідає 20 хвилинам.

Введемо прямокутну декартову систему координат xOy, в якій всі елементарні рівноможливі події (момент зустрічі (x; y)) заповнюють квадрат $\Omega = OBCE$ (мал. 1.2).



Мал.1.2.

Зобразимо графічно сукупність елементарних подій, для яких подія A відбувається. Нерівність $|x - y| \le 1/3$ рівносильна подвійній нерівності $-1/3 \le x - y \le 1/3$.

Перша з них визначає півплощину, яка знаходиться нижче граничної прямої l_1: $-1/3 = x - y$. Ця пряма проходить через точки F (0; 1/3) і Q (2/3; 1). Друга визначає півплощину, що розташована над граничною прямою l_2: $x - y = 1/3$. l_2 проходить через точки K (1/3; 0) і N (1; 2/3). Перетин отриманої «смуги» з квадратом $0BCE$ і визначає (в множинному розумінні) подію A: $A = OFQCNK$. З побудови отримуємо: $S(A) = S_{OBCE} - 2S_{\Delta FBQ} = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$. Згідно з рівністю (1.9)

$$P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)} = \frac{5}{9}. \quad \bullet$$

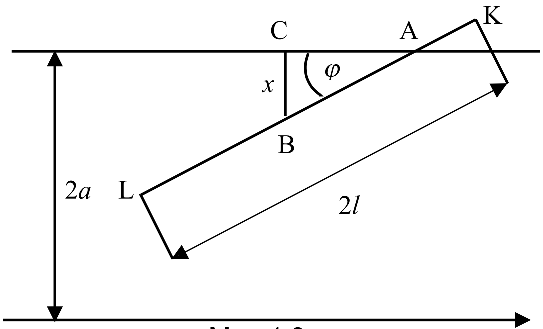
Задача 1.17. (задача Бюффона[1*]). Площина розграфлена паралельними прямими, віддаль між якими складає $2a$. На площину навмання кидається тонка голка довжиною $2l$ ($l<a$). Знайти імовірність того, що голка перетне яку-небудь із цих прямих.

Подія A – голка перетне одну із прямих. На мал.1.3, зображений один із можливих наслідків відбуття події A.

Для того, щоб врахувати всі можливі наслідки випробування, а також ті, в яких відбувається подія A, введемо в рогляд позначення: x – віддаль від середини голки до найближчої прямої, φ - кут, утворений голкою із цією прямою (мал.1.3). Відмітимо, що положення голки повністю визначається заданням конкретних значень x і φ, при цьому x може змінюватися від 0 до a включно, а φ - від 0 до π. Отже, середина голки може попасти в будь-яку із точок прямокутника із довжинами сторін a і π (мал.1.4).

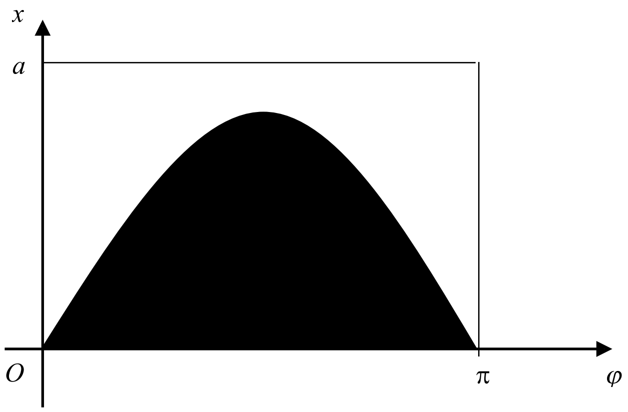
Знайдемо тепер фігуру d, кожна точка якої сприяє появі події A. Для цього розглянемо прямокутний трикутник ABC (мал.1.3), для якого $x = BC = AB\sin\varphi$. Але оскільки $AB<BK=l$, то для випадку, розглянутому на мал.1.3, отримаємо нерівність $x < l\sin\varphi$. Якщо ж точка K знаходиться на прямій, то $x = l\sin\varphi$.

* Жорж Луї Леклерк – французький природничник XVIIIст.



Мал.1.3

Отже, голка перетне найближчу до неї пряму (матиме хоча б одну спільну точку із нею) тоді і тільки тоді, коли для x виконується подвійна нерівність $0 \le x \le l\sin\varphi$, тобто якщо середина голки попаде в будь-яку із точок фігури d, заштрихованої на мал.1.4.



Мал.1.4

Її площа

$$\text{пл. } d = \int_0^{\pi} l\sin\varphi d\varphi = -l\cos\varphi\Big|_0^{\pi} = 2l .$$

Остаточно за формулою (1.9)

$$P(A) = \frac{пл.d}{пл.D} = \frac{2l}{\pi a} . \quad \bullet$$

§ 2. ТЕОРЕМИ МНОЖЕННЯ І ДОДАВАННЯ ІМОВІРНОСТЕЙ ТА ЇХ НАСЛІДКИ

Дії над подіями (алгебра подій). Діаграми В'єнна. Умовна імовірність. Теорема множення імовірностей. Теореми додавання імовірностей. Основна властивість подій, які утворюють повну групу. Алгоритм розв'язування задач з використанням теорем додавання та множення імовірностей. Імовірність появи **хоча б однієї** події. Імовірність відбуття **тільки однієї** події. Формула повної імовірності. Формули Байєса. Алгоритм розв'язування задач з використанням формул повної імовірності та Байєса.

КОРОТКІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Введемо в розгляд дії **над подіями**.

Дві події, які утворюють повну групу, називаються протилежними.

Означення. Під подією $\overline{A}$ (читається: не A) розуміється подія, яка полягає в тому, що при випробуванні подія A не відбувається і відбувається подія, протилежна до події A. Дія над подією, яка визначається рисочкою над цією подією, називається **запереченням** (цієї події).

Сумою подій $A_1, A_2, ..., A_k$ називається подія A, яка полягає в тому, що при випробуванні відбувається хоча б одна з подій $A_1, A_2, ..., A_k$. Символічний запис: $A = A_1 + A_2 + ... + A_k$. Зокрема, якщо $k = 2$, тоді подія $A = A_1 + A_2$ полягає в тому, що при випробуванні відбувається **або** подія A_1, **або** подія A_2, **або** A_1 та A_2 (якщо A_1 і

A_2 є сумісними). В зв'язку з цим отримуємо таке **мнемонічне правило**: знак суми асоціюється із словом «або» («+» $\leftrightarrow$ «або»). Якщо A_1 та A_2 несумісні, то $A_1 + A_2$ – це подія, яка полягає в тому, що при випробуванні відбувається або подія A_1, або A_2.

Добутком подій A_1, A_2, ..., A_k називається подія A, яка полягає в тому, що при випробуванні відбуваються всі події A_1, A_2, ..., A_k.

Символічно: А = $A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_k$ (або $A = A_1 A_2 ... A_k$).
Відбуття всіх k подій передбачає відбуття **і** події A_1, **і** події A_2, ..., **і** події A_k. Отже, мнемонічно дія множення асоціюється із «і» («×» $\leftrightarrow$ «і»).

Нехай випробування, в результаті якого може відбутися випадкова подія В, доповнюється умовою про відбуття випадкової події А. Тоді **імовірність події В, знайдена при умові, що подія А відбулася, називається умовною імовірністю події** B і позначається $P_A(B)$ або $P(B|A)$.

Дві події називаються **незалежними**, якщо імовірність однієї з них не змінюється від того, відбулася чи ні інша. Аналітичним критерієм незалежності подій A та B є рівність

$$P_A(B) = P_{\overline{A}}(B). \qquad (2.1)$$

У випадку виконання (2.1) можна вважати, що

$$P_A(B) = P_{\overline{A}}(B) = P(B), \qquad (2.2)$$

де остання імовірність називається **безумовною**.

Дві події називаються **залежними**, якщо імовірність однієї з них змінюється внаслідок відбуття іншої. Тобто, якщо події A та B залежні, то рівність (2.2) порушується:

$$P_A(B) \neq P_{\overline{A}}(B). \qquad (2.3)$$

Теорема множення імовірностей

Імовірність добутку двох сумісних подій дорівнює добутку імовірностей однієї з них на умовну імовірність іншої події, обчислену в припущенні, що перша подія відбулася:

$$P(AB) = P(A)P_A(B)\big(= P(B)P_B(A)\big). \qquad (2.4)$$

Зауваження. Продовження рівності в дужках вказує на «рівноправність» подій A та B з врахуванням комутативності дії множення ($AB = BA$).

Наслідок 1. Імовірність добутку *k* подій дорівнює добутку імовірності однієї з них на умовні імовірності всіх решти, причому імовірність кожної наступної події знаходиться в припущенні, що всі попередні події вже відбулися:

$$P(A_1A_2A_3...A_k) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1A_2}(A_3)...P_{A_1A_2...A_{k-1}}(A_k). \qquad (2.5)$$

Наслідок 2. Якщо події А та В незалежні, тоді

$$\boldsymbol{P(AB) = P(A)\,P(B).} \qquad (2.6)$$

Для узагальнення наслідка 2 на випадок довільного числа подій розглянемо такі означення.

Декілька подій називаються попарно незалежними, якщо **кожні** дві з них незалежні. Наприклад, події A_1, A_2, A_3 попарно незалежні, якщо незалежні події A_1 і A_2, A_1 і A_3, A_2 і A_3.

Декілька подій називаються незалежними в сукупності (або просто **незалежними**), якщо вони попарно незалежні, а також є незалежними кожна з них і всі можливі добутки інших. Наприклад, якщо події A, B, C незалежні в сукупності, то незалежні події A і B, A і C, B і C, A і BC, B і AC, C і AB.

Виявляється, що **попарна незалежність декількох подій ще не гарантує їх незалежність в сукупності**.

Наслідок 3. Імовірність добутку *k* подій, незалежних в сукупності, дорівнює добутку імовірностей цих подій:

$$\boldsymbol{P(A_1A_2 ... A_k) = P(A_1)\,P(A_2)\,...\,P(A_k).} \qquad (2.7)$$

Теорема 1. Імовірність суми двох несумісних подій дорівнює сумі імовірностей цих подій:

$$P(A + B) = P(A) + P(B). \qquad (2.8)$$

Наслідок. **Імовірність суми *k* попарно несумісних подій дорівнює сумі імовірностей цих подій:**

$$\boldsymbol{P(A_1 + A_2 + ... + A_k) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_k).} \qquad (2.9)$$

Теорема 2. Імовірність суми двох сумісних подій дорівнює сумі імовірностей цих подій без імовірності їх сумісної появи:

$$\boldsymbol{P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).} \qquad (2.10)$$

Теорема. Сума імовірностей подій, які утворюють повну групу, дорівнює одиниці:

$$\boldsymbol{P(A_1) + P(A_2) + ... P(A_n) = 1.} \qquad (2.11)$$

Для $n = 2$ події A_1, A_2 є протилежними, тому рівність (2.11) набуває такого виду:

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1 \quad \text{або} \quad p + q = 1, \qquad (2.11^*)$$

де $p = P(A)$, $q = P(\overline{A})$.

Алгоритм розв'язування задач з використанням теорем додавання та множення імовірностей

1) Вводяться в розгляд подія, імовірність якої треба знайти, а також більш простіші події, імовірності яких відомі або можуть бути знайдені за класичним означенням.

2) «Шукана» випадкова подія (імовірність якої потрібно знайти) виражається через простіші події за допомогою алгебри подій, тобто операцій суми, добутку, заперечення (протилежної події). При цьому потрібно керуватися мнемонічними правилами: «+» $\leftrightarrow$ **або**, «×» $\leftrightarrow$ **і**.

3) В залежності від виду отриманого виразу використовуються теореми додавання імовірностей або(і) теорема множення імовірностей та її наслідки. При реалізації цього пункту необхідно з'ясовувати властивості подій (сумісність, несумісність, залежність, незалежність, протилежність або повноту пари чи групи подій).

Зауваження. Слід мати на увазі те, що в багатьох задачах реалізація пункту 2) неєдина. В таких випадках бажано вибрати найкомпактнішу, переконавшись у співпаданні остаточних результатів після виконання пункту 3). Якщо ж результати не співпадають, то необхідно перевірити правильність побудови в п. 2) або коректність виконання п. 3).

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

Задача 2.1. Довести, що

а) $\overline{A_1 + A_2 + \ldots + A_k} = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \ldots \cdot \overline{A_k}$;

б) $\overline{A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_k} = \overline{A_1} + \overline{A_2} + \ldots + \overline{A_k}$.

а) подія $A_1 + A_2 + \ldots + A_k$ полягає в тому, що при випробуванні відбудеться хоча б одна із подій $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Тоді $\overline{A_1 + A_2 + \ldots + A_k}$ - протилежна до неї, тобто при випробуванні не відбудеться жодна із подій $A_1, A_2, \ldots, A_k$ (і не відбувається подія A_1, і не відбувається A_2, ..., і не відбувається A_k - компактний запис: $\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \ldots \cdot \overline{A_k}$).

б) Оскільки подія $A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_k$ полягає в тому, що при випробуванні відбудуться всі події ($A_1, A_2, \ldots, A_k$), то протилежна до неї подія ($\overline{A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_k}$) означає невідбуття хоча б однієї події із $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \ldots, \overline{A_k}$, тобто суму $\overline{A_1} + \overline{A_2} + \ldots + \overline{A_k}$.

Задача 2.2. В кейсі є 5 акцій першого виду, 6 – другого і 3 – третього. Знайти імовірність того, що три навмання взяті акції виявляться одного і того ж виду.

Позначимо: A – три навмання взяті акції є одного виду, B_i – три взяті акції i-го виду (i = 1, 2, 3). Подія A відбувається тоді, коли відбуваються або подія B_1, або B_2, або B_3. Інших можливостей для появи A немає. Тому мають місце такі рівності: $A = B_1 + B_2 + B_3$, $P(A) = P(B_1 + B_2 + B_3)$. Події B_1, B_2, B_3 попарно несумісні і згідно з наслідком теореми 1 (рівність (2.9))

$$P(A) = P(B_1) + P(B_2) + P(B_3).$$

За класичним означенням імовірності

$$P(B_1) = \frac{C_5^3}{C_{14}^3} = \frac{5}{182}, \quad P(B_2) = \frac{C_6^3}{C_{14}^3} = \frac{5}{91}, \quad P(B_3) = \frac{C_3^3}{C_{14}^3} = \frac{1}{364}.$$

Остаточно

$$P(A) = \frac{5}{182} + \frac{5}{91} + \frac{1}{364} = \frac{31}{364}.$$

Покажемо, як можна знайти імовірності подій B_1, B_2 та B_3, використовуючи теорему множення імовірностей. З цією метою позначимо: $B_j^{(i)}$ – j-та відібрана акція (j = 1, 2, 3) є акцією i-го виду (i = 1, 2, 3). Тоді, зокрема, B_1 відбудеться, якщо всі акції (**і** перша, **і** друга, **і** третя) є акціями першого виду, тобто коли відбуваються всі події $B_1^{(1)}, B_2^{(1)}, B_3^{(1)}$.

Отже, $B_1 = B_1^{(1)} B_2^{(1)} B_3^{(1)}$, $P(B_1) = P\left(B_1^{(1)} B_2^{(1)} B_3^{(1)}\right)$ і згідно з рівністю (2.5) для випадку k = 3

$$P(B_1) = P\left(B_1^{(1)}\right) P_{B_1^{(1)}}\left(B_2^{(1)}\right) P_{B_1^{(1)} B_2^{(1)}}\left(B_3^{(1)}\right) = \frac{5}{14} \cdot \frac{4}{13} \cdot \frac{3}{12} = \frac{5}{182}.$$

Відмітимо, що вибір рівності (2.5) на противагу рівності (2.7) зумовлений залежністю $B_1^{(1)}, B_2^{(1)}, B_3^{(1)}$ (доведіть!).

Аналогічно

$$P(B_2) = P\left(B_1^{(2)}\right) P_{B_1^{(2)}}\left(B_2^{(2)}\right) P_{B_1^{(2)} B_2^{(2)}}\left(B_3^{(2)}\right) = \frac{6}{14} \cdot \frac{5}{13} \cdot \frac{4}{12} = \frac{5}{91},$$

$$P(B_3) = P\left(B_1^{(3)}\right) P_{B_1^{(3)}}\left(B_2^{(3)}\right) P_{B_1^{(3)} B_2^{(3)}}\left(B_3^{(3)}\right) = \frac{3}{14} \cdot \frac{2}{13} \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{364}.$$

Отже, другий метод знаходження імовірностей подій B_1, B_2 та B_3 дає ті ж самі результати. ●

Задача 2.3. Підприємство планує здійснювати поставки двох видів виробів. Імовірність зриву поставок для першого виду виробів складає 0,05, а для другого 0,08. Згідно із проектом контракту при порушенні термінів поставок хоча б одного виду продукції до виробника застосовуються штрафні санкції, які приводять до нерентабельності виробництва обох видів виробів. Знайти імовірність нерентабельності виробництва цих виробів.

Позначимо: C – нерентабельність виробництва обох видів продукції, A та B – зрив поставки виробів першого та другого видів відповідно. Згідно з умовою задачі подія C відбувається, якщо відбувається **або** подія A, **або** подія B, **або** події A та B разом, тобто хоча б одна з них. Тому $C = A + B$, де A та B сумісні події. Згідно з теоремою додавання для сумісних подій

$$P(C) = P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

За умовою $P(A) = 0{,}05$, $P(B) = 0{,}08$ і можна вважати, що події A та B незалежні, тобто $P(AB) = P(A)\,P(B)$.

Остаточно $P(C) = 0{,}05 + 0{,}08 - 0{,}05\cdot 0{,}08 = 0{,}126$.

Другий метод розв'язування. Подію C можна представити через більш прості події A та B ще й таким чином:

$$C = A\overline{B} + \overline{A}B + AB.$$

Доданки-події справа є попарно несумісними випадковими подіями. Справді, припустимо, що події $A\overline{B}$ та $\overline{A}B$ є сумісними, тобто можуть відбутися у випробуванні. Тоді отримується суперечність: подія A, зокрема, в одному випробуванні і відбувається, і не відбувається. Це протиріччя вказує на хибність припущення. Переконайтеся в попарній несумісності цих подій, використавши діаграми В'єнна. Використавши рівності (2.9) та (2.6) і незалежність подій A та $\overline{B}$, $\overline{A}$ та B, отримаємо:

$$P(C) = P(A\overline{B} + \overline{A}B + AB) = P(A\overline{B}) + P(\overline{A}B) + P(AB) =$$

$$= P(A)P(\overline{B}) + P(\overline{A})P(B) + P(A)P(B) =$$

$$= 0{,}05\cdot 0{,}92 + 0{,}95\cdot 0{,}08 + 0{,}05\cdot 0{,}08 = 0{,}046 + 0{,}076 + 0{,}004 = 0{,}126,$$ де згідно із рівністю (2.11*)

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}05 = 0{,}95, \qquad P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0{,}08 = 0{,}92.$$

Третій метод. Протилежною до події C є подія $\overline{C}$, яка полягає в тому, що внаслідок здійснення поставок продукції виробництво обох видів виробів є рентабельним. Подія $\overline{C}$ відбувається тоді, коли **і** першого виду вироби вчасно поставляються, **і** другого, тобто відбуваються події і $\overline{A}$, і $\overline{B}$. Тому $\overline{C} = \overline{A}\overline{B}$, $P(\overline{C}) = P(\overline{A})P(\overline{B}) = 0{,}95\cdot 0{,}92 = 0{,}874$. Але згідно з (2.11*) $P(C) + P(\overline{C}) = 1$, звідки $P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - 0{,}874 = 0{,}126$.

Висновки. Перевага третього методу, зокрема, полягає в тому, що він дозволяє розв'язати задачу для довільного скінченного числа видів продукції. Що ж до отриманої відповіді, то знайдену імовірність слід інтерпретувати таким чином: в середньому в 126 випадках з кожної тисячі (12,6%) очікується нерентабельність виробництва обох видів продукції. Оскільки така імовірність достатньо велика, то керівництву підприємства потрібно подбати про зменшення імовірностей зривів поставок або(і) зменшення штрафних санкцій. ●

Задача 2.4. У зв'язці шість різних ключів, з яких тільки одним можна відкрити замок. Навмання вибирається ключ і робиться спроба відкрити ним замок. Ключ, що не підійшов, більше не використовується. Знайти імовірність того, що для відкривання буде використано не більше трьох ключів.

Позначимо: A_k ($k = 1, 2, 3$) – замок буде відкрито k-тим за порядку відбору ключем, B – замок відкривається після використання не більше трьох ключів. Подія B відбудеться, якщо до замка підійде **або** перший ключ (відбувається A_1), **або** другий (при цьому перший ключ не підійшов – відбувається подія $\overline{A}_1A_2$), **або** третій (перший і другий ключі не підійшли – відбувається подія $\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$). Тобто вираз B через простіші події A_1, A_2, A_3 має такий вид:

$$B = A_1 + \overline{A}_1A_2 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3.$$

Для знаходження $P(B)$ потрібно використати рівність (2.9), оскільки доданки є попарно несумісними подіями, а потім теорему множення імовірностей для залежних подій (обчисливши $P_{\overline{A}_1}(A_2)$ і $P_{A_1}(A_2)$, переконайтеся у тому, що події $\overline{A}_1$ і A_2 є залежними):

$$P(B) = P(A_1 + \overline{A}_1A_2 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3) = P(A_1) + P(\overline{A}_1A_2) + P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3) =$$

$$= P(A_1) + P(\overline{A}_1)P_{\overline{A}_1}(A_2) + P(\overline{A}_1)P_{\overline{A}_1}(\overline{A}_2)P_{\overline{A}_1\overline{A}_2}(A_3) = \frac{1}{6} + \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{5} + \frac{5}{6}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4} = 0{,}5.$$ ●

Задача 2.5. В шухляді є 11 карток розрізної абетки: 4 картки з літерою «и», 5 – з літерою «р» і 2 – «м». Навмання витягуються три картки і розкладаються на стіл зліва направо. Знайти імовірність того, що в результаті отримається слово «мир».

Нехай A – отримання слова «мир», B_1 – перша картка має літеру «м», B_2 – друга картка має літеру «и», B_3 – третя – «р». Подія A відбудеться, якщо відбудеться **і** подія B_1, **і** подія B_2, **і** подія B_3, тобто $A = B_1B_2B_3$. Тоді за теоремою множення імовірностей для залежних подій (рівність (2.5) для $k = 3$)

$$P(A) = P(B_1B_2B_3) = P(B_1)P_{B_1}(B_2)P_{B_1B_2}(B_3) = \frac{2}{11}\cdot\frac{4}{10}\cdot\frac{5}{9} = \frac{4}{99}.$$ ●

Зауваження. Цю задачу можна було б розв'язати і за класичним означенням імовірності. Але наслідки випробування (витягування трьох карток) вже не є розміщеннями, оскільки серед 11 вихідних елементів є однакові (пригадайте означення розміщення!). Ці наслідки не можна також назвати і комбінаціями по цій самій причині (крім того, розташування літер суттєве). Тому для обчислення m та n треба використовувати більш складні формули комбінаторики.

Розглянемо ще одну задачу, до розв'язування якої стосується попереднє зауваження з деякими доповненнями.

Задача 2.6. На чотирнадцяти окремих картках написано по одній літері: 5 карток з літерою «А», 4 – з літерою «І», 3 – з літерою «Р» і 2 – «Т». Навмання витягуються шість карток і розкладаються зліва направо. Яка імовірність того, що отримається слово «АРАРАТ»?

Позначимо випадкові події:B – отримання слова «АРАРАТ», A_1 – перша картка має літеру «А», A_2 – друга картка має літеру «Р», A_3 – третя картка має літеру «А», A_4 – четверта картка має літеру «Р», A_5 – п'ята картка має літеру «А», A_6 – шоста картка має літеру «Т»,

Подія B відбудеться, якщо відбудуться всі події $A_1, A_2, ..., A_6$, тобто $B = A_1A_2A_3A_4A_5A_6$. Використавши теорему множення імовірностей для залежних подій, отримаємо:

$$P(B) = P(A_1A_2A_3A_4A_5A_6) = P(A_1)\cdot P_{A_1}(A_2)\cdot P_{A_1A_2}(A_3)\cdot P_{A_1A_2A_3}(A_4)\cdot$$

$$\cdot P_{A_1A_2A_3A_4}(A_5)\cdot P_{A_1A_2A_3A_4A_5}(A_6) = \frac{5}{14}\cdot\frac{3}{13}\cdot\frac{4}{12}\cdot\frac{2}{11}\cdot\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9} = \frac{1}{3003} \approx 0{,}00033.$$ ●

Задача 2.7. Однотипні деталі виготовляються трьома автоматами, продуктивності яких відносяться як 3:2:5. Із нерозсортованої партії деталей навмання беруться дві. Знайти імовірність того, що: а) одна із них виготовлена першим автоматом; б) обидві виготовлені одним автоматом; в) виготовлені різними автоматами.

Випробування – відбір двох деталей.

а) Позначимо:

B – одна із двох відібраних деталей виготовлена першим автоматом;

A_i – деталь виготовлена i-тим автоматом (i=1, 2, 3).

Подія B відбудеться, якщо одна із двох деталей виготовлена першим автоматом, а друга – іншими (другим або третім). Проте, зокрема, події A_1A_2 і A_2A_1 **–** різні, хоча добуток володіє властивістю комутативності A_1A_2=A_2A_1, оскільки A_1A_2 **– перша** взята виготовлена І-м і **друга** взята деталь виготовлена ІІ-м автоматом, а A_2A_1 **– перша** деталь з ІІ-го автомата і **друга** – з І-го. Отже,

$B = A_1A_2 + A_2A_1 + A_1A_3 + A_3A_1$.

Згідно з умовою A_1, A_2, A_3 є незалежними в сукупності і за класичним означенням імовірності

$$P(A_1) = \frac{3}{3+2+5} = 0{,}3;\ P(A_2) = \frac{2}{3+2+5} = 0{,}2;\ P(A_3) = \frac{5}{3+2+5} = 0{,}5.$$

Використавши теорему суми для попарно несумісних подій, а потім добутку (для незалежних подій), отримаємо

$$P(B) = P(A_1A_2 + A_2A_1 + A_1A_3 + A_3A_1) = = P(A_1A_2) + P(A_2A_1) + P(A_1A_3) + P(A_3A_1) =$$

$$= P(A_1)\cdot P(A_2) + P(A_2)\cdot P(A_1) + P(A_1)\cdot P(A_3) + P(A_3)\cdot P(A_1) =$$

$$= 0{,}3\cdot 0{,}2 + 0{,}2\cdot 0{,}3 + 0{,}3\cdot 0{,}5 + 0{,}5\cdot 0{,}3 = 0{,}42.$$

б) Подія C – обидві відібрані деталі виготовлені одним автоматом. Тоді $C = A_1A_1 + A_2A_2 + A_3A_3$ і $P(C) = 0{,}3\cdot 0{,}3 + 0{,}2\cdot 0{,}2 + 0{,}5\cdot 0{,}5 = 0{,}38$.

в) Подія D – обидві відібрані деталі виготовлені різними автоматами. Протилежною до події D є подія C, тобто $\overline{D} = C$, звідси $P(\overline{D}) = P(C) = 0{,}38$.

За формулою (2.11*)

$P(D) = 1 - P(\overline{D}) = 1 - 0{,}38 = 0{,}62$. ●

Зауваження. Згідно із означенням добутку $A\cdot A = A$, але за означенням випробування $A_1\cdot A_1 \neq A_1$, оскільки $A_1\cdot A_1$ - подія, яка полягає в тому, що і І-а, і ІІ-а деталі виготовлені першим автоматом. По суті, слід було б вводити в розгляд 6 найпростіших подій $A_j^{(i)}$ - i-та відібрана деталь (i=1,2) виготовлена j-м автоматом (j=1,2,3) (див. другу частину розв'язування задачі 2.2).

Задача 2.8. Кожний із двох гравців почергово кидає по два гральних кубики. Виграє той із них, у кого першим випаде 12 очок (сума очок на гранях, що випали). Яка імовірність виграшу для гравця, який кидає гральні кубики: а) першим; б) другим?

Випробування – кидання двох гральних кубиків.

а) Позначимо:

B – виграш гравця, який почав гру першим,

A_i – випадання 12 очок в i-му випробовуванні (i=1, 2,...). Для довільного i (див. розв'язання задачі 1.3)

$$P(A_i)=\frac{1}{36},\ P(\overline{A}_i)=\frac{35}{36}.$$

Подія B зображається через простіші події таким чином:

$$B = A_1 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4A_5 + \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4\overline{A}_5\overline{A}_6A_7 + \dots .$$

Відмітимо, що непарним індексам відповідають спроби першого гравця, а парним – другого. Тому, зокрема, A_3 може відбутися тільки при невдалій першій своїй спробі $\overline{A}_1$ і невдалій першій спробі суперника ($\overline{A}_2$ – в протилежному випадку виграв би суперник). Аналогічна ситуація із іншими сприятливими для першого гравця наслідками (доданками у наведеній вище сумі).

Використавши теорему суми для попарно несумісних випадкових подій, а потім теорему добутку для незалежних в сукупності випадкових подій отримаємо

$$P(B)=P(A_1)+P(\overline{A}_1\cdot\overline{A}_2\cdot A_3)+P(\overline{A}_1\cdot\overline{A}_2\cdot\overline{A}_3\cdot\overline{A}_4\cdot A_5)+$$
$$+P(\overline{A}_1\cdot\overline{A}_2\cdot\overline{A}_3\cdot\overline{A}_4\cdot\overline{A}_5\cdot\overline{A}_6\cdot A_7)+\dots=$$
$$=\frac{1}{36}+\left(\frac{35}{36}\right)^2\cdot\frac{1}{36}+\left(\frac{35}{36}\right)^4\cdot\frac{1}{36}+\left(\frac{35}{36}\right)^6\cdot\frac{1}{36}+\dots .$$

Отриманий числовий ряд є геометричним з першим членом $a_1 = 1/36$ і знаменником $q=(35/36)^2<1$, його сума дорівнює $a_1/(1-q)$.

Отже,

$$P(B)=\frac{a_1}{1-q}=\frac{1/36}{1-(35/36)^2}=\frac{36}{71}\approx 0{,}507 .$$

б) Подія $\overline{B}$ – виграш гравця, який вступає у гру другим, має меншу ймовірність:

$$P(\overline{B})=1-P(B)=1-\frac{36}{71}=\frac{35}{71}\approx 0{,}493 .$$ ●

Для випадку б) перевірити отриманий результат, зобразивши подію $\overline{B}$ через простіші події, а потім використавши теореми додавання і множення імовірностей.

Задача 2.9. Відомо, що випадкові події A та B незалежні, причому $P(A\overline{B})=0{,}46$, $P(\overline{A}B)=0{,}34$, $P(A+B)=0{,}8$. Знайти $P(A)+P(B)$ і з'ясувати питання: події A та B сумісні чи ні.

Використовуючи означення суми двох подій A та B (див. другий метод розв'язування задачі 2.3), отримаємо $A+B=A\overline{B}+\overline{A}B+AB$.

Тоді з урахуванням умов задачі

$$P(A+B)=P(A\overline{B}+\overline{A}B+AB)=P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)+P(AB)=$$
$$=0{,}46+0{,}34+P(AB)=0{,}8+P(AB).$$

З другого боку, за умовою $P(A+B)=0{,}8$.

Отже, $0{,}8+P(AB)=0{,}8$, $P(AB)=0$, що означає несумісність подій A та B.

Таким чином, $P(A)+P(B)=0{,}8$. ●

Імовірність появи хоча б однієї події

Нехай в результаті випробування можуть відбутися події $A_1, A_2, \dots, A_k$, імовірності появи кожної з яких відомі і які є **незалежними в сукупності**. Позначимо A – поява хоча б однієї із цих подій у випробуванні. Тоді згідно з означенням суми подій $A = A_1 + A_2 + \dots + A_k$. Спроба узагальнити теорему 2 на більше число подій-доданків наштовхується на труднощі, які ілюструє рівність для трьох **сумісних** подій:

$$P(A_1+A_2+A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)-$$
$$-P(A_1A_3)-P(A_2A_3)+P(A_1A_2A_3).$$

Доведіть цю рівність, використавши теорему 2 спочатку до суми подій $B = A_1 + A_2$ і A_3, а потім до суми A_1A_3 і A_2A_3. На останньому кроці слід скористатися рівністю $A_1A_3A_2A_3 = A_1A_2A_3$ (переконайтеся в її правильності).

Разом з тим третій метод розв'язування задачі 2.2 вказує шлях до знаходження $P(A)$, підсумком якого є така рівність:

$$P(A) = 1 - q_1q_2\dots q_k, \qquad (2.12)$$

де $q_1 = P(\overline{A}_1), q_2 = P(\overline{A}_2), \dots, q_k = P(\overline{A}_k)$.

В частинному випадку, коли $P(A_1) = P(A_2) = \dots = P(A_k) = p$, отримується така формула

$$P(A) = 1 - q^k, \qquad (2.12^*)$$
де $q = 1 - p$.

Нарешті, якщо події $A_1, A_2, ..., A_k$ є **залежними** (не володіють властивістю незалежності в сукупності), тоді
$$P(A) = 1 - P(\overline{A}_1)P_{\overline{A}_1}(\overline{A}_2)\ldots P_{\overline{A}_1\overline{A}_2\ldots\overline{A}_{k-1}}(\overline{A}_k). \qquad (2.13)$$

Задача 2.10. Підприємство отримує від суміжників продукцію $П_1, П_2, П_3, П_4$ і виконає план, якщо вчасно отримає якісну продукцію в потрібній кількості. Ймовірність зриву поставок (як по кількості, так і по якості) по кожній із цих компонент технологічного процесу відповідно дорівнює 0,02; 0,01; 0,1; 0,05. Знайти імовірність невиконання заводом плану.

Позначимо: A – невиконання заводом плану, A_i – зрив поставки компоненти $П_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$). Якщо відбувається хоча одна із подій A_1, A_2, A_3, A_4, тоді відбувається подія A. За умовою задачі $P(A_1) = 0{,}02$; $P(A_2) = 0{,}01$; $P(A_3) = 0{,}1$; $P(A_4) = 0{,}05$ і ці події можна вважати незалежними в сукупності. Використовуючи формулу (2.12), отримаємо:
$$q_1 = 1 - 0{,}02 = 0{,}98; \quad q_2 = 1 - 0{,}01 = 0{,}99;$$
$$q_3 = 1 - 0{,}1 = 0{,}9; \quad q_4 = 1 - 0{,}05 = 0{,}95,$$
$$\text{P(A)} = 1 - 0{,}98 \cdot 0{,}99 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}95 = 1 - 0{,}829521 \approx 0{,}171. \quad \bullet$$

Задача 2.11. На залік виноситься 60 питань, кожне з яких надруковане на окремій картці. За правилами здачі цього предмету, студент навмання витягує 4 картки. Якщо він знатиме хоча б одне питання, тоді йому не потрібно повторно захищати розрахункові індивідуальні завдання (навіть якщо він і не отримує залік). Знайти імовірність того, що перший студент не буде повторно захищати свої індивідуальні завдання, якщо він підготував 40 питань.

Нехай A – студент не буде повторно захищати свої завдання, A_i – студент знає i-е витягнуте питання $(i = \overline{1,4})$. Подія A відбудеться при появі хоча б однієї із подій A_1, A_2, A_3, A_4. Але ці події не володіють властивістю незалежності у сукупності. Для доведення цього достатньо показати, наприклад, залежність подій A_1 та A_2:
$$P_{A_1}(A_2) = \frac{39}{59}; \; P_{\overline{A}_1}(A_2) = \frac{40}{59} \;\; \Rightarrow \;\; P_{A_1}(A_2) \neq P_{\overline{A}_1}(A_2).$$

За формулою (2.13) для випадку $k = 4$
$$P(A) = 1 - P(\overline{A}_1)P_{\overline{A}_1}(\overline{A}_2)P_{\overline{A}_1\overline{A}_2}(\overline{A}_3)P_{\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3}(\overline{A}_4) =$$
$$= 1 - \frac{20}{60}\cdot\frac{19}{59}\cdot\frac{18}{58}\cdot\frac{17}{57} = 1 - \frac{17}{1711} \approx 0{,}99.$$

Другий спосіб розв'язування. Протилежною до події A є $\overline{A}$ – всіх чотирьох питань студент не знає. За класичним означенням
$$P(\overline{A}) = \frac{C_{20}^4}{C_{60}^4} = \frac{20\cdot19\cdot18\cdot17}{60\cdot59\cdot58\cdot57} = \frac{17}{1711}.$$

Згідно із властивістю протилежності подій
$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{17}{1711} \approx 0{,}99. \quad \bullet$$

Задача 2.12. Взимку при включенні запалення двигун почне працювати з імовірністю 0,7. Знайти імовірність того, що для запуску двигуна доведеться включати запалення менше чотирьох разів.

Випробування – включення запалення.

Позначимо: B – двигун запрацює до четвертого включення запалення, A_i – двигун запускається при i-му включенні запалення, де i=1, 2, 3, оскільки 3<4. На перший погляд подія B відбудеться тоді, коли появиться хоча б одна із подій A_1, A_2, A_3. Це веде до використання формули (2.12). Проте, якщо відбудеться, наприклад, подія A_2 , то немає сенсу виключати запалення, а потім знову його включати (зокрема, не достовірно, що двигун запрацює при третьому включенні запалення, якщо він запрацював при другому включенні).

Отже, подія B відбудеться або при першій вдалій спробі (A_1), або при другій ($\overline{A}_1 A_2$) або при третій ($\overline{A}_1\overline{A}_2 A_3$):
$$B = A_1 + \overline{A}_1 A_2 + \overline{A}_1\overline{A}_2 A_3.$$
Використання теорем додавання та множення ймовірностей дає:
$$P(B) = P(A_1 + \overline{A}_1 A_2 + \overline{A}_1\overline{A}_2 A_3) =$$
$$= P(A_1) + P(\overline{A}_1)\cdot P(A_2) + P(\overline{A}_1)\cdot P(\overline{A}_2)\cdot P(A_3) =$$
$$= 0{,}7 + 0{,}3\cdot0{,}7 + 0{,}3\cdot0{,}3\cdot0{,}7 = 0{,}7 + 0{,}21 + 0{,}063 = 0{,}973 \quad \bullet$$

Висновки: 1. Використанню тієї чи іншої формули повинен передувати вдумливий аналіз умов задачі.

2. Імовірності вдалої спроби різко зменшуються із збільшенням номера спроби. Тому слід подбати про збільшення ефективності запалювальної системи і якість роботи акумулятора.

Задача 2.13. Скільки карток спортлото «5 із 36» треба придбати, щоб з імовірністю, не менше від α, виграла хоча б одна із них?

