Хохлова Л.Г., Хома-Могильська С.Г.

Ірраціональні рівняння і нерівності

Навчальний посібник

Міністерство освіти і науки України

Тернопільський національний педагогічний університет імені Володимира Гнатюка

Хохлова Л.Г., Хома-Могильська С.Г.

Ірраціональні рівняння і нерівності

Рекомендовано вченою радою Тернопільського національного педагогічного університету імені Володимира Гнатюка як навчальний посібник

Тернопіль-2018

УДК 373.5.016:51

Рекомендовано до друку вченою радою Тернопільського національного педагогічного університету імені Володимира Гнатюка

(протокол №10 від 27.03.2018)

Рецензенти: **Боднар Д.І. -** доктор фізико-математичних наук, професор кафедри економічної кібернетики Тернопільського національного економічного університету.

Галан В.Д. – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математики а методики її навчання Тернопільського національного педагогічного університету імені Володимира Гнатюка.

Муравицька О.В. – вчитель-методист Тернопільської середньої школи №17 імені Володимира Вихруща з поглибленим вивченням іноземних мов.

Хохлова Л.Г., Хома-Могильська С.Г.

Ірраціональні рівняння і нерівності: Навчальний посібник.-Тернопіль: "Тайп", 2018.-72с.

Посібник написано відповідно до вимог програми дисципліни "Методика навчання математики" для студентів фізико-математичних спеціальностей вищих навчальних закладів. Містить матеріали з тем "Розв'язування ірраціональних рівнянь "та"Розв'язування ірраціональних нерівностей ". Викладено основні принципи і методичні особливості вивчення поданих тем у шкільному курсі математики. Демонструються різні підходи до розв'язання ірраціональниж рівнянь і нерівностей. Наведено приклади детального розв'язання типових задач, вправи для самостійної роботи учнів.

Для студентів вищих навчальних закладів III і IV рівнів акредитації.

УДК 373.5.016:51

ЗМІСТ

ВСТУП

Для успішної самореалізації особистості у сучасному житті необхідно мати базові знання з математики, а якщо зважати на те, що вибір майбутньої професії тісно пов'язаний з цією наукою, то в цьому випадку необхідні більш повне опанування понять, законів, теорій і використання інноваційних технологій у навчанні та організації дослідницької і проектної діяльності у сфері математики, які призводять до формування високого рівня практичних компетентностей учня, орієнтованих на розвиток його особистості.

Кожна людина після здобуття середньої освіти постає перед важливим вибором – вибором професії. Безперечним фактом є те, що необхідною умовою для вступу до вищих навчальних закладів є участь у зовнішньому незалежному оцінюванні (ЗНО), де більшість випускників складає тестування з математики. Результати ЗНО свідчать, що на сьогоднішній день багато випускників допускають помилки при розв’язуванні рівнянь та нерівностей, в тому числі ірраціональних.

На сучасному етапі розвитку людства поняття «ірраціональність» витлумачується по різному і має широке застосування. Можна стверджувати, що цей термін уперше був досліджений у філософському вченні, а саме - при вивченні мислення як прерогативи людського існування.

Знання різних методів розв’язування ірраціональних рівнянь і нерівностей, безперечно, неабияк допоможе учням легше і швидше розв’язувати рівняння та нерівності, а також забезпечить можливість і вміння аналізувати використаний метод і сприятиме уникненню помилок при розв’язуванні.

Даний посібник якраз і спрямований на те, щоб допомогти вчителям математики з’ясувати теоретичні та практичні аспекти прикладної спрямованості шкільного курсу алгебри. В даній книзі запропоновані різні методи розв’язування ірраціональних рівнянь та нерівностей, які сприятимуть формуванню раціональних прийомів розумової праці учнів.

У першому розділі книги розглядається мета навчання математики в школі, а також характеризуються особливості викладання теми: «Ірраціональні рівняння і нерівності» в шкільному курсі математики.

У другому розділі розглянуто ірраціональні рівняння і нерівності і систематизовано методи їхнього розв’язування з виділенням типових завдань і прийомів, що дозволяє учням та абітурієнтам набути практичних навичок і сформувати певні алгоритми розв’язування подібних задач. Для закріплення і глибшого засвоєння матеріалу наприкінці кожного методу подані вправи для самостійної роботи.

РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ І МЕТОДИЧНІ ОСОБЛИВОСТІ ВИВЧЕННЯ ТЕМИ «ІРРАЦІОНАЛЬНІ РІВНЯННЯ І НЕРІВНОСТІ» В СТАРШІЙ ШКОЛІ.

1.1. ОСНОВНІ ПРИНЦИПИ І МЕТОДИЧНІ ОСОБЛИВОСТІ ВИКЛАДАННЯ.

1.1.1. Мета навчання математики в школі.

Математика вивчає просторові форми і кількісні відношення. Візьмемо, наприклад, який – небудь предмет. Нас може цікавити, яка його густина, міцність, теплопровідність. Відповідь на подібні запитання дає фізика. На запитання: З якої речовини цей предмет? Як на нього діють кислоти, луги? Чи може він горіти? – відповіді дає хімія. Але нас може цікавити й таке: Яка форма цього предмета? Які його розміри? Ці питання розглядаються в математиці.

Ф. Енгельс так описав зміст математики: «Чиста математика має своїм об'єктом просторові форми і кількісні відношення дійсного світу». [2]

Сьогодні математика потрібна всім. Без математичних обчислень не можна побудувати не тільки космічного корабля, електростанції, підводного човна, а й звичайного будинку. Від того, як зроблено попередні розрахунки, залежить вартість об'єкта, його якість і терміни спорудження. Важко знайти таку галузь людської діяльності, де можна було б обійтися без математики, причому з часом діапазон її практичних застосувань збільшується. Тепер математичні методи проникли у медицину, історію, лінгвістику та інші науки.

Збільшується не тільки кількість наук, які вже не можуть обходитись без математики, а й обсяг математичних знань, використовуваних цими науками. Ось чому так важливо, щоб наша молодь мала грунтовну математичну підготовку.

Коротко мету викладання математики в загальноосвітній школі можна визначити так. Шкільний курс математики має забезпечити міцне і свідоме оволодіння системою математичних знань, умінь і навичок, які потрібні для загального розвитку учнів, для їх практичної діяльності в умовах сучасного виробництва, для вивчення на достатньо високому рівні споріднених шкільних предметів (фізики, креслення, хімії та ін.) і для продовження освіти. [25]

Із сказаного випливає, що викладання математики в наших школах повинно відповідати загальноосвітнім, практичним і виховним цілям.

Розглянемо їх докладніше.

Загальноосвітні цілі. Під загальним розвитком людини розуміють насамперед знання нею основ наук про природу, суспільство і людське мислення, найважливіших галузей виробництва, мистецтва і т. п. Школа повинна готувати освічених людей з широким кругозором, які знали б основні науки, розбиралися в основних галузях виробництва, володіли методами наукового пізнання, стежили за розвитком мистецтва.

Математика і властивий їй стиль мислення - істотні елементи загальної культури сучасної людини. Ознайомити учнів з цими елементами культури, дати їм мінімум математичних знань, які потрібні кожній освіченій людині, - це завдання покладено на вчителів математики.

Одне з важливіших завдань шкільної математики – розвивати логічне мислення учнів.

Під логічним мисленням розуміють послідовне, несуперечливе і доказове мислення. Зрозуміло, що розвивати логічне мислення можна і треба при вивченні всіх навчальних предметів, а не тільки математики. Але математика для цього дає чи не найкращий матеріал. На уроках математики учні вчаться давати означення, наводити аналогії, доводити, ознайомлюються з основними законами логіки. Важко назвати інший шкільний предмет, який міг би дати для розвитку логічного мислення учнів більше, ніж математика.

