УДК 517.524

Д. І. Боднар, Х. Й. Кучмінська

АНАЛОГ ТЕОРЕМИ ВАН ФЛЕКА ДЛЯ ДВОВИМІРНИХ НЕПЕРЕРВНИХ ДРОБІВ

Використовуючи необхідні і достатні умови збіжності для двовимірних неперервних дробів з додатними елементами та теорему Стілтьєса-Віталі, отримано аналог теореми Ван Флека для двовимірних неперервних дробів.

Серед найбільш відомих і часто вживаних теорем при дослідженні збіжності неперервних дробів є теорема Ван Флека, яка переносить достатні ознаки збіжності неперервного дробу

$$b_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{i=1}^{\infty} \frac{1}{b_i}$$

з додатними елементами $b_i > 0\,(i = 0, 1, \ldots)$ на той випадок, коли всі частинні знаменники неперервного дробу є комплексними числами, що належать області

$$G_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C} : z \neq 0,\ |\arg z| < \pi/2 - \varepsilon\},$$

де ε — довільне, як завгодно мале додатне число, $0 < \varepsilon < \pi/2$ [4].

Теорема (Van Vleck [4]). *Нехай для елементів неперервного дробу* $b_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{i=1}^{\infty} \frac{1}{b_i}$ *виконуються умови*

$$b_i \neq 0, \quad |\arg b_i| < \pi/2 - \varepsilon \quad (i = 0, 1, \ldots), \quad 0 < \varepsilon < \pi/2.$$

Тоді

1) n-те наближення неперервного дробу f_n $\left(f_n = b_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{i=1}^{n} \frac{1}{b_i}\right)$ *задовольняє умові*

$$f_n \neq 0, \qquad |\arg f_n| < \pi/2 - \varepsilon;$$

2) існують скінченні границі парних і непарних наближень неперервного дробу;

3) неперервний дріб збігається тоді і тільки тоді, коли розбігається ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} |b_i|.$$

За аналогією з неперервними дробами дослідимо збіжність числового двовимірного неперервного дробу з додатними елементами

$$\mathop{\mathrm{D}}_{i=0}^{\infty} \frac{1}{b_{ii} + \mathop{\mathrm{D}}_{j=i+1}^{\infty} \frac{1}{b_{ji}} + \mathop{\mathrm{D}}_{j=i+1}^{\infty} \frac{1}{b_{ij}}}, \tag{1}$$

з підхідними дробами (або їх ще називають наближеннями)

$$f_n := \mathop{\mathrm{D}}_{i=0}^{n-1} \frac{1}{\Phi_i^{(n-1-i)}}, \qquad \Phi_i^{(n-1-i)} = b_{ii} + \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{n-1-i} \frac{1}{b_{i+j,i}} + \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{n-1-i} \frac{1}{b_{i,i+j}}, \tag{2}$$

$n = 1, 2, \ldots, \quad f_1 = 1/b_{00}, \quad \Phi_i^{(0)} = b_{ii}$ і використаємо це дослідження для доведення аналога теореми Ван Флека.

Лема. *Двовимірний неперервний дріб* (1) *з додатними елементами збігається тоді і тільки тоді, коли розбігаються ряди*

$$\sum_{i=1}^{\infty} b_{ij} \;\; (j = 0, 1, \ldots), \quad \sum_{i=1}^{\infty} b_{ij} \;\; (i = 0, 1, \ldots), \quad \sum_{i=0}^{\infty} \Phi_i, \tag{3}$$

де Φ_i *— сума значень збіжних неперервних дробів* $\mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=i+1}^{\infty} \frac{1}{b_{ji}}, \quad \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=i+1}^{\infty} \frac{1}{b_{ij}}$ *та* b_{ii}.