Нехай придбано k (поки що невідоме число) карток. Введемо в розгляд події: A_j – виграла j-та картка $(j=\overline{1;k})$, A – виграшною виявиться хоча б одна із k карток (відбудеться хоча б одна із подій $A_1, A_2, ..., A_k$). Оскільки картки заповнюються довільним (випадковим чином) і загальне число різних їх заповнень дуже велике $\left(C_{36}^5 = 376992\right)$, то можна вважати події $A_1, A_2, ..., A_k$ незалежними у сукупності і виконаними рівності $P(A_1) = P(A_2) = ... = P(A_k) = p$. Навмання заповнена картка буде виграшною, якщо в результаті проведення тиражу буде вгадано 3 числа (B_3), або 4 (B_4), або 5 (B_5). З урахуванням несумісності цих подій $p = P(B_3) + P(B_4) + P(B_5)$. За класичним означенням

$$P(B_3) = \frac{C_5^3 \cdot C_{31}^2}{C_{36}^5} = \frac{4650}{376992}, \quad P(B_4) = \frac{C_5^4 \cdot C_{31}^1}{C_{36}^5} = \frac{155}{376992},$$

$$P(B_5) = \frac{C_5^5}{C_{36}^5} = \frac{1}{376992}.$$

Тому $p = \frac{4650}{376992} + \frac{115}{376992} + \frac{1}{376992} = \frac{4766}{376992}, \quad q \approx 0{,}987.$

За формулою (2.12*) $P(A) = 1 - q^k$. Але за умовою k повинно бути таким, щоб виконувалась нерівність $P(A) \ge \alpha$, звідки $q^k \le 1 - \alpha$. Прологарифмувавши ліву і праву частини і врахувавши те, що $\ln q < 0$, остаточно отримаємо:

$$k \ge \frac{\ln(1-\alpha)}{\ln q},$$ де $q \approx 0{,}987$. ●

Задача 2.14. Імовірності появи кожної з трьох незалежних у сукупності подій A_1, A_2, A_3 відповідно рівні p_1, p_2, p_3. Знайти імовірність появи у випробуванні тільки однієї з цих подій.

Нехай B – відбуття тільки однієї із подій A_1, A_2, A_3. Поява події B передбачає **або** відбуття події A_1 (і не відбуття A_2 та A_3), **або** події A_2 (і не відбуття A_1 та A_3), **або** події A_3 (і не відбуття A_1 та A_2), тобто

$$B = A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1 A_2 \overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2 A_3.$$

Події-доданки є попарно несумісними (доведіть від протилежного), а співмножники кожного доданку – незалежні у сукупності. Використавши теореми суми, а потім добутку імовірностей, отримаємо:

$$P(B) = P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1 A_2 \overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2 A_3) = P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1 A_2\overline{A}_3) +$$
$$+P(\overline{A}_1\overline{A}_2 A_3) = P(A_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1)P(A_2)P(\overline{A}_3) +$$
$$+P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(A_3) = p_1q_2q_3 + q_1p_2q_3 + q_1q_2p_3,$$

де $q_i = 1 - p_i$, $i = 1, 2, 3$. ●

Задача 2.15. Виходячи з умови задачі 2.14, знайти імовірність того, що у випробуванні відбудуться: а) всі; б) жодна; в) тільки дві; г) хоча б дві; д) не більше однієї; е) не більше двох.

Обмежимося виконанням пункту 2) алгоритму, залишаючи завершення для самостійної роботи.

а) $A_1A_2A_3$; б) $\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$; в) $A_1A_2\overline{A}_3 + A_1\overline{A}_2A_3 + \overline{A}_1A_2A_3$; г) $A_1A_2\overline{A}_3 + A_1\overline{A}_2A_3 + \overline{A}_1A_2A_3 + A_1A_2A_3$; д) $\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3$;

е) протилежною подією до події, імовірність якої треба знайти, є $A_1A_2A_3$; далі використати властивість протилежної події. ●

Задача 2.16. Для вчасного виконання термінового замовлення протягом зміни достатньо, щоб безперебійно працювали два станки-автомати. В цеху є три такі станки, проте імовірності їх поломок складають відповідно 0,1; 0,05; 0,2. Знайти імовірність вчасного виконання замовлення.

Нехай B – замовлення виконується вчасно, A_i –протягом зміни безвідмовно працює i-ий станок (i=1,2,3).

За умовою $P(\overline{A}_1) = 0{,}1$, $P(\overline{A}_2) = 0{,}05$, $P(\overline{A}_3) = 0{,}2$. Тоді $P(A_1) = 0{,}9$, $P(A_2) = 0{,}95$, $P(A_3) = 0{,}8$.

Оскільки події A_1, A_2, A_3 – випадкові, то в якості підстраховки (виконання завдання) слід враховувати можливість сумісної роботи всіх трьох станків, тобто помилково вважати, що подія B полягає у відбутті **тільки двох подій** із трьох у випробуванні. Отже, "структура" події B така: $B = A_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A}_3 + A_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot A_3 + \overline{A}_1 \cdot A_2 \cdot A_3 + A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$.

Використання теорем суми і добутку імовірностей дає:

$$P(B) = P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(\overline{A}_3) + P(A_1)\cdot P(\overline{A}_2)\cdot P(A_3) + P(\overline{A}_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3) +$$
$$+ P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3) = 0{,}9\cdot 0{,}95\cdot 0{,}2 + 0{,}9\cdot 0{,}05\cdot 0{,}8 + 0{,}1\cdot 0{,}95\cdot 0{,}8 + 0{,}9\cdot 0{,}95\cdot 0{,}8 = 0{,}967$$ ●

Задача 2.17. Імовірність (статистична) влучання в кошик при кожному виконанні штрафного кидка для першого баскетболіста дорівнює 0,8, а для другого – 0,9. Обидва вони, починаючи з І-го, почергово здійснюють кидки, проте виконують їх не більше, ніж по два. При цьому кожний баскетболіст виконує другий кидок тільки при умові, що перший зроблений ним кидок буде невдалим. Знайти ймовірність того, що в підсумку виявиться два влучних кидки.

Позначимо: C – баскетболісти в сумі набирають 2 (два влучних кидки), A_i та B_i – в і-му кидку (i=1,2) влучає перший та другий баскетболіст відповідно. За умовою $P(A_1)=P(A_2)=0{,}8$, $P(B_1)=P(B_2)=0{,}9$, звідки $P(\overline{A}_1)=P(\overline{A}_2)=0{,}2$, $P(\overline{B}_1)=P(\overline{B}_2)=0{,}1$.

Знову же таки, формально, відбуття події C передбачає появу тільки двох подій (двох влучних кидків). Переберемо всі варіанти відбуття події C:

1) кожний перший кидок обох баскетболістів влучний;
2) у І-го баскетболіста перший кидок вдалий (він не має права на наступний кидок), у ІІ-го – перший промах, другий влучний;
3) у І-го баскетболіста перший кидок невдалий, другий влучний і у ІІ-го перший кидок влучний;
4) перші кидки у обох невдалі, а другі – влучні.

Тому $C=A_1B_1+A_1\overline{B}_1B_2+\overline{A}_1B_1A_2+\overline{A}_1\overline{B}_1A_2B_2$.

Відмітимо, що доданки $A_1\overline{B}_1A_2$ та $\overline{A}_1B_1\overline{A}_2B_2$ не можуть фігурувати в сумі, оскільки за умовою задачі кожний із баскетболістів виконує другий кидок при умові, що перший був невдалим.

Використання теорем суми і добутку імовірностей дає: $P(C)=P(A_1B_1+A_1\overline{B}_1B_2+\overline{A}_1B_1A_2+\overline{A}_1\overline{B}_1A_2B_2)=$
$=0{,}8\cdot 0{,}9+0{,}8\cdot 0{,}1\cdot 0{,}9+0{,}2\cdot 0{,}9\cdot 0{,}8+0{,}2\cdot 0{,}1\cdot 0{,}8\cdot 0{,}9=0{,}9504$. ●

Формула повної імовірності

Нехай подія A може відбутися тільки при умові появи однієї із подій $B_1, B_2, ..., B_n$, які утворюють повну групу. Нехай відомі імовірності $P(B_k)$, $P_{B_k}(A)$, $k=(\overline{1,n})$. Відповідь на питання: як знайти $P(A)$? – дає

Теорема. Імовірність події A, яка може відбутися тільки після появи однієї із подій $B_1, B_2, ..., B_n$, які утворюють повну групу, знаходиться за так званою формулою повної імовірності:

$$P(A)=P(B_1)P_{B_1}(A)+P(B_2)P_{B_2}(A)+\ldots+P(B_n)P_{B_n}(A). \quad (2.14)$$

Зауваження. Оскільки до випробування невідомо, після якої із подій $B_1, B_2, ..., B_n$ відбудеться подія $\boldsymbol{A}$, то ці події називаються **гіпотезами (припущеннями)**.

Формули Байєса

Нехай виконуються умови теореми відносно подій $B_1, B_2, ..., B_n$ та A. Припустимо, що проведено випробування, в результаті якого відбулася подія A. Виникає питання: як «переоцінити» імовірності гіпотез $B_1, B_2, ..., B_n$ з урахуванням відбуття події A, тобто знайти умовні імовірності $P_A(B_k)$, $(k=\overline{1,n})$? Відповідь дають так звані формули Байєса:

$$P_A(B_k)=\frac{P(B_k)P_{B_k}(A)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(B_i)P_{B_i}(A)},\, k=1,2,\ldots,n. \quad (2.15)$$

Алгоритм розв'язування задач з використанням формул повної імовірності та Байєса

Рекомендується така послідовність розв'язування задач.

1) Формулюють гіпотези $B_1, B_2, ..., B_n$ і подію A. При цьому слід перевірити **повноту групи гіпотез**, а також те, що **подія A може відбутися тільки після появи однієї із гіпотез**.

2) Знаходяться імовірності гіпотез. Правильність розрахунків контролюється виконанням рівності $P(B_1)+P(B_2)+...+P(B_n)=1$. Обчислюються умовні імовірності $P_{B_1}(A), P_{B_2}(A), \ldots, P_{B_n}(A)$.

3) Вибирається формула повної імовірності або формули Байєса. Останні використовуються тоді, коли є інформація про відбуття випадкової події.

Задача 2.18. Три верстати-автомати штампують однотипні деталі, що потрапляють на спільний конвейєр. Продуктивність другого автомату на 40% вища від продуктивності першого і вдвічі – від третього. Відсоток браку для кожного з автоматів дорівнює відповідно 3, 6, 2. а). Яка імовірність того, що навмання взята з конвейєра деталь виявиться бракованою? б). Навмання взята деталь виявилася бракованою. Що імовірніше: ця деталь виготовлена першим чи третім автоматом?

а) Першу частину задачі розв'язуємо за формулою повної імовірності, оскільки відсутня інформація про відбуття випадкової події.

При відборі довільним чином деталі з конвейєра невідомо, яким автоматом вона виготовлена. Цю **невизначеність не можна трактувати як відбуття випадкової події** (типова помилка студентів). Можна зробити припущення: будь-яка деталь (стандартна чи бракована) виготовлена або першим автоматом (подія B_1), або другим (B_2), або третім (B_3). Неважко переконатися в тому, що події B_1, B_2, B_3 утворюють повну групу (доведіть!).

Позначимо: A – навмання взята деталь бракована. Ясно, що подія A може відбутися після появи однієї із гіпотез, адже щоб говорити про бракованість деталі, потрібно її спочатку виготовити.

Знайдемо імовірності гіпотез. Для цього позначимо через a кількість деталей, що виготовить перший автомат за деякий проміжок часу. Тоді за умовою задачі за цей же проміжок часу другий автомат виготовить $1{,}4a$ деталей, а третій – $0{,}7a$. За класичним означенням імовірності

$$P(B_1)=\frac{a}{3{,}1a}=\frac{10}{31};\ \ P(B_2)=\frac{1{,}4a}{3{,}1a}=\frac{14}{31};\ \ P(B_3)=\frac{0{,}7a}{3{,}1a}=\frac{7}{31}.$$

Перевіримо обчислення. Оскільки гіпотези утворюють повну групу, то сума їх імовірностей повинна дорівнювати одиниці:

$$P(B_1)+P(B_2)+P(B_3)=\frac{10}{31}+\frac{14}{31}+\frac{7}{31}=1.$$

Згідно з умовою задачі і за класичним означенням

$$P_{B_1}(A)=\frac{3}{100}=0{,}03;\ \ P_{B_2}(A)=\frac{6}{100}=0{,}06;\ \ P_{B_3}(A)=\frac{2}{100}=0{,}02.$$

Прочитайте ліві частини цих рівностей з урахуванням змісту подій A, B_1, B_2, B_3, а також переконайтеся у правильності цих рівностей.

Формула повної імовірності (2.14) у цьому випадку має такий вид:

$$P(A)=P(B_1)P_{B_1}(A)+P(B_2)P_{B_2}(A)+P(B_3)P_{B_3}(A).$$

Підставивши обчислені дані в праву частину, отримаємо

$$P(A)=\frac{10}{31}\cdot 0{,}03+\frac{14}{31}\cdot 0{,}06+\frac{7}{31}\cdot 0{,}02\approx 0{,}0401.$$

б) У другій частині задачі використаємо формули Байєса, оскільки є інформація про відбуття випадкової події (A – деталь виявилася бракованою). При цьому ми повинні знайти $P_A(B_1)$, $P_A(B_3)$ і порівняти їх. Але більшою з них буде та імовірність, чисельник в правій частині формули Байєса для якої буде більшим. Тобто, достатньо порівняти $P(B_1)P_{B_1}(A)$ і $P(B_3)P_{B_3}(A)$: $P(B_1)P_{B_1}(A)=\frac{0{,}3}{31}$, $P(B_3)P_{B_3}(A)=\frac{0{,}14}{31}$. Отже, $P_A(B_1)>P_A(B_3)$, і можна зробити висновок: більш імовірніше, що бракована деталь виготовлена першим автоматом. ●

Задача 2.19. Студент знає відповіді на 20 білетів із 30. Коли йому краще взяти екзаменаційний білет: першим чи другим?

Потрібно знайти імовірності події A – студент знає витягнутий білет для двох випадків: 1) він іде першим; 2) він бере білет другим. В залежності від отриманих результатів треба буде зробити висновок.

В першому випадку за класичним означенням імовірності

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{20}{30}=\frac{2}{3}.$$

В другому випадку перед студентом знаходиться 29 білетів і тому необхідно розглянути припущення: попередній студент взяв білет, який знає другий (подія B_1), попередній студент взяв білет, якого другий студент не підготував (подія B_2). Переконайтеся в тому, що події B_1, B_2 утворюють повну групу (є протилежними), а подія A може відбутися після появи однієї із подій B_1 та B_2. В задачі відсутня інформація про відбуття випадкової події, тому треба використати формулу повної імовірності:

$$P(A)=P(B_1)P_{B_1}(A)+P(B_2)P_{B_2}(A).$$

За класичним означенням знайдемо:

$$P(B_1)=\frac{20}{30}=\frac{2}{3},\ \ P(B_2)=\frac{10}{30}=\frac{1}{3},\ \ P(B_1)+P(B_2)=1,$$

$$P_{B_1}(A)=\frac{19}{29},\ \ P_{B_2}(A)=\frac{20}{29}.$$

Тоді $P(A)=\frac{2}{3}\cdot\frac{19}{29}+\frac{1}{3}\cdot\frac{20}{29}=\frac{38+20}{3\cdot 29}=\frac{58}{3\cdot 29}=\frac{2}{3}.$

Отже, отримані імовірності для обох випадків рівні, і для студента байдуже, яким чином брати білет: першим чи другим. ●

Розроблення «стратегії» здачі екзамену – актуальне питання для студента. Тому природно поставити питання, чи зміниться ситуація, коли він братиме білет третім по рахунку. Число гіпотез в цьому випадку збільшиться: до нього взяли два білети, з яких він не знає жодного (B_1), один (B_2), обидва (B_3). Пропонується здійснити обчислення за формулою повної імовірності в цьому випадку і переконатися в тому, що імовірність знання взятого білета знову не зміниться.

Розглянемо ще одну із задач, розв'язування яких (у більшості випадків) викликає труднощі у студентів в плані перевірки виконання умов, при яких мають місце формули повної імовірності або Байєса.

Задача 2.20. Два студенти незалежно один від другого здійснили по одному пострілу в одну мішень. Імовірність влучання в мішень для першого студента дорівнює 0,8, для другого – 0,6. Після залпу в мішені виявлена одна пробоїна. Знайти імовірність того, що у мішень влучив перший студент.

Сформулюємо гіпотези, не звертаючи уваги на результат випробування. Позначимо: B_1 – в мішень не попаде ні один студент, B_2 – попаде перший і не влучить другий, B_3 – не влучить перший і влучить другий, B_4 – обидва влучать, A – в мішені одна пробоїна. Обчислимо імовірності гіпотез, попередньо ввівши більш прості випадкові події: C – влучання в мішень першим студентом, D – влучання другим студентом. Тоді згідно із змістом подій B_k :

$$B_1 = \overline{C} \cdot \overline{D}, \quad B_2 = C \cdot \overline{D}, \quad B_3 = \overline{C} \cdot D, \quad B_4 = C \cdot D,$$

і оскільки C та D незалежні випадкові події, то за теоремою множення імовірностей

$$P(B_1) = P(\overline{C})P(\overline{D}) = 0{,}2 \cdot 0{,}4 = 0{,}08, \ P(B_2) = P(C)P(\overline{D}) = 0{,}8 \cdot 0{,}4 = 0{,}32,$$

$$P(B_3) = P(\overline{C})P(D) = 0{,}2 \cdot 0{,}6 = 0{,}12, \ P(B_4) = P(C)P(D) = 0{,}8 \cdot 0{,}6 = 0{,}48,$$

$$\sum_{i=1}^{4} P(B_i) = 0{,}08 + 0{,}32 + 0{,}12 + 0{,}48 = 1.$$

При знаходженні умовних імовірностей $P_{B_k}(A), k = \overline{1,4},$ уважно прочитайте їх з урахуванням змісту подій $B_k, k = \overline{1,4},$ та A і переконайтеся в правильності таких рівностей:

$$P_{B_1}(A) = 0, \ P_{B_2}(A) = P_{B_3}(A) = 1, \ P_{B_4}(A) = 0.$$

За формулою повної імовірності для чотирьох гіпотез отримуємо

$$P(A) = \sum_{k=1}^{4} P(B_k)P_{B_k}(A) = 0{,}08 \cdot 0 + 0{,}32 \cdot 1 + 0{,}12 \cdot 1 + 0{,}48 \cdot 0 = 0{,}44.$$

В даній задачі потрібно використати формулу Байєса, бо за умовою задачі є інформація про відбуття випадкової події (в мішені виявлена пробоїна після залпу – подія A). Тому шукана імовірність $P_A(B_2)$ знаходиться за цією формулою:

$$P_A(B_2) = \frac{P(B_2) \cdot P_{B_2}(A)}{P(A)} = \frac{0{,}32 \cdot 1}{0{,}44} = \frac{8}{11}.$$ ●

Задача 2.21. Відомо, що в період між переналадками обладнання в середньому 96% випущеної підприємством продукції задовільняє умовам стандарту. На підприємстві в якості експерименту почали використовувати спрощену систему контролю якості продукції. Результати показали, що ця система визнає придатним виріб з ймовірністю 0,99, якщо він справді придатний, і з ймовірністю 0,07, якщо він бракований.

1) Знайти імовірність того, що навмання відібраний виріб буде визнано стандартним згідно цієї спрощеної системи контролю.

2) Яка ймовірність того, що виріб справді стандартний, якщо він: а) визнаний стандартним за спрощеним контролем; б) двічі пройшов (визнаний стандартним) за спрощеним контролем?

1) Навмання взятий виріб може бути або справді стандартним (гіпотеза B_1), або бракованим (гіпотеза B_2). Тоді A – виріб визнано стандартним згідно спрощеної схеми – може відбутися тільки після появи однієї із гіпотез.

За умовою

$P(B_1) = 0{,}96$, $P(B_2) = 0{,}04$, $P_{B_1}(A) = 0{,}99$, $P_{B_2}(A) = 0{,}07$.

Відсутня також інформація про відбуття випадкової події. Тому за формулою повної імовірності (2.14) при n=2 отримаємо

$$P(A) = 0{,}96 \cdot 0{,}99 + 0{,}04 \cdot 0{,}07 = 0{,}9532.$$

2. а) Згідно з умовою подія A відбулася. Тому за формулою Байєса

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A)}{P(A)} = \frac{0.96 \cdot 0{,}99}{0{,}9532} \approx 0{,}9971.$$

б) Позначимо A^* – виріб двічі визнаний стандартним за спрощеним контролем, A_i – виріб визнано стандартним при i-тій перевірці за спрощеним контролем (i=1,2). Тоді $A^* = A_1 A_2$, де події A_1 і A_2 – незалежні, бо відбуття A_1 – не змінює імовірності A_2 (проаналізуйте!). Знайдемо спочатку $P(A^*)$ за формулою повної імовірності:

$$P(A^*) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A^*) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A^*),$$

де згідно із теоремою множення імовірностей для незалежних подій

$$P_{B_1}(A^*) = P_{B_1}(A_1 A_2) = P_{B_1}(A_1) \cdot P_{B_1}(A_2) = 0{,}99 \cdot 0{,}99 = 0{,}9801,$$

$$P_{B_2}(A^*) = P_{B_2}(A_1) \cdot P_{B_2}(A_2) = 0{,}07 \cdot 0{,}07 = 0{,}0049.$$

Тоді

$$P(A^*) = 0{,}96 \cdot 0{,}9801 + 0{,}04 \cdot 0{,}0049 = 0{,}941092.$$

Оскільки подія A^* відбулася, то за формулою Байєса

$$P_{A^*}(B_1) = \frac{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A^*)}{P(A^*)} = \frac{0.96 \cdot 0{,}9801}{0{,}941092} = 0{,}999792 \quad \bullet$$

Зауваження. Організація контролю якості продукції є актуальною задачею кожного виробництва. З одного боку – контроль вимагає економічних витрат, що відображаються на собівартості продукції. З другого боку, ігнорування його або зменшення уваги до нього може призвести до штрафних санкцій і втрати становища на ринку. Тому природно здійснювати здешевлення контролю якості продукції при збереженні певного рівня достовірності висновків. В зв'язку з цим стосовно попередньої задачі (п.2б) можна зробити такий **висновок**: оскільки $P_{A^*}(B_2) = 1 - P_{A^*}(B_1) = 1 - 0{,}999792 = 0{,}000208$ дуже мала, то гіпотезу B_2 про те, що що виріб, який двічі пройшов спрощений контроль (як стандартний), є бракованим, можна відкинути як практично неможливу подію.

Задача 2.22. Імовірність того, що деякий товар знаходиться на складі, дорівнює $p \in (0;1)$, причому він може знаходитися в довільній із дев'яти секцій складу з однаковою імовірністю. Перевірка восьми секцій показала, що там він відсутній. Знайти ймовірність того, що товар знаходиться у дев'ятій секції складу.

Оскільки невідомо, чи є в наявності на складі товар, то можна зробити припущення: B_1 – товар є на складі, B_2 – він відсутній на складі. Подія A – товар відсутній у восьми секціях складу.

За умовою $P(B_1)=p$, тоді $P(B_2) = P(\overline{B}_1) = 1 - p$. Подія A відбулася, тому використаємо формулу Байєса.

Знайдемо умовні імовірності, врахувавши те, що товар може знаходитися (якщо він взагалі є на складі) в кожній із секцій з однаковою імовірністю. Зокрема, $P_{B_1}(A)$ – це імовірність того, що товар відсутній у восьми секціях, якщо він є в наявності на складі. Всіх наслідків випробування (рівноможливих і які утворюють повну групу) є 9, а сприятливих для настання події A – 1, тому $P_{B_1}(A) = 1/9$. Якщо ж товар відсутній на складі, тобто відбувається подія B_2, то достовірною є подія A (відсутність товару у восьми секціях). Отже, $P_{B_2}(A) = 1$.

Якщо товар є на складі і він відсутній у восьми секціях, то це означає, що він може бути тільки в дев'ятій секції, тобто $P_A(B_1)$ справді шукана імовірність, яку обчислюємо за формулою Байєса:

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A)}{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A)} = \frac{p \cdot 1/9}{p \cdot 1/9 + (1-p) \cdot 1} =$$

$$= \frac{p}{9 - 8p} \quad \bullet$$

Задача 2.23. В кінці потокової лінії по виготовленню приладів встановлено два автомати-контролери, які визначають: має прилад вищу категорію якості, чи ні. Статистично встановлено, що 20% продукції задовольняють вимогам вищої категорії якості, а контролери роблять помилкові висновки стосовно якості приладу відповідно у 5% і 1% випадків. Випадково один і той самий прилад був перевірений обома автоматами: перший визначив, що прилад не задовольняє вимогам вищої категорії, а другий, що задовольняє. Якому із висновків вірити?

Стосовно двічі перевіреного приладу можна висунути два припущення: або він справді задовольняє вимогам вищої категорії якості (подія B_1) або не задовольняє (подія B_2). За умовою задачі $P(B_1)=0{,}2$, $P(B_2)=0{,}8$.

Розглянемо спочатку ситуацію відносно висновку першого контролера. Подія A – визнання ним відсутності у перевіреного приладу якостей вищої категорії. Ця випадкова подія відбулася, тому використаємо формулу Байєса.

За умовою у 5% випадків перший контролер помиляється відносно якості приладу, а тому у 95% робить правильні висновки. В зв'язку з цим

$P_{B_1}(A) = 0{,}05$, $P_{B_2}(A) = 0{,}95$

і за формулою Байєса

$$P_A(B_2) = \frac{P(B_2) \cdot P_{B_2}(A)}{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A)} = \frac{0{,}8 \cdot 0{,}95}{0{,}2 \cdot 0{,}05 + 0{,}8 \cdot 0{,}95} = 0{,}987013$$

Отже, імовірність того, що перший контролер зробив правильний висновок, дорівнює 0,987013.

Нехай A^* - визнання вищої категорії якості перевіреного приладу другим контролером. З використанням умови задачі отримаємо:

$P_{B_1}(A^*) = 0{,}99$, $P_{B_2}(A^*) = 0{,}01$,

$$P_{A^*}(B_1) = \frac{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A^*)}{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A^*) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A^*)} = \frac{0{,}2 \cdot 0{,}99}{0{,}2 \cdot 0{,}99 + 0{,}8 \cdot 0{,}01} = 0{,}961165$$

Тобто, імовірність того, що другий контролер зробив правильний висновок, складає 0,961165.

Порівняння знайдених імовірностей дозволяє зробити висновок: потрібно вірити висновку першого автомата-контролера (точніше, більш імовірніше, що перший контролер зробив правильний висновок). ●

Задача 2.24. У корзині є 20 куль (12 білих і 8 чорних). Знайти імовірність того, що навмання взята з корзини куля виявиться чорною, якщо перед цим випадковим чином було взято: 1) дві кулі; 2) три кулі.

1) В умові задачі відсутня інформація про те, які саме дві кулі (за кольором) були відібрані перед відбором третьої. Тому можна висунути такі припущення:

B_1 – обидві кулі білі;

B_2 – одна біла, друга чорна;

B_3 – обидві чорні.

Подія A – відібрана куля (після взяття двох) виявиться чорною.

За класичним означенням імовірності

$P(B_1) = C_{12}^2 / C_{20}^2 = 33/95$,

$P(B_2) = C_{12}^1 \cdot C_8^1 / C_{20}^2 = 48/95$,

$P(B_3) = C_8^2 / C_{20}^2 = 14/95$.

Обчислимо умовні імовірності:

$P_{B_1}(A) = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}$, $P_{B_2}(A) = \frac{7}{18}$, $P_{B_3}(A) = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$.

За формулою повної імовірності

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + P(B_3) \cdot P_{B_3}(A) =$$

$$= \frac{33}{95} \cdot \frac{4}{9} + \frac{48}{95} \cdot \frac{7}{18} + \frac{14}{95} \cdot \frac{1}{3} = 0{,}4.$$

2) Аналогічно попередньому розглянемо гіпотези стосовно трьох відібраних куль:

B_1 – три кулі білі;

B_2 – дві кулі білі, одна чорна;

B_3 – одна куля біла, дві чорні;

B_4 – три кулі чорні.

Подія A – відібрана куля (після взяття трьох) виявиться чорною.

Обчислимо безумовні та умовні імовірності, а потім знову за формулою повної імовірності знайдемо шукану ймовірність:

$P(B_1) = C_{12}^3 / C_{20}^3 = 11/57$, $P(B_2) = C_{12}^2 \cdot C_8^1 / C_{20}^3 = 44/95$,

$P(B_3) = C_{12}^1 \cdot C_8^2 / C_{20}^3 = 28/95$, $P(B_4) = C_8^3 / C_{20}^3 = 14/285$,

$P_{B_1}(A) = \frac{8}{17}$, $P_{B_2}(A) = \frac{7}{17}$, $P_{B_3}(A) = \frac{6}{17}$, $P_{B_4}(A) = \frac{5}{17}$,

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + P(B_3) \cdot P_{B_3}(A) + P(B_4) \cdot P_{B_4}(A) =$$

$$= \frac{11}{57} \cdot \frac{8}{17} + \frac{44}{95} \cdot \frac{7}{17} + \frac{28}{95} \cdot \frac{6}{17} + \frac{14}{285} \cdot \frac{5}{17} = 0{,}4.$$ ●

§ 3. ПОВТОРНІ НЕЗАЛЕЖНІ ВИПРОБУВАННЯ

Формула Бернуллі. Найімовірніше число появи події. Локальна формула Лапласа. Формула Пуассона. Інтегральна формула Лапласа. Імовірність відхилення відносної частоти події від її постійної імовірності. Алгоритм розв'язування задач для повторних незалежних випробувань.

КОРОТКІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

На практиці часто зустрічаються випадки, коли проводиться не одне випробування, а декілька (можливо, дуже велике число). Такі випробування називаються **повторними**, а їх сукупність – **схемою повторних випробувань**, або **схемою Бернуллі**. В кожному із таких випробувань може відбутися одна і та ж випадкова подія A. Якщо $P(A)$ залишається незмінною для **кожного** випробування, то такі випробування будемо називати **незалежними** (**відносно події A**).

Формула Бернуллі

Теорема. Імовірність того, що в n повторних незалежних випробуваннях випадкова подія A відбудеться рівно m разів, знаходиться за формулою Бернуллі:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \tag{3.1}$$

де C_n^m – число комбінацій, визначене формулою (1.4) або (1.4*),

p – імовірність появи події A в **одному** випробуванні ($p = P(A)$),

q – імовірність **непояви** події A в одному випробуванні $(q = P(\overline{A}))$.

Найімовірніше число появи події

В n повторних незалежних випробуваннях подія A може відбутися число разів

$$0,\ 1,\ ...,\ m_0-1,\ m_0,\ m_0+1,\ ...,\ n \qquad (3.2)$$

з відповідними імовірностями (які можна знайти за формулою Бернуллі):

$$P_n(0),\ P_n(1),\ ...,\ P_n(m_0-1),\ P_n(m_0),\ P_n(m_0+1),\ ...,\ P_n(n). \qquad (3.3)$$

Означення. Число m_0 в послідовності (3.2) називається найімовірнішим числом появи події в n незалежних випробуваннях (або модою), якщо йому відповідає найбільша імовірність в послідовності (3.3).

Найімовірніше число можна знайти з такої подвійної нерівності:

$$np-q \le m_0 \le np+p. \qquad (3.4)$$

Оскільки різниця між правою і лівою частинами цієї нерівності дорівнює 1, то можна зробити висновок, що максимальне число найімовірніших подій рівне двом.

Локальна формула Лапласа

Користуватися формулою Бернуллі для великих значень n досить важко. Наприклад, при $p = 0{,}2$, $q = 0{,}8$ $P_{50}(30) = C_{50}^{30}(0{,}2)^{30}(0{,}8)^{20}$, де $C_{50}^{30} = 4712921\cdot 10^7$.

Одну із реалізацій наближеного знаходження правої частини формули (3.1) дає

Локальна теорема Лапласа (Муавра–Лапласа).

Якщо імовірність p появи випадкової події A в кожному із n повторних випробувань залишається незмінною (причому $0 < p < 1$), а число випробувань достатньо велике, то імовірність того, що в n випробуваннях подія відбудеться m разів, знаходиться за наближеною формулою

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x), \qquad (3.5)$$

де $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$ – функція Гаусса, $x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}, q = 1-p.$

Зауваження. Формула (3.5) називається **локальною формулою Лапласа**. Її точність зростає при збільшенні n.

Функція Гаусса протабульована і її значення наведені в табл. 1 додатків. Для правильного користування цією таблицею слід враховувати такі властивості функції Гаусса: 1) $\varphi(x)$ визначена для всіх $x \in R$; 2) $\varphi(x)$ – парна функція $(\varphi(-x) = \varphi(x))$; 3) для додатних x $\varphi(x)$ дуже швидко прямує до 0 при збільшенні x, зокрема $\varphi(3{,}99) = 0{,}0001$. Згідно із цими властивостями в таблиці наведені значення функції Гаусса для x з проміжку [0; 5].

Практично можна вважати, що локальна формула Лапласа дає добре наближення, якщо $npq \ge 9$. Якщо ж вимоги до точності значення вищі, то слід вимагати виконання нерівності $npq \ge 25$.

Формула Пуассона

Нерівність $npq \ge 9$ навіть для великих n може не виконуватися (а отже, похибка при використанні локальної формули Лапласа буде дуже великою) у випадку рідкісних (малоімовірних) подій A, тобто таких подій, для яких p значно менше 0,1 ($p << 0{,}1$). В таких випадках слід користуватися іншим наближенням правої частини формули Бернуллі. Одне із них дається таким твердженням.

Теорема Пуассона. **Якщо в кожному із n повторних випробувань імовірність p появи події A стала і мала ($p << 0{,}1$), а число випробувань n досить велике, то імовірність того, що подія A настане в цих випробуваннях рівно m разів, знаходиться за формулою**

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}, \qquad (3.6)$$

де $\lambda = np$.

Зауваження. Похибка в наближеній рівності (3.6), яка називається **формулою Пуассона**, тим менша, чим більше число випробувань n.

Значення функції $P(m,\lambda) = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$ двох змінних m та λ для деяких m та λ наведені в табл. 2 додатків.

Відмітимо, що формула Пуассона використовується також до числа непояви події A, якщо $q << 0{,}1$, а $nq < 9$.

Інтегральна формула Лапласа

Інтегральна теорема Лапласа (Муавра–Лапласа). Якщо імовірність p появи події A в кожному із n повторних випробувань є сталою ($0 < p < 1$), а число випробувань досить велике, то імовірність того, що подія A в цих випробуваннях відбудеться не менше m_1 разів і не більше m_2 разів, знаходиться за такою наближеною рівністю (інтегральною формулою Лапласа):

$$P_n(m_1 \le m \le m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \qquad (3.7)$$

де $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-t^2/2}dt$ – функція Лапласа,

$$x_1=\frac{m_1-np}{\sqrt{npq}},\; x_2=\frac{m_2-np}{\sqrt{npq}}.$$

Функція Лапласа протабульована і її значення наведені в табл. 3 додатків. При користуванні цією таблицею потрібно враховувати такі властивості функції Лапласа:

1) $\Phi(x)$ визначена для всіх $x\in R$;
2) $\Phi(x)$ непарна функція ($\Phi(-x)=-\Phi(x)$);
3) $\Phi(x)$ монотонно зростає для всіх $x\in R$, при цьому $y=-0{,}5$ – лівостороння асимптота, а $y=0{,}5$ – правостороння;
4) швидкість зростання $\Phi(x)$ на проміжку [0; 5] дуже висока (зокрема $\Phi(5)=0{,}499997$), тому для всіх $x>5$ з мізерною похибкою $\Phi(x)\approx 0{,}5$.

Точність інтегральної формули Лапласа тим більша, чим більше число випробувань n. Як і у випадку локальної, **інтегральна формула дає добрі наближення, якщо $npq\ge 9$**. Якщо ж вимоги до точності значно вищі, то потрібно вимагати виконання нерівності $npq\ge 25$.

Імовірність відхилення відносної частоти події від її постійної імовірності

Теорема. Якщо імовірність p появи випадкової події A в кожному з n повторних випробувань стала, а число випробувань досить велике, то імовірність того, що відхилення відносної частоти m/n події A від її імовірності p по абсолютній величині не перевищить заданого числа $\varepsilon>0$, знаходиться за формулою

$$P\left(|m/n-p|\le\varepsilon\right)\approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{n/pq}\right). \qquad (3.8)$$

Алгоритм розв'язування задач для повторних незалежних випробувань

В цьому параграфі, як і для попередніх параграфів, залишається актуальним питання вибору тієї чи іншої формули при розв'язуванні конкретних задач. Це зумовлено, по-перше, тим, що у всіх трьох формулах (Бернуллі, локальній формулі Лапласа та Пуассона) ліві частини однакові. З другого боку, при знаходженні імовірності $P_n(m_1\le m\le m_2)$ зовсім не обов'язково (а деколи й помилково) використовувати інтегральну формулу Лапласа.

1. Обчислення $P_n(m)$.

а) Якщо n мале ($n\le 15$), то використовується формула Бернуллі для будь-яких значень p та q.

б) Якщо n велике, а p та q немалі, тобто при виконанні нерівності $npq\ge 9$, тоді використовується локальна формула Лапласа.

в) Якщо ж n велике, а p дуже мале (значно менше 0,1) і $\lambda=np<9$, то застосовується формула Пуассона. При великому n, дуже малому q (q << 0,1) і при виконанні нерівності $\lambda^*=nq<9$ слід перейти до числа невиконання події A.

2. Знаходження $P_n(m_1\le m\le m_2)$.

а) Якщо n мале ($n\le 15$), тоді потрібно використати спочатку теорему додавання імовірностей, а потім формулу Бернуллі.

б) Для великих n і немалих p та q, тобто при виконанні нерівності $npq\ge 9$ використовується інтегральна формула Лапласа.

в) Для великих n і малих p використовується або теорема додавання імовірностей з наступним застосуванням формули Пуассона, або здійснюється перехід до протилежної події з наступним використанням теореми додавання імовірностей і формули Пуассона. При виборі однієї із альтернатив слід керуватися мінімізацією числа доданків в теоремі додавання імовірностей. Якщо n велике, а q мале і $\lambda^*=nq<9$, тоді потрібно перейти до числа невиконання події A, а потім виконати рекомендації початку цього підпункту.

Зауваження. Якщо в n повторних незалежних випробуваннях потрібно знайти імовірності $P(m\le k)$ та $P(m\ge k)$, де k ціле число, що не перевищує n, тоді потрібно скористатися рівностями $P(m\le k)=P_n(0\le m\le k)$, $P(m\ge k)=P_n(k\le m\le n)$ і перейти до п. 2 алгоритму.

Розглянемо реалізацію наведених вище рекомендацій.

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

Задача 3.1. Компанія володіє мережею дилерів на біржі. Імовірність того, що будь-який дилер буде грати вдало, становить 0,7. 1) Знайти імовірність того, що з п'яти дилерів будуть у збитках: а) два; б) хоча б два (вважається, що дії ділерів на біржі є незалежними). 2) Знайти найімовірніше число дилерів, які будуть грати вдало, а також імовірність такої кількості.