Практичні цілі. Щоб підготувати учнів до життя, до суспільно корисної праці, школа повинна особливу увагу звертати на ті питання програми, з якими можуть зустрітись її вихованці у житті. В цьому і полягають практичні цілі навчання математики.

Кожному учневі доведеться в майбутньому не раз лічити, вимірювати, обчислювати площі, об'єми тощо. Тому вчитель математики повинен подбати, щоб його учні робили все це впевнено і швидко. Отже, школа повинна підготувати до цього всіх учнів. Їх треба озброїти заннями, уміннями і навичками, які необхідні їм для вивчення фізики, хімії, біології та інших навчальних предметів як у школі, так і в вузах.

Говорячи про практичні застосування, не треба забувати і міжпредметні зв'язки. З одного боку, на уроках бажано наводити приклади, відомі учням з курсу креслення, фізики, хімії та інших навчальних предметів, а з другого – треба поговорити з учителями цих предметів, щоб вони, використовуючи математичні поняття, формули, теореми, дотримувались сучасної термінології. А якщо з тих чи інших причин вони трактують ці поняття по – різному, то про це слід чітко повідоми учнів.

Виховні цілі. Виховні цілі навчання математики в школі зводяться головним чином до розвитку в учнів культури мислення, виховання в них наполегливості та інших корисних рис характеру. [2]

Іноді молоді вчителі думають, що для виховання учнів придатні тільки ті уроки, на яких є можливість організувати «виховний момент». Це неправильно. На кожному уроці можна і треба виховувати в учнів культуру мови, логічне мислення. Кожен хороший урок виховує учнів, навіть якщо в ньому немає ніяких «виховних моментів». Якщо учні слухають пояснення учителя, затамувавши подих, усе це пояснення – суцільний виховний момент. Якщо учитель навчає учнів цінувати кожну хвилину, уміло організовує роботу, то цим він також виховує учнів.

1.1.2. Історична довідка.

Однією із важливих причин появи математичних теорій з'явилося відкриття ірраціональності. Термін «раціональне» (число) походить від латиноамериканського слова ratio – відношення, яке є перекладом грецького слова «логос». На відміну від раціональних чисел, числа, що виражають відношення несумірних величин, були названі ще в старовину ірраціональними, тобто нераціональними (по-грецьки «алогос»). Правда, спочатку терміни «раціональний» і «ірраціональний» відносилися не до чисел, а до сумірних і відповідно не сумірних величин, які піфагорійці називали вираженими і невираженими, Теодор Киренський же симетричними і асиметричними. У V-VI століттях римські автори Капела і Касіодор перекладали ці терміни на латинь словами rationalis і irrationalis.

Ірраціональні числа виникли в геометрії при вивченні довжин. Геометричне ірраціональне число виражає собою довжину відрізка, неспівмірного з відрізком одиничної довжини. За легендою, піфагорійці відкрили несумірність деяких геометричних величин, але оскільки це суперечило їхній філософії, цілком побудованій на натуральних числах, вони тримали це відкриття у найсуворішій таємниці і навіть покарали на смерть одного з членів свого братства, який (за різними джерелами) перший знайшов або розголосив цей факт. [28]

Старогрецькі математики класичної епохи користувалися тільки раціональними числами (вірніше цілими, дробами і додатними). У своїх «Початках» Евклід подає вчення про ірраціональності чисто геометрично. Ймовірно, найпершою ірраціональністю, відкритою старогрецькими математиками, було число π. Можна з упевненістю вважати, що початковим пунктом цього відкриття були спроби знайти загальну міру за допомогою алгоритму поперемінного віднімання, відомого зараз як алгоритм Евкліда. Можливо також, що деяку роль зіграло завдання математичної теорії музики: ділення октави, що приводить до пропорції $1:n=n:2$. Не останню роль зіграв і характерний для піфагорійської школи загальний інтерес до теоретико-числових проблем.

Багато учених країн Середнього Сходу в своїх працях вживали ірраціональні числа як повноправні об'єкти алгебри. Більш того, коментуючи «Початки» Евкліда і досліджуючи загальну теорію відношення Евдокса, Омар Хайям вже на початку XII ст. теоретично розширює поняття числа до додатного дійсного числа. У тому ж напрямі багато було зроблено найбільшим математиком XIII ст. ат - Туси.

У сучасних навчальних посібниках основа визначення ірраціонального числа спирається на ідеї ал-Каши, Стевіна і Декарта про вимірювання відрізків і про необмежене наближення до шуканого числа за допомогою нескінченних десяткових дробів. Проте обгрунтуванням властивостей дійсних чисел і повна теорія їх була розроблена лише в XIXст.

Значення відкриття ірраціональності в математиці важко переоцінити. У математику, мало не вперше, увійшла складна теоретична абстракція, що не має аналога в донауковому загальнолюдському досвіді. Услід за ірраціональністю числа були відкриті багато інших ірраціональностей. Так, Теодор з Кирени (Vст. до н.е.) встановив ірраціональність квадратного кореня з чисел 3,5,6.,17, які не є повним квадратом, Теетет (410-369 до н.е.) дав одну з перших класифікацій ірраціональностей. З появою ірраціональностей в старогрецькій математиці виникли серйозні труднощі як в теоретико - числовому, так і в геометричному плані. Поняття «ірраціональність» має широке застосування. [3]

Ірраціональність у філософському вченні. У філософії з’ясовується можливість визначення змісту поняття «ірраціональне», однією з головних рис якого є прагнення до універсальності.

Ірраціоналізм (лат. *irrationalis* — несвідоме, нерозумне) — напрям у філософії, що проголошує верховенство почуттєвого начала і робить його основною характеристикою як самого світу, так і світосприйняття, визнаючи дійсність такою, що не може бути вираженою у логічних поняттях.

Ірраціональність у гуманітарному вченні. Значення поняття «ірраціональне» розглянуто у гуманітарному знанні, точніше — в психології, в якій під терміном «ірраціональна» розуміють настанову людини, якщо вона породжує її неадекватну поведінку в якомусь конкретному випадку.

Ірраціональність у мистецтві. Розчарування в силі розуму пізнати дійсність було однією з головних причин виникнення ірраціоналізму, що став основою культурного розвитку кінця XIX – початку XX ст. — так, наприклад, ірраціональні засади символізму, романтизму та неоромантизму особливо помітні в поезії, живописі, театральному мистецтві тощо.

Остаточного розвитку теорія ірраціональних чисел набула тільки в другій половині XIX ст. у працях німецьких математиків Дедекінда, Кантора і Вейєрштрасса, а П'єр Ферма (1601–1665) в середині XVII ст. запропонував загальний метод розв'язування ірраціональних рівнянь, зводячи їх до системи цілих алгебраїчних рівнянь. [4]

1.1.3.Особливості викладання теми в шкільному курсі математики

Дослідження психологів показали, що відношення учнів до навчання в першу чергу залежить від того наскільки вчитель володіє предметом, тому його знання не повинні обмежуватись шкільним підручником. Але вчитель також повинен враховувати вікові і психологічні особливості кожного учня.

У віці 14 – 15 років, тобто у старшому підлітковому віці, основна діяльність учня - це спілкування, під час якого підліток прагне знайти своє місце серед однолітків. Оцінка товаришів набуває першорядного значення, ніж оцінка поведінки або окремих дій підлітка вчителем. У цьому віці старший підліток схильний до впливу однолітків, і тому їхні цінності стають його цінностями.

Особливого перетворення зазнає і процес навчання. Засвоєння мислення в поняттях дає можливість підлітку розуміти закономірності предметів і явищ, проникати в їх суть. Проте відсутність життєвого досвіду приводить до перебудови мотиваційно-пізнавальної сфери, виникає інтерес по відношенню до певного навчального предмету, який пізніше може виявитися помилковим за рахунок відсутності власного досвіду. У зв'язку з цими явищами центральними новоутвореннями можна назвати абстрактне мислення, самосвідомість, закріплення статевої ідентифікації, появу відчуття «дорослості». [25]

Старший шкільний вік, або вік ранньої юності – період життя людини 16-18 років. Кажучи про учнів цього віку, психологи відзначають: «У їх психологічному образі найчастіше поєднуються: активність аналізуючої думки, схильність до міркувань і особлива емоційність, вразливість. Таке поєднання рис «розумового» типу і рис «художнього» типу характеризує неповторну своєрідність віку і, мабуть, є умовою різностороннього розвитку надалі».

