Доповіді
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

10 • 1996

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

УДК 517.956.4

О.Г. Возняк, С.Д. Івасишен

Фундаментальні розв'язки задачі Коші для одного класу вироджених параболічних рівнянь та їх застосування

(Представлено академіком НАН України І.В. Скрипником)

The degenerate parabolic equations are considered that are the same as the Kolmogorov's equation of diffusion with inertia and degenerations on the initial hyperplane. Fundamental solutions of the Cauchy problem for such equations are constructed, their properties are investigated, and some applications of these properties are obtained. Separately, necessary and sufficient conditions are found under which the solutions of the homogeneous equations with a weak degeneration on the initial hyperplane are represented in the form of Poisson's integrals of the functions or generalized Borel measures from special spaces $L_p^{k(0,a)}, 1 < p \leq \infty$, *and* $M^{k(0,a)}$.

Наводяться результати дослідження та деякі застосування фундаментальних розв'язків задачі Коші для одного класу вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова, в яких наявні також виродження на початковій гіперплощині. Фундаментальні розв'язки задачі Коші та їх застосування для такого класу рівнянь без виродження на початковій гіперплощині розглядалися у роботах [1–7], а для звичайних параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині – у [8–10].

1. Використовуватимемо такі позначення: l, m, n і b – натуральні числа такі, що $1 \leq l \leq m \leq n$; $N = l + m + n$, $q \equiv \dfrac{2b}{2b-1}$; $X \equiv (x, y, z)$, $U \equiv (u, v, w)$, $\Xi \equiv (\xi, \eta, \zeta)$, $\Phi \equiv (\varphi, \chi, \psi)$, якщо $\{x, u, \xi, \varphi\} \subset \mathbb{R}^n$, $\{y, v, \eta, \chi\} \subset \mathbb{R}^m$, $\{z, w, \zeta, \psi\} \subset \mathbb{R}^l$; $x' \equiv (x_1, \ldots, x_l)$, $x'' \equiv (x_1, \ldots, x_m)$, $y' \equiv (y_1, \ldots, y_l)$, якщо $x \equiv (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y \equiv (y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m$; $B(t, \tau) \equiv \int\limits_\tau^t \dfrac{\beta(\gamma)}{\alpha(\gamma)}\, d\gamma$; $E_c(t, X; \tau, \Xi) \equiv \exp\Big\{-c\Big(B(t,\tau)^{1-q}|x-\xi|^q + B(t,\tau)^{1-2q}|y + B(t,\tau)x'' - \eta|^q +$

$B(t,\tau)^{1-3q}|z+B(t,\tau)y'+\frac{1}{2}B(t,\tau)^2x'-\zeta|^q\Big)\Big\}$, $E_c^d(t,X;\tau,\Xi)\equiv E_c(t,X;\tau,\Xi)\exp\left\{d\int\limits_\tau^t\frac{d\gamma}{\alpha(\gamma)}\right\}$; $\Pi_H\equiv\Big\{(t,X)|t\in H, X\in\mathbb{R}^N\Big\}$; T – задане додатне число.

Розглянемо рівняння вигляду

$$
\begin{aligned}
(Lu)(t,X)\equiv\Big(\alpha(t)\mathcal{D}_t^1-\beta(t)\Big(\sum_{j=1}^m x_j\mathcal{D}_{y_j}^1+\sum_{j=1}^l y_j\mathcal{D}_{z_j}^1+ \\
+\sum_{0<|k|\le 2b}a_k(t)\mathcal{D}_x^k\Big)-a_0(t)\Big)u(t,X)=0, \qquad (t,X)\in\Pi_{(0,T]},
\end{aligned}
\tag{1}
$$

де функції $\alpha,\beta:[0,T]\to\mathbb{R}$, $a_k:[0,T]\to\mathbb{C}$, $0<|k|\le 2b$, $a_0:(0,T]\to\mathbb{C}$ неперервні й такі, що $\alpha(0)\beta(0)=0$, $\forall t\in(0,T]:\alpha(t)>0$, $\beta(t)>0$, β – монотонно неспадна; диференціальний вираз $\mathcal{D}_t^1-\sum\limits_{|k|\le 2b}a_k(t)\mathcal{D}_x^k$, $t\in[0,T]$, – рівномірно параболічний за Петровським, $\exists A\in\mathbb{R}\ \forall t\in(0,T]:\ \operatorname{Re}a_0(t)\le A$.