Випробування – гра дилера. Оскільки ділерів є 5, то $n=5$. 1) Подія A – збиткова гра дилера. За умовою $P(\overline{A})=q=0{,}7$, тоді $p=1-q=0{,}3$. Для випадку а) число появи події A $m=2$, і потрібно знайти $P_5(2)$. Так як $n = 5$ – мале, то використаємо формулу Бернуллі:

$$P_5(2) = C_5^2(0{,}3)^2 \cdot (0{,}7)^3 = 10 \cdot 0{,}09 \cdot 0{,}343 = 0{,}3087.$$

б) $P_5(m \geq 2) = P_5(2 \leq m \leq 5)$ – шукана імовірність. Хоча вона візуально нагадує ліву частину інтегральної формули Лапласа, останню використовувати не можна, бо $npq = 5 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7 = 1{,}05 << 9$. Випадкова подія $(2 \leq m \leq 5)$ може відбутися тоді, коли або $(m = 2)$, або $(m = 3)$, або $(m = 4)$, або $(m = 5)$, тобто $(2 \leq m \leq 5) = (m = 2) + (m = 3) + (m = 4) + (m = 5)$. Випадкові події-доданки справа є попарно несумісними, тому згідно з теоремою додавання імовірностей

$$P_5(2 \leq m \leq 5) = P(m = 2) + P(m = 3) + P(m = 4) + P(m = 5) =$$
$$= P_5(2) + P_5(3) + P_5(4) + P_5(5),$$

де в останній рівності було враховано, зокрема, те, що випадкова подія $(m = 2)$ – в п'яти випробуваннях подія A відбудеться рівно два рази, тобто $P(m = 2) = P_5(2)$. Використавши формулу Бернуллі, отримаємо:

$$P_5(3) = C_5^3(0{,}3)^3 \cdot (0{,}7)^2 = 0{,}1323;$$
$$P_5(4) = C_5^4(0{,}3)^4 \cdot 0{,}7 = 0{,}02835;$$
$$P_5(5) = C_5^5(0{,}3)^5 \cdot 0{,}7^0 = 0{,}00243.$$

Остаточно

$$P_5(2 \leq m \leq 5) = 0{,}3087 + 0{,}1323 + 0{,}028535 + 0{,}00243 = 0{,}47178.$$

Другий метод. Події $(m \geq 2)$ та $(m < 2)$ протилежні, тому

$$P_5(m \geq 2) = 1 - P_5(m < 2) = 1 - [P_5(0) + P_5(1)] =$$
$$= 1 - [C_5^0(0{,}3)^0(0{,}7)^5 + C_5^1(0{,}3)^1(0{,}7)^4] =$$
$$= 1 - (0{,}16807 + 0{,}36015) = 0{,}47178.$$

Висновок: другий метод значно швидше веде до мети, його ефективність ще більш відчутна при збільшенні числа доданків.

2) Подія A – вдала гра дилера. За умовою задачі $n = 5$, $p = 0{,}7$, $q = 0{,}3$. Найімовірніше число m_0 дилерів, які будуть грати вдало, знайдемо за подвійною нерівністю (3.4)

$$np - q \leq m_0 \leq np + p.$$

Підставивши значення в ліву та праву частини, знайдемо $3{,}2 \leq m_0 \leq 4{,}2$, звідки з врахуванням того, що m_0 – ціле число, остаточно отримаємо: $m_0 = 4$. Нарешті,

$$P_5(m_0) = P_5(4) = C_5^4(0{,}7)^4 \cdot 0{,}3 = 0{,}36015. \bullet$$

Для деяких задач імовірність появи події А в одному випробуванні знаходиться порівняно складніше.

Задача 3.2. Два станки з програмним управлінням виготовляють однотипні деталі, які надходять на спільний конвейєр. Їх продуктивності відносяться як 2 : 3, причому перший виготовляє 35% деталей вищої якості, якими комплектуються вироби на експорт, другий – 10%. Знайти імовірність того, що з 400 навмання відібраних з конвейєра деталей вищої якості виявилось: а) 75 деталей; б) хоча б 80; в) не більше 75.

Випробування – відбір деталі, за умовою $n = 400$. A – відібрана деталь має вищу якість. Знайдемо $P(A) = p$. Відібрана деталь (вищої якості чи ні) може бути виготовлена або першим станком (подія B_1), або другим (подія B_2). Ці гіпотези утворюють повну групу, а подія A може відбутися тільки після появи однієї із них. Тому $P(A)$ можна знайти за формулою повної імовірності

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A).$$

Якщо за деякий проміжок часу перший станок виготовить $2a$ деталей, то другий – $3a$ деталей. За класичними означенням імовірності

$$P(B_1) = \frac{2a}{5a} = 0{,}4, \quad P(B_2) = \frac{3a}{5a} = 0{,}6,$$
$$P_{B_1}(A) = \frac{35}{100} = 0{,}35, \quad P_{B_2}(A) = \frac{10}{100} = 0{,}1.$$

Підставивши знайдені імовірності у формулу повної імовірності, отримаємо

$P(A) = 0{,}4 \cdot 0{,}35 + 0{,}6 \cdot 0{,}1 = 0{,}2$. Отже, $p = 0{,}2$, $q = 1 - p = 0{,}8$.

а) Потрібно знайти $P_{400}(75)$. Оскільки $n = 400$ – велике, p та q немалі і виконується нерівність $npq = 400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8 = 64 > 9$, то потрібно вибрати локальну формулу Лапласа, яка в даному випадку дасть високу точність наближення. Згідно із (3.5)

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{75 - 400 \cdot 0{,}2}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} = -0{,}63,$$

$\varphi(-0{,}63) = \varphi(0{,}63) = 0{,}3271$ (за табл. 1 додатків),

$$P_{400}(75) \approx \frac{1}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}}\varphi(-0{,}63) = \frac{0{,}3271}{8} = 0{,}0410.$$

б) Для знаходження імовірності $P_{400}(m \geq 80) = P_{400}(80 \leq m \leq 400)$ (див. зауваження до алгоритму) використаємо інтегральну формулу Лапласа, оскільки npq = 64 > 9. У відповідності із (3.7)

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{80 - 400 \cdot 0{,}2}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} = 0; \quad x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{400 - 400 \cdot 0{,}2}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} = 40,$$

$$P_{400}(80 \leq m \leq 400) \approx \Phi(40) - \Phi(0) = 0{,}5 - 0 = 0{,}5.$$

При знаходженні $\Phi(40)$ враховувалося те, що $\Phi(x)$ = 0,5 для x > 5, а $\Phi(0)$ знаходилося за табл. 3 додатків.

в) Імовірність $P_{400}(m \leq 75) = P_{400}(0 \leq m \leq 75)$ знову обчислюємо за інтегральною формулою Лапласа:

$$x_1 = \frac{0 - 400 \cdot 0{,}2}{8} = -10; \quad x_2 = \frac{75 - 400 \cdot 0{,}2}{8} = -0{,}63,$$

$$P_{400}(0 \leq m \leq 75) \approx \Phi(-0{,}63) - \Phi(-10) = \Phi(10) - \Phi(0{,}63) =$$
$$= 0{,}5 - 0{,}2357 = 0{,}2643.$$

В останніх рівностях використана непарність $\Phi(x)$. ●

Зауваження. При знаходженні імовірностей в а) та в) можна було досягти вищої точності, оскільки точні значення x та x_2 рівні –0,625, а $\varphi(0{,}62) = 0{,}3292$, $\Phi(0{,}62)$ = 0,2324. Для цього потрібно здійснити лінійну інтерполяцію:

$\varphi(0{,}625) = (\varphi(0{,}62) + \varphi(0{,}63))/2 = (0{,}3292 + 0{,}0{,}3271)/2 = 0{,}32815,$

$\Phi(0{,}625) = (\Phi(0{,}62) + \Phi(0{,}63)/2 = (0{,}2324 + 0{,}2357)/2 = 0{,}23405.$

Проте доцільність такого підходу визначається вимогами до точності відповіді, поставленими конкретною задачею.

Наскільки суттєво враховувати **всі** умови використання тієї чи іншої формули, ілюструє розв'язування наступної задачі.

Задача 3.3. У приватній страховій компанії було застраховано 15 000 громадян приблизно одного віку і однієї соціальної групи. Імовірність смерті застрахованого протягом року в середньому складає 0,004. Кожен застрахований вносить на 1 січня 64 грн. страхових, а на випадок смерті його родичі дістануть від страхової компанії 10 000 грн. Знайти імовірність того, що компанія за підсумками року:

1) понесе збитки; 2) дістане прибуток, який не менший від 60 000 грн.

Випробування – страхування громадянина. A – смерть застрахованого протягом року. За умовою задачі $n = 15000$, $P(A) = p = 0{,}004$.

1) Від страхування громадян страхова компанія отримала 15 000 · 64 = 960 000 грн. і понесе збитки, якщо не менше всієї цієї суми буде виплачено родинам потерпілих протягом року (навіть якщо **тільки** ця сума буде виплачена, то діяльність компанії буде збитковою по цьому виду страхування з урахуванням поточних витрат протягом року). Ця випадкова (складна) подія відбудеться, якщо $m \geq 96$, де m – число відбуття події A, 96 = 960 000 : 10 000. Тобто, потрібно знайти $P_{15\,000}(m \geq 96) = P_{15\,000}(96 \leq m \leq 15\,000)$. Подія A – рідкісна (малоімовірна), бо $p = 0{,}004 \leq 0{,}1$. Проте використовувати формулу Пуассона (після застосування теореми додавання імовірностей) не можна, оскільки $\lambda = np = 15\,000 \cdot 0{,}004 = 60$ (значно більше 9). Разом з тим, npq = 59,76 > 25. Тому можна використати інтегральну формулу Лапласа, яка дасть дуже високу точність. Знаходимо:

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{96 - 15\,000 \cdot 0{,}004}{\sqrt{59{,}76}} = 4{,}66; \quad x_2 = \frac{15\,000 - 60}{\sqrt{59{,}76}} = 1932{,}73,$$

$$P_{15\,000}(96 \leq m \leq 15\,000) \approx \Phi(1932{,}73) - \Phi(4{,}66) =$$
$$= 0{,}5 - 0{,}499997 = 0{,}000003.$$

2) Припустимо спочатку, що всі основні витрати компанії покриваються за рахунок інших видів страхування. Тоді прибуток, який не менший від 60 000 грн., компанія отримає у випадку, коли на виплату страхових сум у випадку смерті клієнтів вона витратить не більше 960 000 – 60 000 = 900 000 грн. Ця випадкова подія відбувається, якщо $m \leq 90$. Тоді за інтегральною формулою Лапласа

$$P_{15\,000}(m \leq 90) = P_{15\,000}(0 \leq m \leq 90) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

де

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{0 - 60}{\sqrt{59{,}76}} = -7{,}76; \quad x_2 = \frac{90 - 60}{\sqrt{59{,}76}} = 3{,}88.$$

Тобто,

$$P_{15\,000}(0 \leq m \leq 90) \approx \Phi(3{,}88) - \Phi(-7{,}76) =$$
$$= 0{,}49995 + 0{,}5 = 0{,}99995.$$

Нехай тепер a – сумарні поточні видатки компанії за рік при здійсненні вказаного виду страхування. Тоді прибуток, не менший від 60 000 грн., компанія отримає тоді, коли відбудеться подія $m \leq k$, де k – ціла частина числа (900 000 – a)/10 000. Далі за інтегральною формулою

Лапласа можна знайти шукану імовірність $P_{15\,000}(0 \le m \le k)$. Вона вже буде суттєво меншою від попередньої імовірності. ●

Задача 3.4. При скануванні текстового матеріалу в середньому на кожну тисячу символів два помилкові. Знайти імовірність того, що після сканування тексту обсягом в 2 500 символів виявиться помилкових: а) шість символів; б) хоча б шість.

Випробування – сканування символу тексту, подія A – отримання помилкового символу. За умовою $n = 2500$, $p = P(A) = 0{,}002$.

а) Число появи події $m = 6$. Для знаходження $P_{2500}(6)$ скористаємося формулою Пуассона, оскільки n – велике, $p = 0{,}002 << 0{,}1$, $\lambda = np = 5 < 9$.

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}, P_{2500}(6) \approx \frac{5^6 e^{-5}}{6!} = 0{,}14622.$$

Останнє значення знайдене для функції $\frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$ двох змінних λ та m в табл. 2 додатків для значень $\lambda = 5$, $m = 6$.

б) Випадкова подія ($m \ge 6$), імовірність якої треба знайти, зображається через прості події таким чином:

$$(m \ge 6) = (m = 6) + (m = 7) + ... + (m = 2500).$$

Використовувати теорему додавання імовірностей в такому випадку практично неможливо в зв'язку з тим, що в правій частині є 2495 доданків (!). З другого боку, протилежною до події ($m \ge 6$) є подія ($m < 6$), для якої виконується рівність

$$(m < 6) = (m = 0) + (m = 1) + (m = 2) + (m = 3) + (m = 4) + (m = 5),$$

звідки після використання теореми додавання імовірностей отримуємо

$$P_{2500}(m < 6) = P_{2500}(0) + P_{2500}(1) + P_{2500}(2) + P_{2500}(3) + P_{2500}(4) + P_{2500}(5).$$

Кожний із доданків обчислюється за формулою Пуассона. В даному випадку ці імовірності знаходяться за табл. 2 додатків для $\lambda = 5$ та $m = 0, 1, ..., 5$. Тобто

$$P_{2500}(m < 6) = 0{,}00674 + 0{,}03369 + 0{,}08422 + 0{,}14037 + $$
$$+ 0{,}17547 + 0{,}17547 = 0{,}61596.$$

Із урахуванням протилежності подій

$$P_{2500}(m \ge 6) = 1 - P_{2500}(m < 6) = 1 - 0{,}61596 = 0{,}38404.$$ ●

Задача 3.5. Імовірність того, що виріб задовольняє вимогам вищого сорту, дорівнює 0,8.

1) За місяць ВТК заводу перевірено 400 виробів. Знайти імовірність того, що відносна частота виготовлення виробу вищого сорту відхилиться від його імовірності по модулю не більше від 0,09.

2) Скільки виробів треба перевірити, щоб з імовірністю 0,95 можна було очікувати відхилення відносної частоти виготовлення виробу вищого сорту від його імовірності по модулю не більше від 0,04?

3) За наступні два місяці ВТК перевірив 900 виробів. Знайти з імовірністю 0,95 межі, в яких буде знаходитися число m виробів вищого ґатунку серед перевірених.

Випробування – перевірка виробу. Подія A – виріб задовольняє якостям вищого сорту.

За умовою задачі $n = 400$, $p = P(A) = 0{,}8$, $q = 0{,}2$. Використовуючи формулу (3.8)

$$P\left(|m/n - p| \le \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{n/(pq)}\right),$$

де за умовою $\varepsilon = 0{,}09$, отримаємо

$$P\left(|m/400 - 0{,}8| \le 0{,}09\right) \approx 2\Phi\left(0{,}09\sqrt{400/(0{,}8 \cdot 0{,}2)}\right) =$$
$$= 2\Phi(4{,}5) = 2 \cdot 0{,}499997 = 0{,}999994.$$

2) Згідно з умовою задачі $p = 0{,}8$, $q = 0{,}2$, $\varepsilon = 0{,}04$ і $P\left(|m/n - 0{,}8| \le 0{,}04\right) = 0{,}95.$ Потрібно знайти n.

З формули (3.8) знайдемо рівність

$$2\Phi\left(0{,}04\sqrt{n/(0{,}8 \cdot 0{,}2)}\right) = 0{,}95,$$

звідки

$$\Phi\left(0{,}1\sqrt{n}\right) = 0{,}475.$$

За таблицею значень функції Лапласа $(\Phi(1{,}96) = 0{,}475)$ відтворимо аргумент, для якого виконується остання рівність: $0{,}1\sqrt{n} = 1{,}96.$ Далі $\sqrt{n} = 19{,}5,$ $n = 384{,}16.$

Враховуючи те, що n – ціле, а також поведінку похибки в наближеній рівності (3.8), остаточно отримуємо: $n \ge 385$.

3) За умовою $n = 900$, $p = 0{,}8$, $q = 0{,}2$, $P\left(|m/n - 0{,}8| \le \varepsilon\right) = 0{,}95.$ Потрібно знайти межі для числа m. Знайдемо спочатку ε, використавши згідно із формулою (3.8) рівність

$$2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{900/(0,8\cdot 0,2)}\right)=0,95 \quad \text{або} \quad \Phi(75\varepsilon)=0,475.$$

За табл. 3 додатків знайдемо $\Phi(1,96)=0,475$, тому $75\varepsilon = 1,96$, звідки $\varepsilon \approx 0,03$.

Таким чином, з імовірністю 0,95 відхилення відносної частоти числа виробів вищої якості від імовірності 0,8 задовольняє нерівність

$$|m/800-0,8|\le 0,03 \quad \text{або} \quad 0,77\le m/800\le 0,83,$$

і остаточно $616 \le m \le 664$. ●

Повернемося до розгляду задачі 1.2, спрощений варіант розв'язування якої було наведено в § 1.

Задача 3.6. Монету кидають двічі на горизонтальну тверду поверхню. Знайти імовірність того, що хоча б раз випаде герб.

Випробування – кидання монети, подія *А* – поява герба. Потрібно знайти $P_2(m \ge 1)$. Подія $(m \ge 1)$ протилежна до події $(m = 0)$. Тому $P_2(m\ge 1)=1-P_2(0)=1-C_2^0\cdot(1/2)^0\cdot(1/2)^2=3/4$. Отриманий результат співпадає із відповіддю задачі 1.2 ●

Наступна задача, з одного боку, ілюструє хибність припущень, продиктованих інтуїцією, а з другого – показує необхідність аналітичного обгрунтування прийняття рішень.

Задача 3.7. Підприємство отримало спецзамовлення на виготовлення 320 виробів, які працюватимуть в екстремальних умовах. Проте за існуючим технологічним процесом в середньому два вироби з кожних десяти не відповідають вимогам спецзамовлення. Тому керівництво підприємства розглядає питання про збільшення планових показників: виготовити 400 виробів, "компенсуючи" тим самим появу виробів, які бракуватимуться із врахуванням вимог спецзамовлення. При цьому виготовлені понад план вироби є високоліквідними.

1) Дати оцінку рішення керівництва підприємства.
2) Скільки потрібно виготовити всіх виробів, щоб з імовірністю, не меншою від 0,9999, виконати спецзамовлення?

Випробування – виготовлення виробу. Подія *А* – виріб задовольняє вимогам спецзамовлення.

1) За умовою n=400, $p=P(A)$=0,8, q=0,2.

Шукану імовірність $P_{400}(m\ge 320)=P_{400}(320\le m\le 400)$ обчислимо за інтегральною формулою Лапласа ($npq=400\cdot 0,8\cdot 0,2=64>>9$). Тоді

$$x_1=\frac{m_1-np}{\sqrt{npq}}=\frac{320-400\cdot 0,8}{\sqrt{400\cdot 0,8\cdot 0,2}}=0;\ x_2=\frac{400-320}{\sqrt{64}}=10,$$

$$P_{400}(320\le m\le 400)\approx\Phi(10)-\Phi(0)=0,5.$$

Висновок: Вказаний варіант вирішення проблеми є невдалим, оскільки імовірність виконання замовлення дорівнює 0,5 – неприпустимо мала.

2) Нехай n – невідоме. За умовою задачі $P_n(320\le m\le n)\ge 0,9999$.

Ліву частину нерівності знайдемо за інтегральною формулою Лапласа, використавши непарність функції Лапласа:

$$x_1=\frac{320-0,8n}{\sqrt{n\cdot 0,8\cdot 0,2}}=\frac{800-2n}{\sqrt{n}};\ x_2=\frac{n-0,8n}{0,4\sqrt{n}}=0,5\sqrt{n};$$

$$P_n(320\le m\le n)\approx\Phi(0,5\sqrt{n})-\Phi[2(400-n)/\sqrt{n}]=\Phi(0,5\sqrt{n})+$$
$$+\Phi[2(n-400)/\sqrt{n}].$$

Нехай n>400, тоді $\Phi(0,5\sqrt{n})=0,5$ і початкова нерівність набере такого виду:

$$\Phi[2(n-400)/\sqrt{n}]\ge 0,4999,$$

За табл.3 додатків 0,4999=Ф(3,72). Тому отримуємо систему нерівностей

$$\begin{cases}\Phi[2(n-400)/\sqrt{n}]\ge\Phi(3,72),\\ n>400,\end{cases}$$

яка з урахуванням монотонного зростання функції Лапласа рівносильна системі

$$\begin{cases}2(n-400)/\sqrt{n}\ge 3,72,\\ n>400.\end{cases}$$

Позначивши $\sqrt{n}=y$, першу нерівність запишемо в такому вигляді

$$y^2-1,86y-400\ge 0,$$

звідки $y\in(-\infty;-19,091661]\cup[20,95161;\infty)$.

Тому остання система нерівностей рівносильна такій

$$\begin{cases} \sqrt{n} \ge 20{,}95161, \\ n > 400, \end{cases}$$

звідки $n \ge 438{,}96996$. Враховувавши цілочисельність n, отримаємо відповідь: для того, щоб з ймовірністю, не меншою від 0,9999, виконати спецзамовлення, підприємству потрібно виготовити не менше, ніж 439 виробів. ●

Задача 3.8. Цех отримав замовлення на термінове виготовлення 105 виробів. Проте в середньому кожні три вироби із десяти виготовлених вимагають тривалої доводки і тому не можуть бути включені у партію виробів термінового замовлення.

1) Знайти, скільки потрібно виготовити цеху виробів, щоб число 105 було найімовірнішим. 2) Враховуючи знайдене число виробів, оцінити можливість виконання замовлення. При цьому вважати, що продукція є високоліквідною.

Випробування – виготовлення виробу. Подія A – виріб стандартний (не вимагає доводки). За умовою $p=P(A)=0{,}7$, тоді $q=0{,}3$.

1) Знайдемо число випробувань n, використавши інформацію про те, що найімовірніше число появи події A дорівнює 105, тобто $m_0=105$. Згідно із співвідношенням (3.4)

$$np - q \le m_0 \le np + p.$$

Підставляючи дані задачі, отримаємо систему нерівностей для знаходження n:

$$\begin{cases} 0{,}7n - 0{,}3 \le 105, \\ 0{,}7n + 0{,}7 \ge 105, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0{,}7n \le 105{,}3 \\ 0{,}7n \ge 104{,}3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 149 \le n \le 150{,}429.$$

Оскільки n – ціле, то остаточно отримаємо, що $n=149$ або $n=150$.

2) Знайдемо імовірність виконання замовлення при виготовленні 149 виробів (при цьому врахуємо можливість випуску більшої кількості виробів від замовленої, оскільки за умовою понадпланова продукція буде реалізована згодом):

$$P_{149}(m \ge 105) = P_{149}(105 \le m \le 149).$$

Використаємо інтегральну формулу Лапласа

$(npq = 149 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3 = 31{,}29 >> 9)$:

$$x_1 = \frac{105 - 149 \cdot 0{,}7}{\sqrt{31{,}29}} = 0{,}125, \quad x_2 = \frac{149 - 149 \cdot 0{,}7}{\sqrt{31{,}29}} = 7{,}99,$$

$$P_{149}(105 \le m \le 149) \approx \Phi(7{,}99) - \Phi(0{,}125) = 0{,}5 - 0{,}0474 = 0{,}45026.$$

При цьому використаємо лінійну інтерполяцію:

$$\Phi(0{,}125) = \Phi(0{,}12) + \frac{1}{2}[\Phi(0{,}13) - \Phi(0{,}12)].$$

Якщо ж $n=150$, тоді

$$x_1 = \frac{105 - 150 \cdot 0{,}7}{\sqrt{150 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3}} = 0, \quad x_2 = \frac{150 - 150 \cdot 0{,}7}{5{,}6125} = 8{,}02,$$

$$P_{150}(105 \le m \le 150) \approx \Phi(8{,}02) - \Phi(0) = 0{,}5.$$ ●

Задача 3.9. Статистично встановлено, що із 100 виготовлених деталей 90 – стандартні. Скільки потрібно виготовити деталей, щоб з імовірністю 0,96856 можна було очікувати, що не менше 270 деталей будуть стандартними?

Випробування – виготовлення деталі. Подія A – деталь стандартна. За умовою задачі $p=P(A)=0{,}9$, тоді $q=0{,}1$, $P(270 \le m \le n) = 0{,}96856$. Потрібно знайти число випробувань n.

За інтегральною формулою Лапласа

$$x_1 = \frac{270 - 0{,}9n}{\sqrt{n \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1}} = (900 - 3n)\big/\sqrt{n}; \quad x_2 = \frac{n - 0{,}9n}{0{,}3\sqrt{n}} = \sqrt{n}\big/3,$$

$$P(270 \le m \le n) \approx \Phi(\sqrt{n}/3) - \Phi\left[(900 - 3n)\big/\sqrt{n}\right].$$

Оскільки функція Лапласа зростаюча і $n \ge 270$, то

$$\Phi(\sqrt{n}/3) \ge \Phi(\sqrt{270}/3) = \Phi(5{,}477) \approx 0{,}5.$$

Враховуючи умову задачі, отримаємо рівняння

$$0{,}5 - \Phi[3(300 - n)\big/\sqrt{n})] = 0{,}96856$$

або (функція Лапласа непарна)

$$\Phi[3(n - 300)\big/\sqrt{n})] = 0{,}46856.$$

За табл.3 додатків $0{,}46856 = \Phi(1{,}86)$, тому

$3(n-300)/\sqrt{n} = 1{,}86$.

Розв'язавши це рівняння, як квадратне відносно $\sqrt{n}$, отримаємо, що $\sqrt{n} = 17{,}633282$, звідки n=310,93263. Отже, шукане число виготовлених деталей n=311. ●

Задача 3.10. Підприємство відправило замовнику 20000 стандартних виробів. Середнє число виробів, які пошкоджуються при транспортуванні, складає 0,02%. Знайти імовірність того, що замовник отримає непошкоджених виробів: а) 19997; б) хоча б 19997.

Випробування – транспортування одного виробу. Подія A – виріб залишиться стандартним після транспортування. За умовою n=20000, $p=P(A)$=0,9998.

а) Потрібно знайти $P_{20000}(19997)$. Оскільки $npq = 20000 \cdot 0{,}9998 \cdot 0{,}0002 = 3{,}99992 << 9$, то використання локальної формули Лапласа призведе до великої похибки. З другого боку, для партії 20000 виробів випадкові події "19997 стандартних (непошкоджених) виробів" і "3 пошкоджені вироби" – рівносильні. Тому $P_{20000}(19997)$= $P_{20000}(3)$, де в останній імовірності вже в якості події A фігурує подія $\overline{A}$ і те, що $\lambda = np = 4 < 9$, а n велике, дозволяє використати формулу Пуассона (3.6):

$$P_{20000}(3) \approx \frac{4^3 \cdot e^{-4}}{3!}.$$

За табл.2 додатків знайдемо значення функції $P(m;\lambda)$ при m=3, $\lambda = 4$; $P(3;\ 4)$=0,19537. Отже, шукана імовірність дорівнює 0,19537.

б) Використаємо наведений вище перехід від події A до події $\overline{A}$ - пошкодження виробу внаслідок транспортування. Тоді шукана імовірність позначиться $P_{20000}(m \le 3)$, де p=0,0002.

$$P_{20000}(m \le 3) = P_{20000}(0) + P_{20000}(1) + P_{20000}(2) + P_{20000}(3).$$

Кожний із доданків справа обчислимо за формулою Пуассона, використавши табл.2 додатків (знаходимо значення функції $P(m;\lambda)$ для $\lambda = 4$ і m=0, 1, 2, 3):

$$P_{20000}(m \le 3) = 0{,}01832 + 0{,}07326 + 0{,}14653 + 0{,}19537 = 0{,}43348.$$ ●

Зауваження. Використання локальної формули Лапласа в п. а) дає імовірність 0,17604, а інтегральної в п. б) – 0,28579.

§ 4. ДИСКРЕТНІ ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ ТА ЇХ ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Випадкові величини та їх види. Закон розподілу імовірностей дискретної випадкової величини. Основні розподіли дискретних (цілочисельних) випадкових величин (рівномірний, біноміальний, пуассонівський, геометричний, гіпергеометричний). Найпростіший потік подій. Дії над випадковими величинами. Приклади знаходження законів розподілу випадкових величин. Числові характеристики дискретних випадкових величин та їх властивості (математичне сподівання, дисперсія, середнє квадратичне відхилення, початкові та центральні моменти). Числові характеристики основних законів розподілу.

КОРОТКІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ ТА ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Випадковою називається величина, яка при випробуванні набирає єдиного значення із всіх можливих з деякою імовірністю, тобто наперед невідомо, яке конкретне можливе значення вона набере, оскільки це залежить від випадкових причин.

Дискретною (**перервною**) називається випадкова величина, можливі значення якої є ізольованими числами. Число можливих значень дискретної випадкової величини може бути скінченним або зчисленним. В останньому випадку можна встановити взаємно-однозначну відповідність між можливими значеннями і натуральними числами 1, 2, 3, ..., n, ...

Неперервною називається випадкова величина, можливі значення якої заповнюють суцільно деякий скінченний або нескінченний проміжок. Очевидно, що число можливих значень кожної неперервної величини нескінченне.

Зауваження. Означення неперервної випадкової величини має попередній характер. Уточнення буде зроблено в наступному параграфі.

Інформації про множину можливих значень недостатньо для повного описання випадкової величини (різні величини можуть мати однакові можливі значення). Потрібно ще знати, з якими імовірностями набираються можливі значення випадковою величиною.

Законом розподілу імовірностей дискретної випадкової величини називається відповідність між можливими значеннями та імовірностями, з якими вони набираються випадковою величиною.

Таблична форма задання закону розподілу має такий вид

$$\begin{array}{c|cccc} X & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \hline P & p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{array}, \qquad (4.1)$$

де $p_i = P(X = x_i)$, $i = \overline{1,n}$. Оскільки в одному випробуванні випадкова величина набирає тільки одне із своїх можливих значень, то випадкові події $(X = x_1)$, $(X = x_2)$, ..., $(X = x_n)$ утворюють повну групу. Тому сума їх імовірностей дорівнює одиниці:

$$p_1 + p_2 + \ldots p_n = 1. \qquad (4.2)$$

Ця рівність називається **умовою нормування**.

Якщо множина можливих значень дискретної випадкової величини зчисленна: $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, то ряд $\sum_{t=1}^{\infty} p_i$ збігається і його сума дорівнює одиниці.

Задача 4.1. Складальник навмання бере дві деталі із контейнера, в якому знаходиться 20 деталей, серед яких 4 нестандартні. Знайти закон розподілу числа нестандартних деталей серед відібраних.

Нехай X – число нестандартних деталей серед двох відібраних. Можливі значення X – 0, 1, 2. Знайдемо відповідні імовірності, використовуючи класичне означення:

$$p_1 = P(X=0) = m/n = C_{16}^2 / C_{20}^2 = 12/19,$$

$$p_2 = P(X=1) = C_{16}^1 C_4^1 / C_{20}^2 = 32/95,$$

$$p_3 = P(X=2) = C_4^2 / C_{20}^2 = 3/95.$$

Перевірка: $p_1 + p_2 + p_3 = 12/19 + 32/95 + 3/95 = 1.$

Шуканий закон розподілу має такий вид:

X	0	1	2
P	12/19	32/95	3/95

●

Основні розподіли дискретних (цілочисельних)випадкових величин

Закон розподілу дискретної випадкової величини X можна задати також **аналітично**, тобто з допомогою формули $p_i = P(X = x_i) = g(x_i)$, $i = \overline{1,n}$. Всі нижче наведені закони задаються аналітично.

Рівномірний розподіл

Задача 4.2. У зв'язці є п'ять ключів, з яких тільки один підходить до замка. Скласти закон розподілу числа ключів, що випробовуються при відкриванні замка, якщо ключ, що був у випробуванні, у наступних випробуваннях участі не бере. Знайти імовірність того, що число випробувань не перевищить двох.

Позначимо: X – число ключів, що випробовуються при відкриванні замка; A_i – випадкова подія, яка полягає в тому, що i-тий ключ відкриє замок $(i = \overline{1,\ 5})$. Можливі значення X: 1, 2, 3, 4, 5. Знайдемо відповідні імовірності закону розподілу, попередньо з'ясувавши структуру випадкових подій $(X = 1)$, $(X = 2)$, ..., $(X = 5)$:

$$(X=1) = A_1,\quad (X=2) = \overline{A}_1 A_2,\quad (X=3) = \overline{A}_1\overline{A}_2 A_3,$$
$$(X=4) = \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3 A_4,\quad (X=5) = \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4 A_5.$$

Використавши теорему добутку для залежних подій, отримаємо:

$$p_1 = 1/5,\ \ p_2 = P(\overline{A}_1)P_{\overline{A}_1}(A_2) = \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{5},$$

$$p_3 = P(\overline{A}_1)P_{\overline{A}_1}(\overline{A}_2)P_{\overline{A}_1\overline{A}_2}(A_3) = \frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{5},$$

$$p_4 = \frac{1}{5},\ \ p_5 = \frac{1}{5}.$$

Шуканий розподіл має вид

X	1	2	3	4	5
P	1/5	1/5	1/5	1/5	1/5

Випадкова подія $(X \le 2)$ полягає в тому, що число випробувань ключів не перевищить двох. Ясно, що $(X \le 2) = (X = 1) + (X = 2)$. В силу теореми додавання імовірностей для несумісних подій $P(X \le 2) = P(X = 1) + P(X = 2) = 2/5$. ●

Характерною особливістю отриманого закону розподілу є рівність всіх імовірностей. Відповідна випадкова величина називається **рівномірно розподіленою**. В загальному випадку цілочисельна випадкова величина **розподілена за рівномірним законом** (**рівномірно розподілена**), якщо імовірності в законі розподілу мають такий вид: $p_k = P(X = k) = 1/n,\ k = \overline{1,n}.$

Біноміальний розподіл

Задача 4.3. Імовірність появи події A в кожному із n повторних випробувань дорівнює p. Скласти закон розподілу випадкової величини X – числа появи події в n випробуваннях.

Можливі значення величини X такі: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, ..., $x_{n+1} = n$. Нехай m будь-яке із цих чисел. Тоді $(X = m)$ – випадкова подія, яка полягає в тому, що в n повторних незалежних випробуваннях ($P(A) = p$ залишається незмінною для кожного випробування) подія A відбудеться рівно m разів. Тоді її імовірність можна позначити $P_n(m)$ (в термінах § 3) і знайти за формулою Бернуллі: $P(X=m)=P_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m}$, де $m = 0, 1, 2, ..., n$. Отже, аналітичний вираз закону розподілу імовірностей даної випадкової величини X має такий вид:

$$p_{m+1}=P(X=m)=C_n^m p^m q^{n-m}, \qquad (4.3)$$

де $m = 0, 1, 2, ..., n$; $q = 1 - p$. ●

Закон розподілу цілочисельної випадкової величини, імовірності якого знаходяться за формулою Бернуллі(4.3), називається **біноміальним**.

Задача 4.4. Імовірність того, що підприємець при перетині кордону декларує не весь товар, дорівнює 0, 4. За зміну митний контроль пройшло 4 підприємці. Скласти закон розподілу числа підприємців, які декларують весь товар.

Позначимо: X – число підприємців, які задекларують весь товар при перетині кордону, A – підприємець декларує весь товар. За умовою задачі $p = P(A) = 0{,}6$, $q = 0{,}4$, $n = 4$. Можливі значення X: 0, 1, 2, 3, 4. Відповідні імовірності знайдемо, використовуючи співвідношення (4.3):

$$p_1=P(X=0)=C_4^0(0{,}6)^0(0{,}4)^4=0{,}0256;$$

$$p_2=P(X=1)=C_4^1(0{,}6)^1(0{,}4)^3=0{,}1536;$$

$$p_3=P(X=2)=C_4^2(0{,}6)^2(0{,}4)^2=0{,}3456;$$

$$p_4=P(X=3)=C_4^3(0{,}6)^3(0{,}4)^1=0{,}3456;$$

$$p_5=P(X=4)=C_4^4(0{,}6)^4(0{,}4)^0=0{,}1296.$$

Шуканий закон розподілу є біноміальним і має вид:

X	0	1	2	3	4
P	0,0256	0,1536	0,3456	0,3456	0,1296

. ●

Пуассонівський розподіл

Нехай X – випадкова величина, визначена в задачі 4.3, де n – велике, $p << 0{,}1$, $\lambda = np \le 9$. Тоді імовірності (4.3) в законі розподілу доцільно шукати за формулою Пуассона:

$$p_{m+1}=P(X=m)=\frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}, \quad m=0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ n,$$

а відповідний розподіл називається пуассонівським.

Зауваження. В пуассонівському розподілі суттєво, що $n \to \infty$.

Геометричний розподіл

Задача 4.5. Проводяться повторні випробування, в кожному з яких $P(A) = p > 0$. Випробування закінчуються, як тільки відбудеться подія A. Скласти закон розподілу випадкової величини X – числа випробувань, які потрібно провести до першої появи події A.

Можливі значення X – 1, 2, 3, ..., n, ... Подія A може відбутися або в 1-му, або в 2-му, ..., або в n-му, ..., випробуваннях, тобто $(X = 1) = A$, $(X=2)=\overline{A}A$, $(X=3)=\overline{A}\overline{A}A$, ..., $(X=n)=\overline{A}\overline{A}\dots\overline{A}A$, ... Враховуючи незалежність випробувань і теорему множення імовірностей, отримаємо:

$$p_1=p,\ p_2=qp,\ p_3=q^2p,\ \dots,\ p_n=q^{n-1}p,\ \dots\ . \ ● \qquad (4.4)$$

Закон розподілу імовірностей, який визначається послідовністю імовірностей (4.4), називається **геометричним**. Назва закону зумовлена тим, що послідовність (4.4) утворює нескінченну **геометричну прогресію** з першим членом p і знаменником $q \in (0,1)$.

Гіпергеометричний розподіл

Задача 4.6. З партії N виробів, серед яких M стандартних ($M < N$), навмання вибирається n виробів ($n \le M$) без повернення кожного із них. Знайти закон розподілу випадкової величини X – числа стандартних виробів серед відібраних.

Можливі значення X: 0, 1, 2, 3, ..., n. Нехай m одне із цих можливих значень. Тоді випадкова подія $(X = m)$ полягає в тому, що серед n відібраних виробів m стандартні і $n - m$ нестандартних. Імовірність цієї події знайдемо за класичним означенням:

$$P(X=m)=C_M^m\cdot C_{N-M}^{n-m}\big/C_N^n,\quad m=0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ n. \ ● \qquad (4.5)$$

Закон розподілу імовірностей, який визначається співвідношенням (4.5), називається **гіпергеометричним**. Самостійно розглянути випадок $M < n < N$.

Найпростіший потік подій

Потоком подій називається послідовність подій, які відбуваються у випадкові моменти часу.

Найпростішим називається **потік подій**, який має властивості **стаціонарності**, **відсутності післядії** та **ординарності**.

Інтенсивністю λ потоку називається середнє число подій, які відбуваються за одиницю часу.

Математичною моделлю найпростішого потоку подій є формула Пуассона

$$P_t(m) = (\lambda t)^m e^{-\lambda t}/m!, \qquad (4.6)$$

з допомогою якої можна знайти імовірність появи *m* подій найпростішого потоку за проміжок часу довжиною *t*.

Задача 4.7. Середнє число обривів нитки на прядильному верстаті за 1 хв. дорівнює двом. Знайти імовірність того, що за 3 хв. число обривів нитки становитиме: а) 4; б) менше чотирьох; в) не менше чотирьох. Припускається, що потік обривів нитки найпростіший.

а) За умовою $\lambda = 2$, $t = 3$, $m = 4$. За формулою (4.6) імовірність того, що за 3 хв. число обривів нитки становитиме 4, $P_3(4) = 6^4 e^{-6}/4! = 0{,}13385.$ Числове значення знаходиться з допомогою таблиці значень для формули Пуассона (табл. 2 додатків) для $\boldsymbol{\lambda = 6}$, $m = 4$ (порівняйте формулу (4.6) із формулою Пуассона!).

