УДК 517.524

Д. І. Боднар, О. С. Манзій

ДОСЛІДЖЕННЯ ЗБІЖНОСТІ РОЗВИНЕННЯ ВІДНОШЕННЯ ГІПЕРГЕОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ АППЕЛЯ F_3 У ГІЛЛЯСТИЙ ЛАНЦЮГОВИЙ ДРІБ

Для гіпергеометричних функцій Аппеля F_3 встановлено рекурентні співвідношення, на основі яких побудовано розвинення відношення цих функцій у гіллястий ланцюговий дріб. Досліджено збіжність такого розвинення.

Предметом дослідження будуть гіпергеометричні функції Аппеля F_3:

$$F_3(a, a', b, b'; c; z) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(a)_m (a')_n (b)_m (b')_n}{(c)_{m+n}} \frac{z_1^m z_2^n}{m!n!}, \tag{1}$$

де a, a', b, b', c — комплексні параметри, причому $c \neq 0, -1, -2, \ldots$, $z = (z_1, z_2) \in C^2$, $(a)_k = a(a+1)(a+2)\ldots(a+k-1)$ — символ Похгамера, $(a)_0 = 1$.

Побудуємо розвинення відношення гіпергеометричних функцій Аппеля F_3 у гіллястий ланцюговий дріб (ГЛД), дослідимо його збіжність.

1. Рекурентні формули. Для функцій F_3 мають місце наступні рекурентні співвідношення [2]:

$$F_3(a, a', b, b'; c; z) = F_3(a+1, a', b, b'; c; z) - \frac{b}{c} z_1 F_3(a+1, a', b+1, b'; c+1; z), \tag{2}$$

$$F_3(a, a', b, b'; c; z) = F_3(a, a'+1, b, b'; c; z) - \frac{b'}{c} z_2 F_3(a, a'+1, b, b'+1; c+1; z), \tag{3}$$

$$F_3(a, a', b, b'; c; z) = F_3(a, a', b+1, b'; c; z) - \frac{a}{c} z_1 F_3(a+1, a', b+1, b'; c+1; z), \tag{4}$$

$$F_3(a, a', b, b'; c; z) = F_3(a, a', b, b'+1; c; z) - \frac{a'}{c} z_2 F_3(a, a'+1, b, b'+1; c+1; z), \tag{5}$$

$$F_3(a, a', b, b'; c; z) = \frac{a}{c} F_3(a+1, a', b, b'; c+1; z) + \frac{a'}{c} F_3(a, a'+1, b, b'; c+1; z) - \frac{a+a'+c}{c} F_3(a, a', b, b'; c+1; z). \tag{6}$$

Лема 1. *Функції (1) задовольняють рекурентне співвідношення:*

$$F_3(a, a', b, b'; c; z) = F_3(a, a', b, b'; c+1; z) + \frac{abz_1}{c(c+1)} F_3(a+1, a', b+1, b'; c+2; z) + \frac{a'b'z_2}{c(c+1)} F_3(a, a'+1, b, b'+1; c+2; z). \tag{7}$$

Доведення. Формула (7) випливає із рекурентних формул (2) і (3), де замість c покладено $c+1$, і знайдені вирази для $F_3(a+1, a', b, b'; c; z)$ та $F_3(a, a'+1, b, b'; c; z)$ підставлено у праву частину формули (6).

Лема 2. *Для функцій F_3 виконуються рекурентні співвідношення:*

$$F_3(a,a',b,b';c;z) = \left(1-\frac{a+b+1}{c}z_1\right)F_3(a+1,a',b+1,b';c+1;z)+$$
$$\frac{(a+1)(b+1)}{c(c+1)}z_1(1-z_1)F_3(a+2,a',b+2,b';c+2;z)+$$
$$\frac{a'b'}{c(c+1)}z_2F_3(a+1,a'+1,b+1,b'+1;c+2;z), \quad (8)$$

$$F_3(a,a',b,b';c;z) = \left(1-\frac{a'+b'+1}{c}z_2\right)F_3(a,a'+1,b,b'+1;c+1;z)+$$
$$\frac{ab}{c(c+1)}z_1F_3(a+1,a'+1,b+1,b'+1;c+2;z)+$$
$$\frac{(a'+1)(b'+1)}{c(c+1)}z_2(1-z_2)F_3(a,a'+2,b,b'+2;c+2;z). \quad (9)$$