Доведення. *Достатність.* Неперервні дроби

$$\mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=i+1}^{\infty} \frac{1}{b_{ji}}, \quad \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=i+1}^{\infty} \frac{1}{b_{ij}}, \quad i = 0, 1, \ldots$$

і неперервний дріб

$$\mathop{\mathrm{D}}\limits_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\Phi_i} \tag{4}$$

збіжні, згідно з критерієм Зейделя і умовою (3). Позначимо через g_n — n-те наближення дробу (4), а через f_n — n-те наближення дробу (1) та оцінимо зверху різницю $|f_n - g_n|$. Нехай $\varepsilon > 0$ і як завгодно мале число, тоді існує такий номер k, що $|g_{k-1} - g_k| < \varepsilon/2$. Отже, для довільного $\alpha \geq 0, \;\; \beta \geq 0$, виконується нерівність

$$\left| \cfrac{1}{\Phi_0 + \cfrac{\ddots}{\ddots + \cfrac{1}{\Phi_{k-2} + \cfrac{1}{\Phi_{k-1} + \alpha}}}} - \cfrac{1}{\Phi_0 + \cfrac{\ddots}{\ddots + \cfrac{1}{\Phi_{k-2} + \cfrac{1}{\Phi_{k-1} + \beta}}}} \right| < \varepsilon/2. \tag{5}$$

Нехай $f_{k,n}$ — скінченний неперервний дріб вигляду

$$f_{k,n} = \cfrac{1}{\Phi_0 + \cfrac{\ddots}{\ddots + \cfrac{1}{\Phi_{k-1} + \cfrac{1}{\Phi_k^{(n-1-k)} + \cfrac{\ddots}{\ddots + \cfrac{1}{\Phi_{n-1}^{(0)}}}}}}}.$$

Виберемо номер $n, \;\; n > k$, настільки великим, щоб виконувалися нерівності

$$\left| \frac{\Phi_{2r}^{(n-1-2r)} - \Phi_{2r}}{\Phi_{2r}} \right| < \frac{\varepsilon}{2 f_{k,n}}, \qquad \left| \frac{\Phi_{2r+1}^{(n-2-2r)} - \Phi_{2r+1}}{\Phi_{2r+1}} \right| < \frac{\varepsilon}{2 f_{k,n}}, \tag{6}$$

для довільного $r \;\; (0 \leq r \leq k - 1/2)$.

Оцінимо зверху

$$|f_n - g_n| \leq |f_n - f_{k,n}| + |f_{k,n} - g_n|.$$

Згідно з (5), маємо $|f_{k,n} - g_n| < \varepsilon/2$. Використовуючи лему 2 [2] і нерівності (6), де $f_{k,n}$ — точний, а f_n — наближений дроби, отримуємо $|f_n - f_{k,n}| < \varepsilon/2$. Достатність доведена.

Необхідність. Нехай двовимірний неперервний дріб (1) збіжний, тоді покажемо, що всі його залишки Φ_i та $Q_i = \Phi_i + \mathop{D}\limits_{k=i+1}^{\infty} \frac{1}{\Phi_k}$ також збіжні. Оскільки дріб Q_0 є дробом, оберненим до двовимірного дробу (1), то цей дріб також збігається. Позначимо через $f_{0,n}$, $\psi_{0,n}$ і $g_{1,n}$ n-ті наближення до дробів Q_0, Φ_0, $1/Q_0$, відповідно. Враховуючи властивість вилки для дробів з додатними компонентами, маємо для довільних $j,\, k \in \mathbf{N}$:

$$\psi_{0,\,2k} < \psi_{0,\,2j+1}, \qquad g_{1,\,2k} < g_{1,\,2j+1}.$$

Отже, існують скінченні границі

$$\lim_{k\to\infty} \psi_{0,\,2k} = \Psi_0, \qquad \lim_{k\to\infty} g_{1,\,2k} = G_0,$$

$$\lim_{k\to\infty} \psi_{0,\,2j+1} = \Psi_1, \qquad \lim_{k\to\infty} g_{1,\,2j+1} = G_1$$

і виконуються нерівності

$$\Psi_0 \le \Psi_1, \qquad G_0 \le G_1.$$

Оскільки, в силу збіжності дробу Q_0, $\Psi_0 + G_0 = \Psi_1 + G_1$, то $\Psi_0 = \Psi_1$ і $G_0 = G_1$, а тому збігаються дроби Φ_0 і $1/Q_1$. Продовжуючи цей процес, доходимо висновку, що всі залишки Φ_i та Q_i збігаються. Отже, враховуючи структуру Φ_i, є збіжними і неперервні дроби $\mathop{D}\limits_{i=0}^{\infty} \frac{1}{b_{i+1,\,i}}$, $\mathop{D}\limits_{i=0}^{\infty} \frac{1}{b_{i,\,i+1}}$, а тому розбіжні ряди

$$\sum_{i=1}^{\infty} b_{ij} \;\; (j = 0, 1, \ldots), \qquad \sum_{j=1}^{\infty} b_{ij} \;\; (i = 0, 1, \ldots).$$

Покажемо, що неперервний дріб (4) збіжний. Оскільки елементи дробу додатні, то існують скінченні границі його парних і непарних наближень, а тому нерівність (5) виконується при достатньо великих k. Враховуючи оцінку $|f_n - g_n|$, отриману при доведенні достатності, заключаємо що двовимірні неперервні дроби (1) і (4) збігаються чи розбігаються одночасно. Тому, згідно з критерієм Зейделя, ряд $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \Phi_i$ розбіжний. Лема доведена.