б) Випадкова подія $(m < 4) = (m = 0) + (m = 1) + (m = 2) + (m = 3)$, звідки із використанням теореми додавання імовірностей попарно несумісних подій

$$P_3(m < 4) = P_3(0) + P_3(1) + P_3(2) + P_3(3) =$$
$$= 0{,}00248 + 0{,}01487 + 0{,}04462 + 0{,}08924 = 0{,}15121.$$

в) Події $(m \ge 4)$ та $(m < 4)$ протилежні, тому

$$P_3(m \ge 4) = 1 - P_3(m < 4) = 1 - 0{,}15121 = 0{,}84879.$$ ●

Дії над випадковими величинами

Визначимо **добуток сталої величини *C* на дискретну випадкову величину *X***, задану законом розподілу (4.1), як дискретну випадкову величину *CX*, закон розподілу якої має вид

$$\begin{array}{c|cccc} CX & Cx_1 & Cx_2 & \dots & Cx_n \\ \hline P & p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{array}. \qquad (4.7)$$

Квадрат випадкової величини *X*, тобто X^2 – це нова дискретна випадкова величина, яка описується законом розподілу

$$\begin{array}{c|cccc} X^2 & x_1^2 & x_n^2 & \dots & x_n^2 \\ \hline P & p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{array}. \qquad (4.8)$$

Нехай випадкова величина *X* задана розподілом (4.1), а *Y* – законом розподілу $\begin{array}{c|cccc} Y & y_1 & y_2 & \dots & y_m \\ \hline P & g_1 & g_2 & \dots & g_m \end{array}$. Ці величини називаються **незалежними**, якщо випадкові події $(X = x_i)$, $(Y = y_j)$ незалежні при довільних $i = \overline{1,n}$ та $j = \overline{1,m}$. Поняття незалежності випадкових величин поширюється на довільне скінченне число випадкових величин. В протилежному випадку випадкові величини називаються **залежними**.

Дискретні випадкові величини $X_1, X_2, \dots, X_k$ називаються **незалежними у сукупності** (**взаємно незалежними**), якщо закон розподілу **кожної** із них не змінюється, якщо довільна випадкова величина або будь-які групи цих величин наберуть яке завгодно із своїх можливих значень.

Визначимо **суму випадкових величин** *X* та *Y* як випадкову величину $X + Y$, можливі значення якої рівні сумам кожного можливого значення *X* з кожним можливим значення *Y*, а імовірності можливих значень $X + Y$ для незалежних величин *X* та *Y* дорівнюють добуткам імовірностей доданків; для залежних величин – добуткам імовірностей одного доданку на умовну імовірність другого. Якщо деякі суми $x_i + y_j$ виявляються рівними між собою, тоді імовірність можливого значення суми дорівнює сумі відповідних імовірностей.

Задача 4.8. Випадкові величини *X* та *Y* задані законами розподілу $\begin{array}{c|cc} X & 2 & 5 \\ \hline P & 0{,}8 & 0{,}2 \end{array}$, $\begin{array}{c|ccc} Y & 1 & 3 & 6 \\ \hline P & 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}2 \end{array}$. Знайти $X + Y$, якщо *X* та *Y* незалежні величини.

Якщо *X* та *Y* задані законами розподілу відповідно $\begin{array}{c|cc} X & x_1 & x_2 \\ \hline P & p_1 & p_2 \end{array}$, $\begin{array}{c|ccc} Y & y_1 & y_2 & y_3 \\ \hline P & g_1 & g_2 & g_3 \end{array}$, то за означенням випадкова величина $X + Y$ описується законом розподілу

$$\begin{array}{c|cccccc} X+Y & x_1+y_1 & x_1+y_2 & x_1+y_3 & x_2+y_1 & x_2+y_2 & x_2+y_3 \\ \hline P & p_1g_1 & p_1g_2 & p_1g_3 & p_2g_1 & p_2g_2 & p_2g_3 \end{array}.$$

Підставивши дані, отримуємо:

$$\begin{array}{c|cccccc} X+Y & 2+1 & 2+3 & 2+6 & 5+1 & 5+3 & 5+6 \\ \hline P & 0{,}8\cdot 0{,}3 & 0{,}8\cdot 0{,}5 & 0{,}8\cdot 0{,}2 & 0{,}2\cdot 0{,}3 & 0{,}2\cdot 0{,}5 & 0{,}2\cdot 0{,}2 \end{array}.$$

Можливі значення $2 + 6$ та $5 + 3$ рівні, тому відповідні імовірності 0,16 та 0,1 додаємо, залишивши в остаточному законі розподілу $X+Y$ одне можливе значення 8:

$X+Y$	3	5	6	8	11
P	0,24	0,4	0,06	0,26	0,04

● .

Визначимо **добуток незалежних випадкових величин** X та Y як випадкову величину XY, можливі значення якої рівні добуткам кожного можливого значення X на кожне можливе значення Y; імовірності можливих значень добутку XY дорівнюють добуткам імовірностей можливих значень співмножників. У випадку рівності добутків $x_i y_j$ імовірність можливого значення XY рівна сумі відповідних імовірностей.

Наприклад, якщо X та Y визначені розподілами задачі 4.8, то закон розподілу XY має такий вид:

XY	2	5	6	12	15	30
P	0,24	0,06	0,4	0,16	0,1	0,04

.

Приклади знаходження законів розподілу випадкових величин

Задача 4.9. Імовірність того, що виготовлений виріб вимагає додаткового регулювання, дорівнює p. Контролер перевіряє якість партії виробів, навмання вибираючи виріб. Якщо він вимагає додаткового регулювання, то наступні випробування припиняються, а вся партія відправляється на доробку. Якщо ж виріб стандартний, то контролер бере наступний виріб, тощо. Згідно із інструкцією контролер перевіряє не більше п’яти виробів.

1) Скласти закон розподілу числа перевірених контролером виробів. 2) Знайти імовірність доробки всієї партії виробів.

1) Позначимо: X – число виробів, перевірених контролером, A_i – i-тий відібраний виріб вимагає додаткового регулювання ($i=\overline{1,5}$). За умовою $P(A_i)=p$, $i=\overline{1,5}$. Тоді $\overline{A_i}$ – i-тий виріб стандартний. $P(\overline{A_i})=1-p=q$, $i=\overline{1,5}$.

Можливі значення X: 1, 2, 3, 4, 5. Знайдемо імовірності, з якими X набирає ці значення. Випадкова подія (X=1) відбудеться тоді, коли перший відібраний прилад вимагатиме додатково регулювання, тобто (X=1)=A_1, звідки $p_1=P(X=1)=P(A_1)=p$. Відбуття події (X=2) означає, що перший виріб стандартний і другий вимагає регулювання: $(X=2)=\overline{A}_1\cdot A_2$. Використовуючи теорему множення імовірностей, отримаємо: $p_2=P(X=2)=P(\overline{A}_1\cdot A_2)=qp$. Аналогічно знаходимо, що $p_3=P(X=3)=q^2p$, $p_4=P(X=4)=q^3p$.

Нарешті, подія (X=5) відбудеться або тоді, коли чотири перші вироби стандартні, а п’ятий вимагає регулювання (партія відправляється на доробку), або коли всі п’ять виробів стандартні (партія пропускається), тобто

$$(X=5)=\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4A_5+\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4\overline{A}_5,$$

звідки $p_5=P(X=5)=q^4p+q^5=q^4(p+q)=q^4$, бо $p+q$=1.

Остаточно шуканий закон розподілу має такий вид:

X	1	2	3	4	5
P	p	qp	q^2p	q^3p	q^4

.

Для перевірки з’ясуємо, чи виконується умова нормування:

$$\sum_1^5 p_i=p+qp+q^2p+q^3p+q^4=p+qp+q^2p+q^3(p+q)=$$

$$=p+qp+q^2(p+q)=p+q(p+q)=p+q=1.$$

2) Партія пропускається контролером в єдиному випадку, коли всі п’ять перевірених виробів є стандартними, імовірність цієї випадкової події дорівнює q^5. Тому імовірність протилежної події (партія виробів відправляється на доробку) дорівнює $1-q^5$ або $1-(1-p)^5$. ●

Задача 4.10. В урні знаходяться шість більярдних куль з номерами від 1 до 6. Скласти закон розподілу випадкової величини X – суми номерів двох навмання витягнутих куль.

Нехай X – сума номерів двох навмання взятих більярдних куль. З’ясуємо, які можливі значення величини X. Куля з номером 1 може утворити такі суми з номерами решти куль: 3, 4, 5, 6, 7. Куля з номером 2 – 5, 6, 7, 8 (при цьому 2 сумується тільки із більшими номерами, бо сума з 1 вже врахована); куля з номером 3 – 7, 8, 9; з 4 – 9, 10 і з 5 – 11. Отже, можливі значення Х – це цілі числа від 3 до 11 включно.

Знайдемо відповідні імовірності, користуючись класичним означенням імовірності. Випробування – відбір двох куль. Порядок розташування куль у двійці відібраних несуттєвий, бо номери куль додаються. Тому загальне число наслідків випробування $n=C_6^2=15$. Кожній із випадкових подій (X=3), (X=4), (X=10), (X=11) сприяє тільки один наслідок випробування, тобто їх імовірності дорівнюють 1/15. Кожній із подій (X=5), (X=6), (X=8), (X=9) сприяють вже два наслідки випробування, тому їх імовірності – 2/15. Нарешті, події (X=7) сприяють три наслідки, і P(X=7)=3/15=1/5.

Таким, чином, шуканий закон розподілу має такий вид:

Х	3	4	5	6	7	8	9	10	11

P	1/15	1/15	2/15	2/15	3/15	2/15	2/15	1/15	1/15

Очевидно, що умова нормованості виконується. ●

Задача 4.11. Дослідження роботи блоків чотирьох типів в умовах перепаду напруги показало, що імовірність безвідмовної роботи протягом часу T кожного із типів складає відповідно 0,8; 0,9; 0,7 та 0,75. Відбираються чотири блоки кожного типу. Скласти закон розподілу випадкової величини X – числа блоків, які безвідмовно працюватимуть у вказаних умовах.

Задачу можна розв'язати не одним способом.

Перший спосіб.

Нехай, події A_i – блок i-го типу працює безвідмовно, $i=\overline{1,4}$,

$\overline{A_i}$ – блок i-го типу вийшов з ладу.

За умовою $P(A_1)=0{,}8$, $P(A_2)=0{,}9$, $P(A_3)=0{,}7$, $P(A_4)=0{,}75$, $P(\overline{A_1})=0{,}2$, $P(\overline{A_2})=0{,}1$, $P(\overline{A_3})=0{,}3$, $P(\overline{A_4})=0{,}25$.

Можливі значення X – 0, 1, 2, 3, 4.

Знайдемо відповідні імовірності:

$P(X=0)=P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}\,\overline{A_4})=0{,}2\cdot0{,}1\cdot0{,}3\cdot0{,}25=0{,}0015$;

$P(X=1)=P(A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}\,\overline{A_4}+\overline{A_1}A_2\overline{A_3}\,\overline{A_4}+\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3\overline{A_4}+\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}A_4)=$

$0{,}8\cdot0{,}1\cdot0{,}3\cdot0{,}25+0{,}2\cdot0{,}9\cdot0{,}3\cdot0{,}25+0{,}2\cdot0{,}1\cdot0{,}7\cdot0{,}25+0{,}2\cdot0{,}1\cdot0{,}3\cdot0{,}75=$

$=0{,}006+0{,}0135+0{,}0035+0{,}0045=0{,}0275;$

$P(X=2)=P(A_1A_2\overline{A_3}\,\overline{A_4}+A_1\overline{A_2}A_3\overline{A_4}+A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}A_4+\overline{A_1}A_2A_3\overline{A_4}+\overline{A_1}A_2\overline{A_3}A_4+$

$\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3A_4)=0{,}1685;$

$P(X=3)=P(A_1A_2A_3\overline{A_4}+A_1A_2\overline{A_3}A_4+A_1\overline{A_2}A_3A_4+\overline{A_1}A_2A_3A_4)=0{,}4245;$

$P(X=4)=P(A_1A_2A_3A_4)=0{,}378$

Остаточно отримаємо шуканий закон розподілу:

X	0	1	2	3	4
P	0,0015	0,0275	0,1685	0,4245	0,378

. (*)

Другий спосіб. Позначимо випадкові величини: X_k – число блоків k-го типу, які безвідмовно працюватимуть в умовах перепаду напруги ($k=\overline{1,4}$).

Оскільки тип представлений тільки одним блоком, то X_k може набирати два можливих значення: 0 (блок вийшов з ладу) і 1 (блок безвідмовно працюватиме). Із врахуванням умови задачі отримаємо закони розподілу.

X_1	0	1
P	0,2	0,8

,

X_2	0	1
P	0,1	0,9

,

X_3	0	1
P	0,3	0,7

,

X_4	0	1
P	0,25	0,75

.

Число (**загальне**) блоків, які безвідмовно працюватимуть у вказаних умовах, складається із числа блоків кожного типу, що витримають випробування:

$\boldsymbol{X=X_1+X_2+X_3+X_4}$.

Позначимо $Y=X_1+X_2$; $Z=Y+X_3$; $X=Z+X_4$.

За аналогією із розв'язуванням задачі 4.8 послідовно отримаємо:

$Y=X_1+X_2$	0	1	2
P	0,02	0,26	0,72

,

$Z=Y+X_3$	0	1	2	3
P	0,006	0,092	0,398	0,504

і, нарешті, закон розподілу для $X=Z+X_4$, який співпадає із (*).

Третій спосіб. Закон розподілу для X можна отримати ще й чисто механічно, перемноживши двочлени (біноми):

$\Upsilon_4(z)=(0{,}8z+0{,}2)(0{,}9z+0{,}1)(0{,}7z+0{,}3)(0{,}75z+0{,}25)$.

В результаті отримаємо

$\Upsilon_4(z)=0{,}378z^4+0{,}4245z^3+0{,}1685z^2+0{,}0275z+0{,}0015$.

При цьому кожний із п'яти коефіцієнтів при z^k (k=0,1,2,3,4) дорівнює імовірності $P(X=k)$ (порівняйте із (*)). ●

Зауваження. Функція

$$\Upsilon_n(z)=\prod_{i=1}^{n}(p_iz+q_i)=(p_1z+q_1)(p_2z+q_2)\cdot\ldots\cdot(p_nz+q_n),$$

коефіцієнти розкладу якої по степеням z^k(k=0,1,2,…,n) дорівнюють імовірностям того, що при випробуванні випадкова величина X набере можливе значення k, називається **твірною функцією величини *X***. Твірна функція використовується також при знаходженні імовірностей $P_n(m)$ для n повторних випробувань таких, що в першому випробуванні випадкова подія A відбувається з імовірністю p_1, в другому – p_2, …, в n-му випробуванні – p_n, а імовірності непояви події A відповідно рівні $q_1, q_2, \ldots, q_n$. В такому випадку $Y_n(z)$ називається **твірною функцією імовірностей $P_n(m)$**.

Задача 4.12. У лотереї, яка проводиться з приводу презентації фірми, на 4000 білетів розігруються п'ять речей, вартість яких складає відповідно 100, 300, 400, 500 та 700 грн. Вартість одного білета – 5 грн. Скласти закон розподілу суми чистого виграшу для особи, яка має два білети.

Хай випадкова величина X – сума виграшу особи, яка має два лотерейні білети. Знайдемо можливі значення X. Якщо обидва білети невиграшні, тоді особа втрачає $2\cdot 5=10$, тобто виграш складає –10. Нехай один білет невиграшний, а другий виграшний. Тоді із врахуванням вартості білетів можливі варіанти виграшу: 90, 290, 390, 490 та 690. Нарешті, обидва білети можуть бути виграшні, при цьому можливі варіанти: 100+300-10; 100+400-10; 100+500-10; 100+700-10; 300+400-10; 300+500-10; 300+700-10; 400+500-10; 400+700-10; 500+700-10.

Отже, можливі значення X в порядку розглянутих варіантів такі: а) –10; б)90, 290, 390, 490, 690; в) 390, 490, 590, 790, 690, 790, 990, 890, 1090, 1190.

Відмітимо, що серед них є співпадаючі, а також порушений порядок зростання. Поділ на групи зумовлений тим, що в межах кожної групи імовірності того, що X набере можливе значення, рівні.

Випробування полягає у відборі (придбанні) двох білетів. Всіх наслідків випробування є $C_{2000}^2=1999000$. Невиграшних білетів є 1995. Тому

$$P(X=-10)=C_{1995}^2\big/C_{2000}^2=1989015\big/C_{2000}^2.$$

Кожне із можливих значень групи б) набирається величиною X тоді, коли один білет буде виграшним із конкретною (однією) вартістю виграшу, а другий – невиграшний. Тому

$$P(X=90)=P(X=290)=P(X=390)=P(X=490)=P(X=690)=$$
$$=C_1^1\cdot C_{1995}^1\big/C_{2000}^2=1995\big/C_{2000}^2.$$

Кожне із можливих значень групи в) величина X набирає, коли обидва білети будуть виграшними, причому пара виграшів буде єдиною (за виключенням можливого значення 790, яке двічі повторюється). Тому

$$P(X=390)=P(X=490)=P(X=590)=P(X=690)=P(X=890)=$$
$$=P(X=990)=P(X=1090)=P(X=1190)=1\big/C_{2000}^2.$$
$$P(X=790)=2\big/C_{2000}^2.$$

Тепер врахуємо те, що можливі значення 390, 490, 690 зустрічаються в групах б) та в). Використавши теорему додавання імовірностей, отримаємо:

$$P(X=390)=1995\big/C_{2000}^2+1\big/C_{2000}^2=1996\big/C_{2000}^2,$$
$$P(X=490)=P(X=490)=1996\big/C_{2000}^2.$$

Таким чином, шуканий закон розподілу імовірностей випадкової величини X має такий вид:

X	-10	90	290	390	490	590	690	790	890	990	1090	1190
P	$\frac{1989015}{C_{2000}^2}$	$\frac{1995}{C_{2000}^2}$	$\frac{1995}{C_{2000}^2}$	$\frac{1996}{C_{2000}^2}$	$\frac{1996}{C_{2000}^2}$	$\frac{1}{C_{2000}^2}$	$\frac{1996}{C_{2000}^2}$	$\frac{2}{C_{2000}^2}$	$\frac{1}{C_{2000}^2}$	$\frac{1}{C_{2000}^2}$	$\frac{1}{C_{2000}^2}$	$\frac{1}{C_{2000}^2}$

Додавши всі імовірності і врахувавши, що $C_{2000}^2=1999000$, можна переконатися у виконанні умови нормування. ●

Зауваження. Розглянемо можливість використання для попередньої задачі другого методу розв'язування задачі 4.11. Тобто, нехай X_1 – величина чистого виграшу на 1-й білет, а X_2 – на 2-й. Тоді природно очікувати, що загальний виграш на два білети буде складатися із виграшу на 1-й та 2-й білети, тобто $X=X_1+X_2$. Для задачі 4.11 величини X_1 та X_2 були незалежними. Закон розподілу імовірностей для величини X_1 має такий вид:

X_1	–5	95	295	395	495	695
P	$\frac{1995}{2000}$	$\frac{1}{2000}$	$\frac{1}{2000}$	$\frac{1}{2000}$	$\frac{1}{2000}$	$\frac{1}{2000}$

Спроба ж записати закон розподілу для X_2 наштовхується на труднощі: він залежатиме (буде змінюватися) від того, яке можливе значення набрала величина X_1. Проаналізуйте два випадки: (X_1= –5) та (X_1=295).

Задача 4.13. В першій скрині міститься 4 білих і 6 чорних куль, в другій – 7 білих і 3 чорні кулі. Із другої скрині навмання беруть дві кулі і перекладають в першу, перемішують вмістиме, а потім навмання беруть одну кулю і перекладають в другу скриню. Скласти закон розподілу числа чорних куль в першій та у другій скринях.

Знайдемо закон розподілу випадкової величини X – числа чорних куль у другій скрині. Позначимо випадкові події: A_i – i-та взята куля з II-ої скрині чорна (i=1,2), B – взята куля з I-ої урни куля чорна (і перекладена в II-у). Найменше можливе значення випадкової величини X отримається тоді, коли з II-ої урни взято дві чорні кулі і з І-ої перекладено білу, тобто відбувається випадкова подія $A_1A_2\overline{B}$, де $\overline{B}$ – біла куля з І-ої урни. В такому випадку X набере можливого (найменшого) значення 1. Отже, враховуючи залежність подій A_1, A_2 та $\overline{B}$, отримаємо:

$$P(X=1)=P(A_1A_2\overline{B})=P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1A_2}(\overline{B})=\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{4}{12}=\frac{1}{45}.$$

Випадкова величина X набирає значення 2 в кожному із трьох випадків:

1) з ІІ-ої скрині взято першу кулю чорну, другу – білу і покладено з І-ої білу ($A_1\overline{A}_2\overline{B}$);

2) з ІІ-ої скрині взято першу білу кулю, другу – чорну і покладено з І-ої білу ($\overline{A}_1A_2\overline{B}$);

3) з ІІ-ої скрині взято обидві кулі чорні і покладено з І-ої чорну (A_1A_2B).

Тому

$$P(X=2)=P(A_1\overline{A}_2\overline{B}+\overline{A}_1A_2\overline{B}+A_1A_2B)=$$
$$=P(A_1)P_{A_1}(\overline{A}_2)P_{A_1\overline{A}_2}(\overline{B})+P(\overline{A}_1)P_{\overline{A}_1}(A_2)P_{\overline{A}_1A_2}(\overline{B})+P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1A_2}(B)=$$
$$=\frac{3}{10}\cdot\frac{7}{9}\cdot\frac{5}{12}+\frac{7}{10}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{5}{12}+\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{8}{12}=\frac{7}{12}+\frac{7}{12}+\frac{2}{45}=\frac{43}{180}.$$

Міркуючи аналогічно, отримаємо:

$$P(X=3)=P(A_1\overline{A}_2B+\overline{A}_1A_2B+\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{B})=$$
$$=\frac{3}{10}\cdot\frac{7}{9}\cdot\frac{7}{12}+\frac{7}{10}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{7}{12}+\frac{7}{10}\cdot\frac{6}{9}\cdot\frac{6}{12}=\frac{49}{360}+\frac{49}{360}+\frac{7}{30}=\frac{91}{180};$$

$$P(X=4)=P(\overline{A}_1\overline{A}_2B)=\frac{7}{10}\cdot\frac{6}{9}\cdot\frac{6}{12}=\frac{7}{30}.$$

Отже, шуканий закон розподілу для X має такий вигляд:

X	1	2	3	4
P	$\frac{1}{45}$	$\frac{43}{180}$	$\frac{91}{180}$	$\frac{7}{30}$

Оскільки

$$\sum_{i=1}^{4}p_i=\frac{1}{45}+\frac{43}{180}+\frac{91}{180}+\frac{7}{30}=1,$$

то умова нормованості виконується.

Нехай Y – число чорних куль в першій скрині. Попередні міркування можна було б використати для знаходження закону розподілу Y.

Проте всі виконані процедури залишають незмінним сумарне число чорних куль обох скринь, тобто виконується рівність $X+Y=9$. Тому $Y=9-X$.

Якщо X набирає значення 1, то Y набуватиме можливе значення 8, при цьому випадкові події (X=1) та (Y=8) є рівносильними, тобто $P(X=1)=P(Y=8)=1/45$.

Аналогічно отримуємо імовірності відбуття події (Y=7),(Y=6) та (Y=5).

Отже, закон розподілу випадкової величини Y задається такою таблицею:

Y	5	6	7	8
P	$\frac{7}{30}$	$\frac{91}{180}$	$\frac{43}{180}$	$\frac{1}{45}$

●

Числові характеристики дискретних випадкових величин та їх властивості

Закон розподілу імовірностей дає повну інформацію про дискретну випадкову величину. Проте в багатьох практично важливих випадках економісту-досліднику буває достатньо знати одне або кілька чисел, пов'язаних із випадковою величиною, які дають менш повне, але більш наочне описання випадкової величини. Такі числа, які сумарно описують випадкову величину, називаються її **числовими характеристиками**.

Математичне сподівання

Математичним сподіванням дискретної випадкової величини X називається сума добутків всіх її можливих значень на відповідні імовірності:

$$M(X)=x_1p_1+x_2p_2+...+x_np_n. \qquad (4.9)$$

Якщо величина X може набирати зчисленну множину значень (наприклад, як у випадку геометричного або пуассонівського розподілу), то при умові, що цей ряд абсолютно збіжний,

$$M(X)=\sum_{i=1}^{\infty}x_ip_i. \qquad (4.10)$$

Імовірнісний зміст математичного сподівання: ***M*(*X*) приблизно дорівнює** (тим точніше, чим більше число випробувань) **середньому арифметичному спостережених значень випадкової величини**.

Властивості математичного сподівання.

1. **Математичне сподівання сталої величини дорівнює цій сталій**: $M(C)=C$.
2. **Сталий множник можна виносити за знак математичного сподівання**: $M(CX)=CM(X)$.

3. **Математичне сподівання суми двох випадкових величин дорівнює сумі математичних сподівань доданків**: $M(X+Y) = M(X) + M(Y)$.

Наслідок. Математичне сподівання суми кількох випадкових величин дорівнює сумі математичних сподівань доданків.

4. **Математичне сподівання добутку двох незалежних випадкових величин дорівнює добутку їх математичних сподівань**: $M(XY) = M(X) \cdot M(Y)$.

Наслідок. Математичне сподівання добутку кількох незалежних у сукупності випадкових величин дорівнює добутку їх математичних сподівань.

Задача 4.14. Існує три методи експрес-контролю партії виробів. Кожний із них безпомилково виявляє якісні вироби, а при ідентифікації некондиційних допускає помилки, тобто вони визнаються якісними. Число таких виробів для кожного із методів є відповідно випадковими величинами X, Y та Z, закони розподілу яких мають такий вид:

$$\begin{array}{c|cccc} X & 0 & 1 & 3 & 4 \\ \hline P & 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}06 & 0{,}04 \end{array}, \quad \begin{array}{c|cccc} Y & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline P & 0{,}6 & 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}1 \end{array}, \quad \begin{array}{c|ccccc} Z & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline P & 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}04 & 0{,}03 & 0{,}03 \end{array}.$$

Який із методів експрес-контролю кращий?

Нехай a – кількість стандартних виробів у партії. Тоді згідно з умовою задачі кожен із методів контролю відповідно дасть $a + X$, $a + Y$, $a + Z$ стандартних деталей після перевірки всієї партії, де кожний другий доданок у сумах – це помилка при ідентифікації бракованих виробів. Мінімальне значення її (у середньому) визначить кращий метод. Характеристикою середнього значення є математичне сподівання. Тому знайдемо

$M(X) = 0 \cdot 0{,}5 + 1 \cdot 0{,}4 + 3 \cdot 0{,}06 + 4 \cdot 0{,}04 = 0{,}74$;

$M(Y) = 0 \cdot 0{,}6 + 1 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 0{,}1 = 0{,}7$;

$M(Z) = 0 \cdot 0{,}8 + 1 \cdot 0{,}1 + 2 \cdot 0{,}04 + 3 \cdot 0{,}03 + 4 \cdot 0{,}03 = 0{,}39$.

Отже, кращим методом експрес-контролю є третій. ●

Дисперсія

Для оцінки розкиду можливих значень випадкової величини навколо середнього значення (математичного сподівання) використовують, зокрема, числову характеристику, яку називають **дисперсією**.

Дисперсією (розкидом) випадкової величини X називається математичне сподівання квадрату відхилення X від $M(X)$:

$$D(X) = M[X - M(X)]^2. \qquad (4.11)$$

Згідно із цим означенням дисперсія характеризує середню величину розкиду можливих значень випадкової величини навколо її матсподівання (середньої) в квадратних одиницях.

Якщо X розподілена за законом (4.1), то з урахуванням закону (4.8) випадкова величина $[X - M(X)]^2$ має такий закон розподілу:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} [X-M(X)]^2 & [x_1-M(X)]^2 & [x_2-M(X)]^2 & \ldots & [x_n-M(X)]^2 \\ \hline P & p_1 & p_2 & \ldots & p_n \end{array}.$$

Використавши означення дисперсії та математичного сподівання, отримаємо формулу для обчислення $D(X)$:

$$D(X) = M[X-M(X)]^2 = [x_1 - M(X)]^2 p_1 + [x_2 - M(X)]^2 p_2 +$$

$$+ \ldots + [x_n - M(X)]^2 p_n = \sum_{i=1}^{n} [x_i - M(X)]^2 p_i. \qquad (4.11^*)$$

Зменшення обсягу обчислень досягається за рахунок використання **розрахункової формули** для обчислення дисперсії:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2. \qquad (4.12)$$

Застосувавши означення математичного сподівання до закону розподілу (4.8), отримаємо **числову реалізацію розрахункової формули**:

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - [M(X)]^2. \qquad (4.12^*)$$

Властивості дисперсії.

1. **Дисперсія сталої дорівнює нулю**: $D(C) = 0$.
2. **Сталий множник можна виносити за знак дисперсії, піднісши його до квадрату**: $D(CX) = C^2 D(X)$.
3. **Дисперсія суми двох незалежних випадкових величин дорівнює сумі дисперсій цих величин**: $D(X+Y) = D(X) + D(Y)$.

Наслідок. Дисперсія суми кількох незалежних у сукупності випадкових величин дорівнює сумі дисперсій цих величин.

4. **Дисперсія різниці двох незалежних випадкових величин дорівнює сумі їх дисперсій**: $D(X-Y) = D(X) + D(Y)$.

Зауваження. Навіть якщо X та Y незалежні, то в загальному випадку виконується нерівність $D(XY) \neq D(X)\,D(Y)$.

Середнє квадратичне відхилення

Незручність використання дисперсії в деяких випадках зумовлена тим, що вона має розмірність, яка дорівнює квадрату розмірності випадкової величини. Наприклад, якщо можливі значення X вимірюються в кг, то $D(X)$ в (кг)^2.

Середнім квадратичним відхиленням випадкової величини X називається квадратний корінь із дисперсії:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}. \qquad (4.13)$$

$\sigma(X)$ характеризує середню величину розкиду можливих значень X навколо $M(X)$ (середньої) в лінійних одиницях.

Розглянемо типові задачі.

Задача 4.15. Знайти середнє квадратичне відхилення випадкової величини $Z = 2X - 5Y - 30$, якщо X та Y – незалежні випадкові величини, $D(X) = 0{,}25$, $D(Y) = 0{,}2$.

Рівність випадкових величин зумовлює рівність їх дисперсій: $D(Z) = D(2X - 5Y - 30)$. Використання властивостей дисперсії та умов задачі дає такий ланцюжок рівностей:

$D(Z) = D(2X + (-5Y) + (-30)) = D(2X) + D(-5Y) + D(-30) =$

$= 2^2D(X) + (-5)^2D(Y) + 0 = 4 \cdot 0{,}25 + 25 \cdot 0{,}2 = 6.$

Тоді згідно із (4.13) $\sigma(Z) = \sqrt{D(Z)} = \sqrt{6} \approx 2{,}45.$ ●

Задача 4.16. Знайти закон розподілу дискретної випадкової величини на основі числових характеристик цієї величини та певної інформації про закон її розподілу:

а) $\begin{array}{c|ccc} X & 3 & 5 & x_3 \\ \hline P & 0{,}1 & 0{,}6 & p_3 \end{array}$, $M(X) = 5{,}7;$

б) $\begin{array}{c|ccc} Y & -2 & 1 & 2 \\ \hline P & p_1 & p_2 & p_3 \end{array}$, $M(Y) = 0{,}9\ \ M(Y^2) = 3{,}1;$

в) $\begin{array}{c|cc} Z & z_1 & z_2 \\ \hline P & 0{,}8 & p_2 \end{array}$, $M(Z) = 1{,}2\ \ \sigma(Z) = 0{,}4.$

а) Сума імовірностей в законі розподілу дорівнює одиниці, тому $0{,}1 + 0{,}6 + p_3 = 1$, звідки $p_3 = 0{,}3$. Згідно з означенням (4.9) математичного сподівання і умовою задачі $M(X) = 3 \cdot 0{,}1 + 5 \cdot 0{,}6 + {} + x_3 \cdot 0{,}3 = 5{,}7$ або $0{,}3x_3 = 4$, звідки $x_3 = 40/3.$ Знайдений закон розподілу випадкової величини має такий вид: $\begin{array}{c|ccc} X & 3 & 5 & 40/3 \\ \hline P & 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}3 \end{array}.$

б) За аналогією із випадком а) і використавши рівність $M(Y^2) = y_1^2p_1 + y_2^2p_2 + y_3^2p_3,$ отримаємо таку систему рівнянь відносно невідомих p_1, p_2, p_3:

$$\begin{cases} p_1 + p_2 + p_3 = 1, \\ -2p_1 + p_2 + 2p_3 = 0{,}9, \\ 4p_1 + p_2 + 4p_3 = 3{,}1. \end{cases}$$

Перше рівняння розв'яжемо відносно p_1, а друге помножимо на 2 і додамо до третього. В результаті система набуде такого виду:

$$\begin{cases} p_1 = 1 - p_2 - p_3, \\ -2p_1 + p_2 + 2p_3 = 0{,}9, \\ 3p_2 + 8p_3 = 4{,}9. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_1 = 1 - p_2 - p_3, \\ 3p_2 + 4p_3 = 2{,}9, \\ 3p_2 + 8p_3 = 4{,}9. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_1 = 1 - p_2 - p_3, \\ 3p_2 + 4p_3 = 2{,}9, \\ 4p_3 = 2. \end{cases}$$

Остаточно $p_1 = 0{,}2$, $p_2 = 0{,}3$, $p_3 = 0{,}5$.

в) Оскільки $p_2 = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$, то для знаходження двох невідомих z_1 і z_2 складемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 0{,}8z_1 + 0{,}2z_2 = 1{,}2, \\ \sqrt{0{,}8z_1^2 + 0{,}2z_2^2 - (1{,}2)^2} = 0{,}4. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_2 = 6 - 4z_1, \\ 0{,}8z_1^2 + 0{,}2z_2^2 = 1{,}6. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_2 = 6 - 4z_1, \\ z_1^2 - 2{,}4z_1 + 1{,}4 = 0. \end{cases}$$

Звідки $z_1^{(1)} = 1,\ z_1^{(2)} = 1{,}4,\ z_2^{(1)} = 2,\ z_2^{(2)} = 0{,}4.$

Отже, умовам задачі задовольняють два закони розподілу імовірностей:

$$\begin{array}{c|cc} Z^{(1)} & 1 & 2 \\ \hline P & 0{,}8 & 0{,}2 \end{array};\quad \begin{array}{c|cc} Z^{(2)} & 1{,}4 & 0{,}4 \\ \hline P & 0{,}8 & 0{,}2 \end{array}.$$ ●

Задача 4.17. Маршрут руху інкасаторського автомобіля від банку до його філії перетинає п'ять перехресть, регульованих світлофорами, які з імовірностями відповідно 0,2, 0,5, 0,8, 0,4, 0,5 дозволяють рух без зупинки. Знайти середнє число зупинок спецавтомобіля на перехрестях по цьому маршруту, якщо світлофори працюють незалежно один від інших (відсутня «зелена лінія»).

Позначимо: X – число зупинок автомобіля на перехрестях по всьому маршруту, X_i – число зупинок при проходженні i-ого перехрестя, де $i = 1, 2, ..., 5$. Тоді загальне число зупинок буде складатися із числа зупинок на кожному світлофорі: $X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5$. За властивістю математичного сподівання $M(X) = \sum_{i=1}^{5} M(X_i)$, при цьому $M(X)$ характеризує середнє число зупинок по всьому маршруту. Можливі значення X_1: 0, 1. Випадкова подія ($X_1 = 1$) полягає в тому, що на першому світлофорі автомобіль зупинився, а ($X_1 = 0$) – не зупинився. За умовою задачі $P(X_1 = 0) = 0,2$, тоді $P(X_1 = 1) = 1 - 0,2 = 0,8$. Отже, закон розподілу випадкової величини X_1 має такий вид: $\begin{array}{c|cc} X_1 & 0 & 1 \\ \hline P & 0,2 & 0,8 \end{array}$, звідки $M(X_1) = 0 \cdot 0,2 + 1 \cdot 0,8 = 0,8$. Аналогічно знаходимо: $M(X_2) = 0,5$, $M(X_3) = 0,2$, $M(X_4) = 0,6$, $M(X_5) = 0,5$. Остаточно $M(X) = 0,8 + 0,5 + 0,2 + 0,6 + 0,5 = 2,6$. ●

Задача 4.18. Автоматична лінія після сервісної наладки випускає стандартні вироби з імовірністю 0,98. Чергова наладка здійснюється після появи першого нестандартного виробу. Знайти середнє число виробів, виготовлених між двома черговими сервісними наладками лінії.

Нехай випадкова величина X – число виробів, виготовлених лінією між її двома черговими сервісними наладками. Всі ці вироби стандартні за виключенням останнього нестандартного, поява якого і зумовлює здійснення чергової наладки при умові, що перший виріб не виявився бракованим. Позначимо: A – поява нестандартного виробу. За умовою задачі $p = P(A) = 1 - 0,98 = 0,02$ залишається незмінною для кожного із випробувань (виготовлення виробу автоматичною лінією). Тоді можна стверджувати (див. задачу 4.5), що X розподілена за геометричним законом і її закон розподілу має такий вид:

$$\begin{array}{c|cccccc} X & 1 & 2 & 3 & ... & n & ... \\ \hline P & p & qp & q^2 p & ... & q^{n-1} p & ... \end{array},$$

де $p = 0,02$, $q = 0,98$.

Шукане середнє число виробів, виготовлених між двома черговими наладками лінії, дорівнює $M(X)$. Використовуючи формулу (4.10), а також те, що $1 + q + q^2 + ... + q^n + ... = 1/(1 - q)$, отримаємо

$$M(X) = p + 2qp + 3q^2 p + ... + nq^{n-1} p + ... = p\sum_{n=1}^{\infty} nq^{n-1} =$$

$$= p\left(\frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right)\Bigg|_{x=q} = p\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right)\right)\Bigg|_{x=q} = p \cdot \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{p} = \frac{1}{0,02} = 50.$$

Відмітимо, що правомірність почленного диференціювання степеневого ряду забезпечується його рівномірною збіжністю, оскільки він є сумою нескінченної геометричної прогресії із знаменником $q = 0,98 < 1$. ●

Початкові та центральні моменти

Узагальненням розглянутих вище основних числових характеристик випадкової величини, які описують середину розподілу (математичне сподівання) і розкид (дисперсія та середнє квадратичне відхилення), є поняття моментів випадкової величини. В теорії імовірностей розглядаються моменти двох видів: початкові та центральні.

Початковим моментом порядку *k* дискретної випадкової величини X називається математичне сподівання величини X^k:

$$\nu_k = M(X^k) = \sum x_i^k p_i. \qquad (4.14)$$

Зокрема $\nu_1 = M(X)$, $\nu_2 = M(X^2)$, тому розрахункова формула для обчислення дисперсії набирає такого виду:

$$D(X) = \nu_2 - \nu_1^2.$$

Крім моментів самої величини X доцільно (особливо для неперервної величини) розглядати моменти відхилення $X - M(X)$.

Центральним моментом порядку *k* називається математичне сподівання величини $(X - M(X))^k$:

$$\mu_k = M[(X - M(X))^k] = \sum [x_i - M(X)]^k p_i. \qquad (4.15)$$

Зокрема, $\mu_1 = M[X - M(X)] = 0$, $\mu_2 = M[(X - M(X))^2] = D(X)$.

Зв'язки між початковими та центральними моментами отримуються із таких співвідношень:

$$\mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2, \ \mu_3 = \nu_3 - 3\nu_2\nu_1 + 2\nu_1^3, \ \mu_4 = \nu_4 - 4\nu_3\nu_1 + 6\nu_2\nu_1^2 - 3\nu_1^4.$$

Моменти більш високих порядків використовуються рідко.

Зауваження. Назва моменту центральним зумовлена розглядом степенів відхилень від $M(X)$ – «центру» можливих значень, а початковим – відхилень від нуля ($M(X) = M(X - 0)$, або «початку».