2. Фундаментальним розв'язком задачі Коші для рівняння (1) називатимемо функцію $Z(t,X;\tau,\Xi)$, $0<\tau<t\le T$, $\{X,\Xi\}\subset\mathbb{R}^N$, таку, що функція

$$
u(t,X)\equiv\int\limits_{\mathbb{R}^N}Z(t,X;\tau,\Xi)\varphi(\Xi)d\Xi, \qquad (t,X)\in\Pi_{(\tau,T]},
$$

є розв'язком рівняння (1), який задовольняє умову

$$
u(t,X)\Big|_{t=\tau}=\varphi(X), \qquad X\in\mathbb{R}^N,
$$

для будь–якого числа $\tau\in(0,T)$ і довільної неперервної та обмеженої функції $\varphi:\mathbb{R}^N\to\mathbb{C}$.

За допомогою методики, використаної в [3, 5], доводиться

Теорема 1. *Правильні такі твердження:*

1) існує фундаментальний розв'язок $Z(t,X;\tau,\Xi)$, $0<\tau<t\le T$, $\{X,\Xi\}\subset\mathbb{R}^N$, задачі Коші для рівняння (1);

2) функція $Z(t,X+iU;\tau,\Xi+i\Phi)$, $0<\tau<t\le T$, $\{X,\Xi,U,\Phi\}\subset\mathbb{R}^N$ є цілою функцією аргументів $(x-\xi+i(u-\varphi))B(t,\tau)^{-\frac{1}{2b}}$, $(y+B(t,\tau)x''-\eta+i(v+B(t,\tau)u''-\chi))B(t,\tau)^{-1-\frac{1}{2b}}$, $(z+B(t,\tau)y'+\frac{1}{2}B(t,\tau)^2x'-\zeta+i(w+B(t,\tau)v'+\frac{1}{2}B(t,\tau)^2u'-\psi))B(t,\tau)^{-2-\frac{1}{2b}}$ порядку зростання q і такого ж порядку спадання при дійсних значеннях аргументів, при цьому мають місце оцінки

$$
\begin{aligned}
&\Big|\mathcal{D}_x^k\mathcal{D}_y^r\mathcal{D}_z^s Z(t,X+iU;\tau,\Xi+i\Phi)\Big|\le C_{krs}B(t,\tau)^{-M(k,r,s)}E_c^d(t,X;\tau,\Xi)E_{c_1}(t,U;\tau,\Phi), \\
&0<\tau<t\le T, \qquad \{X,\Xi,U,\Phi\}\subset\mathbb{R}^N,
\end{aligned}
\tag{2}
$$

де k,r,s – довільні мультиіндекси, $M(k,r,s)\equiv\dfrac{1}{2b}(n+|k|+(2b+1)(m+|r|)+(4b+1)(l+|s|))$, $C_{krs}>0$, $c>0$, $c_1<0$, $d\in\mathbb{R}$;

3) фундаментальний розв'язок Z має властивість нормальності, тобто функція

$$
\begin{aligned}
&Z^*(\tau,\Xi;t,X)\equiv\overline{Z}(t,X;\tau,\Xi), \\
&0<\tau<t\le T, \qquad \{X,\Xi,\}\subset\mathbb{R}^N,
\end{aligned}
\tag{3}
$$

де риска над Z означає комплексне спряження, є фундаментальним розв'язком задачі Коші для рівняння

$$\Big(-\alpha(\tau)\mathcal{D}^1_\tau+\beta(\tau)\Big(\sum_{j=1}^{m}\xi_j\mathcal{D}^1_{\eta_j}+\sum_{j=1}^{l}\eta_j\mathcal{D}^1_{\zeta_j}-\sum_{0<|k|\le 2b}\overline{a}_k(\tau)(-\mathcal{D}_\xi)^k\Big)-$$
$$-\overline{a}_0(\tau)\Big)v(\tau,\Xi)=0,\qquad (\tau,\Xi)\in\Pi_{(0,T]};$$

4) правильна формула згортки

$$Z(t,X;\tau,\Xi)=\int_{\mathbb{R}^N}Z(t,X;\gamma,\Phi)Z(\gamma,\Phi;\tau,\Xi)d\Phi,$$
$$0<\tau<\gamma<t\le T,\qquad \{X,\Xi,\}\subset\mathbb{R}^N; \tag{4}$$

5) у випадку слабого виродження, тобто коли інтеграл

$$\int_0^T\frac{d\gamma}{\alpha(\gamma)} \tag{5}$$

збігається, оцінки (2) та рівності (3), (4) мають місце й при $\tau=0$, а оцінну функцію E_c^d в (2) можна замінити на E_c.