Сформулюємо і доведемо аналог теореми Ван Флека для двовимірних неперервних дробів.

Теорема. *Нехай частинні знаменники двовимірного неперервного дробу* (1) *належать області*

$$G_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C} : \quad z \ne 0, \quad |\arg z| < \pi/2 - \varepsilon\},$$

де ε *— довільне, як завгодно мале додатне число* $(0 < \varepsilon < \pi/2)$. *Тоді:*

1) кожне n*-те наближення* f_n *двовимірного неперервного дробу* (1) *належить цій області;*

2) існують скінченні границі парних f_{2n} *і непарних* f_{2n+1} *наближень при* $n \to \infty$ *;*

3) двовимірний неперервний дріб (1) *збігається, якщо розбігаються ряди*

$$\sum_{i=1}^{\infty} |b_{ij}| \quad (j = 0, 1, \ldots), \qquad \sum_{j=1}^{\infty} |b_{ij}| \quad (i = 0, 1, \ldots), \qquad \sum_{i=0}^{\infty} (b_{ii} + F_i),$$

де F_i *— сума значень збіжних неперервних дробів* $\overset{\infty}{\underset{j=i+1}{\mathrm{D}}} \frac{1}{|b_{ji}|}, \ \overset{\infty}{\underset{j=i+1}{\mathrm{D}}} \frac{1}{|b_{ij}|}$.

Доведення. 1) Якщо $b_{ij} \in G_\varepsilon$, то $\frac{1}{b_{ij}} \in G_\varepsilon$, $b_{ii} + \frac{1}{b_{i+1,i}} + \frac{1}{b_{i,i+1}} \in G_\varepsilon$, $b_{ij} + \frac{1}{b_{i+1,j}} \in G_\varepsilon$, $b_{ij} + \frac{1}{b_{i,j+1}} \in G_\varepsilon$ в силу випуклості області G_ε. Отже, для довільного n: $f_n \in G_\varepsilon$.

2) Розглянемо функціональний дріб

$$\overset{\infty}{\underset{i=0}{\mathrm{D}}} \frac{1}{b_{ii}(z) + \Phi_i(z)}, \qquad \Phi_i(z) = \overset{\infty}{\underset{j=i+1}{\mathrm{D}}} \frac{1}{b_{ji}(z)} + \overset{\infty}{\underset{j=i+1}{\mathrm{D}}} \frac{1}{b_{ij}(z)}, \tag{7}$$

де $b_{pq}(z) = |b_{pq}| \exp(i\gamma_{pq} z)$, $\gamma_{pq} = \arg b_{pq}$.

Нехай

$$|\mathrm{Re}\, z| < 1 + \varepsilon(\pi - 2\varepsilon)^{-1}, \tag{8}$$

тоді $|\arg b_{pq}(z)| = |\gamma_{pq} \mathrm{Re}\, z| \le (\pi/2 - \varepsilon)\Big(1 + \dfrac{\varepsilon}{\pi - 2\varepsilon}\Big) = \pi/2 - \varepsilon/2 = \pi/2 - \delta$, $\delta = \varepsilon/2$.

Отже, $b_{pq}(z) \in G_\delta$, якщо z належить області (8).

Розглянемо область

$$D = \{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Re}\, z| < 1 + \varepsilon(\pi - 2\varepsilon)^{-1},\ |\mathrm{Im}\, z| < 1\}.$$

Для $z \in D$ і послідовності голоморфних функцій $\{f_n(z)\}$ виконуються умови теореми Стілтьєса-Віталі [1].