Задача 4.19. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу

X	1	3
P	0,6	0,4

. Знайти початкові та центральні моменти першого, другого і третього порядків.

За формулами (4.14) для $k = 1, 2, 3$ отримуємо початкові моменти 1-го, 2-го та 3-го порядків:

$$\nu_1 = M(X) = 1 \cdot 0{,}6 + 3 \cdot 0{,}4 = 1{,}8,$$

$$\nu_2 = 1^2 \cdot 0{,}6 + 3^2 \cdot 0{,}4 = 4{,}3,$$

$$\nu_3 = 1^3 \cdot 0{,}6 + 3^3 \cdot 0{,}4 = 11{,}4.$$

Центральні моменти цих порядків знаходимо за допомогою формул (4.15):

$$\mu_1 = M[X - M(X)] = 0,$$

$$\mu_2 = (1 - 1{,}8)^2 \cdot 0{,}6 + (3 - 1{,}8)^2 \cdot 0{,}4 = 0{,}96,$$

$$\mu_3 = (1 - 1{,}8)^3 \cdot 0{,}6 + (3 - 1{,}8)^3 \cdot 0{,}4 = 0{,}384.$$ ●

Числові характеристики основних законів розподілу

Задача 4.20. Знайти числові характеристики випадкової величини, розподіленої за **біноміальним законом**.

Дана випадкова величина X – число появи події A в n повторних незалежних випробуваннях, в кожному з яких $P(A) = p$ (див. задачу 4.3). Нехай X_k – число появ події A в одному k-му випробуванні $(k = 1,2...,n)$. Тоді $X = X_1 + X_2 + ... + X_n$, а закон розподілу X_k має такий вид:

X_k	0	1
P	q	p

, $k = 1,2...,n.$

Знайдемо числові характеристики величини X_k:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{2} x_i p_i = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p,$$

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} [x_i - M(X)]^2 p_i = (0 - p)^2 q + (1 - p)^2 p = p^2 q + q^2 p =$$

$$= pq(p + q) = pq,$$

оскільки $p+q=1$.

Використавши відповідні властивості математичного сподівання і дисперсії (при цьому враховується незалежність випадкових величин X_1, X_2, ..., X_n), отримаємо:

$$M(X) = M(X_1 + X_2 + ... + X_n) = \sum_{k=1}^{n} M(X_k) = \sum_{k=1}^{n} p = np,$$

$$D(X) = D(X_1 + X_2 + ... + X_n) = \sum_{k=1}^{n} D(X_k) = \sum_{k=1}^{n} pq = npq.$$

Отже,

$$M(X) = np, \quad D(X) = npq. \quad (4.16)$$ ●

Використання отриманих формул ілюструє

Задача 4.21. Фірма розглядає питання про обсяг запасів деталей одного типу на пункті гарантійного обслуговування. Статистично встановлено, що імовірність виходу з ладу протягом гарантійного терміну деталі цього типу дорівнює 0,1. Скільки в середньому потрібно мати на пункті деталей такого типу і яка величина розкиду можливих кількостей, якщо в регіоні обслуговування пункту зареєстровано 180 виробів, комплектуючою яких є ця деталь?

Нехай A – вихід з ладу деталі протягом гарантійного терміну, випробування – робота деталі протягом цього часу (в складі виробу). Число випробувань $n = 180$. Вони є незалежними, бо $P(A) = 0{,}1$ для кожного із випробувань. Нехай X – сумарне число деталей, які вийдуть із ладу. Тоді середнє число деталей, які потрібно замінити, визначається математичним сподіванням величини X. Згідно з (4.16) $M(X) = 0{,}1 \cdot 180 = 18$. Величину розкиду доцільно характеризувати середнім квадратичним відхиленням, оскільки одиниці вимірювання його – лінійні. Тому за другою формулою (4.16) $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{npq} = \sqrt{16{,}2} \approx 4{,}02.$ Самостійно перевірте, що найімовірніше число деталей, які вийдуть із ладу за гарантійний термін, також дорівнює 18. ●

Задача 4.22. Знайти математичне сподівання і дисперсію випадкової величини, розподіленої за законом Пуассона.

Згідно із означенням величина X розподілена за законом Пуассона, якщо вона набирає можливі значення 0, 1, 2, ..., m, ... з імовірностя-ми

$$p_{m+1} = P(X = m) = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}, \quad m = 0, 1, 2, ...$$

Використавши рівності $m! = (m-1)! \cdot m$; 0!=1 та розклад

$$e^{\lambda} = 1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2!} + ... + \frac{\lambda^m}{m!} + ...,$$

знайдемо математичне сподівання:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i = \sum_{m=0}^{\infty} m \cdot \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda^m}{(m-1)!} \cdot e^{-\lambda} =$$

$$= \lambda \cdot e^{-\lambda} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda^{m-1}}{(m-1)!} = \lambda \cdot e^{-\lambda} (1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2!} + ...) = \lambda \cdot e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda.$$

Для обчислення дисперсії використаємо розрахункову формулу (4.12): $D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$. Тоді

$$M(X^2) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 p_i = \sum_{m=0}^{\infty} m^2 \cdot \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} = e^{-\lambda} \sum_{m=1}^{\infty} m \frac{\lambda^m}{(m-1)!} =$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{[(m-1)+1]}{(m-1)!} \cdot \lambda^m = e^{-\lambda} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\lambda^2 \lambda^{m-2}}{(m-2)!} + e^{-\lambda} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda \cdot \lambda^{m-1}}{(m-1)!} =$$

$$= (e^{-\lambda}\lambda^2 + e^{-\lambda}\lambda)(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2!} + ...) = (\lambda^2 + \lambda) \cdot e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda^2 + \lambda;$$

$$D(X) = (\lambda^2 + \lambda) - \lambda^2 = \lambda \text{ .} \quad \bullet$$

Задача 4.23. Знайти дисперсію рівномірно розподіленої випадкової величини.

Рівномірний закон розподілу має такий вид:

X	1	2	3	...	5
P	$1/n$	$1/n$	$1/n$	...	$1/n$

При знаходженні числових характеристик використаємо формули:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

За формулами (4.9) і (4.12*)

$$M(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k = \sum_{k=1}^{n} k \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n+1}{2},$$

$$D(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 p_k - [M(X)]^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 \cdot \frac{1}{n} - (\frac{n+1}{2})^2 = \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} -$$

$$- \frac{(n+1)^2}{4} = (n+1)(\frac{2n+1}{6} - \frac{n+1}{4}) = \frac{n^2-1}{12}. \quad \bullet$$

Задача 4.24. Обчислити дисперсію випадкової величини, розподіленої за геометричним законом .

Згідно із означенням закон розподілу випадкової величини, геометрично розподіленої, має вид

X	1	2	3	...	n	...
P	p	qp	$q^2 p$	...	$q^{n-1} p$	...

В задачі 4.18 отримана формула $M(X) = 1/p$.
Тоді за розрахунковою формулою (4.12)

$$D(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 p_k - [M(X)]^2 = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 q^{k-1} p - \frac{1}{p^2} = p \sum_{k=1}^{\infty} k^2 q^{k-1} - \frac{1}{p^2}.$$

Обчислимо суму отриманого ряду:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 q^{k-1} = 1 + 2^2 q + 3^2 q^2 + ... + n^2 q^{n-1} + ... =$$

$$= (x + 2x^2 + 3x^3 + ... + nx^n + ...)' \Big|_{x=q} =$$

$$= \left[x(1 + 2x + 3x^2 + ... + nx^{n-1} + ...)\right]' \Big|_{x=q} =$$

$$= \left[x(x + x^2 + x^3 + ... + x^n + ...)'\right]' \Big|_{x=q} =$$

$$= \left[x\left(\frac{x}{1-x}\right)'\right]' \Big|_{x=q} = \left[\frac{x}{(1-x)^2}\right]' \Big|_{x=q} =$$

$$= \frac{(1-x)^2 + x \cdot 2(1-x)}{(1-x)^4} \Big|_{x=q} = \frac{1+x}{(1-x)^3} \Big|_{x=q} = \frac{1+q}{(1-q)^3} = \frac{1+q}{p^3}.$$

Тоді остаточно отримаємо

$$D(X) = p\cdot\frac{1+q}{p^3} - \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p^2}(1+q-1) = \frac{q}{p^2}.$$ ●

§ 5. НЕПЕРЕРВНІ ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ ТА ЇХ ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Функція розподілу імовірностей і її властивості. Густина розподілу імовірностей та її властивості. Числові характеристики неперервних випадкових величин (математичне сподівання, дисперсія та середнє квадратичне відхилення, мода та медіана випадкової величини, початкові та центральні моменти, асиметрія і ексцес).

КОРОТКІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Функцією розподілу імовірностей називається функція $F(x)$ детермінованого (невипадкового) аргументу x, яка чисельно дорівнює імовірності того, що в результаті випробування випадкова величина X набере значення, менше від x, тобто

$$F(x) = P(X < x). \qquad (5.1)$$

Іноді функцію розподілу називають ще інтегральною.

Уточнимо означення неперевної випадкової величини: випадкову величину називають **неперервною**, якщо її функція розподілу імовірностей є неперервною на області її визначення, а похідна від функції розподілу неперервна у всіх точках, за виключенням, можливо, скінченного числа точок на довільному скінченному інтервалі.

Властивості функції розподілу імовірностей

Властивість 1. Область визначення функції розподілу – $R^1 = (-\infty;\infty)$, **а область значень – відрізок [0; 1].**

Властивість 2. $F(x)$ **– неспадна функція, тобто для будь-якої пари чисел** x_1, x_2 **з нерівності** $x_2 > x_1$ **випливає нерівність** $F(x_2) \geq F(x_1)$**.**

Наслідок 1. Імовірність того, що випадкова величина при випробуванні набере можливого значення з проміжку [*a*; *b*), дорівнює приросту функції розподілу на цьому проміжку:

$$P(a \leq X < b) = F(b) - F(a). \qquad (5.2)$$

Наслідок 2. Імовірність того, що неперервна випадкова величина *X* набере при випробуванні одне конкретне можливе значення, дорівнює нулю.

Зауваження. Рівність $P(X = x_1) = 0$, де x_1 – конкретне можливе значення величини X, не означає, що подія $X = x_1$ є неможливою (на відміну від класичного означення імовірності). Нагадайте геометричне означення імовірності.

Наслідок 2 з використанням формули (5.2) та теореми додавання імовірностей дозволяє отримати такий ланцюжок рівностей:

$$P(a < X < b) = \big(P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b)\big) =$$
$$= F(b) - F(a). \qquad (5.3)$$

Властивість 3. Якщо всі можливі значення випадкової величини належать відрізку [*a*; *b*], то $F(x) = 0$ **для всіх** $x \leq a$ **і** $F(x) = 1$ **для всіх** $x > b$**.**

Наслідок. Якщо можливими значеннями неперервної випадкової величини є всі дійсні числа, тоді мають місце такі граничні співвідношення:

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x\to\infty} F(x) = 1.$$

Густиною розподілу імовірностей неперервної випадкової величини X називається функція $f(x)$, яка дорівнює першій похідній від функції розподілу $F(x)$:

$$f(x) = F'(x). \qquad (5.4)$$

Із означення (5.4) слідує, що $F(x)$ є первісною для густини розподілу. Нижче буде наведено формулу для знаходження $F(x)$, якщо відома функція $f(x)$. Таким чином, задання однієї із функцій $f(x)$ та $F(x)$ дозволяє знайти іншу. Тому в літературі ці функції називають **законами розподілу неперервної випадкової величини**.

Властивості густини розподілу

Властивість 1. Область визначення функції $f(x)$ **–** R^1**, а область значень проміжок [0, ∞).**

Властивість 2. Невласний інтеграл від густини розподілу в межах від –∞ до ∞ дорівнює одиниці:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1. \qquad (5.5)$$

Рівність (5.5) називають **умовою нормування** неперервної випадкової величини.

Зауваження. Якщо $[\alpha, \beta]$ - мінімальний проміжок, в якому містяться **всі** можливі значення неперервної випадкової величини, тоді умова нормування набирає такого виду:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 1. \tag{5.5*}$$

Мають місце такі формули:

$$P\left(a \overset{(\le)}{<} X \overset{(\le)}{<} b \right) = \int_{a}^{b} f(x)dx, \tag{5.6}$$

$$F(x) = P(X < x) = P(-\infty < X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx. \tag{5.7}$$

Відмітимо, що рівність (5.5) є аналогом рівності одиниці суми імовірностей із закону розподілу дискретної випадкової величини.

З'ясуємо **імовірнісний зміст** густини розподілу імовірностей. Означення $f(x)$ (5.4) та похідної функції, а також рівність (5.3) дають такі рівності

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x < X < x + \Delta x)}{\Delta x}, \tag{5.8}$$

які дозволяють записати наближену рівність

$$P(x < X < x + \Delta x) \approx f(x)\Delta x. \tag{5.9}$$

з точністю до нескінченно малих вищого порядку відносно Δx.

Права частина (5.8) пояснює назву функції $f(x)$ за аналогією із змістом густини маси, розподіленої на відрізку, а наближена рівність (5.9) – «вклад» величини $f(x)$ у величину імовірності події ($x < X < x + \Delta x$) для кожного відрізка довжиною Δx.

Математичним сподіванням неперервної випадкової величини X, всі можливі значення якої належать скінченному відрізку $[a; b]$, називається визначений інтеграл

$$M(X) = \int_{a}^{b} xf(x)dx. \tag{5.10}$$

Якщо можливі значення X належать R^1, тоді

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx, \tag{5.10*}$$

де за припущенням невласний інтеграл збігається абсолютно.

Як і для випадку дискретної величини, **дисперсією неперервної випадкової величини** називається математичне сподівання квадрату її відхилення від математичного сподівання. Із врахуванням означення $M(X)$:

$$D(X) = \int_{a}^{b} \left[x - M(X)\right]^2 f(x)dx, \tag{5.11}$$

якщо всі можливі значення X належать скінченному відрізку $[a; b]$, і

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[x - M(X)\right]^2 f(x)dx, \tag{5.11*}$$

якщо можливі значення X заповнюють R^1.

Розрахункові формули для обчислення дисперсії:

$$D(X) = \int_{a}^{b} x^2 f(x)dx - \left[M(X)\right]^2, \tag{5.12}$$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - \left[M(X)\right]^2. \tag{5.12*}$$

Середнє квадратичне відхилення неперервної випадкової величини визначається, як і для випадку дискретної, рівністю

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}. \tag{5.13}$$

Модою $Mo(X)$ дискретної випадкової величини X називається те її можливе значення, якому відповідає найбільша імовірність її появи. Для неперервної випадкової величини X модою $Mo(X)$ називається можливе значення X, якому відповідає локальний максимум густини розподілу. Випадкова величина може мати кілька мод. У цьому випадку вона називається **многомодальною**. Зустрічаються також розподіли, що не мають максимуму. Такі розподіли називаються **антимодальними**.

Медіаною $Me(X)$ неперервної випадкової величини Х називається те її можливе значення, для якого виконується рівність $P(X < Me(X)) = P(X > Me(X))$.

Початковим моментом *k*-ого порядку неперервної випадкової величини X, заданої густиною розподілу $f(x)$, називається математичне сподівання величини X^k, тобто

$$\nu_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)dx, \quad k = 1, 2, 3, \dots . \tag{5.14}$$

Центральним моментом *k*-ого порядку неперервної випадкової величини X називається математичне сподівання величини $[X - M(X)]^k$:

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)]^k f(x)dx, \quad k = 1, 2, 3, \dots . \tag{5.15}$$

Зокрема, якщо всі можливі значення X належать проміжку (a, b), то

$$\nu_k = \int_a^b x^k f(x)dx, \qquad \mu_k = \int_a^b [x - M(X)]^k f(x)dx.$$

Очевидно, що $\nu_1 = M(X),\ \mu_1 = 0,\ \mu_2 = D(X).$

Формули зв'язку центральних та початкових моментів, які наведені в § 4, залишаються в силі і для випадку неперервних випадкових величин.

Центральний момент третього порядку характеризує **асиметрію закону розподілу випадкової величини**, тобто порушення симетрії кривої розподілу. Якщо $\mu_3 = 0,$ то говорять, що випадкова величина симетрично поділена відносно $M(X)$ (крива розподілу симетрична відносно прямої $x = M(X)$. Оскільки μ_3 має вимірність випадкової величини в кубі, то впроваджують безрозмірну величину – коефіцієнт асиметрії:

$$A_s = \mu_3/\sigma^3.$$

Центральний момент четвертого порядку використовується для характеристики гостровершинності чи плосковершинності закону розподілу (кривої розподілу). Ці властивості описуються з допомогою **ексцесу**:

$$E_s = \mu_4/\sigma^4 - 3,$$

де число 3 віднімається в зв'язку з тим, що для найпоширенішого нормального закону розподілу (див. § 6) $\mu_4/\sigma^4 = 3,$ а отже, $E_s = 0$. Таким чином, ексцес характеризує гостровершинність чи плосковершинність в порівнянні із **нормальною кривою** (кривою розподілу нормального закону).

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

Задача 5.1. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу

X	1	3	6	8
P	0,2	0,4	0,3	0,1

. Знайти функцію розподілу і побудувати її графік.

Якщо $x \le 1$, то у відповідності із властивістю 3 $F(x) = 0$.

Нехай $x \in (1; 3]$. Тоді випадкова подія $(X < x) = (X = 1)$, оскільки 1 – єдине можливе значення, яке менше від x. А тому згідно із (5.1) для (1; 3] $F(x) = P(X < x) = P(X = 1) = 0{,}2$.

Якщо $x \in (3; 6]$, тоді подія $(X < x)$ відбувається тоді, і тільки тоді, коли або $X = 1$, або $X = 3$, тобто має місце така рівність $(X < x) = (X = 1) + (X = 3)$, де доданки справа є несумісними випадковими подіями. Використання теореми додавання імовірностей і означення (5.1) дозволяє знайти $F(x)$ на цьому проміжку:

$$F(x) = P(X < x) = P(X = 1) + P(X = 3) = 0{,}2 + 0{,}4 = 0{,}6.$$

Якщо $x \in (6; 8]$, то за аналогією із попереднім проміжком

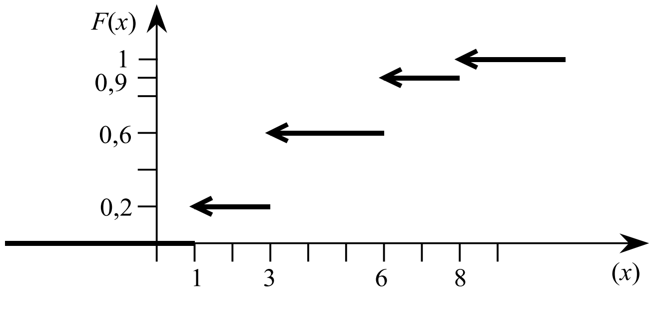
$$F(x) = P(X < x) = P(X = 1) + P(X = 3) + P(X = 6) = 0{,}9.$$

Нарешті якщо $x > 8$, то подія $(X < x)$ – достовірна, і $F(x) = 1$.

Отже, функція розподілу має такий вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le 1, \\ 0{,}2, & \text{якщо } 1 < x \le 3, \\ 0{,}6, & \text{якщо } 3 < x \le 6, \\ 0{,}9, & \text{якщо } 6 < x \le 8, \\ 1, & \text{якщо } x > 8, \end{cases}$$

а її графік зображено на мал. 5.1.



Мал. 5.1.

де стрілками відмічені правосторонні розриви. ●

Задача 5.2. Випадкова величина X задана функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le -2,\\ x^2/4+x+1 & \text{при } -2<x\le 0,\\ 1 & \text{при } x>0.\end{cases}$$

Знайти імовірність того, що: 1) в результаті випробування X набере значення з інтервалу (–1; 0); 2) у чотирьох випробуваннях X тричі набере можливого значення з проміжку [–4; –1).

1) Для знаходження $P(-1 < X < 0)$ скористаємося однією із формул (5.3), поклавши $a = -1$, $b = 0$. Тоді

$P(-1 < X < 0) = F(0) - F(-1) =$

$= 0^2/4 + 0 + 1 - ((-1)^2/4 - 1 + 1) = 1 - 1/4 = 0,75.$

2) Попередньо знайдем імовірність відбуття події ($-4 \le X < -1$) в одному випробуванні, врахувавши те, що –4 належить першому проміжку задання функції, в кожній точці якого $F(x) = 0$. Знову за формулою (5.3)

$$P(-4 \le X < -1) = F(-1) - F(-4) = 0,25 - 0 = 0,25.$$

Друге випробування, як і решта наступних, дасть ту ж саму імовірність. Отже, повторні випробування є незалежними відносно події ($-4 \le X < -1$) і за формулою Бернуллі ($n = 4$ – мале), де $p = 0,25$, $q = 0,75$, знайдемо:

$$P_4(3) = C_4^3(0,25)^3 0,75 = 0,1875.$$ ●

Зауваження. Типова помилка студентів при використанні формули (5.3) – неправильний вибір аналітичного виразу, за яким обчислюється $F(x)$ при знаходженні $F(b)$ та (або) $F(a)$. Тобто попередньо не враховується, до якого інтервалу (в задачі 5.2 їх є три) належить a та b.

Задача 5.3. Функція розподілу імовірностей неперервної випадкової величини має такий вид:

$$F(x)=\begin{cases}0\;, & \text{при } x\le 1,\\ ax+b\;, & \text{при } 1<x\le 5,\\ 1\;, & \text{при } x>5\end{cases}$$

Знайти значення сталих a і b та побудувати графік функції $F(x)$.

Оскільки X - неперервна випадкова величина, то $F(x)$ є непервною функцією для всіх $x \in R^1$. Тому

$F(1)=\lim\limits_{x\to 1+0} F(x)=\lim\limits_{x\to 1+0}(ax+b)=a+b$ або $a+b=0$.

Аналогічно

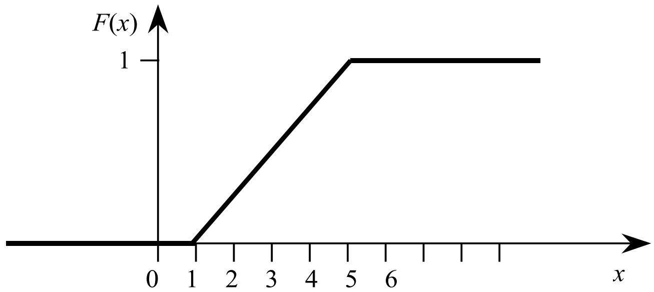
$F(1)=a\cdot 5+b=\lim\limits_{x\to 5-0} F(x)=1$ або $5a+b=1$.

Отже, невідомі сталі a та b задовольняють систему рівнянь

$$\begin{cases}a+b=0,\\ 5a+b=1,\end{cases}$$

розв'язавши яку отримаємо a=0,25, b=–0,25.

Г рафік $F(x)$ зображено на мал.5.2. ●



Мал.5.2.

Задача 5.4. Випадкова величина X задана густиною розподілу

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le -\pi/2,\\ a\cos x & \text{при } -\pi/2<x\le \pi/2,\\ 0 & \text{при } x>\pi/2.\end{cases}$$

Знайти параметр a і функцію розподілу імовірностей, а також імовірність того, що при випробуванні величина X набере значення з інтервалу ($-\pi/4$, $\pi/3$).

Параметр a знайдемо з рівності (5.6):

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$

Розіб'ємо невласний інтеграл на три інтеграли у відповідності із інтервалами задання густини розподілу:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{-\pi/2} f(x)dx + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x)dx + \int_{\pi/2}^{\infty} f(x)dx =$$
$$= \int_{-\infty}^{-\pi/2} 0dx + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} a\cos x dx + \int_{\pi/2}^{\infty} 0dx = a\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x dx =$$
$$= a\sin x\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = a(\sin(\pi/2) - \sin(-\pi/2)) = 2a.$$

Отже, параметр a задовольняє рівняння $2a = 1$, звідки $a = 0{,}5$. При знаходженні $F(x)$ врахуємо це значення параметра і використаємо рівність (5.7). Відмітимо, що вид густини розподілу в даній задачі вказує на те, що функція розподілу на трьох проміжках також буде задаватися різними аналітичними виразами. В зв'язку із цим нехай $x \le -\pi/2$. Тоді

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{x} 0dx = 0.$$

Для $x \in (-\pi/2; \pi/2]$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{-\pi/2} f(x)dx + \int_{-\pi/2}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{-\pi/2} 0dx + \int_{-\pi/2}^{x} 0{,}5\cos x dx =$$
$$= 0{,}5\sin x\Big|_{-\pi/2}^{x} = 0{,}5(\sin x - \sin(-\pi/2)) = 0{,}5(1+\sin x).$$

Нарешті, якщо $x > \pi/2$, то

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{-\pi/2} 0dx + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 0{,}5\cos x dx + \int_{\pi/2}^{x} 0dx = 0{,}5\sin x\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 1.$$

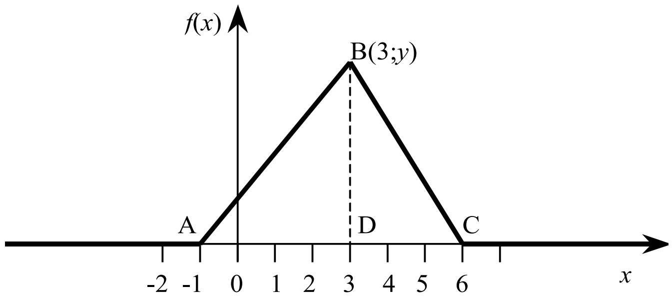
Таким чином, функція розподілу для даної величини X має такий вигляд:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le -\pi/2, \\ 0{,}5(1+\sin x) & \text{при } -\pi/2 < x \le \pi/2, \\ 1 & \text{при } x > \pi/2. \end{cases}$$

Використаємо формулу (5.6) для знаходження шуканої імовірності:

$$P(-\pi/4 < X < \pi/3) = \int_{-\pi/4}^{\pi/3} f(x)dx = \int_{-\pi/4}^{\pi/3} 0{,}5\cos x dx = 0{,}5\sin x\Big|_{-\pi/4}^{\pi/3} =$$
$$= 0{,}5(\sin(\pi/3) - \sin(-\pi/4)) = 0{,}5\left(\sqrt{3}/2 + \sqrt{2}/2\right) = \left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)/4. \bullet$$

Задача 5.5. Графік густини розподілу неперервної випадкової величини X зображено на мал.5.3. Знайти аналітичні вирази густини розподілу та функції розподілу імовірностей цієї величини. Побудувати графік $F(x)$ і обчислити $P(1<X<4)$, використавши інформацію про $F(x)$ та $f(x)$.



Мал.5.3.

Знайдемо ординату точки B, використовуючи умову нормування (5.5*):

$$\int_{-1}^{6} f(x)dx = S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} 7y = 1,$$

звідки $y = \frac{2}{7}$.

На проміжку [-1,3] $f(x)$ дорівнює ординаті відрізка прямої, що проходить через точки $A(-1;0)$ та $B(3;2/7)$. Знайдемо рівняння прямої AB:

$$\frac{y-y_A}{y_B-y_A}=\frac{x-x_A}{x_B-x_A}\Rightarrow\frac{y-0}{\frac{2}{7}-0}=\frac{x-(-1)}{3-(-1)}\Rightarrow y=\frac{x+1}{14}.$$

Отже, $f(x)=\frac{x+1}{14}$, якщо $x\in[-1;3]$.

На проміжку [3;6] $f(x)$ дорівнює ординаті відрізка прямої, що проходить через точки $B(3;\frac{2}{7})$ і $C(6;0)$. Рівняння прямої BC:

$$\frac{y-y_B}{y_C-y_B}=\frac{x-x_B}{x_C-x_B}\Rightarrow\frac{y-\frac{2}{7}}{0-\frac{2}{7}}=\frac{x-3}{6-3}\Rightarrow y=\frac{2(6-x)}{21}.$$

Отже, $f(x)=\frac{2}{21}(6-x)$, якщо $x\in[3;6]$.

В підсумку отримаємо такий аналітичний вираз для густини розподілу:

$$f(x)=\begin{cases}0\ , & \text{при } x\le -1,\\ \frac{x+1}{14}, & \text{при } -1<x\le 3,\\ \frac{2(6-x)}{21}, & \text{при } 3<x\le 6,\\ 0\ , & \text{при } x>6.\end{cases} \qquad (5.16)$$

Для знаходження функції розподілу $F(x)$ використаємо формулу (5.7). Нехай $x\le -1$, тоді $f(x)$=0 і

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)dx=\int_{-\infty}^{x}0dx=0.$$

Якщо $x\in(-1;3]$, то

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)dx=\int_{-\infty}^{-1}f(x)dx+\int_{-1}^{x}f(x)dx=F(-1)+\int_{-1}^{x}\frac{x+1}{14}dx=$$
$$=0+\frac{1}{14}\int_{-1}^{x}(x+1)d(x+1)=\frac{1}{28}(x+1)^2\Big|_{-1}^{x}=\frac{1}{28}(x+1)^2.$$

Для $x\in(3;6]$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)dx=\int_{-\infty}^{3}f(x)dx+\int_{3}^{x}f(x)dx=F(3)+\int_{3}^{x}\frac{2(6-x)}{21}dx=$$
$$=\frac{1}{28}(3+1)^2-\frac{2}{21}\int_{3}^{x}(6-x)d(6-x)=\frac{4}{7}-\frac{1}{21}(6-x)^2\Big|_{3}^{x}=$$
$$=\frac{4}{7}-\frac{1}{21}(6-x)^2+\frac{3}{7}=1-\frac{(6-x)^2}{21}.$$

Нарешті, якщо $x>6$, то

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)dx=\int_{-\infty}^{6}0dx+\int_{6}^{x}f(x)dx=F(6)+\int_{6}^{x}0dx=1-\frac{(6-6)^2}{21}+0=1.$$

Таким чином, функція розподілу для даної випадкової величини X має такий вигляд:

$$F(x)=\begin{cases}0\ , & \text{якщо } x\le -1,\\ \frac{1}{28}(x+1)^2, & \text{якщо } -1<x\le 3,\\ 1-\frac{(6-x)^2}{21}, & \text{якщо } 3<x\le 6,\\ 1\ , & \text{якщо } x>6.\end{cases}$$

Графік функції $F(x)$ зображено на мал.5.4.

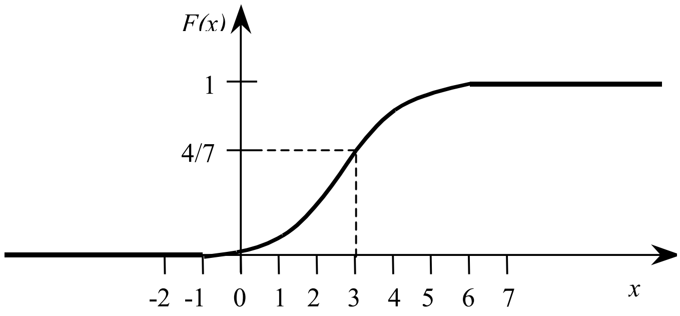
Згідно з формулою (5.3)

$P(1<X<4)=F(4)-F(1)$.

Значення аргументів 4 і 1 належать відповідно третьому та другому інтервалам, тому

$$F(4)=1-\frac{(6-4)^2}{21}=1-\frac{4}{21}=\frac{17}{21},$$

$$F(1)=\frac{1}{28}(1+1)^2=\frac{1}{7},$$



Мал.5.4.

$$P(1<X<4)=\frac{17}{21}-\frac{1}{7}=\frac{14}{21}=\frac{2}{3}.$$

Цю же саму імовірність знайдемо з допомогою формули (5.6):

$$P(1<X<4)=\int_1^4 f(x)dx=\int_1^3 f(x)dx+\int_3^4 f(x)dx=$$

$$=\int_1^3\frac{(x+1)}{14}dx+\int_3^4\frac{2(6-x)}{21}dx=\frac{1}{14}\int_1^3(x+1)d(x+1)-\frac{2}{21}\int_3^4(6-x)d(6-x)=$$

$$=\frac{1}{14}\frac{(x+1)^2}{2}\bigg|_1^3-\frac{2}{21}\frac{(6-x)^2}{2}\bigg|_3^4=\frac{1}{28}[(3+1)^2-(1+1)^2]-\frac{1}{21}[(6-4)^2-(6-3)^2]=$$

$$=\frac{3}{7}+\frac{5}{21}=\frac{2}{3}.$$ ●

Задача 5.6. Випадкова величина X задана густиною розподілу

$$f(x)=\begin{cases}2\cos 2x, & \text{якщо } \ x\in(0;\pi/4)\\ 0, & \text{якщо } \ x\notin(0;\pi/4)\end{cases}$$

Знайти: а) інтервал, в якому знаходяться всі можливі значення X; б) $\sigma(X)$; в) моду $Mo(X)$; г) медіану $Me(X)$.

а) Згідно із наближеною рівністю (5.9) неперервна випадкова величина X набирає можливих значень при випробуванні в кожному інтервалі, на якому густина розподілу відмінна від нуля. Для нашого випадку $f(x)\neq 0\ \forall\ x\in(0;\pi/4)$. Отже, в інтервалі $(0;\pi/4)$ знаходяться всі можливі значення X.

б) Для обчислення $\sigma(X)$ потрібно знайти спочатку $M(X)$ та $D(X)$. При знаходженні цих характеристик скористаємося інтегруванням частинами:

$$M(X)=\int_0^{\pi/4}x2\cos 2xdx=2\int_0^{\pi/4}x\cos 2xdx==2\left(x\cdot\frac{1}{2}\sin 2x\bigg|_0^{\pi/4}-\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}\sin 2xdx\right)=$$

$u=x$ $\quad du=dx$

$dv=\cos 2xdx$ $\quad v=\frac{1}{2}\sin 2x$

$$=\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x\bigg|_0^{\pi/4}=(\pi-2)/4.$$

Дисперсію знайдемо за розрахунковою формулою (5.12):

$$M\left(X^2\right)=\int_0^{\pi/4}x^2 2\cos 2xdx=2\int_0^{\pi/4}x^2\cos xdx=$$

$u=x^2$ $\quad du=2xdx$

$dv=\cos 2xdx$ $\quad v=\frac{1}{2}\sin 2x$

$$=2\left[\left.\left(\frac{x^2}{2}\sin 2x\right)\right|_0^{\pi/4}-\int_0^{\pi/4}x\sin 2xdx\right]=$$

$$u=x \qquad du=dx$$
$$dv=\sin 2xdx \qquad v=-\frac{1}{2}\cos 2x$$

$$=\frac{\pi^2}{16}+x\cos 2x\Big|_0^{\pi/4}-\int_0^{\pi/4}\cos 2xdx=\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}\sin 2x\Big|_0^{\pi/4}=\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}.$$

$$D(X)=M(X^2)-\left[M(X)\right]^2=\left(\pi^2/16-1/2\right)-(\pi-2)^2/16=$$
$$=(\pi-3)/4.$$
$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{\pi-3}/2\ .$$

в) Оскільки функція $f(x)=2\cos 2x$ у відкритому інтервалі $(0,\pi/4)$ не має максимуму, то X моди не має.

г) Знайдемо медіану Me, виходячи із її означення: $P(X<Me)=P(X>Me)$. Події $(X<Me)$ та $(X\geq Me)$ протилежні, тому $P(X<Me)+P(X\geq Me)=1$. Але у відповідності із наслідком 2 вл. 2 функції розподілу $P(X=Me)=0$, тому $P(X<Me)=1/2$. Проте

$$P(X<Me)=P(-\infty<X<Me)=$$
$$=\int_{-\infty}^{Me}f(x)dx=\int_{-\infty}^{0}0dx+\int_0^{Me}2\cos 2xdx=\sin 2x\Big|_0^{Me}=\sin(2Me).$$

В результаті отримуємо рівняння відносно Me:

$\sin 2\,Me=1/2$, звідки $2\,Me=\arcsin(1/2)=\pi/6$.

Остаточно $Me=(\arcsin 1/2)/2=\pi/12$. ●

Задача 5.7. Для випадкової величини X із задачі 5.5 знайти: а) середнє квадратичне відхилення; б) моду $Mo(X)$; в) медіану $Me(X)$.

Згідно з умовою густина розподілу випадкової величини X визначається виразом (5.16), суттєвою особливістю якого є те, що $f(x)$ визначається різними аналітичними виразами, відмінними від нуля, на різних інтервалах.

а) Для обчислення $\sigma(X)$ знайдемо спочатку $M(X)$ та $D(X)$ за формулами (5.10) та (5.12):

$$M(X)=\int_{-1}^{6}xf(x)dx=\int_{-1}^{3}xf(x)dx+\int_{3}^{6}xf(x)dx=$$
$$=\int_{-1}^{3}x\frac{x+1}{14}dx+\int_{3}^{6}x\frac{2(6-x)}{21}dx=\frac{1}{14}\int_{-1}^{3}(x^2+x)dx+\frac{2}{21}\int_{3}^{6}(6x-x^2)dx=$$
$$=\frac{1}{14}\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{3}+\frac{2}{21}\left(6\cdot\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{3}^{6}=\frac{8}{3};$$
$$M(X^2)=\int_{-1}^{6}x^2f(x)dx=\int_{-1}^{3}x^2\frac{x+1}{14}dx+\int_{3}^{6}x^2\frac{2(6-x)}{21}dx=$$
$$=\frac{1}{14}\int_{-1}^{3}(x^3+x^2)dx+\frac{2}{21}\int_{3}^{6}(6x^2-x^3)dx=$$
$$D(X)=M\left(X^2\right)-\left[M(X)\right]^2=\frac{55}{6}-\left(\frac{8}{3}\right)^2=\frac{37}{18};$$
$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{\frac{37}{18}}\approx 1{,}434.$$

б) Із мал.5.3, на якому зображений графік густини розподілу, видно, що максимальне значення $f(x)$ досягає в т. x=3. Отже, $Mo(X)$=3.

в) Всі можливі значення даної випадкової величини знаходяться або на проміжку (-1; 3], або на (3; 6], але на кожному із них густина розподілу задається різними аналітичними виразами. З другого боку, медіана задовольняє (див. задачу 5.6 п. *в*) рівнянню $P(X<Me)=0{,}5$.

Тому якщо $P(X\leq 3)\geq 0{,}5$, то $Me(X)\in(1;3]$, якщо ж $P(X\leq 3)<0{,}5$, то $Me(X)\in(3;6]$.

Використавши формулу (5.3), отримаємо

$$P(X \le 3) = P(-\infty < X \le 3) = F(3) - F(-\infty) = \frac{1}{28}(x+1)^2\bigg|_{x=3} - 0 =$$

$$= \frac{16}{28} = \frac{4}{7} > 0{,}5.$$

Отже, $Me(X) \in (1;3]$. Тоді для знаходження *Me* отримаємо рівняння:

$$P(X < Me) = F(Me) - F(-\infty) = \frac{1}{28}(Me+1)^2 - 0 = 0{,}5,$$

або $(Me+1)^2=14$,

звідки $Me = \sqrt{14} - 1 \approx 2{,}742$. ●

§ 6. ОСНОВНІ ЗАКОНИ НЕПЕРЕРВНИХ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Нормальний закон (імовірнісний зміст параметрів розподілу; нормальна крива; імовірність попадання у заданий інтервал; знаходження імовірності заданого відхилення). Закон рівномірного розподілу. Показниковий закон. Гамма-розподіл та розподіл Ерланга. Розподіл χ^2 (*хі*-квадрат).

КОРОТКІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Випадкова величина називається **нормально розподіленою** (**розподіленою за нормальним законом**), якщо її густина розподілу має такий вид

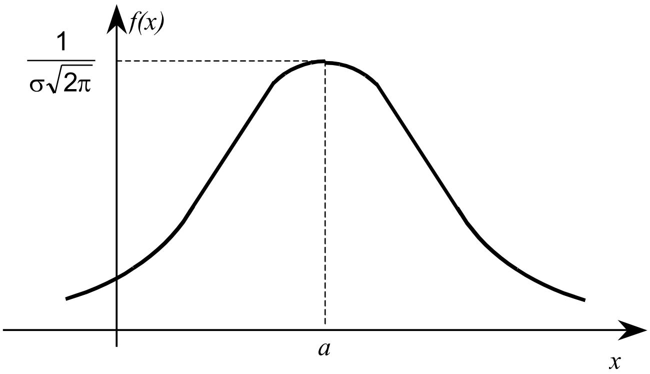
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-a)^2}{2\sigma^2}}. \qquad (6.1)$$

Густина розподілу (6.1) повністю визначається двома параметрами: *a* та σ. Імовірнісний зміст цих параметрів визначається такими рівностями:

$$a = M(X), \qquad \sigma = \sqrt{D(X)}. \qquad (6.2)$$

Нормальний закон розподілу випадкової величини з параметрами a=0, σ=1 називається **стандартним** або **нормованим**.

Графік густини нормального розподілу називається нормальною кривою (крива Гаусса) **(мал.6.1).**



Мал. 6.1.

Імовірність того, що нормально розподілена випадкова величина при випробуванні набере значення з інтервалу (α, β), обчислюється за формулою

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right). \qquad (6.3)$$

В практично важливих задачах виникає необхідність в знаходженні імовірності того, що відхилення нормально розподіленої випадкової величини від *a* по абсолютній величині менше від заданого додатнього числа ε, тобто $P\left(|X - a| < \varepsilon\right)$.

Ця імовірність обчислюється за формулою

$$P\left(|X - a| < \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right), \qquad (6.4)$$

яка, зокрема, показує, що імовірність відхилення для одного і того ж ε буде тим більша, чим меншим буде σ.

Випадкова величина називається **розподіленою за рівномірним законом** (**рівномірно розподіленою**), якщо її густина розподілу має такий вид

$$f(x) = \begin{cases} C = \text{const}, & \text{якщо } x \in [a,b], \\ 0, & \text{якщо } x \notin [a,b]. \end{cases}$$

Знайдемо значення сталої C, використавши другу властивість густини розподілу. Геометричний зміст цієї властивості означає рівність одиниці площі, обмеженої кривою розподілу, тобто $C(b-a)=1$, звідки $C = 1/(b-a)$. Отже, густина рівномірно розподіленої випадкової величини має такий вид:

$$f(x)=\begin{cases}1/(b-a), & \text{при } x\in[a,b],\\ 0, & \text{при } x\notin[a,b].\end{cases} \qquad (6.5)$$

Відрізок $[a, b]$ називається **відрізком концентрації рівномірного розподілу**.

Випадкова величина X розподіляється за **показниковим** (**експоненціальним**) **законом** (**показниково розподілена**), якщо її густина розподілу імовірностей має такий вид

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & \text{якщо } x\ge 0,\\ 0, & \text{якщо } x<0,\end{cases} \qquad (6.6)$$

де стала $\lambda > 0$ називається параметром експоненціального розподілу.

Моделювання складних явищ та процесів (зокрема, економічних) передбачає використання адекватних математичних моделей. Показниковий розподіл є частинним випадком так званого гамма-розподілу, який успішно використовується в техніко-економічному моделюванні і який, зокрема, достатньо добре описує час безвідмовної роботи різних технічних пристроїв та обладнання.

Невід'ємна неперервна випадкова величина X має **гамма-розподіл імовірностей**, якщо густина розподілу має такий вид:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}, & \text{якщо } x\ge 0,\\ 0, & \text{якщо } x<0,\end{cases} \qquad (6.7)$$

де $\alpha > 0$, $\lambda > 0$ – параметри розподілу, $\Gamma(\alpha)=\int\limits_0^{\infty} z^{\alpha-1}e^{-z}dz$ – гамма-функція (інтеграл Ейлера).

Наведемо властивості гамма-функції, корисні при користуванні гамма-розподілом:

1) $\Gamma(1) = 1$; 2) $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$; 3) якщо $\alpha = n$ – ціле невід'ємне число, то $\Gamma(n + 1) = n(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1 = n!$; 4) $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$.

Із врахуванням властивості 1) видно, що при $\alpha = 1$ з (6.7) отримується (6.6), тобто при $\alpha = 1$ отримується показниковий розподіл.

Використання властивостей гамма-функції дозволяє знайти числові характеристики гамма-розподіленої випадкової величини X:

$$M(X)=\alpha/\lambda, \quad D(X)=\alpha/\lambda^2, \quad \sigma(X)=\sqrt{\alpha}/\lambda. \qquad (6.8)$$

Якщо параметр α набуває цілих значень ($\alpha = k = 1, 2, 3, \ldots$), то гамма-розподіл перетворюється на розподіл Ерланга k-го порядку:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\lambda(\lambda x)^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda x}, & \text{якщо } x\ge 0,\\ 0, & \text{якщо } x<0.\end{cases}$$

Розподіл Ерланга знаходить важливе застосування в теорії масового обслуговування.

Числові характеристики цього розподілу отримуються із співвідношень (6.8), де $\alpha = k$.

Частинним випадком гамма-розподілу при $\alpha = k/2$, де $k = 1, 2, 3, \ldots$, а $\lambda = 1/2$, є так званий розподіл χ^2 (*хі*-квадрат), значення якого в математичній статистиці важко переоцінити; параметр k називається в цьому випадку числом ступенів вільності розподілу χ^2. Сформулюємо інший підхід до визначення розподілу χ^2.

Нехай задано k незалежних випадкових величин $X_1, X_2, \ldots, X_k$, кожна з яких має **нормований нормальний закон розподілу імовірностей**, тобто $M(X_i) = 0$, $\sigma(X_i) = 1$, $i=\overline{1,k}$. Тоді випадкова величина $X=\sum\limits_{i=1}^{k}X_i^2$ матиме розподіл χ^2 із k ступенями вільності, тобто густина розподілу імовірностей X матиме такий вид:

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо } x<0,\\ \dfrac{1}{2^{k/2}\Gamma(k/2)}x^{(k/2)-1}e^{-x/2}, & \text{якщо } x\ge 0.\end{cases} \qquad (6.9)$$

Числові характеристики випадкової величини, розподіленої за законом χ^2, визначаються рівностями:

$$M(X)=k, \quad D(X)=2k, \quad \sigma(X)=\sqrt{2k}.$$

Із збільшення числа ступенів вільності розподіл χ^2 «повільно» наближається до нормального.

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

Задача 6.1. Коробки із шоколадом упаковуються автоматично, при цьому середня маса однієї коробки становить 1,04 кг. Відомо, що тільки 2,5% коробок мають масу, меншу від 1 кг. Припускаючи, що маса коробок розподілена нормально, знайти середнє квадратичне відхилення.

Позначимо: X – маса навмання взятої коробки із шоколадом. За умовою X – нормально розподілена випадкова величина, $M(X) = 1{,}04$ і $P(X < 1) = 0{,}025$. Протилежною до події $(X < 1)$ є подія $(1 \le X < \infty)$, тому $P(1 \le X < \infty) = 1 - P(X < 1) = 1 - 0{,}025 = 0{,}975$. Для знаходження σ використаємо формулу (6.3), де $a = 1{,}04$, $\alpha = 1$, $\beta = \infty$, тобто

$$P(1 \le X < \infty) = 0{,}975 = \Phi\left(\frac{\infty - 1{,}04}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{1 - 1{,}04}{\sigma}\right),$$

або

$$0{,}975 = 0{,}5 + \Phi\left(\frac{0{,}04}{\sigma}\right),$$

оскільки $\Phi(x)$ – непарна функція і $\Phi(x) = 0{,}5$ для $x > 5$.

Остаточно рівняння набуває такого вигляду

$$\Phi\left(\frac{0{,}04}{\sigma}\right) = 0{,}475.$$

За табл. 3 додатків $\Phi(1{,}96) = 0{,}475$, тому

$0{,}04/\sigma = 1{,}96$, звідки $\sigma = 0{,}04/1{,}96 \approx 0{,}0204$. ●

Задача 6.2. На автоматичному токарному станку виготовляють болти, номінальна довжина яких 40 мм. В процесі роботи станка спостерігаються випадкові відхилення від вказаного розміру, які розподілені за нормальним законом з математичним сподіванням 0 і середнім квадратичним відхиленням 1 мм. При контролі бракуються всі болти, розміри яких відрізняються від номінального більше, ніж на допуск в 2 мм. Знайти імовірність того, що навмання взятий болт виявиться бракованим.

Нехай випадкова величина X – відхилення розміру навмання взятого болта від номінального. За умовою задачі X розподілена за нормальним законом і $M(X) = 0$, $\sigma(X) = 1$. Потрібно знайти $P\left(|X| > 2\right)$. Але випадкова подія $\left(|X| > 2\right)$ протилежна до події $\left(|X| \le 2\right)$, тому $P\left(|X| > 2\right) = 1 - P\left(|X| \le 2\right)$.

Для знаходження імовірності в правій частині рівності можна використати формулу (6.4) з такими значеннями параметрів: $a = 0$, $\varepsilon = 2$, $\sigma = 1$.

Тоді $P\left(|X| \le 2\right) = 2\Phi(2) = 2 \cdot 0{,}4772 = 0{,}9544,$

$P\left(|X| > 2\right) = 1 - 0{,}9544 = 0{,}0456.$ ●

Задача 6.3. Випадкова величина X розподілена за нормальним законом із математичним сподіванням $a = 0$ і середнім квадратичним відхиленням σ. При якому значенні σ імовірність того, що при випробуванні величина X набуде можливого значення з інтервалу (1, 2), буде максимальною?

За формулою (6.3)

$$P(1 < X < 2) = \Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{1}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_0^{2/\sigma} e^{-x^2/2}dx - \int_0^{1/\sigma} e^{-x^2/2}dx\right).$$

Ця імовірність є функцією однієї змінної σ і для знаходження її максимального значення знайдемо критичні точки, продиференціювавши обидві частини і прирівнявши до нуля похідну:

$$\frac{d}{d\sigma}P(1 < X < 2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(e^{-(2/\sigma)^2/2}(2/\sigma)' - e^{-(1/\sigma)^2/2}(1/\sigma)'\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(e^{-2/\sigma^2}(-2/\sigma^2) - e^{-1/(2\sigma^2)}(-1/\sigma^2)\right) = 0.$$

Звідси $2e^{-2/\sigma^2} = e^{-1/2\sigma^2}$. Прологарифмувавши ліву і праву частину за основою e, після простих перетворень отримаємо:

$$\sigma = \sqrt{3/(2\ln 2)} \approx \sqrt{3/(2 \cdot 0{,}693)} \approx 1{,}471.$$

Можна перевірити, що $\frac{d}{d\sigma}P(1 < X < 2)$ при проходженні через знайдену точку змінює знак з «+» на «–», а тому $\sigma \approx 1{,}471$ надає максимального значення імовірності випадкової події $(1 < X < 2)$. ●

Задача 6.4. Випадкова величина X розподілена за нормальним законом із математичним сподіванням 7,6. Імовірність того, що при випробуванні X набере значення з інтервалу (7,65; 7,68), дорівнює 0,25. Знайти $P(7{,}52<X<7{,}55)$.

Нормальна крива є симетричною відносно прямої x=7,6, а інтервали однакової довжини (7,52; 7,55) і (7,65;

7,68) – симетричні відносно точки x=7,6. Тому рівними є площі криволінійних трапецій, основами яких є вказані відрізки і які обмежені зверху нормальною кривою. За формулою (5.6) $P(7{,}52 < X < 7{,}55) = \int_{7{,}52}^{7{,}55} f(x)dx$, де визначений інтеграл – площа криволінійної трапеції із основою (7,52; 7,55), яка обмежена зверху частиною нормальної кривої. Із рівності площ розглянутих криволінійних трапецій отримуємо шукану імовірність: $P(7{,}52<X<7{,}55)=0{,}25$. ●

Задача 6.5. Випадкова величина Y розподілена за нормальним законом з числовими характеристиками $M(Y)$=15, $D(Y)$=9. Знайти, при яких значеннях t виконується рівність

$$P\left[\left|Y - M(Y)\right| < t\sqrt{D(Y)}\right] = P\left[\left|Y - M(Y)\right| \ge t\sqrt{D(Y)}\right]. \qquad (6.10)$$

Випадкові події $\left[\left|Y - M(Y)\right| < t\sqrt{D(Y)}\right]$ та $\left[\left|Y - M(Y)\right| \ge t\sqrt{D(Y)}\right]$ протилежні, тому

$$P\left[\left|Y - M(Y)\right| < t\sqrt{D(Y)}\right] + P\left[\left|Y - M(Y)\right| \ge t\sqrt{D(Y)}\right] = 1,$$

звідки $P\left[\left|Y - M(Y)\right| \ge t\sqrt{D(Y)}\right] = 1 - P\left[\left|Y - M(Y)\right| < t\sqrt{D(Y)}\right]$. (6.11)

Підставивши (6.11) в праву частину (6.10), отримаємо

$$P\left[\left|Y - M(Y)\right| < t\sqrt{D(Y)}\right] = 1 - P\left[\left|Y - M(Y)\right| < t\sqrt{D(Y)}\right]$$

або

$$P\left[\left|Y - M(Y)\right| < t\sqrt{D(Y)}\right] = 0{,}5.$$

З урахуванням умов задачі остання рівність набере такого виду

$$P(\left|Y - 15\right| < 3t) = 0{,}5.$$

Використаємо формулу (6.4)

$$P\left(\left|X - a\right| < \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right),$$

де $a=M(X)$, $\sigma = \sqrt{D(Y)}$.

В даному випадку $\varepsilon = 3t, \sigma = 3$. Тому для знаходження невідомого значення t отримаємо рівняння

$$2\Phi\left(\frac{3t}{3}\right) = 0{,}5 \quad \text{або} \quad \Phi(t) = 0{,}25.$$

За табл.3 додатків знаходимо $t \approx 0{,}675$, використавши лінійну інтерполяцію. ●

Задача 6.6. Випадкова величина X розподілена за нормальним законом із середнім значенням 10. Знайти $P(8<X<20)$, якщо $P(6<X<14)=0{,}5$.

За умовою задачі параметр a=10, а параметр σ - невідомий. Для знаходження його використаємо рівність $P(6<X<14)=0{,}5$, формулу (6.3) і непарність функції Лапласа:

$$P(6 < X < 14) = \Phi\left(\frac{14-10}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{6-10}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{4}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-4}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{4}{\sigma}\right);$$

$$2\Phi\left(\frac{4}{\sigma}\right) = 0{,}5 \Rightarrow \Phi\left(\frac{4}{\sigma}\right) = 0{,}25 \Rightarrow \frac{4}{\sigma} = 0{,}675 \Rightarrow \sigma = \frac{4}{0{,}675} \approx 5{,}93.$$

Тоді за формулою (6.3)

$$P(8 < X < 20) = \Phi\left(\frac{20-10}{5{,}93}\right) - \Phi\left(\frac{8-10}{5{,}93}\right) = \Phi(1{,}69) - \Phi(-0{,}34) =$$

$$= \Phi(1{,}69) + \Phi(0{,}34) = 0{,}45449 + 0{,}13307 = 0{,}58756. \text{ ●}$$

Задача 6.7. Швейна фабрика виготовляє костюми, орієнтуючись на покупців конкретного регіону. Покладаючи, що ріст чоловіків певної вікової групи цього регіону є нормально розподіленою випадковою величиною X із параметрами a=174см і σ=5см, знайти: 1) густину розподілу імовірностей величини X; 2) частки костюмів третього росту (171-176см) і четвертого росту (176-181см), які потрібно передбачити в загальному обсязі виробництва для даної вікової групи.

1) Згідно з умовою задачі густина розподілу імовірностей даної випадкової величини має вид (6.1):

$$f(x) = \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} e^{-(x-174)^2/50}.$$

2) Нехай одиниця – загальний обсяг виробництва костюмів (всіх ростів). Тоді частка костюмів третього росту визначиться як імовірність $P(171<X<176)$, яку знайдемо за формулою (6.3):

$$P(171 < X < 176) = \Phi\left(\frac{176-174}{5}\right) - \Phi\left(\frac{171-174}{5}\right) = \Phi(0{,}4) + \Phi(0{,}6) =$$

$$= 0{,}15542 + 0{,}22575 = 0{,}38117.$$

Аналогічно знаходимо частку костюмів четвертого росту:

$$P(176 < X < 181) = \Phi\left(\frac{181-174}{5}\right) - \Phi\left(\frac{176-174}{5}\right) = \Phi(1{,}4) - \Phi(0{,}4) =$$

$$= 0{,}41924 - 0{,}15542 = 0{,}26382.$$

Отримані результати можна інтерпретувати таким чином: костюми третього росту повинні складати 38,1% всієї продукції, а четвертого – 26,4%. ●

Задача 6.8. Густина розподілу випадкової величини X має такий вид:

$$f(x) = \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} e^{-(x-30)^2/50}.$$

1) Для можливих значень x_1=26 і x_2=38 знайти кількість середніх квадратичних відхилень від математичного сподівання, а також $P(X<x_1)$ та $P(X>x_2)$. 2) Знайти інтервал, в який з імовірністю 0,9861 потрапить при випробуванні можливе значення X.

Враховуючи формулу (6.1) і дані задачі, робимо висновок, що величина X розподілена за нормальним законом, при цьому $M(X)=a=30$, $\sigma=5$. Тоді

$$x_1 = 26 = 30 - 4 = 30 - \frac{4}{5}\cdot 5 = 30 - 0{,}8\sigma,$$

$$x_2 = 38 = 30 + 8 = 30 + \frac{8}{5}\cdot 5 = 30 + 1{,}6\sigma.$$

Отже, можливе значення x_1 відхиляється від математичного сподівання вліво на величину 0,8σ, а можливе значення x_2 – вправо на величину 1,6σ. Використавши формулу (6.3), непарність функції Лапласа, рівність $\Phi(x)=0{,}5$, для $x>5$, а також табл.3 додатків, отримаємо:

$$P(X < x_1) = P(-\infty < X < 26) = \Phi\left(\frac{26-30}{5}\right) - \Phi\left(\frac{-\infty-30}{5}\right) =$$

$$= \Phi(-0{,}8) + 0{,}5 = -0{,}28814 + 0{,}5 = 0{,}21186;$$

$$P(X > x_2) = P(38 < X < \infty) = \Phi\left(\frac{\infty-30}{5}\right) - \Phi\left(\frac{38-30}{5}\right) =$$

$$= 0{,}5 - \Phi(1{,}6) = 0{,}5 - 0{,}44520 = 0{,}0548.$$

2) Згідно з правилом трьох сигм практично всі можливі значення величини X зосереджені в інтервалі (a–3σ; a+3σ), симетричному відносно a. Тому будемо вважати, що шуканий інтервал має вид (30–ε, 30+ε), де ε – невідоме число.

Згідно з умовою $P(a-\varepsilon<X<a+\varepsilon)=0{,}9861$

або $P(|X-30| < \varepsilon) = 0{,}9861$,

за формулою (6.4)

$$P(|X-30| < \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{5}\right).$$

Тому

$$2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{5}\right) = 0{,}9861 \Rightarrow \Phi\left(\frac{\varepsilon}{5}\right) = 0{,}49305.$$

За табл.3 додатків ε/5=2,46 звідки $\varepsilon = 5\cdot 2{,}46 = 12{,}3$.

Отже, шуканий інтервал має вид

(30–12,3; 30+12,3)

або остаточно (17,7; 42,3). ●

Зауваження. Знайдений інтервал, в який з імовірністю 0,9861 потрапить при випробуванні можливе значення випадкової величини X, – неєдиний. Справді, нехай число α таке, що $P(X>\alpha)=0{,}9861$. Використавши формулу (6.3), отримаємо

$$P(X>\alpha)=P(\alpha<X<\infty)=\Phi\left(\frac{\infty-30}{5}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-30}{5}\right), \text{ звідки}$$

$$\Phi\left(\frac{30-\alpha}{5}\right)=0,4861,\Rightarrow \frac{30-\alpha}{5}=2,2\Rightarrow \alpha=19.$$

При цьому використовується нерівність $\alpha<30$ (проаналізуйте чому!). Отже, інтервал (19; ∞) – теж шуканий. Аналогічно можна було б показати, що в інтервал (–∞; 41) з тією ж імовірністю попадає можливе значення випадкової величини.

Задача 6.9. Для рівномірно розподіленої випадкової величини X знайти: 1) функцію розподілу імовірностей та побудувати її графік; 2) математичне сподівання; 3) дисперсію.

Густину (6.5) рівномірного розподілу напишемо в такому вигляді

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<a,\\ 1/(b-a), & a\le x\le b,\\ 0, & x>b.\end{cases}$$

1) Використаємо формулу (5.7)

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx.$$

Якщо $x<a$, тоді $F(x)=0$. Нехай $x\in[a,b]$, тоді

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=\int_{-\infty}^{a} f(x)dx+\int_{a}^{x} f(x)dx=\int_{-\infty}^{a} 0dx+\int_{a}^{x}\frac{1}{b-a}dx=$$
$$=\frac{1}{b-a}x\Big|_a^x=\frac{x-a}{b-a}.$$

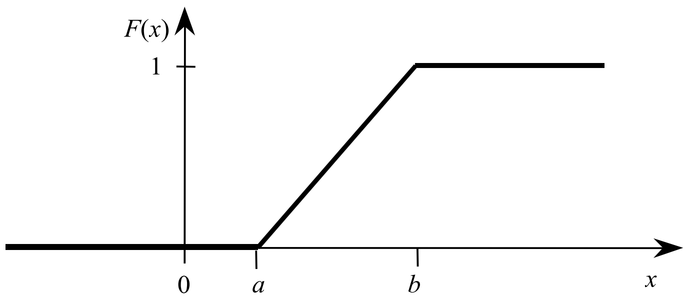
Якщо ж $x>b$, то

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=\int_{-\infty}^{a} f(x)dx+\int_{a}^{b} f(x)dx+\int_{b}^{x} f(x)dx=$$
$$=\int_{-\infty}^{a} 0dx+\int_{a}^{b}\frac{dx}{b-a}+\int_{b}^{x}0dx=\frac{x}{b-a}\Big|_a^b=1.$$

Отже, шукана функція розподілу має такий вид

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<a,\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\le x\le b,\\ 1, & x>b.\end{cases}$$

Її графік зображено на мал.6.2



Мал.6.2.

2) Для знаходження математичного сподівання використаємо формули (5.10*) та (6.5)

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx=\int_{-\infty}^{a} xf(x)dx+\int_{a}^{b} xf(x)dx+\int_{b}^{\infty} xf(x)dx=$$

$$=\int_{-\infty}^{a} x0dx+\int_{a}^{b} x\frac{1}{(b-a)}dx+\int_{b}^{\infty} x0dx=0+\frac{1}{(b-a)}\int_{a}^{b} xdx+0=$$

$$=\frac{1}{(b-a)}\cdot\frac{x^2}{2}\bigg|_a^b=\frac{b^2}{2(b-a)}-\frac{a^2}{2(b-a)}=\frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)}=\frac{b+a}{2}.$$

3) Дисперсію знайдемо, використавши формули (5.12*) та (6.5)

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx-[M(X)]^2=\int_{-\infty}^{a} x^2 f(x)dx+\int_{a}^{b} x^2 f(x)dx+$$

$$+\int_{b}^{\infty} x^2 f(x)dx-\left(\frac{b+a}{2}\right)^2=\int_{-\infty}^{a} x^2 0dx+\int_{a}^{b} x^2\frac{1}{(b-a)}dx+\int_{b}^{\infty} x^2 0dx-$$

$$-\frac{(b+a)^2}{4}=0+\frac{1}{(b-a)}\int_{a}^{b} x^2dx+0-\frac{(b+a)^2}{4}=\frac{x^3}{3(b-a)}\bigg|_a^b-\frac{(b+a)^2}{4}=$$

$$=\frac{b^3-a^3}{3(b-a)}-\frac{(b+a)^2}{4}=\frac{b^2+ab+a^2}{3}-\frac{b^2+2ab+a}{4}=\frac{b^2-2ab+a^2}{12}=$$

$$=\frac{(b-a)^2}{12}.$$ ●

Задача 6.10. Перехрестя обладнане автоматичним світлофором, на якому зелене та червоне світло горить протягом 1 хв. та 0,75 хв. відповідно. Автомобіль під'їжджає до перехрестя у випадковий момент часу, не пов'язаний із роботою світлофора. Знайти імовірність того, що він проїде перехрестя, не зупиняючись.

Позначимо випадкову величину *X* – момент приїзду автомобіля до перехрестя. Її можливі значення знаходяться в проміжку (0; 1,75), довжина якого визначається періодом зміни кольорів на світлофорі. Зрозуміло, що можливість приїзду автомобілем в будь-який момент часу даного інтервалу з (0; 1,75) рівна можливості приїзду в момент часу іншого інтервалу такої ж довжини. Тому *X* – рівномірно розподілена з густиною розподілу (6.5), де $a=0$, $b=1{,}75$. Автомобіль проїде, не зупиняючись, перехрестя, якщо відбудеться випадкова подія $(0<X<1)$, тобто під час «дії» зеленого світла світлофора. Тоді за формулою (5.6)

$$P(0<X<1)=\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{1{,}75}\int_0^1 dx=4/7.$$ ●

Задача 6.11. Знайти числові характеристики показниково розподіленої випадкової величини *X*.

За формулами (5.10*) та (6.6):

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx=\int_{-\infty}^{0} x\cdot 0dx+\int_{0}^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x}dx=\lambda\int_{0}^{\infty} xe^{-\lambda x}dx=$$

$$=\left|\begin{matrix} u=x, & dv=e^{-\lambda x}dx \\ du=dx, & v=-\dfrac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\end{matrix}\right|=\lambda\left\{-\frac{x}{\lambda}e^{-\lambda x}\bigg|_0^{\infty}+\frac{1}{\lambda}\int_0^{\infty} e^{-\lambda x}dx\right\}=-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\bigg|_0^{\infty}=\frac{1}{\lambda}.$$

Для знаходження *D*(*X*) скористаємось формулами (5.12*) та (6.6):

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx-[M(X)]^2=\lambda\int_0^{\infty} x^2e^{-\lambda x}dx-\frac{1}{\lambda^2};$$

$$\int_0^{\infty} x^2e^{-\lambda x}dx=\left|\begin{matrix} u=x^2, & du=2xdx \\ dv=e^{-\lambda x}dx, & v=-\dfrac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\end{matrix}\right|=$$

$$=-\frac{x^2}{\lambda}e^{-\lambda x}\bigg|_0^{\infty}+2\lambda^{-1}\int_0^{\infty} xe^{-\lambda x}dx=\left|\begin{matrix} u=x, & du=dx \\ dv=e^{-\lambda x}dx, & v=-\dfrac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{2}{\lambda}\left\{-\frac{x}{\lambda}e^{-\lambda x}\bigg|_0^{\infty}+\frac{1}{\lambda}\int_0^{\infty} e^{-\lambda x}dx\right\}=\frac{-2}{\lambda^3}e^{-\lambda x}\bigg|_0^{\infty}=\frac{2}{\lambda^3};$$

$$D(X)=\lambda\frac{2}{\lambda^3}-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{\lambda^2};\qquad \sigma(X)=\frac{1}{\lambda}.$$ ●

Задача 6.12. Статистично встановлено, що середній час очікування наступного покупця, який підійде до каси, дорівнює 0,2 хвилини. Час чекання касиром чергового покупця можна вважати випадковою величиною, розподіленою за показниковим законом. Для заміни стрічки касового апарату потрібно 2 хвилини. Знайти імовірність того, що за час заміни стрічки не утвориться черга покупців.

Нехай X – час чекання касиром чергового покупця. За умовою X розподілена за показниковим законом і $M(X)$=0,2. Але $M(X)=\frac{1}{\lambda}$ (див. задачу 6.11). Тому $1/\lambda=0{,}2$ звідки λ=5.

Нехай випадкова подія A – за час заміни стрічки касового апарату не утвориться черга. Тоді протилежна до неї подія

$$\overline{A}=[M(X)\le X\le 2].$$

Але оскільки $M(X)$=0,2, то за формулою (5.6)

$$P(\overline{A})=P[M(X)\le X\le 2]=P(0{,}2\le X\le 2)=\int_{0,2}^{2}f(x)dx=$$

$$=\int_{0,2}^{2}5e^{-5x}dx=-\int_{0,2}^{2}e^{-5x}d(-5x)=-e^{-5x}\Big|_{0,2}^{2}=-e^{-10}+e^{-1}=e^{-1}-e^{-10}.$$

Отже, $P(A)=1-e^{-1}+e^{-10}$. ●

§ 7. СИСТЕМИ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН (БАГАТОВИМІРНІ ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ)

Закон розподілу імовірностей двовимірної дискретної випадкової величини. Функція розподілу двовимірної випадкової величини та її властивості. Густина розподілу імовірностей двовимірної випадкової величини та її властивості. Умовні закони розподілу. Залежні і незалежні випадкові величини. Умовне математичне сподівання. Рівняння регресії. Числові характеристики системи двох випадкових величин. Кореляційний момент. Коефіцієнт кореляції. Система довільного скінченного числа випадкових величин. Кореляційна матриця. Нормальний закон розподілу двовимірної випадкової величини.

КОРОТКІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Системою випадкових величин називається сукупність випадкових величин, яка розглядається як єдине ціле.

Нехай X та Y є випадковими величинами, які або в одному і тому ж випробуванні набирають своїх можливих значень, або розглядаються одночасно. Будемо позначати (X, Y) систему цих величин (двовимірну випадкову величину), де кожну із величин X та Y називатимемо складовими або компонентами. Геометрично (X, Y) можна інтерпретувати як випадкову точку $A(X, Y)$ на площині $x0y$ або випадковий вектор $\overrightarrow{0A}$.

Розглянемо дискретну двовимірну випадкову величину (X, Y), тобто величину, складові якої є дискретними величинами. Множина можливих значень Ω_{XY} такої випадкової величини містить скінченне або зчисленне число точок (x_i, y_j), де $i,j=\overline{1,\infty}$, тобто

$$\Omega_{XY}=\{(x_1,y_1);(x_1,y_2);...;(x_2,y_1);(x_2,y_2);...;(x_3,y_1);(x_3,y_2);...\}.$$

Позначимо:

$$p_{ij}=P\big((X=x_i)\cdot(Y=y_j)\big)=P\big(X=x_i;Y=y_j\big), \tag{7.1}$$

тобто p_{ij} – це імовірність того, що при випробуванні складова X набирає можливого значення x_i і одночасно з цим складова Y набирає значення y_j, де $(x_i, y_j)\in\Omega_{XY}$, крапка – множення подій.

Законом розподілу імовірностей або **розподілом дискретної двовимірної випадкової величини** (X, Y) називається відповідність між парами чисел $(x_i, y_j)\in\Omega_{XY}$ та імовірностями p_{ij}.

Закон розподілу дискретної двовимірної величини (X, Y) задається таблицею, вид якої для випадку скінченного числа точок множини Ω_{XY} визначається табл. 7.1.

Таблиця 7.1

$X \backslash Y$	y_1	y_2	…	y_j	…	y_n
x_1	p_{11}	p_{12}	…	p_{1j}	…	p_{1n}
x_2	p_{21}	p_{22}	…	p_{2j}	…	p_{2n}
…	…	…	…	…	…	…
x_i	p_{i1}	p_{i2}	…	p_{ij}	…	p_{in}
…	…	…	…	…	…	…
x_m	p_{m1}	p_{m2}	…	p_{mj}	…	p_{mn}

Перший стовпець таблиці містить всі можливі значення складової X, а перший рядок – всі можливі значення складової Y. В клітинці, яка розміщена на перетині рядка «x_i» та стовпця «y_j» вказана імовірність p_{ij} того, що вектор (X, Y) набере значення (x_i, y_j), де $i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}$.

Всі можливі (випадкові) події $(X=x_i; Y=y_j)$ при $i = 1, 2, \dots m$, $j = 1, 2, \dots n$ утворюють повну групу, а тому $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1.$ Цю рівність називають **умовою нормування** для системи (X, Y).

Знання закону розподілу системи двох дискретних випадкових величин дозволяє знайти закони розподілу її складових. Справді, з урахуванням повноти групи подій ($Y = y_1$), ($Y = y_2$), ..., ($Y = y_n$) для $i=\overline{1,m}$ має місце рівність

$$(X=x_i)=(X=x_i)(Y=y_1)+(X=x_i)(Y=y_2)+\dots+(X=x_i)(Y=y_n),$$

доданки якої є попарно несумісними подіями. Використання теореми додавання імовірностей і позначень (7.1) дає рівність

$$P(X=x_i)=p_{i1}+p_{i2}+\dots+p_{in}, \quad (i=\overline{1,m}). \qquad (7.2)$$

Отже, для знаходження $P(X = x_i)$ потрібно додати імовірності рядка «x_i» табл. 7.1. Аналогічно просумувавши імовірності стовпця «y_j», отримаємо:

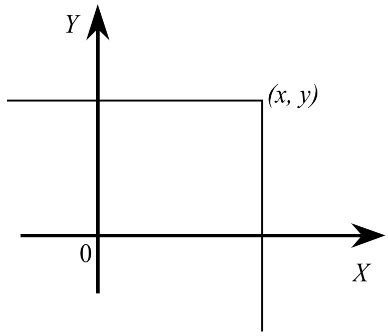
$$P(Y=y_j)=\sum_{i=1}^{m} p_{ij} \quad (j=\overline{1,n}). \qquad (7.3)$$

Розглянемо двовимірну випадкову величину (X, Y), складові якої можуть бути дискретними або неперервними величинами і множина можливих значень якої є Ω_{XY}.

Функцією розподілу (**імовірностей**) двовимірної випадкової величини (X, Y) називається функція $F(x, y)$ детермінованих аргументів x та y, яка дорівнює імовірності того, що при випробуванні X набере значення, менше від x, і при цьому Y набере значення, менше від y:

$$F(x,y)=P\{(X<x)\cdot(Y<y)\}=P(X<x, Y<y). \qquad (7.4)$$

З геометричної точки зору функція розподілу є імовірність попадання випадкової точки (X, Y) в нескінченний квадрант з вершиною в точці (x, y), який знаходиться лівіше і нижче цієї точки (мал. 7.1).



Мал. 7.1.

Властивості функції розподілу імовірностей двовимірної випадкової величини.

1°. $0 \le F(x, y) \le 1$.

2°. $F(x, y)$ є неспадною функцією по кожному аргументу, тобто

$F(x_2, y) \ge F(x_1, y)$, якщо $x_2 > x_1$;

$F(x, y_2) \ge F(x, y_1)$, якщо $y_2 > y_1$.

3°. Для $F(x, y)$ виконуються граничні співвідношення

$$\lim_{x\to-\infty} F(x,y)=\lim_{y\to-\infty} F(x,y)=\lim_{\substack{x\to-\infty\\ y\to-\infty}} F(x,y)=0, \lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} F(x,y)=1.$$

4°. Якщо один із аргументів $F(x, y)$ прямує до $+\infty$, то вона перетворюється у функцію розподілу випадкової величини, яка відповідає іншому аргументу:

$$F(x,+\infty)=F_1(x), F(+\infty,y)=F_2(y),$$

де $F_1(x)$ і $F_2(y)$ – відповідно функції розподілу випадкових величин X та Y.

5°. $F(x, y)$ неперервна зліва по кожному аргументу.

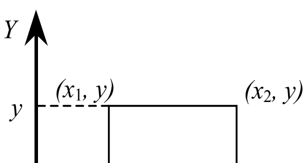
Властивості 1°-5° є **характеристичними**. Це означає, що кожна функція $F(x, y)$, яка володіє цими властивостями, є функцією розподілу двовимірної випадкової величини (X, Y).

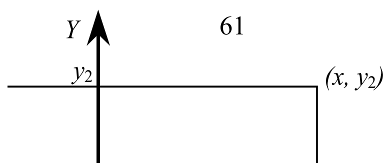
Використання розглянутих властивостей і теореми додавання імовірностей дозволяє отримати такі твердження.

Наслідок 1. Імовірність попадання при випробуванні випадкової точки (X, Y) в нескінченну напівсмугу дорівнює приросту функції розподілу по одному із аргументів (мал. 7.2, 7.3):

$$P\{(x_1<X<x_2)\cdot(Y<y)\}=F(x_2,y)-F(x_1,y),$$

$$P\{(X<x)\cdot(y_1<Y<y_2)\}=F(x,y_2)-F(x,y_1).$$



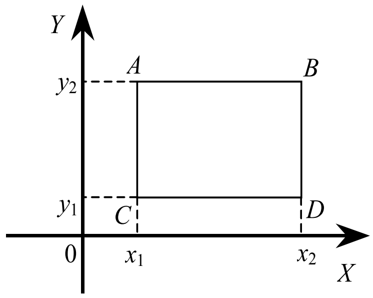


Мал. 7.2. Мал. 7.3.

Наслідок 2. Імовірність попадання при випробуванні випадкової точки (X, Y) в прямокутник, сторони якого паралельні координатним осям, обчислюється за формулою

$$P\{(x_1 < X < x_2)\cdot(y_1 < Y < y_2)\} =$$
$$= F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - \left(F(x_2, y_1) - F(x_1, y_1)\right). \qquad (7.5)$$

Вказана імовірність знаходиться наступним чином: від імовірності попадання випадкової точки в півсмугу AB віднімається імовірність попадання випадкової точки в півсмугу CD (мал. 7.4).



Мал.7.4.

Густиною сумісного розподілу імовірностей $f(x, y)$ двовимірної неперервної випадкової величини (X, Y) називається друга мішана частинна похідна від функції розподілу:

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}. \qquad (7.6)$$

Геометрично функцію $f(x, y)$ можна зобразити певною поверхнею, яку називають **поверхнею розподілу**.

Імовірність попадання неперервної двовимірної випадкової величини (X, Y) в довільну область D визначається за формулою

$$P\left((X, Y) \in D\right) = \iint_D f(x, y)\,dxdy. \qquad (7.7)$$

Функцію розподілу двовимірної випадкової величини за відомою густиною розподілу можна знайти за формулою

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(\xi, \zeta)\,d\xi d\zeta. \qquad (7.8)$$

Властивості густини розподілу імовірностей двовимірної неперервної випадкової величини.

1°. $f(x, y) \ge 0.$

2°. $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dxdy = 1.$

Функції розподілу імовірностей складових X та Y двовимірної неперервної випадкової величини (X, Y), якщо відомий її закон розподілу, описуються такими функціями розподілу:

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^{x} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \zeta)\,d\zeta, \qquad (7.9)$$

$$F_2(y) = \int_{-\infty}^{y} d\zeta \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \zeta)\,d\xi. \qquad (7.10)$$

Густини розподілів імовірностей складових X та Y двовимірної неперервної випадкової величини (X, Y), якщо відома її густина розподілу, описуються функціями:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dy, \qquad (7.11)$$

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx. \qquad (7.12)$$

Розглянемо систему двох дискретних величин (X, Y), закон розподілу якої наведений у табл. 7.1.

Умовним розподілом складової Y при $X = x_i$ $(i = \overline{1,m})$ називається сукупність умовних імовірностей

$$p(y_1 \mid x_i), p(y_2 \mid x_i), ..., p(y_n \mid x_i),$$

обчислених у припущенні, що випадкова подія ($X = x_i$) відбулася.