3. Властивості фундаментального розв'язку Z дозволяють так само, як у [9], дослідити коректну розв'язність неоднорідного рівняння $Lu=f$ з початковою умовою

$$u(t,X)\Big|_{t=0}=\varphi(X),\qquad X\in\mathbb{R}^N,$$

у випадку слабкого виродження і без початкової умови, якщо має місце сильне виродження, тобто коли інтеграл (5) розбігається.

Якщо виродження слабке, то можна одержати для рівняння (1) результати, які аналогічні наведеним у [7, 10] і стосуються інтегральних зображень та описання множин початкових значень розв'язків. Щоб їх сформулювати, наведемо спочатку означення необхідних норм і просторів.

Нехай $0<c_0<c$, $a\equiv(a_1,a_2,a_3)$, де c – стала з оцінок (2), а числа a_1, a_2, a_3 такі, що $0\le a_j<c_0T^{j-1+\frac{1}{2b}}$, $j=1,2,3$; $k_j(t,a_j)\equiv c_0a_j(c_0^{2b-1}-a_j^{2b-1}(T-B(T,t))^{2b(j-1)+1})^{1-q}$, $0\le t\le T$, $j=1,2,3$; $k(t,a)\equiv(k_1(t,a_1),k_2(t,a_2),k_3(t,a_3))$. Зауважимо, що $k_j(t,a_j)\ge k_j(0,a_j)$, $t\in[0,T]$, $j=1,2,3$, і правильна нерівність

$$E_{c_0}(t,X;0,\Xi)\Psi(0,\Xi)\le\Psi(t,X),\qquad t\in[0,T],\quad \{X,\Xi\}\subset\mathbb{R}^N,$$

де

$$\Psi(t,X)\equiv\exp\Big\{k_1(t,a_1)|x|^q+k_2(t,a_2)|y+B(t,0)x''|^q+k_3(t,a_3)|z+B(t,0)y'+\frac{1}{2}B(t,0)^2x'|^q\Big\}.$$

Нехай $1\le p\le\infty$, $u(t,X)$, $(t,X)\in\Pi_{[0,T]}$, – задана комплекснозначна функція, яка при кожному $t\in[0,T]$ вимірна за X. Для $t\in[0,T]$ означимо норми

$$\|u(t,\cdot\|_p^{k(t,a)}\equiv\|u(t,\cdot)(\Psi(t,\cdot))^{-1}\|_{L_p(\mathbb{R}^N)}$$

і через $L_p^{k(0,a)}$, $1 \le p \le \infty$, позначимо простір усіх вимірних функцій $\varphi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$, для яких скінченна норма $\|\varphi\|_p^{k(0,a)}$. Нехай $M^{k(0,a)}$ – простір усіх комплекснозначних узагальнених мір μ, які визначені на σ–алгебрі борельових множин простору $\mathbb{R}^N$ і задовольняють умову

$$\|\mu\|^{k(0,a)} \equiv \int\limits_{\mathbb{R}^N} (\Psi(0,X))^{-1} d|\mu|(X) < +\infty,$$

де $|\mu|$ – повна варіація μ.

Покладемо ще

$$s_1(t,a) \equiv k_1(t,a_1) + 2^{q-1}B(t,0)^q k_2(t,a_2) + 2^{-q}3^{q-1}B(t,0)^{2q}k_3(t,a_3),$$

$$s_2(t,a) \equiv 2^{q-1}k_2(t,a_2) + 3^{q-1}B(t,0)^q k_3(t,a_3),$$

$$s_3(t,a) \equiv 3^{q-1}k_3(t,a_3),$$

$$s(t,a) \equiv (s_1(t,a), s_2(t,a), s_3(t,a)),$$

$$\|u(t,\cdot)\|_p^{s(t,a)} \equiv \|u(t,X)\exp\{-s_1(t,a)|x|^q - s_2(t,a)|y|^q - s_3(t,a)|z|^q\}\|_{L_p(\mathbb{R}^N)}.$$

У наступних теоремах припускається, що інтеграл (5) збігається.