Доведення. Із формули (4), де a замінено на $a+1$, визначимо вираз для $F_3(a+1,a',b,b';c;z)$ і підставимо його у праву частину (2):

$$F_3(a,a',b,b';c;z)=F_3(a+1,a',b+1,b';c;z)-\frac{a+1}{c}z_1\times$$
$$F_3(a+2,a',b+1,b';c+1;z)-\frac{b}{c}z_1F_3(a+1,a',b+1,b';c+1;z).$$

Співвідношення (8) отримаємо, якщо в останню формулу замість функції $F_3(a+1,a',b+1,b';c;z)$ підставимо її значення, одержане з формули (7), де a замінено на $a+1$ і b на $b+1$, а замість $F_3(a+2,a',b+1,b';c+1;z)$ — вираз, визначений з формули (2), де замість a,b,c покладено $a+1,b+1,c+1$. Аналогічно на основі комбінації формул (3), (5) та (7) доводиться (9).

2. Алгоритм розвинення у ГЛД.

Теорема 1. *Відношення гіпергеометричних функцій F_3 має формальне розвинення у гіллястий ланцюговий дріб*

$$\frac{F_3(a,a',b,b';c;z)}{F_3(a+1,a',b+1,b';c+1;z)} = b_0(z)+\mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty}\sum_{i_k=1}^{2}\frac{c_{i(k)}(z)}{1}, \quad (10)$$

де

$$b_0(z)=1-\frac{a+b+1}{c}z_1, \quad c_{i(1)}(z)=\begin{cases}\dfrac{(a+1)(b+1)z_1(1-z_1)}{c(c+1-(a+b+3)z_1)} & \text{при} \quad i_1=1,\\[2ex] \dfrac{a'b'z_2}{c(c+1-(a'+b'+1)z_2)} & \text{при} \quad i_1=2,\end{cases}$$

$$c_{i(k)}(z)=\begin{cases}\dfrac{(a+p+1)(b+p+1)z_1(1-z_1)}{(c+k-(a+b+2p+1)z_1)(c+k+1-(a+b+2p+3)z_1)} & \text{при}\\ \qquad\qquad i_{k-1}=i_k=1, \\ \dfrac{(a+p+1)(b+p+1)z_1}{(c+k-(a'+b'+2q-1)z_2)(c+k+1-(a+b+2p+3)z_1)} & \text{при}\\ \qquad\qquad i_{k-1}=2, i_k=1, \\ \dfrac{(a'+q)(b'+q)z_2}{(c+k-(a+b+2p+1)z_1)(c+k+1-(a'+b'+2q+1)z_2)} & \text{при}\\ \qquad\qquad i_{k-1}=1, i_k=2, \\ \dfrac{(a'+q)(b'+q)z_2(1-z_2)}{(c+k-(a'+b'+2q-1)z_2)(c+k+1-(a'+b'+2q+1)z_2)} & \text{при}\\ \qquad\qquad i_{k-1}=i_k=2,\end{cases}$$

причому p, q — кількість одиниць і двійок у мультиіндексі $i(k-1)$ відповідно.

Доведення. Введемо наступні позначення:

$$X_{p,q}=\frac{F_3(a+p,a'+q,b+p,b'+q;c+p+q;z)}{F_3(a+p+1,a'+q,b+p+1,b'+q;c+p+q+1;z)},$$

$$Y_{p,q}=\frac{F_3(a+p+1,a'+q-1,b+p+1,b'+q-1;c+p+q;z)}{F_3(a+p+1,a'+q,b+p+1,b'+q;c+p+q+1;z)}, \tag{11}$$

де $p,q\in Z_0$, $p+q=k-1$.

$$b_{i(k)}(z)=\begin{cases}1-\dfrac{a+b+2p+1}{c+k-1}z_1 & \text{при} \quad i_k=1,\\ 1-\dfrac{a'+b'+2q-1}{c+k-1}z_2 & \text{при} \quad i_k=2,\end{cases}$$

$a_{i(k)}=c_{i(k)}b_{i(k)}b_{i(k-1)}$, $k=1,2,\ldots$, $i_k=1,2$, $i_0=0$.

Використовуючи формули (8) та (9), для відношень (11) отримаємо:

$$X_{p,q}=1-b_{i(k-1)1}(z)+\frac{a_{i(k-2)11}(z)}{X_{p+1,q}}+\frac{a_{i(k-2)12}(z)}{Y_{p,q+1}},$$

$$Y_{p,q}=1-b_{i(k-1)2}(z)+\frac{a_{i(k-2)21}(z)}{X_{p+1,q}}+\frac{a_{i(k-2)22}(z)}{Y_{p,q+1}}.$$

Послідовно вкладаючи $X_{p,q}$ і $Y_{p,q}$ у формули (11), отримаємо розвинення відношення гіпергеометричних функцій $X_{0,0}$ у ГЛД, який шляхом еквівалентних перетворень зводиться до (10).