Основу психологічного розвитку хлопця або дівчини складає професійне самовизначення. Мотиви, пов'язані з майбутнім, починають змінювати відношення до своєї навчальної діяльності. Хлопці і дівчата проявляють велику вибірковість до навчальних предметів, яка, втім, не завжди відповідає їх реальній схильності.

Юнацький вік цікавий ще однією важливою характеристикою. Оскільки мислення набуває особистісно емоційного характеру, то в свідомості молодої людини уживаються дві тенденції: «думати про себе» і «думати про проблеми всесвіту». Ці тенденції не лише уживаються одина з одною, але і взаємозв'язані між собою. Так, пошук свого місця в житті починає розглядатися у філософських категоріях і виникає прагнення вирішувати свою долю у світовому масштабі». З’являється тенденція постійно утверджувати свої погляди, свою позицію, своє розуміння світу і всіх оточуючих.

Таким чином, даний вік характеризується посиленням пізнавальної діяльності, яка стає такою, що веде, не до кінця усвідомлюваною підготовкою до дорослого життя, яскравими емоційними реакціями. Центральне новоутворення – професійне самовизначення, конкретизація ціннісних орієнтирів. [21]

Для розвитку абстрактних елементів розумової діяльності доцільно належну увагу приділяти формам роботи по аналізу різних видів моделювання і схематизації одного і того ж завдання. Необхідно вчити молодих людей сприймати будь-яке конкретне завдання як вираження загальних залежностей даного предмету. Узагальнення повинне переноситися з одного предмету на інший, тому зростає роль міжпредметних зв'язків. Крім того, навчальні інтереси стають стійкішими, набувають найбільш особистісного і активного характеру. Проте поряд з цими тенденціями, що свідчать про більшу зрілість навчальних інтересів, у школярів можна відзначити і деякі інфантильні риси. Навчальні інтереси у багатьох існують як би самі по собі. Інтерес знижується, якщо вчитель орієнтується лише на можливості середнього учня. Тому при розробці тематичних і поурочних планів, при підборі навчального і ілюстративного матеріалу вчитель повинен враховувати характер потреб учнів, з тим, щоби зміст навчального матеріалу задовольняв і сприяв розвитку школярів.[25]

Перше уявлення про рівняння як рівність, що містить невідоме, учні дістають у початковій школі.

Вже в *3 класі* вони розв'язують рівняння на зразок: $x + 7 = 15$; $x - 9 = 14$; $18 - x = 12$, $x * 7 = 42$; $x : 8 = 4$; $32 : x = 8$ на основі залежностей результатів арифметичних дій від компонентів, а також найпростіші нерівності з однією змінною.

У *4 класі* розв'язують рівняння на зразок: $17 - x = 50 - 30$; $(16 + x) - 34 = 10$ та нерівності з однією змінною.

Лінія рівнянь у 5 –6 *класах* розширюється у зв'язку з тим, що в 5 класі учні розв'язують лінійні рівняння не лише на основі залежності результатів арифметичних дій від компонентів, а й ознайомлюються з властивістю рівняння щодо можливості додавання до обох його частин однакового виразу наслідком з цієї властивості, який дає можливість переносити вирази з однієї частини рівняння в другу з протилежним знаком. Отже, розширюються множина рівнянь, які учні можуть розв'язувати (невідоме може бути в обох частинах рівняння), і види задач, які розв'язують за допомогою рівнянь. З цим методом учнів вперше ознайомлюють у 6 класі.

У курсі алгебри 7 - 9 класів учні розв'язують рівняння, використовуючи тотожні перетворення цілих і дробових виразів.

У 7 *класі* учні ознайомлюються з поняттям системи лінійних рівнянь з двома невідомими і трьома способами їх розв'язування: графічним, способом підстановки і способом додавання, розв'язують текстові задачі за допомогою системи рівнянь.

У *8 класі* учні вивчають квадратні рівняння та спосіб їх розв'язування, розв'язують дробово - раціональні рівняння, які зводяться до квадратних, і відповідні текстові задачі.

У 9 *класі* розв'язують системи рівнянь другого степеня з двома невідомими і текстові задачі за допомогою систем рівнянь.

З поняттям числової нерівності та знаками «>»,«<» учні вперше ознайомлюються в початковій школі, потім розглядають у 5 класі у зв'язку з порівнянням і округленням натуральних чисел. У 6 класі для порівняння раціональних чисел упроваджуються знаки «>», «<».

Як самостійну тему «Нерівності» вивчають у 9 класі, де вводиться поняття числових нерівностей, обґрунтовуються основні їх властивості та розглядаються поняття нерівності зі змінною, лінійної нерівності, системи лінійних нерівностей з однією змінною. Учні вчаться розв'язувати системи таких нерівностей. У 9 класі вивчають нерівності другого степеня.

У *10-11 класах* програма курсу алгебри і початків аналізу передбачає ознайомлення учнів з тригонометричними, ірраціональними, показниковими і логарифмічними рівняннями і нерівностями, їх системами та способами розв'язання. [2]

Тему «Ірраціональні рівняння і нерівності» не можна віднести до легко засвоюваної. Її традиційне вивчення зосереджене в рамках курсу 8 – 11 класів, що дозволяє повноцінно враховувати вікові можливості учнів у формуванні ряду умінь і навиків, але часу на вивчення теми відведено небагато. Перш за все, потрібно відмітити, що при викладі даної теми реалізуються багато загальних методичних особливостей, характерних для курсу в цілому. У всіх підручниках при вивченні квадратного кореня і його властивостей (8 – 9 класів) розв'язуються прості ірраціональні рівняння виду $\sqrt{f(x)} = a$, де *f(x)* – многочлен від *x*, *a* – деякі числа. Основні ж методи розв'язання ірраціональних рівнянь і нерівностей розглянуті в підручниках 10 – 11 класів (академічного і профільного рівнів). [25]

В основному ірраціональні рівняння і нерівності вивчаються в 10 класі. У підручниках міститься весь теоретичний і практичний матеріал, необхідний для реалізації навчання на трьох рівнях. Включений різноманітний додатковий матеріал: тести по перевірці готовності вивчення тем, таблиці очікуваних результатів навчання, дослідницькі і лабораторні роботи, довідковий матеріал. Є контрольні завдання трьох рівнів складності, завдання на повторення, історичні відомості і інші матеріали.

У шкільній практиці при розв'язанні ірраціональних рівнянь найчастіше використовуються два основні методи:

- піднесення обох частин рівняння до одного і того ж степеня;
- введення нових (допоміжних) змінних.

Ці методи вважаються стандартними, у шкільному курсі математики зазвичай ними і обмежуються. Проте іноді доводиться розв'язувати ірраціональні рівняння, які потребують застосування нестандартних методів та прийомів.

Продовженням розвитку даної змістовно - методичної лінії є нерівності, а також системи рівнянь і нерівностей. Треба зазначити, що вміння школярів розв'язувати рівняння та нерівності є обов'язковим компонентом при проведенні підсумкової атестації учнів.

Тому учителю слід вимагати від учнів обґрунтування всіх виконаних ними дій при розв'язанні тих чи інших рівянянь і нерівностей, а також показати школярам раціональні способи та методи їх розв'язання.

При вивченні даної теми виникає досить багато труднощів, які пов'язані з особливостями самого матеріалу:

- у більшості випадків відсутній чіткий алгоритм розв'язання ірраціональних рівнянь та нерівностей;
- при розв'язанні рівнянь та нерівностей даного виду доводиться виконувати перетворення, що призводять до рівнянь (нерівностей), не рівносильних даним.