Нехай $z \in \Delta$ і Δ — підмножина D така, що

$$\Delta = \{z : \mathrm{Re}\, z = 0,\ |\mathrm{Im}\, z| < 1\}.$$

Тоді двовимірний неперервний дріб (7) набере вигляду

$$\overset{\infty}{\underset{i=0}{\mathrm{D}}} \frac{1}{\widehat{\Phi}_i}, \qquad \widehat{\Phi}_i = \widehat{b}_{ii} + \overset{\infty}{\underset{j=i+1}{\mathrm{D}}} \frac{1}{\widehat{b}_{ji}} + \overset{\infty}{\underset{j=i+1}{\mathrm{D}}} \frac{1}{\widehat{b}_{ij}}, \tag{9}$$

де $\widehat{b}_{pq} = |b_{pq}| \exp(-\gamma_{pq} y) > 0$, $y = \mathrm{Im}\, z$.

З властивості вилки [3] випливає, що парні і непарні наближення двовимірного неперервного дробу (9) мають границі. Тому, за теоремою Стілтьєса-Віталі, існують скінченні границі $f_{2n}(1) = f_{2n}$, $f_{2n+1}(1) = f_{2n+1}$, тобто пункт 2) справедливий.

Доведемо пункт 3). Враховуючи

$$\widehat{b}_{pq} = |b_{pq}| \exp(-\gamma_{pq} y) \ge |b_{pq}| \exp(-\pi/2),$$

з умов теореми випливає, що ряди

$$\sum_{i=1}^{\infty} \widehat{b}_{ij} \ (j = 0, 1, \ldots), \qquad \sum_{j=1}^{\infty} \widehat{b}_{ij} \ (i = 0, 1, \ldots)$$

розбіжні.

Оцінимо знизу $\widehat{\Phi}_i$:

$$\widehat{\Phi}_i = |b_{ii}| \exp(-\gamma_{ii} y) + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{\infty} \frac{1}{|b_{i+j,\,i}| \exp(-\gamma_{i+j,\,i} y)} +$$

$$\mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{\infty} \frac{1}{|b_{i,\,i+j}| \exp(-\gamma_{i,\,i+j} y)} \geq |b_{ii}| \exp(-\pi/2) + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{\infty} \frac{1}{|b_{i+j,\,i}| \exp((-1)^{j+1}\pi/2)} +$$

$$\mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{\infty} \frac{1}{|b_{i,\,i+j}| \exp((-1)^{j+1}\pi/2)} \geq F_i \exp(-\pi/2).$$

Отже, ряд $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \widehat{\Phi}_i$ — розбіжний. Збіжність дробу (9) випливає з леми, а збіжність дробу (7) — з теореми Стілтьєса-Віталі.

Наслідок. *Двовимірний неперервний дріб, елементи якого належать області G_ε , збігається, якщо розбігаються ряди*

$$\sum_{i=1}^{\infty} |b_{ij}| \ \ (j = 0, 1, \ldots), \qquad \sum_{j=1}^{\infty} |b_{ij}| \ \ (i = 0, 1, \ldots), \qquad \sum_{i=0}^{\infty} |b_{ii}|.$$

1. *Боднар Д. И.* Ветвящиеся цепные дроби. – К.: Наук. думка, 1986. – 176 с.
2. *Боднар Д. І., Кучмінська Х. Й.* Параболічна область збіжності для двовимірних неперервних дробів // Математичні студії. – 1995. – т. 4. – С. 29–36.
3. *Kuchmins'ka Kh.* On the „fork" property for two-dimensional continued fractions // Communications in the analytic theory of continued fractions. – 1997. – v. 6. – P. 32–35.
4. *Van Vleck E. B.* On the convergence and character of the continued fractions... // Trans. Amer. Math. Soc. – 1901. – v. 2. – P. 476–483.

АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ ВАН ФЛЕКА ДЛЯ ДВУМЕРНЫХ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ

Используя необходимые и достаточные условия сходимости двумерных непрерывных дробей с положительными элементами, теорему Стилтьеса-Витали, получен аналог теоремы Ван Флека для двумерных непрерывных дробей.

ANALOGY OF THE VAN VLECK THEOREM FOR TWO-DIMENSIONAL CONTINUED FRACTIONS

Analogy of the Van Vleck theorem for two-dimensional continued fractions has been obtained by using the necessary and sufficient conditions of convergence for two-dimensional continued fractions and the Stieltjes-Vitali theorem.

Державний університет
„Львівська політехніка", Львів

Отримано
16.12.98