Умовним розподілом складової X при $Y = y_j$ $(j = \overline{1,n})$ називається сукупність умовних імовірностей

$$p(x_1 \mid y_j), p(x_2 \mid y_j), ..., p(x_m \mid y_j),$$

обчислених у припущенні, що випадкова подія ($Y = y_j$) відбулася.

В загальному випадку умовні закони розподілу складової Y визначаються рівностями

$$p(y_j \mid x_i) = p_{ij} \Big/ \sum_{j=1}^{n} p_{ij}, \quad j = \overline{1,n}; i = \overline{1,m}. \qquad (7.13)$$

а складової X:

$$p(x_i \mid y_j) = p_{ij} \Big/ \sum_{i=1}^{m} p_{ij}, \quad i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}. \qquad (7.14)$$

Зауваження. Сума імовірностей умовного розподілу як для складової X, так і для складової Y, дорівнює одиниці, тобто

$$\sum_{i=1}^{m} p(x_i \mid y_j) = 1, \quad j = \overline{1,n}; \qquad \sum_{j=1}^{n} p(y_j \mid x_i) = 1, \quad i = \overline{1,m}.$$

Ці властивості умовних розподілів використовуються для контролю обчислень.

Нехай (X, Y) – неперервна двовимірна випадкова величина.

Вираз для **умовної функції розподілу складової** X має вигляд

$$F(x \mid y) = P\{(X < x) \mid (Y = y)\} = \int_{-\infty}^{x} f(\xi, y)d\xi \big/ f_2(y),$$

а складової Y:

$$F(y \mid x) = P\{(Y < y) \mid (X = x)\} = \int_{-\infty}^{y} f(x, \xi)d\xi \big/ f_1(x),$$

де $f_1(x)$ та $f_2(y)$ визначається рівностями (7.11) та (7.12) відповідно.

Умовні густини розподілу імовірностей (умовні закони розподілу) складових X та Y неперервної двовимірної випадкової величини (X, Y) обчислюються за формулами:

$$\varphi(x \mid y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)}; \qquad (7.15)$$

$$\psi(y \mid x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)}. \qquad (7.16)$$

Теорема множення густин імовірностей. Густина розподілу імовірностей неперервної двовимірної випадкової величини (*X, Y*) дорівнює густині розподілу однієї із складових, помноженій на умовну густину розподілу іншої складової, обчислену при умові, що перша складова набрала задане значення:

$$f(x, y) = f_1(x)\psi(y \mid x) \quad \text{або} \quad f(x, y) = f_2(y)\varphi(x \mid y).$$

Критерії незалежності випадкових величин

Теорема 1. Для того, щоб дискретні випадкові величини *X* та *Y*, які є складовими двовимірної випадкової величини (*X, Y*), були незалежними, необхідно і достатньо, щоб функція розподілу величини (*X, Y*) дорівнювала добутку функцій розподілу складових:

$$F(x, y) = F_1(x)\, F_2(y).$$

Теорема 2. Для того, щоб неперервні випадкові величини *X* та *Y*, що є складовими двовимірної випадкової величини (*X, Y*), були незалежними, необхідно і достатньо, щоб густина розподілу системи (*X, Y*) дорівнювала добутку густин розподілу складових *X* та *Y*:

$$f(x, y) = f_1(x)\, f_2(y).$$

Теорема 3. Якщо двовимірна випадкова величина (*X, Y*) дискретна, то для незалежності її складових необхідно і достатньо виконання рівностей

$$p_{ij} = P(X = x_i)\, P(Y = y_j),$$

для довільних x_i та y_j.

Умовним математичним сподіванням дискретної випадкової величини Y при $X = x$ (де x – певне можливе значення випадкової величини X) називається сума добутків можливих значень Y на відповідні умовні імовірності:

$$M(Y \mid X = x) = \sum_{j=1}^{n} y_j\, p(y_j \mid x). \qquad (7.17)$$

Аналогічно визначається математичне сподівання дискретної випадкової величини X при $Y = y$:

$$M(X \mid Y = y) = \sum_{i=1}^{m} x_i\, p(x_i \mid y). \qquad (7.18)$$

Для неперервних випадкових величин X та Y

$$M(Y \mid X = x) = \int_{-\infty}^{\infty} y\psi(y \mid x)dy, \qquad (7.17^*)$$

$$M(X \mid Y = y) = \int_{-\infty}^{\infty} x\varphi(x \mid y)dx, \qquad (7.18^*)$$

де $\psi(y|x)$ та $\varphi(x|y)$ відповідні умовні густини розподілів системи (X, Y).

Із наведених означень випливає, що при зміні значення x, взагалі кажучи, змінюється і $M(Y|X = x)$. Це означає, що $M(Y|X = x)$ можна розглядати як функцію аргумента x, тобто

$$M(Y \mid X = x) = g(x). \qquad (7.19)$$

Функція $g(x)$ називається **функцією регресії *Y* на *X***, рівняння (7.19) називається **рівнянням регресії *Y* на *X***, а графік функції $g(x)$ – **лінією регресії *Y* на *X***.

Аналогічно умовне математичне сподівання $M(X|Y = y)$ можна розглядати як функцію аргументу y:

$$M(X \mid Y = y) = q(y). \qquad (7.20)$$

Функція $q(y)$ називається **функцією регресії *X* на *Y***, рівняння (7.20) називається **рівнянням регресії *X* на *Y***, а графік функції $q(y)$ – **лінією регресії *X* на *Y***.

Числові характеристики системи двох
випадкових величин

Нехай (X, Y) – двовимірна дискретна випадкова величина, закон розподілу якої заданий табл. 7.1. Тоді **математичне сподівання для кожної складової** визначається рівностями:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i p_{ij}, \qquad M(Y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} y_j p_{ij}.$$

Математичне сподівання для складових системи двох неперервних випадкових величин визначається за формулами:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_1(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x f(x,y)dxdy,$$

$$M(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_2(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y f(x,y)dxdy,$$

де $f(x, y)$ – густина розподілу імовірностей системи (X, Y), $f_1(x)$ та $f_2(y)$ – густини розподілів складових X та Y відповідно.

Дисперсії складових системи (X, Y) визначаються формулами:

$$D(X) = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}\left[(x_i - M(X)\right]^2 p_{ij} & \text{- для дискретної в.в. } (X,Y); \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[(x_i - M(X)\right]^2 f(x,y)dxdy & \text{- для неперервної в.в. } (X,Y); \end{cases}$$

$$D(X) = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{m} x_i^2 P(X = x_i) - \left[M(X)\right]^2 & \text{- для дискретної в.в. } (X,Y), \text{ якщо відомі імовірності } P(X = x_i); \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f_1(x)dx - \left[M(X)\right]^2 & \text{- для неперервної в.в. } (X,Y), \text{ якщо відома густина } f_1(\text{x}); \end{cases}$$

$$D(Y) = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}\left[(y_i - M(Y)\right]^2 p_{ij} & \text{- для дискретної в.в. } (X,Y); \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[(y - M(Y)\right]^2 f(x,y)dxdy & \text{- для неперервної в.в. } (X,Y); \end{cases}$$

$$D(Y) = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{m} y_j^2 P(Y = y_j) - \left[M(X)\right]^2 & \text{- для дискретної в.в. } (X,Y), \text{ якщо відомі імовірності } P(Y = y_j); \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} y^2 f_2(y)dy - \left[M(Y)\right]^2 & \text{- для неперервної в.в. } (X,Y), \text{ якщо відома густина } f_2(\text{y}). \end{cases}$$

Сукупність математичних сподівань $M(X)$ і $M(Y)$ являє собою характеристику положення системи (X, Y). Геометрично – це координати «середньої» точки на площині, навколо якої здійснюється розсіювання значень системи (X, Y) як випадкової точки. Числові характеристики $D(X)$ та $D(Y)$ характеризують розсіювання випадкової точки в напрямку осей $0x$ та $0y$ відповідно.

Кореляційним моментом (**моментом зв'язку**) системи двох випадкових величин (X, Y) називається математичне сподівання добутку відхилень цих величин від своїх математичних сподівань:

$$K_{XY} = M\big[(X - M(X))(Y - M(Y))\big].$$

Використання властивостей математичного сподівання дозволяє записати кореляційний момент у такому вигляді:

$$K_{XY} = M(XY) - M(X)M(Y).$$

Для обчислення кореляційного момента дискретних випадкових величин користуються формулами:

$$K_{XY} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\big(x_i - M(X)\big)\big(y_j - M(Y)\big)p_{ij},$$

$$K_{XY} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j p_{ij} - M(X)M(Y), \qquad (7.21)$$

а для неперервних випадкових величин – формулами:

$$K_{XY} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\big(x - M(X)\big)\big(y - M(Y)\big)f(x, y)dxdy,$$

$$K_{XY} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf(x, y)dxdy - M(X)M(Y). \qquad (7.22)$$

Розмірність кореляційного момента дорівнює добутку розмірностей величин X та Y. Тому для одних і тих же величин величина K_{XY} має різні значення в залежності від того, в яких одиницях вимірюються ці величини. Для усунення цього недоліку вводиться нова числова характеристика – коефіцієнт кореляції.

Коефіцієнтом кореляції r_{XY} випадкових величин X та Y називається відношення кореляційного момента до добутку середніх квадратичних відхилень цих величин:

$$r_{xy} = K_{XY}/(\sigma_x \sigma_y). \qquad (7.23)$$

Властивості коефіцієнта кореляції

1°. r_{xy} є безрозмірною величиною.

2°. $|r_{xy}| \le 1.$

3°. Якщо $r_{xy} = \pm 1,$ то між складовими X та Y випадкової величини (X, Y) існує лінійна функціональна залежність: $Y = \alpha_1 X + \alpha_0$, де α_1, α_0 – дійсні числа.

4°. Якщо $r_{xy} \ne 0,$ то складові X та Y двовимірної випадкової величини (X, Y) залежні.

Коефіцієнт кореляції r_{XY} характеризує силу лінійного зв'язку між випадковими величинами X та Y: чим ближче $|r_{xy}|$ до одиниці, тим тісніший лінійний зв'язок; чим ближче $|r_{xy}|$ до нуля, тим слабший лінійний зв'язок.

Випадкові величини X та Y називаються **корельованими**, якщо $r_{xy} \ne 0,$ і **некорельованими**, якщо $r_{xy} = 0.$

Згідно із властивістю 4° коефіцієнта кореляції **із корельованості двох випадкових величин випливає їх залежність**. Проте **із залежності випадкових величини ще не слідує їх корельованість**, тобто вони можуть бути або корельованими, або некорельованими.

З другого боку, **із незалежності двох випадкових величин випливає їх некорельованість**, але **із некорельованості випадкових величини ще не можна зробити висновок про їх незалежність**.

Система довільного скінченного числа
випадкових величин

Функцією розподілу системи *n* випадкових величин $(X_1, X_2, ..., X_n)$ називається функція детермінованих аргументів $x_1, x_2, ..., x_n$, яка дорівнює імовірності сумісного виконання нерівностей $X_i < x_i$ $(i = \overline{1, n})$:

$$F(x_1, x_2, ..., x_n) = P\big\{(X_1 < x_1)\cdot(X_2 < x_2)\cdot ...\cdot(X_n < x_n)\big\},$$

де крапками позначено добуток (перетин) подій.

Ця функція є неспадною по кожному із аргументів x_i, при решті фіксованих. Вона прямує до нуля, якщо хоча б один аргумент прямує до $-\infty$.

Якщо із системи випадкових величин $X_1, X_2, ..., X_n$ виділити деяку підсистему, наприклад $X_1, X_2, ..., X_k$, де $k < n$, то функція розподілу для цієї підсистеми матиме вигляд $F(x_1, x_2, ..., x_k, \infty, ..., \infty)$. Зокрема, функцію розподілу для кожної із величин, що входять до складу системи, одержимо, якщо вся решта аргументів прямуватиме до $+\infty$. Наприклад, $F(x_1) = F(x_1, \infty, ..., \infty)$. Якщо всі аргументи функції розподілу прямують до ∞, то вона прямує до 1.

Густина розподілу імовірностей *n*-вимірної неперервної випадкової величини $(X_1, X_2, ..., X_n)$ визначається рівністю

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \frac{\partial^n F(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 ... \partial x_n}.$$

Ця функція невід'ємна і для неї виконується умова нормування

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, ..., x_n) dx_1 dx_2 ... dx_n = 1.$$

Густина розподілу для підсистеми (X_1, X_2, ..., X_k), де $k < n$, визначається рівністю

$$f(x_1, x_2, ..., x_k) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty}}_{n-k} f(x_1, x_2, ..., x_n) dx_{k+1} dx_{k+2} ... dx_n.$$

Умовним законом розподілу підсистеми випадкових величин (X_1, X_2, ..., X_k) називається такий закон, який отримується за умови, що решта з них (X_{k+1}, X_{k+2}, ..., X_n) набули своїх можливих значень x_{k+1}, x_{k+2}, ..., x_n.

Умовна густина розподілу імовірностей визначається за формулою

$$f(x_1, x_2, ..., x_k \mid x_{k+1}, ..., x_n) = \frac{f(x_1, x_2, ..., x_n)}{f(x_{k+1}, x_{k+2}, ..., x_n)}.$$

Необхідною і достатньою умовою незалежності складових n-вимірної випадкової величини (X_1, X_2, ..., X_n) є виконання рівності

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = f(x_1) f(x_2) ... f(x_n).$$

Числові характеристики *n*-вимірних випадкових величин.

Математичне сподівання неперервної величини X_i, що входить до системи, обчислюється за формулою

$$M(X_i) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} x_i f(x_1, x_2, ..., x_n) dx_1 dx_2 ... dx_n, \quad (i = \overline{1, n}),$$

а дисперсія цієї ж величини (розрахункова формула) –

$$D(X_i) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} x_i^2 f(x_1, x_2, ..., x_n) dx_1 dx_2 ... dx_n - \left[M(X_i)\right]^2.$$

Кореляційні моменти для кожної пари (X_i, Y_j) складових n-вимірної випадкової величини (X_1, X_2, ..., X_n) обчислюються за формулою

$$K_{X_i Y_j} = K_{ij} = M\left\{(X_i - M(X_i))(X_j - M(X_j))\right\}.$$

Зокрема, якщо $i = j$, то $K_{ij} = D(X_i) = \sigma_i^2$.

Всі кореляційні моменти випадкової величини (X_1, X_2, ..., X_n) розміщують у вигляді квадратної таблиці, яка називається **кореляційною матрицею системи *n* випадкових величин**:

$$\begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & ... & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & ... & K_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ K_{n1} & K_{n2} & K_{n3} & ... & K_{nn} \end{pmatrix}.$$

З урахуванням рівностей $K_{ij} = K_{ji}$, $K_{ii} = \sigma_i^2$, кореляційна матриця набирає такого виду:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & K_{12} & K_{13} & ... & K_{1n} \\ K_{12} & \sigma_2^2 & K_{23} & ... & K_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ K_{1n} & K_{2n} & K_{3n} & ... & \sigma_n^2 \end{pmatrix}.$$

У випадку некорельованості кожної пари системи (X_1, X_2, ..., X_n) кореляційна матриця стає діагональною:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & \sigma_n^2 \end{pmatrix}.$$

Знаючи кореляційні моменти, можна визначити **коефіцієнти кореляції для кожної пари випадкових величин *n*-вимірної випадкової величини**. Такі коефіцієнти кореляції називаються парними і визначаються за формулою

$$r_{ij} = \frac{K_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}.$$

Із парних коефіцієнтів кореляції утворюється квадратна матриця, яка називається **нормованою кореляційною матрицею**:

$$\begin{pmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} & \dots & r_{1n} \\ r_{12} & 1 & r_{23} & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{1n} & r_{2n} & r_{3n} & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Розподіл імовірностей системи (*X, Y*) називається нормальним (двовимірна випадкова величина розподілена за нормальним законом), якщо густина розподілу ймовірностей

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r_{xy}^2}} e^{-\frac{1}{2(1-r_{xy}^2)}\left[\frac{(x-a)^2}{\sigma_x^2}+\frac{(y-b)^2}{\sigma_y^2} - 2r_{xy}\frac{(x-a)(y-b)}{\sigma_x\sigma_y}\right]},$$

де п'ять параметрів розподілу мають такий імовірнісний зміст:
$a = M(X)$, $b = M(Y)$, $\sigma_x = \sqrt{D(X)}$, $\sigma_y = \sqrt{D(Y)}$, r_{xy} – коефіцієнт кореляції величин *X* та *Y*.

Відомо якщо система (*X, Y*) розподілена за нормальним законом із параметрами $a, b, \sigma_x, \sigma_y, r_{xy}$, то її складові також розподілені за нормальним законом з параметрами, рівними відповідно a, σ_x та b, σ_y.

Для складових нормально розподіленої двовимірної випадкової величини поняття незалежності та некорельованості є еквівалентними.

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

Задача 7.1. Якість продукції характеризується двома випадковими параметрами: *X* та *Y*. Закон розподілу випадкової величини $Z = (X, Y)$ наведений в табл. 7.2. Знайти: а) закони розподілу складових випадкової величини $Z = (X, Y)$; б) умовний закон розподілу складової *X* при умові, що складова *Y* набрала значення $y_3 = 0{,}2$; в) умовний закон розподілу складової *Y* при умові, що $X = x_1 = 2$; г) умовне математичне сподівання випадкової величини *Y* при умові, що $X = x_2 = 3$.

Таблиця 7.2

X \ Y	0	0,1	0,2	0,3
2	0,2	0,05	0,1	0,05
3	0	0,1	0,15	0,15
4	0	0,15	0	0,05

○ а) Використаємо рівності (7.2):

$P(X = 2) = 0{,}2 + 0{,}05 + 0{,}1 + 0{,}05 = 0{,}4;$
$P(X = 3) = 0 + 0{,}1 + 0{,}15 + 0{,}15 = 0{,}4;$
$P(X = 4) = 0 + 0{,}15 + 0 + 0{,}05 = 0{,}2.$

Закон розподілу складової *X* має вид

X	2	3	4
P	0,4	0,4	0,2

За формулами (7.3)

$P(Y = 0) = 0{,}2 + 0 + 0 = 0{,}2;$
$P(Y = 0{,}1) = 0{,}05 + 0{,}1 + 0{,}15 = 0{,}3;$
$P(Y = 0{,}2) = 0{,}1 + 0{,}15 + 0 = 0{,}25;$
$P(Y = 0{,}3) = 0{,}05 + 0{,}15 + 0{,}05 = 0{,}25,$

звідки отримується закон розподілу складової *Y*:

Y	0	0,1	0,2	0,3
P	0,2	0,3	0,25	0,25

б) Умовні імовірності того, що при випробуванні величина X набере кожне із своїх можливих значень при умові, що складова Y набрала значення $y_3 = 0{,}2$, обчислимо за формулами (7.14), враховуючи те, що сума в знаменнику дорівнює сумі елементів третього стовпця табл. 7.2.

$$P(x_1 \mid y_3) = p_{13}/P(Y = y_3) = 0{,}1/0{,}25 = 0{,}4,$$
$$P(x_2 \mid y_3) = p_{23}/P(Y = y_3) = 0{,}15/0{,}25 = 0{,}6,$$
$$P(x_3 \mid y_3) = p_{33}/P(Y = y_3) = 0/0{,}25 = 0.$$

Запишемо шуканий умовний розподіл складової *X*:

X	2	3
$P(X \mid y_3)$	0,4	0,6

Відмітимо, що в отриманому умовному розподілі *X* при $Y = y_3$ фігурує тільки два можливих значення, оскільки подія ($X = x_3$) при $Y = y_3$ є неможливою. Якщо ж скласти умовний розподіл *X* при $Y = y_4$, то таких можливих значень X вже буде три (проаналізуйте!).

в) Для знаходження умовних імовірностей складової Y при умові, що складова X набрала значення $x_1 = 2$, знайдемо за формулами (7.13). При цьому суму в знаменнику знайдемо, додаючи елементи першого рядка табл. 7.2.

$$P(y_1 \mid x_1) = p_{11}/P(X = x_1) = 0{,}2/0{,}4 = 0{,}5,$$
$$P(y_2 \mid x_1) = p_{12}/P(X = x_1) = 0{,}05/0{,}4 = 0{,}125,$$
$$P(y_3 \mid x_1) = p_{13}/P(X = x_1) = 0{,}1/0{,}4 = 0{,}25,$$
$$P(y_4 \mid x_1) = p_{14}/P(X = x_1) = 0{,}05/0{,}4 = 0{,}125.$$

Отже, шуканий умовний розподіл складової Y має вигляд:

Y	0	0,1	0,2	0,3
$P(Y \mid x_1)$	0,5	0,125	0,25	0,125

г) Використаємо формулу (7.20), де $x = x_2$.

$$M(Y \mid X = x_2) = \sum_{j=1}^{4} y_j\, p(y_j \mid x_2).$$

Обчислимо умовні імовірності $p(y_j|x_2)$, $j = \overline{1,4}$, застосувавши формули (7.13) (див. п. в):

$$p(y_1 \mid x_2) = p_{21}/P(X = x_2) = 0/0{,}4 = 0,$$
$$p(y_2 \mid x_2) = p_{22}/P(X = x_2) = 0{,}1/0{,}4 = 0{,}25,$$
$$p(y_3 \mid x_2) = p_{23}/P(X = x_2) = 0{,}15/0{,}4 = 0{,}375,$$
$$p(y_4 \mid x_2) = p_{24}/P(X = x_2) = 0{,}15/0{,}4 = 0{,}375.$$

Отже,

$$M(Y \mid X = x_2) = 0 \cdot 0 + 0{,}1 \cdot 0{,}25 + 0{,}2 \cdot 0{,}375 + 0{,}3 \cdot 0{,}375 = 0{,}2125. \quad \bullet$$

Задача 7.2. Двовимірна випадкова величина задана функцією розподілу

$$F(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le 0 \text{ або } y \le 0, \\ (1 - e^{-x})(1 - e^{-2y}), & \text{якщо } x > 0 \text{ і } y > 0. \end{cases}$$

Знайти імовірність того, що при випробуванні випадкова величина (X, Y) набере значення з квадрату, вершини якого мають такі координати: (0, 0), (0, 1), (1, 0) і (1, 1).

○ Множина точок вказаного в умові квадрата визначається співвідношеннями $\{(0 \le X < 1) \cdot (0 \le Y < 1)\}$, а тому за формулою (7.5)

$$P\{(0 \le X < 1) \cdot (0 \le Y < 1)\} = F(1{,}1) - F(0{,}1) - \left(F(1{,}0) - F(0{,}0)\right) =$$
$$= (1 - e^{-1})(1 - e^{-2}) - (1 - e^{0})(1 - 2^{-2}) - (1 - e^{-1})(1 - e^{0}) + 0 =$$
$$= (1 - e^{-1})(1 - e^{-2}) \approx 0{,}547. \quad \bullet$$

Задача 7.3. Двовимірна випадкова величина (X, Y) розподілена із сталою густиною розподілу всередині квадрата D, вершини якого мають координати (0; 0), (0; 2), (2; 0), (2; 2).

Знайти густину імовірностей $f(x, y)$ і функцію розподілу.

○ Згідно з умовою задачі густина розподілу імовірностей має такий вид

$$f(x, y) = \begin{cases} C, & \text{якщо } (x, y) \in D, \\ 0, & \text{якщо } (x, y) \notin D, \end{cases}$$

де C – стала. Знайдемо C, використавши властивість 2° густини розподілу

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dxdy = \iint_D C\,dxdy = C\int_0^2 dx \int_0^2 dy = 2C\int_0^2 dx = 4C = 1,$$

звідки C = 1/4. Отже,

$$f(x, y) = \begin{cases} 0{,}25, & \text{якщо } (x, y) \in D, \\ 0, & \text{якщо } (x, y) \notin D. \end{cases}$$

Функцію розподілу знайдемо за формулою (7.8).

Нехай $x \le 0$ або $y \le 0$, тоді $f(x, y) = 0$ і

$$F(x, y) = P\{(X < x) \cdot (Y < y)\} = \int_{-\infty}^{x} d\xi \int_{-\infty}^{y} f(\xi, \zeta)\,d\zeta = 0.$$

Якщо $0 < x \le 2$ і $0 < y \le 2$, тоді

$$F(x,y)=P\{(X<x)\cdot(Y<y)\}=\int_{-\infty}^{x}d\xi\int_{-\infty}^{y}f(\xi,\zeta)d\zeta=$$

$$=\int_0^x d\zeta\int_0^y 0{,}25d\xi=0{,}25\int_0^x yd\xi=0{,}25xy.$$

Нехай $x>2$ і $y\in(0,2]$, тоді

$$F(x,y)=P\{(X<x)\cdot(Y<y)\}=\int_{-\infty}^{x}d\xi\int_{-\infty}^{y}f(\xi,\zeta)d\zeta=$$

$$=\int_0^y d\zeta\int_0^2 0{,}25d\xi=0{,}5\int_0^y d\zeta=0{,}5y.$$

В цьому випадку враховувалося те, що $f(x,y)=0$ за межами квадрата D.

Нехай $x\in(0,2]$ і $y>2$, тоді

$$F(x,y)=P\{(X<x)\cdot(Y<y)\}=\int_{-\infty}^{x}d\xi\int_{-\infty}^{y}f(\xi,\zeta)d\zeta=0{,}25\int_0^x d\xi\int_0^2 d\zeta=0{,}5x.$$

Нарешті, якщо $x>2$ і $y>2$, то

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}d\xi\int_{-\infty}^{y}f(\xi,\zeta)d\zeta=0{,}25\int_0^2 d\xi\int_0^2 d\zeta=1.$$

Таким чином, шукана функція розподілу даної двовимірної випадкової величини має такий вид:

$$F(x,y)=\begin{cases}0, & \text{якщо } x\le 0 \text{ або } y\le 0,\\ 0{,}25xy, & \text{якщо } x\in(0,2] \text{ і } y\in(0,2],\\ 0{,}5y, & \text{якщо } x>2 \text{ і } y\in(0,2],\\ 0{,}5x, & \text{якщо } x\in(0,2] \text{ і } y>2,\\ 1, & \text{якщо } x>2 \text{ і } y>2.\end{cases}$$

●

Задача 7.4. Густина розподілу імовірностей двовимірної випадкової величини (X, Y)

$$f(x,y)=\frac{\sqrt{2}}{\pi}e^{-x^2-2xy-3y^2}.$$

Знайти густину розподілу імовірностей складової Y.

○ Шукану густину знаходимо за формулою (7.12):

$$f_2(y)=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\xi^2-2\xi y-3y^2}d\xi=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(\xi+y)^2-2y^2}d\xi=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{\pi}e^{-2y^2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(\xi+y)^2}d(\xi+y).$$

Враховуючи інтеграл Пуассона $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi}$, остаточно отримаємо

$$f_2(y)=\frac{\sqrt{2}}{\pi}e^{-2y^2}\sqrt{\pi}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-2y^2}.$$

●

Задача 7.5. Густина розподілу імовірностей двовимірної випадкової величини (X, Y)

$$f(x,y)=\begin{cases}4-x-y, & \text{якщо}(x,y)\in D,\\ 0, & \text{якщо}(x,y)\notin D.\end{cases}$$

де D – квадрат, обмежений прямими $x=0$, $x=2$, $y=0$, $y=2$.

Знайти умовні закони розподілу складових, що входять у систему і з'ясувати, чи є залежними ці складові.

○ За формулами (7.11), (7.12) знайдемо густину розподілу імовірностей кожної складової. Для $x\in[0;2]$

$$f_1(x)=\int_0^2(4-x-y)dy=\left.\left((4-x)y-\frac{y^2}{2}\right)\right|_0^2=2(3-x),$$

для $y\in[0;2]$

$$f_2(y)=\int_0^2(4-x-y)dx=2(3-y).$$

Отже,

$$f_1(x)=\begin{cases}2(3-x), & \text{при } x\in[0,2],\\ 0, & \text{при } x\notin[0,2].\end{cases}$$

$$f_2(y)=\begin{cases}2(3-y), & \text{при } y\in[0,2],\\ 0, & \text{при } y\notin[0,2].\end{cases}$$

Використавши формули (7.15) та (7.16), отримаємо умовні густини розподілу імовірностей складових *X* та *Y* відповідно:

$$\varphi(x\,|\,y)=\frac{4-x-y}{2(3-y)},\quad \text{якщо}(x,y)\in D,$$

$$\psi(y\,|\,x)=\frac{4-x-y}{2(3-x)},\quad \text{якщо}(x,y)\in D.$$

Оскільки для $(x, y)\in D$

$$f_1(x)\,f_2(y)=2(3-x)\cdot 2(3-y)\neq 4-x-y=f(x,y),$$

то згідно з теоремою 2 випадкові величини *X* та *Y* є залежними. ●

Задача 7.6. Частка продукції заводу, що містить брак через дефект A, становить 3 %, а через дефект B – 4,5 %. Придатна продукція становить 95 %. Знайти кореляційний момент, коефіцієнти кореляції дефектів A і B, а також функцію розподілу імовірностей.

○ Розглянемо систему дискретних випадкових величин (*X, Y*) Їх значення дорівнюють відповідно 1, якщо продукція має дефект *A* або *B*, і нулю, якщо дефект відсутній. Можливі 4 комбінації значень змінних. Визначимо їхні ймовірності. За умовою придатна продукція становить 95 %, тому $P(X=0;Y=0)=0{,}95$. Випадкова величина *X* набуває значення 1 з імовірністю 0,03, тоді $P(X=0)=1-0{,}03=0{,}97$. Отже, $P(X=0;Y=1)=P(X=0)-P(X=0;\,Y=0)=0{,}97-0{,}95=0{,}02$.

Далі визначаємо такі ймовірності:
$P(X=1;Y=1)=P(Y=1)-P(X=0;\,Y=1)=0{,}045-0{,}02=0{,}025;$ $P(Y=0)=1-P(Y=1)=1-0{,}045=0{,}955.$

Запишемо результати обчислень у таблицю:

X \ Y	0	1
0	0,005	0,025
1	0,95	0,02

Знайдемо кореляційний момент за другою із формул (7.21). Для цього обчислимо значення величин, які входять до цієї формули:

$$M(XY)=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}x_i y_j p_{ij}=0{,}025;\ M(X)=0{,}03;\ M(Y)=0{,}045.$$

Тоді $K_{XY}=0{,}025-0{,}03\cdot 0{,}045=0{,}02365.$

Обчислимо дисперсії X і Y:
$M(X^2)=0{,}03;$ $D(X)=0{,}0291;$ $M(Y^2)=0{,}045;$ $D(Y)=0{,}042975.$ Тоді згідно із (7.26)

$$r_{XY}=\frac{0{,}02365}{\sqrt{0{,}0291\cdot 0{,}042975}}\approx 0{,}669.$$

Знайдемо функцію розподілу $F(X,Y)$.

Якщо $x\le 0$ або $y\le 0$, то у відповідності із властивістю 3 $F(X,Y)=0$.

Нехай $x\in(0;1]$ і $y\in(0;1]$. Тоді випадкова подія $(X<x,Y<y)=(X=0,Y=0)$, оскільки 0 – єдине можливе значення, яке менше від *x* та *y*. А тому згідно із (7.4) для $x\in(0;1]$ і $y\in(0;1]$ $F(X,Y)=P(X<x,Y<y)=P(X=0,Y=0)=0{,}005$.

Якщо $x>1$ і $y\in(0;1]$, тоді подія $(X<x,Y<y)$ відбувається тоді, і тільки тоді, коли одночасно $X=0$ і $Y=0$, або одночасно $X=1$ і $Y=0$, тобто має місце така рівність $(X<x,Y<y)=(X=0,Y=0)+$ $+(X=1,Y=0)$, де доданки справа є несумісними подіями. Використання теореми додавання імовірностей і означення (7.4) дозволяє знайти $F(X,Y)$ на цих проміжках:

$$F(X,Y)=P(X<x,Y<y)=P(X=0,Y=0)+P(X=1,Y=0)=$$
$$=0{,}005+0{,}95=0{,}955.$$

Якщо $x\in(0;1]$ і $y>1$, то за аналогією із попередніми інтервалами

$$F(X,Y)=P(X<x,Y<y)=P(X=0,Y=0)+P(X=0,Y=1)=0{,}03.$$

Нарешті якщо $x>1$ і $y>1$, то подія $(X<x,Y<y)$ – достовірна, і $F(X,Y)=1$.

Отже, функцію розподілу можна записати у вигляді таблиці:

Y \ X			
$x \le 0$	0	0	0
$0 \le x \le 1$	0	0	0,03
$x > 1$	0	0,955	1

●

Задача 7.7. Двовимірна випадкова величина (*X, Y*) розподілена рівномірно в крузі $x^2 + y^2 \le r^2$. Довести, що *X* та *Y* – залежні випадкові величини, але некорельовані.

○ За умовою задачі густина розподілу величини (*X, Y*) має такий вид:

$$f(x, y) = \begin{cases} C = \text{const} & \text{при } x^2 + y^2 \le r^2, \\ 0 & \text{при } x^2 + y^2 > r^2. \end{cases}$$

Використавши властивість 2° густини розподілу імовірності, одержимо $C = 1/(\pi r^2)$. За формулами (7.11), (7.12) знайдемо густину розподілу кожної складової:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dy = \int_{-r}^{r} \left(1/(\pi r^2)\right)dy = \left(1/(\pi r^2)\right) y\Big|_{-r}^{r} = 2/(\pi r);$$

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dx = 2/(\pi r).$$

Оскільки рівність $f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$ не виконується, то робимо висновок, що *X* та *Y* є залежними випадковими величинами.

Кореляційний момент системи (*X, Y*) обчислимо за другою із формул (7.22):

$$K_{XY} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf(xy)dxdy - M(X)M(Y) =$$

$$= \frac{1}{\pi r^2}\int_{-r}^{r} xdx \int_{-\sqrt{r^2 - x^2}}^{\sqrt{r^2 - x^2}} ydy - \frac{1}{\left(\pi r^2\right)^2}\int_{-r}^{r} xdx \int_{-r}^{r} ydy = 0.$$

Отже, $r_{XY} = 0$ і величини *X* та *Y* є некорельованими. ●

§ 8. ФУНКЦІЯ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Функція одного випадкового аргументу та її математичне сподівання. Логарифмічний нормальний закон та χ-розподіл. Функції двох випадкових величин. Розподіл Ст'юдента, розподіл Фішера-Снедокора.

КОРОТКІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Функція одного випадкового аргументу та її математичне сподівання

Якщо кожному можливому значенню випадкової величини (одновимірної) *X* відповідає одне можливе значення випадкової величини *Y*, то *Y* називається функцією випадкового аргумента *X*:

$$Y = \varphi(X). \qquad (8.1)$$

Якщо **аргумент** *X* – **дискретна випадкова величина**, закон розподілу імовірностей якої має такий вид:

$$\begin{array}{c|cccc} X & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \hline P & p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{array},$$

то *Y* також дискретна випадкова величина.

Оскільки випадкові події $(X = x_i)$ та $(Y = \varphi(x_i))$, де $i = \overline{1, n}$, рівносильні, то їх імовірності рівні. Тому випадкова величина *Y* розподілена за таким законом:

$$\begin{array}{c|cccc} Y & \varphi(x_1) & \varphi(x_2) & \dots & \varphi(x_n) \\ \hline P & p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{array}. \qquad (8.2)$$

Якщо серед можливих значень *Y* є однакові, то в остаточному законі розподілу слід залишити одне із них, поставивши йому у відповідність суму імовірностей повторюваних значень *Y*.

Використавши означення математичного сподівання до закону розподілу (8.2), отримаємо:

$$M(Y) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)p_i. \qquad (8.3)$$

Нехай **аргумент** ***X*** **функції** (8.1) **є неперервною випадковою величиною**. Намітимо підхід до знаходження законів розподілу (функції розподілу та густини розподілу імовірностей) випадкової величини *Y* у загальному випадку функції φ, що дозволить оцінити труднощі, які виникають на цьому шляху, а також виділити простіші випадки, що часто зустрічаються на практиці.

Функція розподілу випадкової величини Y, яка пов’язана із величиною X функціональною залежністю (8.1) має вигляд

$$G(y)=P(Y<y)=\sum_i P(X\in\alpha_i(y))=\sum_i \int_{c_i(y)}^{d_i(y)} f(x)dx, \tag{8.4}$$

де $\alpha_i(y)=(c_i(y);d_i(y))=\{x:\varphi(x)<y\}$, $f(x)$ – функція густини розподілу імовірностей випадкової величини X.

Відмітимо, що межі інтервалів $\alpha_i(y)$ можуть бути виражені як явні функції y для кожної конкретної функції $y=\varphi(x)$.

Густину розподілу імовірностей $g(y)$ величини Y можна знайти, продиференціювавши ліву і праву частини рівностей (8.4).

Розглянутий загальний випадок функції $y=\varphi(x)$ дозволяє очікувати, що випадок монотонної функції φ суттєво спростить знаходження законів розподілу випадкової величини Y.

Якщо $y=\varphi(x)$ – диференційована строго зростаюча або строго спадаюча функція, обернена до якої $x=\psi(y)$, то густина розподілу імовірностей випадкової величини Y має такий вид:

$$g(y)=f[\psi(y)]\,|\psi'(y)|. \tag{8.5}$$

Відмітимо, що для знаходження $M(Y)$ не обов’язково знати густину розподілу величини Y. За аналогією із рівністю (8.3) можна отримати, що

$$M(Y)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)f(x)dx.$$

Якщо ж $g(y)$ відома, тоді має місце така рівність:

$$M(Y)=\int_{-\infty}^{\infty}yg(y)dy.$$

Дисперсія функції розподілу випадкової величини Y, яка пов’язана із величиною X функціональною залежністю (8.1) визначається формулою:

$$D(Y)=\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{n}[\varphi(x_i)-M(Y)]^2p_i & \text{– для дискретної в.в.}(X);\\ \int\limits_{-\infty}^{\infty}[\varphi(x)-M(Y)]^2f(x)dx & \text{– для неперервної в.в.}(X).\end{cases}$$

Якщо ж відома $g(y)$, тоді має місце рівність:

$$D(Y)=\int_{-\infty}^{\infty}[y-M(Y)]^2g(y)dy.$$

Випадкова величина Y називається **логарифмічно нормально** (**логнормально**) **розподіленою**, якщо її густина розподілу імовірностей має вид:

$$g(y)=\begin{cases}0, & \text{якщо } y\le 0,\\ \dfrac{1}{y\sigma_x\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\ln y-a_x)^2}{2\sigma_x^2}}, & \text{якщо } y>0.\end{cases} \tag{8.6}$$

Випадкова величина Y має **розподіл** χ, якщо її густина розподілу імовірностей має вид:

$$g(y)=\begin{cases}0, & \text{якщо } y\le 0,\\ \dfrac{1}{2^{k/2-1}\Gamma(k/2)}y^{k-1}e^{-y^2/2}, & \text{якщо } y>0.\end{cases} \tag{8.7}$$

Функції двох випадкових величин

Розглянемо систему двох неперервних випадкових величин (X, Y) із густиною розподілу імовірностей $f(x, y)$. Нехай випадкова величина Z пов’язана із випадковими величинами X та Y функціональною залежністю $Z=\varphi(X, Y)$.

Функція розподілу випадкової величини Z визначається за формулою

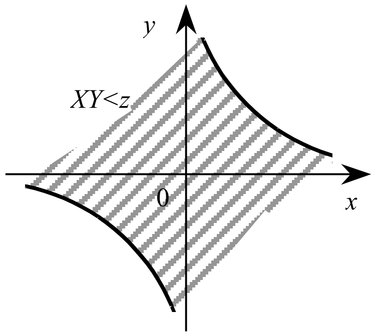
$$G(z)=P(\varphi(X,Y)<z)=P((X,Y)\in D)=\iint_D f(x,y)dxdy, \tag{8.8}$$

де $D=\{(x,y):\varphi(x,y)<z\}$.