Тому досить часто виникають помилки, які зазвичай пов'язані з втратою чи отриманням сторонніх коренів у процесі розв'язування.

Однією з типових помилок є те, що школярі без додаткових пояснень використовують перетворення, що порушують рівносильність, що призводить до втрати коренів або появі сторонніх, також учні не враховують область допустимих значень.

Тому необхідно навчати учнів знаходити спочатку область допустимих значень, так як в деяких випадках уже по ній можна зробити висновок про існування розв'язків рівняння. [4]

Отже, методика навчання розв'язання ірраціональних рівнянь та нерівностей повинна бути спрямована на формування загального прийому розв'язання рівняння або нерівності.

Етапами загального прийому розв'язання рівняння, нерівності є:

- визначення виду рівняння, нерівності;
- визначення стандартне воно чи ні;

- якщо стандартне, то розв’язання відповідно до відомих правил, алгоритмів;
- якщо нестандартне, то з'ясування, які перетворення необхідно виконати, щоб звести його до стандартного, або перейти до використання штучних прийомів розв’язання;
- виконання перетворень;
- виконання перевірки;
- запис відповіді. [13]

РОЗДІЛ 2. ІРРАЦІОНАЛЬНІ РІВНЯННЯ І НЕРІВНОСТІ В ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ.

2.1. РІЗНІ ПІДХОДИ ДО ВИВЧЕННЯ ТЕМИ «ІРРАЦІОНАЛЬНІ РІВНЯННЯ»

2.1.1. Метод, що грунтується на знаходженні ОДЗ.

Рівняння називається ірраціональним, якщо змінна входить під знак радикала або змінну піднесено до степеня з дробовим показником.

Приступаючи до розв'язання ірраціональних рівнянь, іноді корисно попередньо визначити ОДЗ, бо, можливо, це рівняння не визначене в області дійсних чисел. Спершу знаходимо ОДЗ на підставі того, що $\sqrt{f(x)}$ має зміст за умови $f(x) \geq 0$. Під час розв’язання перевіряємо, чи знайдені корені входять до ОДЗ.

Також потрібно відмітити, що

1. Всі корені парного степеня, які входять в рівняння є арифметичними. Іншимим словами, якщо підкореневий вираз від’ємний, то кореня не має; якщо підкореневий вираз дорівнює нулю, то корінь також дорівнює нулю; якщо ж підкореневий вираз додатній, то і значення кореня також додатне.
2. Всі корені непарного степеня, які входять в рівняння, визначені при будь – якому дійсному значенні підкореневого виразу. При цьому корінь від’ємний, якщо підкореневий вираз від’ємний; дорівнює нулю, якщо підкореневий вираз дорівнює нулю; додатній, якщо підкореневий вираз додатній.
3. Функції $y = \sqrt[2n]{x}$ і $y = \sqrt[2n+1]{x}$ є зростаючими на своїй області існування.

Використовуючи ці властивості, в деяких випадках можна визначити, що рівняння не має розв’язку, не розв‘язуючи його. [4]

Приклад 1. Довести, що рівнняння не має розв’язку:

a) $\sqrt{x+2} = -2;$

Розв'язання: Арифметичний корінь не може дорівнювати від'ємному числу, тому рівняння не має розв'язку.

b) $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+3} = 0;$

Розв'язання: Ліва частина даного рівняння визначена при $x \geq -{}^{3}/_{2}$. При кожному такому x величина $\sqrt{2x+3}$ невід'ємна, а величина $\sqrt{x+3}$ додатна. Отже їх сума завжди більша нуля. Тому рівняння розв'язку не має.

c) $\sqrt{4-x}-\sqrt{x-6} = 2;$

Розв'язання: Вираз $\sqrt{4-x}$ визначений при $x \leq 4$, а вираз $\sqrt{x-6}$ при $x \geq 6$. Отже, не існує такого x, при якому обидві частини мають розв'язок. Тому рівняння розв'язку не має.

d) $\sqrt{-1-x} = \sqrt[3]{x-5};$

Розв'язання: Вираз $\sqrt{-1-x}$ визначений при $x \leq -1$, і він невід'ємний. При таких x правильна нерівність $x-5 < 0$; тому вираз $\sqrt[3]{x-5}$ від'ємний. Ліва частина рівняння невід'ємна, а права - від'ємна, тому рівняння розв'язку не має.

e) $5\sqrt{x}-3\sqrt{-x}+\frac{17}{x} = 4;$

Розв'язання*:* При $x < 0$ не має розв'язку вираз $5\sqrt{x}$, при $x > 0$ - вираз $3\sqrt{-x}$, а при $x = 0$ – вираз $\frac{17}{x}$. Отже, рівняння розв'язку не має.

f) $\sqrt{x-3}-\sqrt{x+9} = \sqrt{x-2};$

Розв'язання: ОДЗ рівняння визначене системою:

$$\begin{cases} x-3 \geq 0, \\ x+9 \geq 0, \\ x-2 \geq 0, \end{cases}$$

з якої маємо, що $x \geq 3$.

При будь – якому x справедлива нерівність $x - 3 < x + 9$; тому при $x \geq 3$ правильна нерівність $\sqrt{x-3} < \sqrt{x+9}$ і вираз $\sqrt{x-3} - \sqrt{x+9}$ від'ємний. Але на ОДЗ вираз $\sqrt{x-2}$ додатний. Тому рівняння розв'язку не має.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $(x^2 + 6x + 5)\sqrt{9x-2} = 0$.

Розв'язання. Знайдемо область допустимих значень даного рівняння:

$$9x - 2 \geq 0; x \geq \frac{2}{9}.$$

$x_1 = -1;\ x_2 = -5;\ x_3 = \frac{2}{9}$

Корені $x_1 = -1;\ x_2 = -5$ не задовольняють ОДЗ і не задовольняють рівняння.

Відповідь. $x = \frac{2}{9}$.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $\sqrt{x^2 + x + 1} = \sqrt{x} - 1$.

Розв'язання. Знайдемо область допустимих значень даного рівняння:

$$\begin{cases} x^2 + x + 1 \geq 0; \\ x \geq 0. \end{cases}$$

Звідси $x \geq 0$.

В ОДЗ виконується рівність $x^2 + x + 1 > x \Rightarrow \sqrt{x^2 + x + 1} > \sqrt{x}$.

Рівняння розв'язку не має.

Відповідь. Коренів не має.

Приклад 4. Розв'язати рівняння $\sqrt{-2 - x} = \sqrt[3]{x - 4}$.

Розв'язання. Знайдемо область допустимих значень даного рівняння:

$-2 - x \geq 0;$

$x \leq -2.$

В ОДЗ права частина рівняння від'мна, а ліва частина не від'мна.

Відповідь. Рівняння не має розв'язків.

Завдання для самостійної роботи.

Розв'язати рівняння:

1. $\sqrt{10+x} + \sqrt{10-x} = 4.$
2. $\sqrt{x-10} + \sqrt{1-x} = 6.$
3. $\sqrt{4x+7} + \sqrt{3-4x+x^2} + 2 = 0.$
4. $2\sqrt{x^3-4x^2+1} + \sqrt{x^2(x+1)^3} = -5.$
5. $\sqrt{x-13} - \sqrt{10-x} = 2.$
6. $\sqrt{3-x} = x-3.$
7. $\sqrt{x} + \sqrt{x-2} = 1-x.$
8. $\sqrt{3+\sqrt{x-1}} = 1.$
9. $\sqrt{x} + \sqrt{x+9} = 2.$
10. $\sqrt[3]{x+1/x} = \sqrt{-x} - 1.$

2.1.2.Метод рівносильних перетворень.