Теорема 2. *1. Нехай $\varphi \in L_p^{k(0,a)}$, $1 \le p \le \infty$. Тоді функція*

$$u(t,X) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} Z(t,X;0,\Xi)\varphi(\Xi)d\Xi, \qquad (t,X) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{6}$$

є єдиним розв'язком рівняння (1) у шарі $\Pi_{(0,T]}$, який задовольняє такі умови:

а) існує стала $C > 0$, не залежна від φ і така, що

$$\forall\, t \in (0,T] : \|u(t,\cdot)\|_p^{k(t,a)} \le C\|\varphi\|_p^{k(0,a)};$$

б) при $1 \le p < \infty$

$$\lim_{t\to 0+} \|u(t,\cdot) - \varphi(\cdot)\|_p^{s(t,a)} = 0,$$

а при $p = \infty$

$$\forall \psi \in L_1^{-s(T,a)} : \lim_{t\to 0+} \int\limits_{\mathbb{R}^N} u(t,X)\psi(X)dX = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \varphi(X)\psi(X)dX,$$

де $L_1^{-s(T,a)}$ – множина всіх вимірних функцій $\psi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$, для яких скінченна норма

$$\|\psi(X)\exp\{s_1(T,a)|x|^q + s_2(T<a)|y|^q + s_3(T,a)|z|^q\}\|_{L_1(\mathbb{R}^N)}.$$

2. Якщо $\mu \in M^{k(0,a)}$, то формулою

$$u(t,X) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} Z(t,X;0,\Xi)d\mu(\Xi), \qquad (t,X) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{7}$$

визначається єдиний розв'язок рівняння (1) у шарі $\Pi_{(0,T]}$, який задовольняє такі умови:

а) існує не залежна від μ стала $C > 0$ така, що

$$\forall t \in (0,T] : \|u(t,\cdot)\|_1^{k(t,a)} \le C\|\mu\|^{k(0,a)};$$

б)

$$\forall \psi \in C_0^{-s(T,a)} : \lim_{t \to 0+} \int_{\mathbb{R}^N} u(t,X)\psi(X)dX = \int_{\mathbb{R}^N} \psi(X)d\mu(X),$$

де $C_0^{-s(T,a)}$ – множина всіх функцій ψ, неперервних на $\mathbb{R}^N$ і таких, що при $|X| \to \infty$

$$|\psi(X)| \exp\{s_1(T,a)|x|^q + s_2(T,a)|y|^q + s_3(T,a)|z|^q\} \to 0.$$

Теорема 3. *Нехай u – розв'язок рівняння (1) у шарі $\Pi_{(0,T]}$, який задовольняє умову*

$$\forall t \in (0,T] : \|u(t,\cdot)\|_p^{k(t,a)} \le C \tag{8}$$

з деякими $C > 0$ і $1 \le p \le \infty$. Тоді при $1 < p \le \infty$ існує єдина функція $\varphi \in L_p^{k(0,a)}$, а при $p = 1$ – єдина узагальнена міра $\mu \in M^{k(0,a)}$ такі, що розв'язок u зображується відповідно у вигляді (6) і (7).

Наслідок. *З теорем 2 і 3 випливають такі твердження:*

1) простори $L_p^{k(0,a)}$, $1 < p \le \infty$, і $M^{k(0,a)}$ є множинами початкових значень розв'язків рівняння (1) тоді і тільки тоді, коли розв'язки задовольняють умову (8) при $1 < p \le \infty$ і $p = 1$ відповідно;

2) для зображення розв'язків рівняння (1) у вигляді (6) чи (7) з $\varphi \in L_p^{k(0,a)}$, $1 < p \le \infty$, і $\mu \in M^{k(0,a)}$ неохідно й досить, щоб виконувалась умова (8).

4. Фундаментальний розв'язок задачі Коші побудований та досліджені його властивості також у випадку, коли в рівнянні (1) коефіцієнти a_k можуть залежати від усіх змінних, а $b = 1$. Для таких рівнянь правильні також твердження, аналогічні наведеним у п. 3.