3. Дослідження елементів дробу, визначеного в (10).

Твердження 1. *Нехай параметри F_3 задовольняють умови:*

$$a+b-1<2c;\ a'+b'-3<2c;\ c+1-b<0;\ c+3-b'<0;\ a,b,a',b',c>0. \tag{12}$$

Тоді нулі знаменників елементів ГЛД (10) дійсні і розміщені в області $\{\operatorname{Re} z_i>1/2,\ i=1,2\}$.

Доведення. Оскільки $k>2$, $0\le p\le k-1$, $0\le q\le k-1$ і $p+q=k-1$, то твердження випливає із нерівностей $a+b+2p+3\le 2(c+k+1)$, $a'+b'+2q+1\le 2(c+k+1)$.

Оцінимо зверху модулі елементів ГЛД (10) при виконанні умов (12) на параметри функції і у припущені, що $\operatorname{Re} z_i < 0$, $i = 1, 2$. Для цього означимо функції від двох змінних (z_i — розглядаємо як параметри):

$$g_1(p,k) = \frac{a+p+1}{|k-2pz_1+A_1|}, \ (p,k) \in G_1, \quad g_2(p,k) = \frac{b+p+1}{|k-2pz_1+B_1|}, \ (p,k) \in G_1,$$
$$g_3(p,q) = \frac{a'+q}{|k-2pz_1+A_1|}, \ (p,q) \in G_0, \quad h_1(p,k) = \frac{a'+q}{|k-2pz_2+A_2|}, \ (q,k) \in G_1,$$
$$h_2(q,k) = \frac{b'+q}{|k-2pz_2+B_2|}, \ (q,k) \in G_1, \quad h_3(q,p) = \frac{a+p+1}{|k-2pz_2+A_2|}, \ (q,p) \in G_0,$$

де $A_1 = c-(a+b+1)z_1$, $B_1 = A_1+1-2z_1$, $A_2 = c-(a'+b'-1)z_2$, $B_2 = A_2+1-2z_2$, і $G_1 = \{(u,v) \in R^2 : \ 2 \le u \le \infty, \ 1 \le v \le u-1\}$, $G_0 = \{(u,v) \in R^2 : \ 1 \le u \le \infty, \ 0 \le v \le \infty\}$. Дослідимо на екстремум функцію $g_1(p,k)$. Розв'язуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g_1(p,k)}{\partial p} = \dfrac{2S_1^2 + 4(a+p+1)(S_2 \operatorname{Re} z_1 + \operatorname{Im} z_1(\operatorname{Im} A_1 - 2p \operatorname{Im} z_1))}{2S_1^3} = 0, \\ \dfrac{\partial g_1(p,k)}{\partial k} = -\dfrac{2(a+p+1)S_2}{S_1^3} = 0, \end{cases}$$

де $S_1 = |k-2pz_1+A_1|$, $S_2 = k - 2p\operatorname{Re} z_1 + \operatorname{Re} A_1$. Із другого рівняння знаходимо, що $k = 2p\operatorname{Re} z_1 - \operatorname{Re} A_1 < 0$. Отже, критичні точки лежать зовні області G_1, тому дослідимо функцію g_1 на межі області. Зазначимо, що з умов (12) випливають умови $a+1-b < 0$, $a-c < 0$. Якщо $p = 1$, то $g_1(p,k) = \dfrac{a+2}{|k-2pz_1+A_1|}$ і з умови $\dfrac{\mathrm{d}g_1(1,k)}{\mathrm{d}k} = 0$ випливає, що критична точка $k = 2\operatorname{Re} z_1 - c - (a+b+1)\operatorname{Re} z_1 < 2$. Якщо $k = p+1$, то $g_1(p,p+1) = \dfrac{a+p+1}{|p(1-2z_1)+1+A_1|}$ і з умови $\dfrac{\mathrm{d}g_1(p,p+1)}{\mathrm{d}p} = 0$ випливає, що

$$p = \{-2(a+1-b)|z_1|^2 + [a+1-b+2(a-c)]\operatorname{Re} z_1 - (a-c)\}^{-1}\{(a+1-b)(a+b+3)|z_1|^2 - [(a+1-b)(c+2)+(a-c)(a+b+3)]\operatorname{Re} z_1 + (a-c)(c+2)\} < 0.$$