Величина z входить в праву частину рівності (8.8) неявно через межі інтегрування. Явний вид функції $z=\varphi(x, y)$ дозволяє в принципі знайти ці межі як функцію z.

Густина розподілу імовірностей випадкової величини Z є похідною від функції розподілу: $g(z)=G'(z)$.

Якщо, наприклад, $Z=XY$, то для визначення функції розподілу і густини розподілу потрібно побудувати криву $xy=z$ на площині $x0y$ і вибрати ту її частину, для якої $XY<z$. В розглянутому випадку – це заштрихована частина на мал. 8.1.



Мал. 8.1.

Тоді

$$G(z) = \int_{-\infty}^{0} dx \int_{z/x}^{\infty} f(x,y)dy + \int_{0}^{\infty} dx \int_{\infty}^{z/x} f(x,y)dy,$$

$$g(z) = G'(z) = -\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x} f\left(x, \frac{z}{x}\right)dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{x} f\left(x, \frac{z}{x}\right)dx.$$

Математичне сподівання та дисперсія функції двох випадкових величин $Z = \varphi(X, Y)$ визначаються формулами:

$$M(Z) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \varphi(x_i, y_j) p_{ij} & \text{– для дискретних в.в. } X \text{ та } Y; \\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x,y) f(x,y)dxdy & \text{– для неперервних в.в. } X \text{ та } Y; \end{cases}$$

$$D(Z) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} [\varphi(x_i, y_j) - M(Z)]^2 p_{ij} & \text{– для дискретних в.в. } X \text{ та } Y; \\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} [\varphi(x,y) - M(Z)]^2 f(x,y)dxdy & \text{– для неперервних в.в. } X \text{ та } Y, \end{cases}$$

де p_{ij} – імовірність того, що вектор (X, Y) набере значення (x_i, y_j) при $i = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,m}$.

Розподіл Ст'юдента, розподіл Фішера-Снедокора

Нехай випадкова величина X має розподіл $\chi / \sqrt{k}$, випадкова величина Y розподілена за нормованим нормальним законом із параметрами $M(Y) = 0$, $\sigma(Y) = 1$. Якщо X та Y незалежні випадкові величини, тоді **випадкова величина $Z = Y/X$ називається розподіленою за законом Ст'юдента (*t*-розподіл)**.

Густина розподілу імовірностей Ст'юдента має вид:

$$g(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi k}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma(k/2)} \left(1 + z^2/k\right)^{-(k+1)/2}, \quad -\infty < z < \infty.$$

Розподіл Ст'юдента має k ступенів вільності і при зростанні k він швидко наближається до нормального.

Якщо Y та X – незалежні випадкові величини, розподілені за законом χ^2 із ступенями вільності k_1 та k_2 відповідно, тоді величина

$$F = \frac{Y/k_1}{X/k_2}$$

має розподіл, який називається **розподілом F Фішера-Снедокора із ступенями вільності k_1 та k_2.**

Густина цього розподілу

$$g(z) = \begin{cases} 0, & \text{при } z \le 0, \\ C_0 \dfrac{z^{(k_1-2)/2}}{(k_2 + k_1 z)^{(k_2+k_1)/2}} & \text{при } z > 0, \end{cases}$$

де

$$C_0 = \frac{\Gamma\left(\frac{k_1+k_2}{2}\right) k_1^{k_1/2} k_2^{k_2/2}}{\Gamma(k_1/2)\Gamma(k_2/2)}.$$

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

Задача 8.1. Випадкова величина X задана законом розподілу

X	-1	1	2
P	0,1	0,5	0,4

. Знайти $M(Y)$, де $Y=\varphi(X)=2X^2+1$.

○ Знайдемо можливі значення Y:

$\varphi(-1)=2(-1)^2+1=3,\ \ \varphi(1)=2\cdot 1^2+1=3,\ \ \varphi(2)=2\cdot 2^2+1=9.$

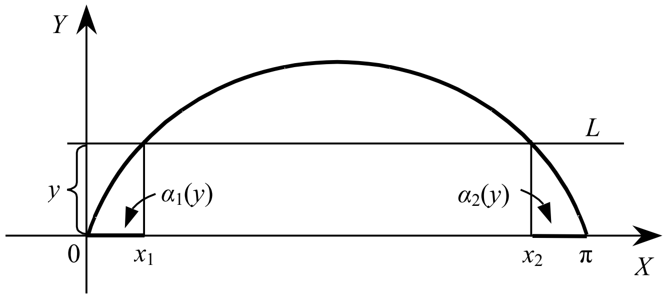
Згідно із (8.3) $M(Y)=3\cdot 0{,}1+3\cdot 0{,}5+9\cdot 0{,}4=5{,}4.$ ●

Задача 8.2. Випадкова величина X задана густиною розподілу імовірностей

$$f(x)=\begin{cases}1/\pi, & \text{якщо } x\in(0,\pi),\\ 0, & \text{якщо } x\notin(0,\pi).\end{cases}$$

Знайти закон розподілу випадкової величини $Y=\sin X$.

○ Побудуємо графік функції $y=\sin x$ на відрізку [0, π] (мал. 8.2.).



Мал. 8.2.

Використовуючи формулу (8.4), отримаємо

$$G(y)=\int_0^{x_1} f(x)dx+\int_{x_2}^{\pi} f(x)dx.$$

Оскільки $x_1=\arcsin y,\ \ x_2=\pi-\arcsin y,$ бо $x_2\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right),$ то функція розподілу

$$G(y)=\int_0^{\arcsin y}\frac{1}{\pi}dx+\int_{\pi-\arcsin y}^{\pi}\frac{1}{\pi}dx=\frac{2}{\pi}\arcsin y,$$ де $y\in(0,1).$

Густина розподілу імовірностей

$$g(y)=G'(y)=\left(\frac{2}{\pi}\arcsin y\right)'=\frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}$$ для $y\in(0,1).$

Отже, функція розподілу випадкової величини Y

$$G(y)=\begin{cases}0, & \text{якщо } y\le 0,\\ 2\pi^{-1}\arcsin y, & \text{якщо } 0<y<1,\\ 1, & \text{якщо } y\ge 1.\end{cases}$$

а густина розподілу

$$g(y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}, & \text{якщо } y\in(0,1),\\ 0, & \text{якщо } y\notin(0,1).\end{cases}$$ ●

Задача 8.3. Випадкова величина X розподілена за нормальним законом із параметрами a та σ.
Знайти закон розподілу випадкової величини $Y=bX+c$, де b та c детерміновані величини (сталі).

○ Оскільки функція $y=bx+c$ є монотонною (при $b>0$ монотонно зростає, при $b<0$ монотонно спадає), то згідно із формулою (8.5) $\psi(y)=(y-c)/b,\ \ \psi'(y)=1/b,$ густина розподілу випадкової величини Y має такий вид:

$$g(y)=f((y-c)/b)\left|1/b\right|=\frac{1}{|b|\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{[y-(ab+c)]^2}{2b^2\sigma^2}}.$$

Отже, дана випадкова величина Y є нормально розподіленою із параметрами $M(Y)=ab+c$ і $\sigma(Y)=|b|\sigma.$ ●

§ 9. ЗАКОН ВЕЛИКИХ ЧИСЕЛ

Лема та нерівність Чебишева. Теорема Чебишева (стійкість середніх). Теорема Бернуллі (стійкість відносних частот). Центральна гранична теорема Ляпунова.

КОРОТКІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Лема Чебишева. Якщо всі можливі значення випадкової величини Y невід'ємні, тоді імовірність того, що вона при випробуванні набере значення, більше від додатного числа b, не більша від дробу, чисельник якого – математичне сподівання від Y, а знаменник – число b:

$$P(Y > b) \le M(Y)/b. \tag{9.1}$$

Нерівність Чебишева. Імовірність того, що відхилення випадкової величини X від її математичного сподівання за абсолютною величиною не більше від додатного числа ε, не менша, ніж $1 - D(X)/\varepsilon^2$:

$$P\left(|X - M(X)| \le \varepsilon\right) \ge 1 - D(X)/\varepsilon^2. \tag{9.2}$$

Зауваження. Якщо випадкова величина X розподілена за біноміальним законом (X – число появи події в n повторних незалежних випробуваннях), тоді нерівність Чебишева набере такого виду:

$$P\left(|m - np| \le \varepsilon\right) \ge 1 - \frac{npq}{\varepsilon^2} \tag{9.3}$$

або

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) \ge 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}, \tag{9.4}$$

де m – число появи події A в n повторних незалежних випробуваннях, $p = P(A)$, m/n – відносна частота появи події A.

Теорема Чебишева. Якщо $X_1, X_2, ..., X_n$ попарно незалежні випадкові величини, дисперсії яких рівномірно обмежені $\left(D(X_i) \le C, i = \overline{1,n}\right)$, тоді для довільного $\varepsilon > 0$ і достатньо великого n імовірність події

$$\left|\frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n} - \frac{M(X_1) + M(X_2) + ... + M(X_n)}{n}\right| \le \varepsilon \tag{9.5}$$

буде як завгодно близькою до одиниці.

При доведені теореми встановлюється правильність нерівності

$$P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n} - \frac{M(X_1) + M(X_2) + ... + M(X_n)}{n}\right| \le \varepsilon\right) \ge$$

$$\ge 1 - C/(n\varepsilon^2). \tag{9.6}$$

Теорема Бернуллі. Якщо в кожному із n повторних випробувань імовірність p появи події A стала, тоді як завгодно близька до одиниці імовірність того, що відхилення відносної частоти події A від імовірності p за абсолютною величиною буде як завгодно малим, якщо число випробувань достатньо велике.

З нерівності (9.6) можна отримати нерівність

$$P\left(\left|m/n - p\right| \le \varepsilon\right) \ge 1 - \frac{0{,}25}{n\varepsilon^2}. \tag{9.7}$$

В теоремі Чебишева не використовувалася інформація про закони розподілу випадкових величин. Разом з тим для задач теорії і практики важливим є таке питання: за яким законом розподіляється сума достатньо великого числа випадкових величин?

Випадкову величину

$$Z_n = \left[\sum_{i=1}^{n} X_i - \sum_{i=1}^{n} M(X_i)\right] \Big/ \sqrt{\sum_{i=1}^{n} D(X_i)}. \tag{9.8}$$

будемо називати **нормованою сумою** або **центрованою випадковою величиною**.

Теорема Ляпунова. Якщо $X_1, X_2, ..., X_n$ – незалежні випадкові величини, які мають математичні сподівання m_i, дисперсії σ_i^2 і скінченні абсолютні центральні моменти третього порядку $|\mu_3(X_i)|$ що задовольняють умову

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\left|\mu_3(X_i)\right|\right)\Big/\left(\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2\right)^{3/2}=0, \qquad (9.9)$$

тоді при необмеженому збільшенні n **закон розподілу нормованої суми (9.8) збігається за імовірністю до нормального закону з параметрами** $a = 0$, $\sigma = 1$.

Зміст умови (9.9) полягає в тому, що дисперсія кожної випадкової величини $X_i, i=\overline{1,n}$, складає лише малу частину в загальній дисперсії суми $\sum_{i=1}^{n} X_i$.

Наслідок теореми Ляпунова. Якщо виконуються умови теореми Ляпунова, тоді випадкова величина $\sum_{i=1}^{n} X_i$ **для великих** n **з достатнім ступенем точності розподілена за нормальним законом з параметрами**

$$a=\sum_{i=1}^{n} m_i,\quad \sigma^2=\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2.$$

В практичних задачах центральну граничну теорему Ляпунова часто використовують для обчислення імовірності того, що сума кількох випадкових величин набере значення, яке належить вказаному інтервалу.

Підставою такого використання є так званий

Частковий наслідок теореми Ляпунова. Якщо $X_1, X_2, ..., X_n$ – незалежні випадкові величини, у яких існують рівні математичні сподівання $M(X_i)=m$, дисперсіїї $D(X_i)=\sigma^2$ і абсолютні центральні моменти третього порядку $M\left[|X_i-m|^3\right]=|\mu_3|$ $i=\overline{1,n}$, то закон розподілу суми $Y_n=X_1+X_2+...+X_n$ при $n\to\infty$ необмежено наближається до нормального закону з параметрами $a = nm$, $\sigma^2 = n\sigma^2$.

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

Задача 9.1. Випадкова величина задана законом розподілу

X	0,3	0,6
P	0,2	0,8

Використовуючи нерівність Чебишева, оцінити імовірність того, що X відхилиться від свого математичного сподівання на величину, яка за абсолютною величиною не перевищить 0,2. Перевірити точність отриманої оцінки.

Знайдемо $M(X)$ та $D(X)$

$$M(X)=0{,}3\cdot 0{,}2+0{,}6\cdot 0{,}8=0{,}54,$$

$$D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2=0{,}3^2\cdot 0{,}2+0{,}6^2\cdot 0{,}8-(0{,}54)^2=0{,}0144.$$ Використавши нерівність (9.2) з $\varepsilon = 0{,}3$, отримаємо

$$P\left(|X-0{,}54|\le 0{,}2\right)\ge 1-0{,}0144/0{,}04=0{,}64.$$

Випадкова подія $|X-0{,}54|\le 0{,}2$ рівносильна події $0{,}34\le X\le 0{,}74$, яка відбувається з урахуванням закону розподілу, тоді і тільки тоді, коли X=0,6. Тому

$$P\left(|X-0{,}54|\le 0{,}2\right)=P(0{,}34\le X\le 0{,}74)=P(X=0{,}6)=0{,}8.$$

Отже, нижня межа оцінки імовірності дорівнює 0,64, а справжнє значення імовірності дорівнює 0,8. ●

Задача 9.2. Імовірність появи події в кожному випробуванні дорівнює 0,25. Використовуючи нерівність Чебишева, оцінити імовірність того, що число X появи події міститься в межах від 150 до 250 включно, якщо буде проведено 800 випробувань. Перевірити точність отриманої оцінки.

Використаємо нерівність (9.3), де $X = m$, $np = 800 \cdot 0{,}25 = 200$ і попередньо треба знайти ε. Випадкову подію ($150 \le m \le 250$) можна записати в такій рівносильній формі: $\left(|m-200|\le 50\right)$.

А тому в (9.3) $\varepsilon = 50$ і

$$P(150\le m\le 250)=P\left(|m-200|\le 50\right)\ge 1-\frac{800\cdot 0{,}25\cdot 0{,}75}{50^2}=0{,}94.$$

Тобто, остаточно $P(150 \le m \le 250) \ge 0{,}94$.

Перевіримо точність отриманого результату, використавши інтегральну формулу Лапласа (3.7)

($npq=800\cdot 0{,}25\cdot 0{,}75=150>>9$):

$$P_n(m_1 \le m \le m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

$$x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{250 - 800 \cdot 0{,}25}{\sqrt{150}} = \frac{50}{12{,}247} = 4{,}08,$$

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{150 - 200}{\sqrt{150}} = \frac{-50}{12{,}247} = -4{,}08,$$

$$P_n(150 \le m \le 250) \approx \Phi(4{,}08) - \Phi(-4{,}08) = 2\Phi(4{,}08) = 2 \cdot 0{,}4999992 = 0{,}9999984.$$

Отже, нижня межа оцінки імовірності дорівнює 0,94, а справжнє значення імовірності дорівнює 0,9999984. ●

Задача 9.3. Дисперсія кожної із 2500 незалежних випадкових величин не перевищує 5. Оцінити імовірність того, що абсолютна величина відхилення середнього арифметичного цих випадкових величин від середнього арифметичного їх математичних сподівань не перевищить 0,4.

Для задачі виконуються обидві умови теореми Чебишева, а тому можна використати нерівність (9.6), де $n = 2500$, $\varepsilon = 0{,}4$, $C = 5$. Тоді

$$P\left(\left|\left(\sum_{i=1}^{2500} X_i - \sum_{i=1}^{2500} M(X_i)\right)\Big/2500\right| \le 0{,}4\right) \ge 1 - \frac{5}{2500(0{,}4)^2} = \frac{79}{80}.$$

Отже, шукана імовірність оцінюється знизу числом 79/80. ●

Задача 9.4. Відомо, що 80% виробів механічного цеху є першосортними. Оцінити імовірність того, що відносна частоту виробів першого сорту серед 20 000 виготовлених відрізнятиметься від імовірності виготовлення виробу першого сорту не більше, ніж на 0,02 в той чи інший бік. Перевірити точність отриманої оцінки.

Подія A – виготовлений виріб першосортний. Тоді $P(A) = 0{,}8$, $n = 20\,000$, $\varepsilon = 0{,}02$. Використаємо нерівність (9.7):

$$P\left(\left|m/n - 0{,}8\right| \le 0{,}02\right) \ge 1 - \frac{0{,}25}{20000 \cdot 0{,}0004} = 31/32.$$

Таким чином, шукана імовірність оцінюється знизу числом 31/32.

Для перевірки точності отриманої оцінки використаємо формулу (3.8):

$$P\left(\left|m/n - p\right| \le \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{n/(pq)}\right),$$

ε=0,02, n=20000, p=0,8, q=0,2,

$$P\left(\left|m/n - 0{,}8\right| \le 0{,}02\right) \approx 2\Phi\left(0{,}02\sqrt{\frac{20000}{0{,}8 \cdot 0{,}2}}\right) = 2\Phi(7{,}07) = 2 \cdot 0{,}5 = 1.$$

Оскільки npq=3200 і 7,07>5, то похибки у наближеній рівності (3.8) і $\Phi(7{,}07) \approx 0{,}5$ є надзвичайно малими, тобто подія $\left(\left|m/n - 0{,}8\right| \le 0{,}02\right)$ є майже достовірною. ●

Задача 9.5. Випадкові величини X_1, X_2, …, X_n, … є незалежними, причому для k=1, 2, …, n, … закон розподілу величини X_k має такий вид:

X_k	$-\sqrt{k}$	0	$\sqrt{k}$
P	$1/(4k)$	$1-2/k$	$1/(4k)$

Чи можна використати теорему Чебишева до цієї послідовності випадкових величин?

Можливість використання теореми Чебишева означає виконання обох умов теореми відносно послідовності випадкових величин. Згідно з умовою задачі перша з них виконується. Перевіримо виконання другої умови – рівномірну обмеженість дисперсій випадкових величин. Для цього знайдемо $D(X_k)$, де k=1, 2, …, n, … .

Оскільки $M(X_k) = \frac{-\sqrt{k}}{4k} + 0 \cdot (1 - \frac{2}{k}) + \frac{\sqrt{k}}{4k} = 0$, то за розрахунковою формулою

$$D(X_k) = M(X_k^2) - [M(X_k)]^2 = \left(-\sqrt{k}\right)^2 \cdot \frac{1}{4k} + 0 \cdot \left(1 - \frac{2}{k}\right) + \left(-\sqrt{k}\right)^2 \cdot \frac{1}{4k} =$$

$= 0{,}5$.

Отже, дисперсії випадкових величин X_1, X_2, …, X_n, … обмежені в сукупності сталою C=0,5, а тому до даної послідовності випадкових величин можна використати теорему Чебишева. ●

Задача 9.6. Розмір виплати кожному клієнту банку випадковий. Статистичні дані цього банку показали, що середня виплата одному клієнту складає 1000 грн., а середнє квадратичне відхилення цієї ж величини – 360 грн. Вважаючи, що виплати окремим клієнтам є незалежними, знайти, скільки повинно бути готівки в банку, щоб з імовірністю, не меншою 0,95, грошей вистачило б на обслуговування 80 клієнтів. Знайти цю саму величину у додатковому припущенні, що абсолютний центральний момент третього порядку для виплати кожного клієнту є сталим.

Нехай випадкова величина X_i – виплата i-му клієнту, де $i=\overline{1,80}$; x – невідома кількість готівки в банку для обслуговування 80 клієнтів. За умовою $M(X_i)$=1000 і $\sigma(X_i)$=360 для $i=\overline{1,80}$,

$$P(X_1+X_2+...+X_{80}\le x)\ge 0{,}95 \qquad (9.10)$$

Оскільки інформація про закон розподілу випадкової величини $X_1+X_2+\ldots+X_{80}$ відсутня, то для знаходження невідомого числа x використаємо нерівність Чебишева для величини $\overline{X}=(X_1+X_2+...+X_{80})/80$:

$$P\left(\left|\overline{X}-M(\overline{X})\right|\le\varepsilon\right)\ge 1-D(\overline{X})/\varepsilon^2. \qquad (9.11)$$

Враховуючи властивості математичного сподівання і дисперсії, незалежність випадкових величин $X_1,X_2,\ldots,X_{80}$, а також умову задачі, отримаємо:

$$M(\overline{X})=M\left(\sum_{i=1}^{80}X_i/80\right)=\left[\sum_{i=1}^{80}M(X_i)\right]\Big/80=\left(\sum_{i=1}^{80}1000\right)\Big/80=1000,$$

$$D(\overline{X})=D\left(\sum_{i=1}^{80}X_i/80\right)=\frac{1}{80^2}\sum_{i=1}^{80}D(X_i)=\frac{1}{80^2}\sum_{i=1}^{80}\sigma^2(X_i)=$$

$$=\frac{1}{80^2}\sum_{i=1}^{80}360^2=360^2/80=1620.$$

Випадкова подія $\left(\sum_{i=1}^{80}X_i\le x\right)$ рівносильна події $\left(\frac{X_1+X_2+...+X_{80}}{80}-1000\le\frac{x}{80}-1000\right)$ або $\left[\left|\overline{X}-M(\overline{X})\right|\le\frac{x}{80}-1000\right]$,

звідки

$$P(X_1+X_2+...+X_{80}\le x)=P\left[\left|\overline{X}-M(\overline{X})\right|\le\frac{x}{80}-1000\right].$$

Тому якщо ліва частина нерівності (9.11), де $\varepsilon=\frac{x}{80}-1000$, буде не меншою від 0,95, тоді виконається нерівність (9.10). Отже, для знаходження невідомого числа x отримаємо нерівність

$$1-\frac{1620}{\left(\frac{x}{80}-1000\right)^2}\ge 0{,}95,$$

яка рівносильна нерівностям

$$\frac{1620}{\left(\frac{x}{80}-1000\right)^2}\le 0{,}05\Leftrightarrow\left(\frac{x}{80}-1000\right)^2\ge 32400\Leftrightarrow\frac{x}{80}-1000\ge 180\Leftrightarrow x\ge 94400.$$

Врахуємо тепер додаткову умову про сталість для кожного клієнта абсолютного центрального моменту третього порядку величини виплати. Тоді згідно із спрощеним наслідком теореми Ляпунова випадкова величина $Y_{80}=\sum_{i=1}^{80}X_i$ наближено розподілена за нормальним законом із параметрами $a=\sum_{i=1}^{80}M(X_i)=80000$, $\sigma=\sqrt{\sum_{i=1}^{80}\sigma^2(X_i)}=\sqrt{80\cdot 360^2}=3219{,}94.$

З одного боку

$$P(Y_{80}\le x)=P(-\infty<Y_{80}\le x)=\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{-\infty-a}{\sigma}\right)=$$

$$=\Phi\left(\frac{x-80000}{3219{,}94}\right)+0{,}5,$$

а за умовою $P(Y_{80}\le x)\ge 0{,}95.$ Отже, x можна знайти із нерівності

$$\Phi\left(\frac{x-80000}{3219{,}94}\right)\ge 0{,}45.$$

Використавши табл. 3 додатків і монотонне зростання функції Лапласа, отримаємо

$$\frac{x-80000}{3219{,}94}\ge 1{,}645,$$

звідки $x \geq 85296{,}801$. ●

Задача 9.7. Кожна із 200 незалежних випадкових величин $X_1, X_2, \ldots, X_{200}$ рівномірно розподілена на проміжку [0; 0,8]. Знайти:

1) наближений закон розподілу для випадкової величини $Y = \sum_{i=1}^{200} X_i$; 2) P(Y<0,7).

Згідно із задачею 6.9 для рівномірно розподіленої на проміжку $[a;b]$ величини X

$$M(X) = \frac{b+a}{2}, \quad D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Тому $M(X_i)=0{,}4$, $D(X_i)=4/75$, $i = \overline{1{,}200}$.

Очевидно, що і абсолютні центральні моменти третього порядку для кожної із величин $X_1, X_2, \ldots, X_{200}$ також рівні. За спрощеним наслідком теореми Ляпунова випадкову величину Y можна вважати розподіленою за нормальним законом із параметрами $a = \sum_{i=1}^{200} M(X_i) = 200 \cdot 0{,}4 = 80$, $\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{200} D(X_i)} = \sqrt{32/3} = 4\sqrt{2/3}$.

У відповідності із рівністю (6.1) густина розподілу величини Y має такий вид

$$f(x) = \frac{\sqrt{3}}{8\sqrt{\pi}} e^{-\frac{3(x-80)^2}{64}}.$$

2) За формулою (6.3)

$$P(Y > 0{,}7) = P(0{,}7 < Y < \infty) = \Phi\left(\frac{\infty - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{0{,}7 - a}{\sigma}\right) =$$

$$= 0{,}5 - \Phi\left(\frac{0{,}7 - 80}{3{,}27}\right) = 0{,}5 + \Phi(24{,}25) \approx 1.$$ ●

Задача 9.8. Випробування розробленого пристрою показали, що причиною його виходу з ладу є відмова певного елемента. Дослідження ідентичних елементів дозволило встановити, що час безвідмовної роботи кожного з них розподілений за показниковим законом, а середній час роботи складає 0,5год. Для збільшення надійності роботи пристрою його модернізували, обладнавши його ста ідентичними елементами таким чином, що при виході з ладу одного елемента миттєво включається наступний тощо. Знайти наближену імовірність того, що пристрій після модернізації безвідмовно пропрацює не менше 30 год.

Випадкова величина X_i – час безвідмовної роботи i-ого елемента $i = \overline{1{,}100}$ – за умовою задачі розподілена за показниковим законом, при цьому $M(X_i)$=0,5год. Згідно із задачею 9.11 $M(X_i) = \frac{1}{\lambda}$, $D(X_i) = \frac{1}{\lambda^2}$, $i = \overline{1{,}100}$, тому $\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2}$, звідки λ=2.

Стосовно випадкових величин $X_1, X_2, \ldots, X_{100}$ виконуються умови спрощеного наслідка теореми Ляпунова, згідно з яким величину $Y = \sum_{i=1}^{100} X_i$ можна вважати розподіленою за нормальним законом з параметрами

$$a = M(Y) = \sum_{i=1}^{100} M(X_i) = 0{,}5 \cdot 100 = 50,$$

$$\sigma = \sigma(Y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{100} D(X_i)} = \sqrt{\frac{1}{4} \cdot 100} = 5.$$

Тоді за формулою (6.3)

$$P(Y \geq 30) \approx P(30 \leq Y < \infty) = \Phi\left(\frac{\infty - 50}{5}\right) - \Phi\left(\frac{30 - 50}{5}\right) =$$

$$= 0{,}5 + \Phi(4) = 0{,}5 + 0{,}4999683 = 0{,}9999683.$$ ●

ДОДАТКИ

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Значення функції Гаусса

Таблиця 1

x	Соті долі *x*									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,39894	39892	39886	39876	39862	39844	39822	39797	39767	39733
0,1	39695	39654	39608	39559	39505	39448	39387	39322	39253	39181
0,2	39104	39024	38940	38853	38762	38667	38568	38466	38361	38251
0,3	38139	38023	37903	37780	37654	37524	37391	37255	37115	36973
0,4	36827	36678	36526	36371	36213	36053	35889	35723	35553	35381
0,5	35207	35029	34849	34667	34482	34294	34105	33912	33718	33521
0,6	33322	33121	32918	32713	32506	32297	32086	31874	31659	31443
0,7	31225	31006	30785	30563	30339	30114	29887	29659	29431	29200
0,8	28969	28737	28504	28269	28034	27798	27562	27324	27086	26848
0,9	26609	26369	26129	25888	25647	25406	25164	24923	24681	24439
1,0	24197	23955	23713	23471	23230	22988	22747	22506	22265	22025
1,1	21785	21546	21307	21069	20831	20594	20357	20121	19886	19652
1,2	19419	19186	18954	18724	18494	18265	18037	17810	17585	17360
1,3	17137	16915	16694	16474	16256	16038	15822	15608	15395	15183
1,4	14973	14764	14556	14350	14146	13943	13742	13542	13344	13147
1,5	12952	12758	12566	12376	12188	12001	11816	11632	11450	11270
1,6	11092	10915	10741	10567	10396	10226	10059	09893	09728	09566
1,7	09405	09246	09089	08933	08780	08628	08478	08329	08183	08038
1,8	07895	07754	07614	07477	07341	07206	07074	06943	06814	06687
1,9	06562	06438	06316	06195	06077	05959	05844	05730	05618	05508
2,0	05399	05292	05186	05082	04980	04879	04780	04682	04586	04491
2,1	04398	04307	04217	04128	04041	03955	03871	03788	03706	03626
2,2	03547	03470	03394	03319	03246	03174	03103	03034	02965	02898
2,3	02833	02768	02705	02643	02582	02522	02463	02406	02349	02294
2,4	02239	02186	02134	02083	02033	01984	01936	01888	01842	01797
2,5	01753	01709	01667	01625	01585	01545	01506	01468	01431	01394
2,6	01358	01323	01289	01256	01223	01191	01160	01130	01100	01071
2,7	01042	01014	00987	00961	00935	00909	00885	00861	00837	00814
2,8	00792	00770	00748	00727	00707	00687	00668	00649	00631	00613
2,9	00595	00578	00562	00545	00530	00514	00499	00485	00470	00457
3,0	00443	00430	00417	00405	00393	00381	00370	00358	00348	00337
3,1	00327	00317	00307	00298	00288	00279	00271	00262	00254	00246
3,2	00238	00231	00224	00216	00210	00203	00196	00190	00184	00178
3,3	00172	00167	00161	00156	00151	00146	00141	00136	00132	00127

Продовження табл. 1

x	Соті долі *x*									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3,4	00123	00119	00115	00111	00107	00104	00100	00097	00094	00090
3,5	00087	00084	00081	00079	00076	00073	00071	00068	00066	00063
3,6	00061	00059	00057	00055	00053	00051	00049	00047	00046	00044
3,7	00042	00041	00039	00038	0037	00035	00034	00033	00031	00030
3,8	00029	00028	00027	00026	00025	00024	00023	00022	00021	00021
3,9	00020	00019	00018	00018	00017	00016	00016	00015	00014	00014

x	Десяті долі *x*				
	0	2	4	6	8
4,	0,0001338	0000589	0000249	0000101	0000040
5,	0000015				

Значення функції $P(m,\lambda) = \dfrac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$

Таблиця 2

m	λ									
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	0,90484	81873	74082	67032	60653	54881	49659	44933	40657	36788
1	09048	16375	22225	26813	30327	32929	34761	35946	36591	36788
2	00452	01637	03334	05363	07582	09879	12166	14379	16466	18394
3	00015	00109	00333	00715	01264	01976	02839	03834	04940	06131
4		00005	00025	00072	00158	00296	00497	00767	01111	01533
5			00002	00006	00016	00036	00070	00123	00200	00307
6					00001	00004	00008	00016	00030	00051
7							00001	00002	00004	00007
8										00001

Продовження табл. 2

m	λ									
	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	5,5	6,0
0	0,22313	13534	08208	04979	03020	01832	01111	00674	00409	00248
1	33470	27067	20521	14936	10569	07326	04999	03369	02248	01487
2	25102	27067	25652	22404	18496	14653	11248	08422	06181	04462
3	12551	18045	21376	22404	21579	19537	16872	14037	11332	08924
4	04707	09022	13360	16803	18881	19537	18981	17547	15582	13385
5	01412	03609	06680	10082	13217	15629	17083	17547	17140	16062
6	00353	01203	02783	05041	07710	10420	12812	14622	15712	16062
7	00076	00344	00994	02160	03855	05954	08236	10444	12345	13768
8	00014	00086	00311	00810	01687	02977	04633	06528	08487	10326
9	00002	00019	00086	00270	00656	01323	02316	03627	05187	06884
10		00004	00022	00081	00230	00529	01042	01813	02853	04130
11		00001	00005	00022	00073	00192	00426	00824	01426	02253
12			00001	00006	00021	00064	00160	00343	00654	01126
13				00001	00006	00020	00055	00132	00277	00520
14					00001	00006	00018	00047	00109	00223
15						00002	00005	00016	00040	00089
16							00002	00005	00014	00033
17								00001	00004	00012
18									00001	00004
19										00001

Значення функції Лапласа $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{\frac{t^2}{2}} dt$

Таблиця 3

x	Соті долі *x*									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,00000	00399	00798	01197	01595	01994	02392	02790	03188	03586
0,1	03983	04380	04776	05172	05567	05962	06356	06749	07142	07535
0,2	07926	08317	08706	09095	09483	09871	10257	10642	11026	11409
0,3	11791	12172	12552	12930	13307	13683	14058	14431	14803	15173
0,4	15542	15910	16276	16640	17003	17364	17724	18082	18439	18793
0,5	19146	19497	19847	20194	20540	20884	21226	21566	21904	22240
0,6	22575	22907	23237	23565	23891	24215	24537	24857	25175	25490
0,7	25804	26115	26424	26730	27035	27337	27637	27935	28230	28524
0,8	28814	29103	29389	29673	29955	30234	30511	30785	31057	31327
0,9	31594	31859	32121	32381	32639	32894	33147	33398	33646	33891

Продовження табл. 3

x	Соті долі *x*									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,0	34134	34375	34614	34850	35083	35314	35543	35769	35993	36214
1,1	36433	36650	36864	37076	37286	37493	37698	37900	38100	38298
1,2	38493	38686	38877	39065	39251	39435	39617	39796	39973	40147
1,3	40320	40490	40658	40824	40988	41149	41308	41466	41621	41774
1,4	41924	42073	42220	42364	42507	42647	42786	42922	43056	43189
1,5	43319	43448	43574	43699	43822	43943	44062	44179	44295	44408
1,6	44520	44630	44738	44845	44950	45053	45154	45254	45352	45449
1,7	45543	45637	45728	45818	45907	45994	46080	46164	46246	46327
1,8	46407	46485	46562	46638	46712	46784	46856	46926	46995	47062
1,9	47128	47193	47257	47320	47381	47441	47500	47558	47615	47670
2,0	47725	47778	47831	47882	47932	47982	48030	48077	48124	48169
2,1	48214	48257	48300	48341	48382	48422	48461	48500	48537	48574
2,2	48610	48645	48679	48713	48745	48778	48809	48840	48870	48899
2,3	48928	48956	48983	49010	49036	49061	49086	49111	49134	49158
2,4	49180	49202	49224	49245	49266	49286	49305	49324	49343	49361
2,5	49379	49396	49413	49430	49446	49461	49477	49492	49506	49520
2,6	49534	49547	49560	49573	49585	49598	49609	49621	49632	49643
2,7	49653	49664	49674	49683	49693	49702	49711	49720	49728	49736
2,8	49744	49752	49760	49767	49774	49781	49788	49795	49801	49807
2,9	49813	49819	49825	49831	49836	49841	49846	49851	49856	49861
3,0	49865	49869	49874	49878	49882	49886	49889	49893	49897	49900
3,1	49903	49906	49910	49913	49916	49918	49921	49924	49926	49929
3,2	49931	49934	49936	49938	49940	49942	49944	49946	49948	49950
3,3	49952	49953	49955	49957	49958	49960	49961	49962	49964	49965
3,4	49966	49968	49969	49970	49971	49972	49973	49974	49975	49976
3,5	49977	49978	49978	49979	49980	49981	49981	49982	49983	49983
3,6	49984	49985	49985	49986	49986	49987	49987	49988	49988	49989
3,7	49989	49990	49990	49990	49991	49991	49992	49992	49992	49992
3,8	49993	49993	49993	49994	49994	49994	49994	49995	49995	49995
3,9	49995	49995	49996	49996	49996	49996	49996	49996	49997	49997
x	Десяті долі *x*									
	0		2		4		6		8	
4,	0,4999683		4999867		4999946		4999979		4999992	
5,	4999997									

ЛІТЕРАТУРА

1. *Бочаров П. П., Печенкин А. В.* **Теория вероятностей. Математическая статистика**. — М.: Гардарика, 1998. — 328 с.
2. *Бугір М. К.* **Практикум з теорії імовірностей та математичної статистики.** — Тернопіль: ЦМДС, 1998. — 171 с.
3. *Булдик Г. М.* **Теория вероятностей и математичская статистика.** — Минск: Вышэйшая школа, 1989. — 285 с.
4. *Гмурман В. Е.* **Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике.** — М.: Высш. шк., 1979. — 400 с.
5. *Гмурман В. Е.* **Теория вероятностей и математическая статистика.** — М.: Высш. шк., 2004. — 479 с.
6. *Грубер Й.* **Эконометрия.** — Том 1. **Введение в эконометрию.** — К.: Астарта, 1996. — 397 с.
7. *Єрьоменко В. О., Шинкарик М. І.* **Теорія імовірностей.** — Тернопіль: Економічна думка, 2000. — 176 с.
8. *Єрьоменко В. О., Шинкарик М. І.* **Математична статистика.** — Тернопіль: Економічна думка, 2002. — 247 с.
9. *Єрьоменко В. О., Шинкарик М. І., Бабій Р. М., Процик А. І.* **Практикум з теорії імовірностей та математичної статистики** / Навчальний посібник для студентів економічних спеціальностей. — Тернопіль: Економічна думка, 2006. — 320 с.
10. *Жлуктенко В. І., Наконечний С. І.* **Теорія ймовірностей і математична статистика:** Навч. метод. посібник. У 2ч. — ч.І. Теорія ймовірностей. — К.: КНЕУ, 2000. — 304 с.
11. *Карасев А. И.* **Теория вероятностей и математическая статистика.** — М.: Статистика, 1977. — 279 с.
12. *Кибзун А.И., Горяинов Е.Р. Наумов А.В., Сиротин А.Н.* **Теория вероятностей и математическая статистика. Базовый курс с примерами и задачами** / Учебн. пособие. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. —224с.
13. *Коваленко И. Н., Гнеденко Б. В.* **Теория вероятностей.** — К.: Вища школа, 1990. — 328 с.
14. *Колемаев В. А., Калинина В. Н.* **Теория вероятностей и математическая статистика:** Учебник / Под ред. В. А. Колемаева. — М.: ИНФРА-М, 2000. — 302 с.
15. *Колемаев В. А., Староверов О. В., Турундаевский В. Б.* **Теория вероятностей и математическая статистика.** — М.: Высш. шк., 1991. — 400 с.
16. *Кремер М.Ш.* **Теория вероятностей и математическая статистика.** — М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002. — 543 с.
17. *Мармоза А.Т.* **Практикум з математичної статистики:** Навч. посібник. —К.: Кондор, 2004. —264с.
18. *Мюллер П., Найман П., Шторм Р.* **Таблицы по математической статистике.** — М.: Финансы и статистика, 1982. — 278 с.
19. *Румшиский Л. З.* **Математическая обработка результатов эксперимента.** — М.: Наука, 1971. — 192 с.
20. **Статистика підприємництва:** Навч. посібник. — Вашків П. Г., Пастер П. І., Сторожук В. П., Ткач Є. І. — К.: Слобожанщина, 1999. — 600 с.
21. *Черняк І.О., Обушна О.М., Ставицький А.В.* **Теорія ймовірностей та математична статистика:** Збірник задач: Навч. посібник. — К.: Т-во “Знання”, КОО, 2001. — 199 с. — (Вища освіта XXI століття).

ЗМІСТ

ТЕОРІЯ ІМОВІРНОСТЕЙ