1. *Сонин И.М.* Об одном классе вырождающихся диффузионных процессов // Теория вероятн. и её примен. – 1967. – **12**, вып. 3. – С. 540–547.

2. *Малицкая А.П.* Фундаментальные решения одного класса вырождающихся параболических уравнений // Приближенные методы интегрирования дифференциальных и интегральных уравнений: Тем. сб. статей. – Киев: Изд. Киев. пед. ин–та, 1973. – С. 109–130.

3. *Эйдельман С.Д., Малицкая А.П.* О фундаментальных решениях и стабилизации решения задачи Коши для одного класса вырождающихся параболических уравнений // Дифференц. уравнения. – 1975. – **11**, N 5. – С. 1316–1330.

4. *Малицкая А.П.* Построение фундаментальных решений некоторых ультрапараболических уравнений высокого порядка // Укр. мат. журн. – 1985. – **37**, N 6. – С. 713–718.

5. *Ивасишен С.Д., Андросова Л.Н.* Фундаментальные решения задачи Коши для одного класса вырождающихся параболических уравнений. – Чернов. ун–т. – Черновцы, 1989. – 62 с. – Деп. в УкрНИИНТИ 16.06.89, N 1761–Ук89.

6. *Івасишен С.Д., Тичинська Л.М., Ейдельман С.Д.* Фундаментальні розв'язки задачі Коші для одного класу ультрапараболічних рівнянь другого порядку // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1990. – N 5. – С. 6–8.

7. *Ивасишен С.Д., Андросова Л.Н.* Об интегральном представлении решений одного класса вырожденных параболических уравнений типа Колмогорова // Дифференц. уравнения. – 1991. – **27**, N 3. – С. 497–487.

8. *Глушак А.В., Шмулевич С.Д.* О некоторых корректных задачах для параболических уравнений высокого порядка, вырождающихся по временной переменной // Там же. – 1986. – **22**, N 6. – С. 1065–1068.

9. *Возняк О.Г., Івасишен С.Д.* Задача Коші для параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині // Доп. АН України. – 1994. – N 6. – С. 7–11.

10. *Возняк О.Г.* Про інтегральне зображення розв'язків параболічних систем з виродженням // Матеріали міжнар. мат. конф., присвяченої пам'яті Ганса Гана. – Чернівці: Рута, 1995. – С. 42–60.

Інститут прикладних проблем механіки
і математики ім. Я.С.Підстригача
НАН України, Львів

Надійшло до редакції 11.04.95

UDC 517.956

Cui Minggen, Li Yunhui

Wavelet analysis of a differential operator spline in the $\mathbf{H^1(R)}$ space

(Presented by Corresponding Member of the NAS of Ukraine A.A. Martynyuk)

Досліджено сплайни неполіноміального оператора і знайдено розвинення функцій стосовно бінарного розширення. Наведені точні вирази для коефіцієнтів розвинення.

An r degree spline wavelet analysis is formed by a subspace $v_j = \{g(2^{-j}x - k)\}_{k \in Z}$ in the space $L^2(R)$ [1], where the function $g(x) = \frac{(x_+)^r}{r!}$ satisfies a special generalized differential equation

$$D^{r+1}g(x) = \delta(x) \tag{$\triangle$}$$

($x^+ = \max(o, x)$, Z denotes the integer set). Naturally, the wavelet analysis problem can be considered on the basis of the general generalized differential operator equation

$$L(D)g(x) = \delta(x). \tag{$\triangle\triangle$}$$

But the solution $g(x)$ of this equation ($\triangle\triangle$) doesn't enable the subspace $v_j = \{g(2^{-j}x - k)\}_{k \in Z}$ to possess monotonicity $v_j \subset v_{j-1}, j \in Z$, except for the equation ($\triangle$). So, the differential operator spline wavelet analysis, except the polynomial's one, can not be formed by the existing wavelet theory.

In this paper, a differential operator spline wavelet analysis in the $H^1(R)$ space is defined without the v_j's monotonicity and the expansion $u = \sum_{k,j \in Z} c_j \psi(2^{-j}x - k)$ is given for $\forall u \in H^1(R)$. Specially, c_j can be expressed by functional values directly without integrating. If the orthogonal