Таким чином, функція g_1 досягає екстремуму в одній із точок межі області G_1 і $\sup\limits_{G_1} g_1(p,k) = \max\left(\dfrac{a+2}{|2-2z_1+A_1|}, \dfrac{1}{|1-2z_1|}\right) = \dfrac{a+2}{|2-2z_1+A_1|} = M_1$. Аналогічним чином визначаємо, що

$$\sup_{G_1} g_2(p,k) = \max\left(\frac{b+2}{|2-2z_1+B_1|}, \frac{1}{|1-2z_1|}\right) = \frac{b+2}{|2-2z_1+B_1|} = M_2,$$
$$\sup_{G_1} h_1(q,k) = \max\left(\frac{a'+1}{|2-2z_2+A_2|}, \frac{1}{|1-2z_2|}\right) = \frac{a'+1}{|2-2z_2+A_2|} = M_3,$$
$$\sup_{G_1} h_2(q,k) = \max\left(\frac{b'}{|2-2z_2+B_2|}, \frac{1}{|1-2z_1|}\right) = \frac{b'}{|2-2z_2+B_2|} = M_4,$$
$$\sup_{G_0} g_3(q,p) = \max\left(\frac{a'}{|2-2z_1+A_1|}, 1\right) = 1 = M_5,$$
$$\sup_{G_0} h_3(p,q) = \max\left(\frac{a+1}{|2-2z_2+A_2|}, 1\right) = 1 = M_6.$$

4. Збіжність розвинення. Враховуючи одержані оцінки для функцій g_i та h_i $(i = \overline{1,3})$ і формули для коефіцієнтів $c_{i(k)}$, отримаємо

$$\sum_{i_k=1}^{2} |c_{i(k)}| \le M_1 M_2 |z_1(1-z_1)| + M_5 M_4 |z_2| \qquad \text{при} \quad i_k = 1,$$

$$\sum_{i_k=1}^{2} |c_{i(k)}| \le M_3 M_4 |z_2(1-z_2)| + M_6 M_2 |z_1| \qquad \text{при} \quad i_k = 2.$$

Враховуючи наведені вище викладки та наслідок 4.3.1 [1], сформулюємо основний результат

Теорема 2. *Гіллястий ланцюговий дріб, в який розвивається відношення гіпергеометричних функцій Аппеля* $\dfrac{F_3(a,a',b,b';c;z)}{F_3(a+1,a',b+1,b';c+1;z)}$ *збігається в області*

$$\begin{cases} \dfrac{|1-z_1|}{|1-2z_1|}\dfrac{(b+2)|z_1|}{|c+2-(a+b+5)z_1|} + \dfrac{(b'+1)|z_2|}{|c+2-(a'+b'+3)z_2|} \le \dfrac{1}{4}, \\ \dfrac{(b+2)|z_1|}{|c+2-(a+b+5)z_1|} + \dfrac{|1-z_2|}{|1-2z_2|}\dfrac{(b'+1)|z_2|}{|c+2-(a'+b'+3)z_2|} \le \dfrac{1}{4}, \\ \operatorname{Re} z_i \le 0, \quad i = 1,2. \end{cases}$$

якщо для параметрів функції F_3 *виконуються умови:* $a+b-1 < 2c$; $a'+b'-1 < 2c$; $c-b<0$; $c+1-b'<0$; $a+1-c<0$; $a'-c<0$; $a,b,a',b',c>0$.

1. *Боднар Д. И.* Вопросы аналитической теории ветвящихся цепных дробей: Дис. ... докт. физ.-мат. наук. – Львов, 1989. – 305 с.
2. *Манзій О. С.* Розвинення відношення гіпергеометричних функцій Аппеля F_3 у гіллястий ланцюговий дріб. – Вісник ДУ „Львівська політехніка". – 1998. – **346**. – С. 3–9.

ИССЛЕДОВАНИЕ СХОДИМОСТИ РАЗЛОЖЕНИЯ ОТНОШЕНИЯ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ АППЕЛЯ F_3 В ВЕТВЯЩУЮСЯ ЦЕПНУЮ ДРОБЬ

Для гипергеометрических функций Аппеля F_3 *установлены рекурентные соотношения, на основании которых построено разложение отношения этих функций в ветвящуюся цепную дробь. Исследовано сходимость этого разложения.*

THE INVESTIGATION OF CONVERGENCE HYPERGEOMETRIC FUNCTIONS OF APPELL F_3 RATIO'S EXPANSION INTO THE BRANCHED CONTINUED FRACTION

The recurrence relations for the hypergeometric functions of Appell F_3 *are determined. Using these recurrence relations, the expansion of the these functions ratio into the branched continued fraction is constructed. Convergence of this expansion is also investigated.*

Державний університет
„Львівська політехніка"

Отримано
22.04.98