Рівняння виду $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$ ***рівносильне системі*** $\begin{cases} f(x) = g(x); \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$

Тому, якщо над ірраціональними рівняннями проводяться перетворення, принцип яких піднесення обох частин до квадрату, то кожен із знайдених коренів отриманого рівняння потрібно перевірити: задовольняє він розв'язок початкового рівняння чи ні.

Перевірка відбувається безпосередньо підстановкою в початкове рівняння кожного із коренів отриманого рівняння. Якщо число, яке підставляємо, перетворює рівняння в правильну числову рівність, то число є коренем рівняння; в протилежному випадку говорять, що це число є стороннім коренем.

При піднесенні обох частин ірраціонального рівняння до квадрату, для того щоб позбутися радикала, сторонні корені початкового рівняння появляються як правило з таких причин:

a) за рахунок можливого розширення ОДЗ початкового рівняння (так як ОДЗ отриманого рівняння ширше за ОДЗ початкового рівняння).

b) за рахунок піднесення до парного степеня лівої і правої частини, які рівні за модулем, але одна з них додатна, а інша – від'ємна. [5]

Приклад 5. Розв'язати рівняння $\sqrt{x^2-3x} = \sqrt{x-1}$.

Розв'язання. Це рівняння рівносильне системі $\begin{cases} x^2-3x = x-1, \\ x \geq 1. \end{cases}$

Звідси $\begin{cases} x^2-4x+1=0, \\ x \geq 1. \end{cases}$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 2+\sqrt{3}, \\ x = 2-\sqrt{3}, \end{array}\right. \\ x \geq 1; \end{cases}$$

Відповідь. $x = 2+\sqrt{3}$.

Приклад 6. Розв'язати рівняння

$$\sqrt{11x+3} - \sqrt{2-x} = \sqrt{9x+7} - \sqrt{x-2}.$$

Розв'язання. Піднесемо ліву і праву частину рівняння до квадрата:

$$11x+3-2\sqrt{(11x+3)(2-x)}+2-x$$
$$= 9x+7-2\sqrt{(9x+7)(x-2)}+x-2,$$

$$\sqrt{6+19x-11x^2} = \sqrt{9x^2-11x-14},$$

$$6+19x-11x^2 = 9x^2-11x-14,$$

$$20x^2-30x-20=0,$$

$$2x^2-3x-2=0.$$

Розв‘язком останнього рівняння є числа $x_1 = 2$ і $x_2 = -0{,}5$.

При $x = 2$ початкове рівняння перетворюється в правильну числову рівність. Тому $x_1 = 2$ є коренем рівняння.

При $x = -0{,}5$ в лівій частині початкового рівняння маємо вираз $\sqrt{-0{,}5-2}$, який немає сенсу. Тому число $x_2 = -0{,}5$ не задовольняє початкове рівняння.

Відповідь. $x = 2$.

Рівняння виду $\sqrt{f(x)} = g(x)$ ***рівносильне системі*** $\begin{cases} f(x) = (g(x))^2, \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$

Приклад 7. Розв'язати рівняння $\sqrt{x+7} = x - 3$.

Розв'язання. Це рівняння рівносильне системі: $\begin{cases} x + 7 = (x-3)^2, \\ x - 3 \geq 0. \end{cases}$

Звідси $\begin{cases} x^2 - 7x + 2 = 0, \\ x \geq 3; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \frac{7+\sqrt{41}}{2}, \\ x = \frac{7+\sqrt{41}}{2}, \end{array} \right. \\ x \geq 3; \end{cases}$

Відповідь. $x = \frac{7+\sqrt{41}}{2}$.

Якщо для будь – якого $x \in ОДЗ$ виконуються нерівності $f(x) \geq 0; g(x) \geq 0,$ то рівняння $f(x) = g(x)$ і $(f(x))^{2k} = (g(x))^{2k}, k \in N,$ рівносильні в ОДЗ. [5]

Приклад 8. Розв'язати рівняння $\sqrt{2x-5} + \sqrt{x+2} = \sqrt{2x+1}$.

Розв'язання. ОДЗ: $\begin{cases} 2x - 5 \geq 0, \\ x + 2 \geq 0, \\ 2x + 1 \geq 0. \end{cases}$

Звідси $x \geq 2{,}5$. Обидві частини цього рівняння в ОДЗ набувають невід'ємних значень. Тому це рівняння в ОДЗ рівносильне рівнянню:

$$\left(\sqrt{2x-5} + \sqrt{x+2}\right)^2 = \left(\sqrt{2x+1}\right)^2$$

Звідси $2\sqrt{2x-5}\sqrt{x+2} = 4 - x;$

Тоді $\begin{cases} 4(2x-5)(x+2) = (4-x)^2, \\ 2{,}5 \leq x \leq 4. \end{cases}$

Звідси $\begin{cases} 7x^2 + 4x - 56 = 0, \\ 2{,}5 \leq x \leq 4; \end{cases} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \frac{-2-6\sqrt{11}}{7}, \\ x = \frac{-2+6\sqrt{11}}{7}, \end{array} \right. \\ 2{,}5 \leq x \leq 4; \end{cases} \Rightarrow x = \frac{-2+6\sqrt{11}}{7}.$

Відповідь. $x = \frac{-2+6\sqrt{11}}{7}$.

Приклад 9. Розв'язати рівняння $3\sqrt{x+3} - \sqrt{x-2} = 7$.

Розв'язання. ОДЗ: $\begin{cases} x+3 \geq 0, \\ x-2 \geq 0. \end{cases}$

Піднесемо ліву і праву частину рівняння до квадрата:

$9(x+3) = x - 2 + 14\sqrt{x-2} + 49,$

Зведемо подібні доданки, перенесемо радикал в праву частину і отримаємо рівняння:

$4x - 10 = 7\sqrt{x-2}.$

Піднесемо обидві частини до квадрата:

$16x^2 - 80x + 100 = 49(x-2),$

$16x^2 - 129x + 198 = 0,$

Знаходимо корені рівняння: $x_1 = 6$ і $x_2 = 2\frac{1}{16}$.

При $x = 6$ отримаємо правильну числову рівність. Отже, $x_1 = 6$ корінь початкового рівняння.

При $x = 2\frac{1}{16}$ ліва частина початкового рівняння дорівнює $6\frac{1}{2}$, а права – 7. Отже, $x_2 = 2\frac{1}{16}$ сторонній корінь.

Відповідь. $x = 6$.

Завдання для самостійної роботи.

Розв'язати рівняння:

1. $\sqrt{1+3x} = x + 1.$
2. $\sqrt{7x+1} = 2\sqrt{x+4}.$
3. $\sqrt{x+5} - \sqrt{x-3} = 2.$
4. $\sqrt{6 - 4x - x^2} = x + 4.$
5. $\sqrt{4 - 2\sqrt{x^2-1}} = 2x.$
6. $\sqrt{3x - x^2 + 2} = 4 - x.$
7. $\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2} = (x^4+2)^2.$

8. $\sqrt{2x+5}+\sqrt{x-1}=8.$

9. $\sqrt{x+5}+\sqrt{2x+8}=7.$

10. $\sqrt{5x+7}-\sqrt{2x+3}=\sqrt{3x+4}.$

2.1.3.Метод заміни змінної.

Розв’язок ірраціональних рівнянь шляхом заміни його підкореневого виразу можна провести таким чином:

1. Найти ОДЗ початкового рівняння.
2. Перейти від рівняння до його заміни.
3. Знайти корені отриманого рівняння.
4. Перевірити, чи знайдені корені є коренями початкового рівняння.

Перевірка полягає в наступному:

a) перевірити належність кожного знайденого кореня ОДЗ початкового рівняння. Ті корені, які не належать ОДЗ, є сторонніми для початкового рівняння;

b) для кожного кореня, який належить ОДЗ початкового рівняння, перевіряється чи мають однакові знаки ліва і права частини кожного з рівнянь, які виникли в процесі розв’язку початкового рівняння. Ті корені, для яких частини рівнянь мають різні знаки, є сторонніми коренями для початкового рівняння;

c) тільки ті корені, які належать ОДЗ початкового рівняння і для яких обидві частини кожного із рівнянь, які виникли в процесі розв’язку початкового рівняння, мають однакові знаки, перевіряються безпосередньою підстановкою в початкове рівняння.

Заміна підкореневого виразу спрощує зведення ірраціонального рівняння до раціонального. [7]

Приклад 10. Розв’язати рівняння $\sqrt{2x^2-6x+8}+\sqrt{2x^2-6x+1}=7.$

Розв’язання. Позначимо $\sqrt{2x^2-6x+1}=t\geq 0.$

Отримаємо рівняння: $\sqrt{t^2+7}+t=7, t^2+7=49-14t+t^2, t=3.$

Повертаючись до початкових змінних, отримаємо рівняння:

$2x^2 - 6x + 1 = 9, \qquad x_1 = -1;\ x_2 = 3.$

Відповідь. $x_1 = -1;\ x_2 = 3.$

Приклад 11. Розв'язати рівняння $\sqrt{x+6} - \sqrt[3]{x-2} = 2.$

Розв'язання. Позначимо $\sqrt[3]{x-2} = t, x = t^3 + 2.$

Отримаємо рівняння:

$\sqrt{t^3+8} = t + 2, t^3 + 8 = (t+2)^2, t_1 = -1, t_2 = 2, t_3 = -3.$

Повертаючись до початкових змінних, отримаємо:

$x_1 = 3, x_2 = 10, x_3 = -6.$

Відповідь. $x_1 = 3, x_2 = 10, x_3 = -6.$

Приклад 12. Розв'язати рівняння $x\sqrt{5-x^2} + \sqrt{5-x^2} + x = 5.$

Розв'язання. Позначимо $\sqrt{5-x^2} + x = z.$

Рівняння матиме такий вигляд: $\frac{z^2-5}{2} + z = 5, z_1 = -5, z_2 = 3.$

Повертаючись до початкових змінних, отримаємо рівняння:

$\sqrt{5-x^2} + x = -5, \quad 5 - x^2 = (-5-x)^2, \ x^2 + 5x + 10 = 0,$ розв'язків не має.

$$\sqrt{5-x^2} + x = 3, \quad 5 - x^2 = (3-x)^2, \qquad x^2 - 3x + 2 = 0,$$
$$x_1 = 2, x_2 = 1.$$

Відповідь. $x_1 = 2, x_2 = 1.$

Приклад 13. Розв'язати рівняння:

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1.$$

Розв'язання. Позначимо $\sqrt{x-1} = t,$ маємо $t \geq 0$ і $x = t^2 + 1.$

Рівняння матиме такий вигляд:

$$\begin{cases} t \geq 0, \\ \sqrt{t^2-4t+4} + \sqrt{t^2-6t+9} = 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} t \geq 0, \\ \sqrt{(t-2)^2} + \sqrt{(t-3)^2} = 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} t \geq 0, \\ |t-2| + |t-3| = 1; \end{cases} \Rightarrow 2 \leq t \leq 3.$$

Повертаючись до початкових змінних, отримаємо $2 \leq \sqrt{x-1} \leq 3 \quad \leftrightarrow$ $4 \leq x-1 \leq 9 \quad \leftrightarrow \quad 5 \leq x \leq 10.$

Таким чином, початкове рівняння має нескінченну кількість коренів, а саме всі числа x з відрізка $[5, 10]$.

Завдання для самостійної роботи.

Розв’язати рівняння:

1. $x^2 + \sqrt{x^2+20} = 22.$
2. $\sqrt{x-7} - \frac{6}{\sqrt{x-7}} = 1.$
3. $x^2 + 3x + 2 = 2\sqrt{x^2+3x+5}.$
4. $(\frac{x+5}{x})^{0,5} + 4(\frac{x}{x+5})^{0,5} = 4.$
5. $\sqrt{x^2-3x+5} + x^2 = 3x + 7.$
6. $2x^2 - 5\sqrt{2x^2+3x+9} + 3x + 3.$
7. $\sqrt{\frac{3-x}{2+x}} + 3\sqrt{\frac{2+x}{3-x}} = 4.$
8. $2\sqrt{\frac{3x+2}{4+x}} + 3\sqrt{\frac{4+x}{3x+2}} = 5.$
9. $\sqrt{6-x-x^2} - \sqrt{x^2+x-1} = 1.$
10. $\sqrt{x-4+\sqrt{x-2}} - \sqrt{x-3-\sqrt{x-2}} = 1.$

2.1.4.Метод виділення повного квадрата.

Вирази, що стоять під знаком квадратного кореня, мають бути квадратами двочленів. Застосовуючи формулу $\sqrt{x^2} = |x|$, одержуємо рівняння з модулями. [5]

Приклад 14. Розв’язати рівняння:

$$\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{x^2+4x+4}=\sqrt{x^2-6x+9}.$$

Розв'язання. Виділимо під радикалами повний квадрат:

$$\sqrt{(x-2)^2}+\sqrt{(x+2)^2}=\sqrt{(x-3)^2},\text{ або } |x-2|+|x+2|=|x-3|.$$

Розв'язуємо рівняння на інтервалах $(-\infty;-2]$; $[-2;2]$; $[2;3]$; $[3;+\infty)$ і знаходимо корені рівняння: $x_1=-3, x_2=-1$.

Відповідь. $x_1=-3, x_2=-1$.

Приклад 15. Розв'язати рівняння:

$$\sqrt{x-1-2\sqrt{x-2}}+\sqrt{x+7-6\sqrt{x-2}}=2$$

Розв'язання. Виділимо під радикалами повний квадрат:

$$\sqrt{\left(\sqrt{x-2}-1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x-2}-3\right)^2}=2.$$

Позначимо

$\sqrt{x-2}=z\geq 0$, *отримаємо* рівняння $|z-1|+|z-3|=2$.

Розв'язуємо рівняння на інтервалах $[0;1]$; $[1;3]$; $[3;+\infty)$.

Звідки маємо $1\leq z\leq 3$; тоді $3\leq x\leq 11$.

Відповідь. $3\leq x\leq 11$.

Завдання для самостійної роботи.

Розв'язати рівняння:

1. $\sqrt{2x-3}+4x^2-12x+9=0$.
2. $2x^2-3x=2x\sqrt{x^2-3x}+1$.
3. $\sqrt{x^2+2x+1}+\sqrt{x^2-4x+4}=4$.
4. $\sqrt{4x^2+4x+1}=x^2+x-1$.
5. $\sqrt{x^2+2x+1}=3x-3$.

2.1.5. Рівняння з кубічною ірраціональністю.

При піднесенні обох частин рівняння до третього степеня (непарного) завжди отримаємо рівняння, рівносильне заданому (на його ОДЗ). [4]

Приклад 16. Розв'язати рівняння $\sqrt[3]{2x+3}-\sqrt[3]{2x+1}=2.$

Розв'язання. Піднесемо обидві частини рівняння до третього степеня, отримаємо:

$$2x+3-2x-1-3\sqrt[3]{2x+1}\sqrt[3]{2x+3}\left(\sqrt[3]{2x+3}-\sqrt[3]{2x+1}\right)=8,$$

$$\sqrt[3]{2x+3}\sqrt[3]{2x+1}=-1,$$

$$(2x+3)(2x+1)=-1,$$

$$x^2+2x+1=0,$$

$$x=-1.$$

Відповідь. $x=-1.$

Приклад 17. Розв'язати рівняння:

$$\sqrt[3]{(8-x)^2}+\sqrt[3]{(27+x)^2}-\sqrt[3]{(8-x)(27+x)}=7.$$

Розв'язання. Помножимо обидві частини рівняння на $\sqrt[3]{8-x}+\sqrt[3]{27+x}\neq 0.$ Дістанемо:

$35=7\cdot\left(\sqrt[3]{8-x}+\sqrt[3]{27+x}\right),$ або $\sqrt[3]{8-x}+\sqrt[3]{27+x}=5.$

Знайдене рівняння піднесемо до куба і після елементарних спрощень дістанемо:

$$\sqrt[3]{(8-x)(27+x)}=6.$$

Знову піднесемо останнє рівняння до куба і, провівши спрощення, отримуємо рівняння:

$x^2+19x=0,$ звідки $x_1=-19, x_2=0.$

Відповідь. $\{-19;0\}.$

Завдання для самостійної роботи.

Розв'язати рівняння:

1. $\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1}=1.$
2. $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x+2}=-\sqrt[3]{x+3}.$
3. $\sqrt[3]{5x+7}+\sqrt[3]{5x-12}=1.$

4. $\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1} = \sqrt[6]{x^2-1}$.

5. $\sqrt[3]{8+x} + \sqrt[3]{8-x} = 1$.

6. $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2x-3} = \sqrt[3]{12(x-1)}$.

7. $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x-16} = 0{,}5\sqrt[3]{8-x}$.

8. $\sqrt[3]{x+7} - 3 = \sqrt[3]{x-2}$.

9. $\sqrt[3]{x^2+15} = 2\sqrt[3]{x+1}$.

10. $\sqrt[3]{76+\sqrt{x}} + \sqrt[3]{76-\sqrt{x}} = 8$.

2.1.6. Метод розкладу на множники.

Приклад 18. Розв'язати рівняння $\sqrt{2x^2+8x+6} + \sqrt{x^2-1} = 2x+2$.

Розв'язання. Знайдемо ОДЗ:

$$\begin{cases} 2x^2+8x+69 = 2(x+1)(x+3) \geq 0, \\ x^2-1 = (x-1)(x+1) \geq 0, \\ 2x+2 \geq 0; \end{cases}$$

$x \in \{-1\} \cup [1;+\infty)$. $x_1 = -1$.

Винесемо спільний множник:

$$\sqrt{x+1}\left(\sqrt{2(x+3)} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x+1}\right) = 0.$$

$$\sqrt{2x+6} + \sqrt{x-1} = 2\sqrt{x+1},$$

$$2x+6+2\sqrt{2x+6}\sqrt{x-1} + x - 1 = 4x+4,$$

$$2\sqrt{2x+6}\sqrt{x-1} = x-1, 3x^2+10x-13 = 0,$$

$$x_2 = 1, x_3 = -\frac{13}{3}.$$

Корінь $x_3 = -\frac{13}{3}$ не задовольняє рівняння.

Відповідь. $x_1 = -1, x_2 = 1$.

Приклад 19. Розв'язати рівняння $\sqrt[4]{1+x} + \frac{1}{x}\sqrt[4]{1+x} = 32\sqrt[4]{x}$.

Розв'язання. Знайдемо ОДЗ: $\begin{cases} 1+x \geq 0, \\ x > 0, \end{cases}$ $\quad x \in (0;+\infty)$.

Винесемо корінь четвертого степеня за дужки:

$$\sqrt[4]{1+x}\left(1+\frac{1}{x}\right)=32\sqrt[4]{x}, (1+x)^{\frac{5}{4}}=32x^{\frac{5}{4}},$$

$$1+x=16x, x=\frac{1}{15}.$$

Відповідь. $x=\frac{1}{15}$.

Завдання для самостійної роботи.

Розв'язати рівняння:

1. $x^2\sqrt{x+5}-64\sqrt{x+5}=0.$
2. $\sqrt{x-5}-49\sqrt{x-5}=0.$
3. $(x^2+3)\sqrt{5x-2-2x^2}=4x\sqrt{5x-2-2x^2}.$

2.1.7. Штучні методи розв'язування ірраціональних рівнянь.

1. Уведення спряжених виразів.

Розв'язування деяких типів ірраціональних рівнянь іноді можна значно спростити, скориставшись спряженими виразами (так називають, наприклад, два вирази типу $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ і $\sqrt{a}-\sqrt{b}$. Цей спосіб можна застосувати до рівнянь виду $\sqrt{a_1x^2+b_1x+c_1} \pm \sqrt{a_2x^2+b_2x+c_2} = mx+n$, якщо дріб $\frac{a_1x^2+b_1x+c_1-(a_2x^2+b_2x+c_2)}{mx+n}$ є двочленом першого степеня.

Для полегшення сприймання почнемо з прикладу, в якому $m = 0$. [10]

Приклад 20. Розв'язати рівняння $\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2}=4.$ (1)

Розв'язання. Щоб дістати рівняння простіше, ніж задане, знайдемо різницю тих радикалів, сума яких дана за умовою задачі, тобто обчислимо вираз

$\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}=A$ (2)

Для цього перемножимо ліві та праві частини рівняння (1) і (2), Тоді дістанемо:

$(\sqrt{1+x+x^2})^2 - (\sqrt{1-x+x^2})^2 = 4$A,

або $1+x+x^2 - (1-x+x^2) = 4A$;

$2x = 4$ A;

A $= \frac{x}{2}$.

Отже,

$$\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2} = \frac{x}{2}. \qquad (3)$$

Маючи суму і різницю радикалів заданого рівняння, для знаходження коренів легко дістати простіші рівняння. Так, додаючи почленно рівняння (1) і (3), маємо

$$2\sqrt{1+x+x^2} = 4 + \frac{x}{2},$$

звідки

$$4(1+x+x^2) = 16 + 4x + \frac{x^2}{4},$$

$$\text{або } 15x^2 = 48,\ x = \pm\frac{4}{\sqrt{5}}.$$

Зробивши перевірку при $x_1 = \frac{4}{\sqrt{5}}$, $x_2 = -\frac{4}{\sqrt{5}}$, переконуємось, що обидва корені задовільняють рівняння.

Відповідь. $x_1 = \frac{4}{\sqrt{5}}$, $x_2 = -\frac{4}{\sqrt{5}}$.

2. Зведення до системи рівнянь

Приклад 21. Розв'язати рівняння $\sqrt[4]{1-x} + \sqrt[4]{15+x} = 2$.

Розв'язання: Уведемо допоміжні змінні $\begin{cases} u = \sqrt[4]{1-x}, \\ v = \sqrt[4]{15+x}. \end{cases}$ Тоді рівняння набуде вигляду $u + v = 2$. Але для знаходження нових змінних одного рівняння недостатньо. Піднесемо до четвертого степеня обидві частини кожного з рівнянь системи і отримаємо систему рівнянь $\begin{cases} u^4 = 1-x, \\ v^4 = 15+x. \end{cases}$ Додамо рівняння останньої системи: $u^4 + v^4 = 16$. Таким чином, для знаходження *u, v* маємо систему рівнянь: $\begin{cases} u+v=2, \\ u^4+v^4=16. \end{cases}$

Піднесемо перше рівняння системи до четвертого степеня і віднімемо від отриманої рівності друге рівняння системи:

$$(u+v)^4 = u^4 + 4u^3v + 6u^2v^2 + 4uv^3 + v^4.$$

$$\begin{cases} u^4 + 4u^3v + 6u^2v^2 + 4uv^3 + v^4 = 16, \\ u^4 + v^4 = 16. \end{cases}$$

Після віднімання отримаємо:

$$\begin{cases} 4u^3v + 6u^2v^2 + 4uv^3 = 0, \\ u + v = 2, \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} 2uv(2u^2 + 3uv + 2v^2) = 0, \\ u + v = 2, \end{cases}$$

або отримаємо три системи

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} u = 0, \\ u + v = 2; \end{cases} \\ \begin{cases} v = 0, \\ u + v = 2; \end{cases} \\ \begin{cases} 2u^2 + 3uv + 2v^2 = 0, \\ u + v = 2. \end{cases} \end{array}\right.$$

Звідки знаходимо:

$\begin{cases} u_1 = 0, \\ v_1 = 2 \end{cases}$ – *розв'язок прешої системи;*

$\begin{cases} u_2 = 2, \\ v_2 = 0. \end{cases}$ - *розв'язок другої системи.*

Третя система розв'язків не має.

Таким чином, розв'язування початкового рівняння звелось до розв'язування наступної сукупності рівнянь:

$$\begin{cases} \sqrt[4]{1-x} = 0, \\ \sqrt[4]{15+x} = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} \sqrt[4]{1-x} = 2, \\ \sqrt[4]{15+x} = 0. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю сукупність, знаходимо:

$\begin{cases} 1 - x = 0, \\ 15 + x = 16; \end{cases}$ звідки $x_1 = 1$;

$\begin{cases} 1 - x = 16, \\ 15 + x = 0; \end{cases}$ звідки $x_2 = 15$.

Перевірку здійснюємо безпосередньою підстановкою в задане рівняння. Обидва корені задовольняють рівняння. [4]

Відповідь. $x_1 = 1$; $x_2 = 15$.

3. Ірраціональні рівняння, розв'язування яких може бути пов'язане з розв'язуванням рівнянь з модулями.

Абсолютна величина (модуль) невід'ємного дійсного числа дорівнює самому числу; абсолютна величина від'ємного дійсного числа дорівнює протилежному:

$$|a| = \begin{cases} -a, & \text{якщо } a < 0, \\ a, & \text{якщо } a \geq 0. \end{cases}$$

Визначення абсолютної величини використовують при розв'язуванні рівнянь з модулями.

Розглянемо приклад ірраціонального рівняння, розв'язування якого пов'язане з розв'язуванням рівнянь з модулями. [4]

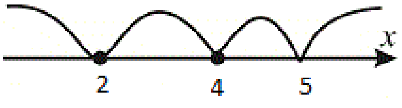
Приклад 22. Розв'язати рівняння $\frac{\sqrt{3x+26-10\sqrt{3x+1}}-\sqrt{3x+17-8\sqrt{3x+1}}}{\sqrt{3x+2+2\sqrt{3x+1}}+\sqrt{3x+5-4\sqrt{3x+1}}} = -1$.

Розв'язання. Позначимо $3x+1 = y^2$ $(y \geq 0) \Rightarrow 3x = y^2 - 1$.

Підставивши в рівняння, отримаємо: $\frac{\sqrt{y^2-1+26-10y}-\sqrt{y^2-1+17-8y}}{\sqrt{y^2-1+2+2y}+\sqrt{y^2-1+5-4y}} = -1$,

$\frac{\sqrt{(y-5)^2}-\sqrt{(y-4)^2}}{\sqrt{(y+1)^2}+\sqrt{(y-2)^2}} = -1$, звідки $|y-5| - |y-4| + |y-2| + |y+1| = 0$.

Отримали рівняння з модулями. Для того, щоб його розв'язати, потрібно на числовій осі відкласти значення змінних, при яких вираз в середині модуля перетворюється на нуль. Ці точки розбивають числову вісь на певні проміжки. Далі знаходимо значення змінної на кожному з отриманих проміжків.



У нашому випадку $y+1>0$, тоді рівняння набуває вигляду $|y-5| - |y-4| + |y-2| + y + 1 = 0$.

а) $\begin{cases} y \le 2, \\ -y+5+y-4-y+2+y+1=0 \end{cases}$ - система розв’язків не має;

б) $\begin{cases} 2 < y \le 4, \\ -y+5+y-4+y-2+y+1=0; \end{cases}$ $\begin{cases} 2 < y \le 4, \\ y = 0, \end{cases}$ - система розв’язків не має;

в) $\begin{cases} 4 < y \le 5; \\ -y+5-y+4+y-2+y+1=0, \end{cases}$ - система розв'язків не має;

г) $\begin{cases} y > 5; \\ -y-5-y+4+y-2+y+1=0, \end{cases}$ - система розв'язків не має.

Відповідь. Рівняння розв'язків не має.

Завдання для самостійної роботи.

Розв’язати рівняння:

1. $\sqrt{x^2-3x+3}+\sqrt{x^2+3}=3x.$

2. $\sqrt[3]{2-x}=1-\sqrt{x-1}.$

3. $\sqrt{1-x}+\sqrt{2x+6}=6.$

4. $\sqrt{1-x^2}=\left(\frac{2}{3}-\sqrt{x}\right)^4.$

5. $\sqrt{x^2-1}=(x+5)\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}.$

2.2. РІЗНІ ПІДХОДИ ДО ВИВЧЕННЯ ТЕМИ: «ІРРАЦІОНАЛЬНІ НЕРІВНОСТІ»

2.2.1. Найпростіші випадки розв’язування ірраціональних нерівностей.

Вивчаючи шкільну програму, ми з'ясували, що ірраціональні нерівності вивчаються протягом 2-3 уроків. Однак для тих учнів, які хочуть мати хорошу підготовку для вступу до ВНЗ цього явно недостатньо. Проглядаючи завданння, що пропонувалися на ЗНО, помічаємо, що крім ірраціональних рівнянь в них пропонується розв’язати також ірраціональні нерівності, наприклад:

$\sqrt{x^2-6x+8}-\sqrt{x^2-7x+10}<1$; $\sqrt{3x+\sqrt{9-x^2}}<\sqrt{3x+3}$;

$\frac{2}{x}+3\le\sqrt{41-\frac{16}{x}}$; $\sqrt{21x+16}-\sqrt{x-4}<20$ і т. д.

Ірраціональними називаються нерівності, в яких змінна стоїть під знаком радикала, причому розглядаються лише арифметичні корені, якщо корені парного степеня.

У найпростіших випадках розв’язати ірраціональну нерівність неважко. [19]

Приклад 1. Розв’язати нерівність $\sqrt[4]{x^2+5x+6}+\sqrt{x+8}\le -3.$

Розв’язання. ОДЗ нерівності визначається системою $\begin{cases} x^2+5x+6\ge 0, \\ x+8\ge 0. \end{cases}$

При всіх *x* з ОДЗ ліва частина нерівності невід’ємна, а права - від’ємна. Тому нерівність задовольнити неможливо. Задача не має розв’язків.

Приклад 2. Розв’язати нерівність $\frac{\sqrt{5-x}}{\sqrt{x-10}(\sqrt{x}+2)}\le\frac{4-x^2}{(x-4)(x+5)}$.

Розв’язання. Знайдемо ОДЗ даної нерівності:

$$\begin{cases} 5 - x \geq 0, \\ x - 10 > 0, \\ x \geq 0, \\ x \neq 4, \\ x \neq -5; \end{cases} \begin{cases} x \leq 5, \\ x > 10, \\ x \geq 0, \\ x \neq 4, \\ x \neq 5. \end{cases}$$

Ця система розв’язків не має, ОДЗ - порожня множина. Початкова нерівність розв’язків не має.

Приклад 3. Розв’язати нерівність $\frac{\sqrt{17-15x-2x^2}}{x+3} > 0$.

Розв’язання. ОДЗ чисельника визначається нерівністю $17 - 15x - 2x^2 \geq 0$, тобто $x \in [-8{,}5; 1]$. При всіх таких *x* чисельник даного дробу - невід’ємний, тому і знаменник повинен бути додатним. Отже, для розв’язування задачі слід розв’язати систему $\begin{cases} x \in (-8{,}5; 1), \\ x + 3 > 0. \end{cases}$

Відповідь. $x \in (-3; 1)$.

Приклад 4. Розв’язати нерівність $\sqrt{2x-5} > -1$.

Розв’язання. Ліва частина має зміст при $2x - 5 \geq 0$, тобто $x \in [2{,}5; +\infty)$, і при цих значеннях *x* невід'ємна. Оскільки права частина нерівності від'ємна, то нерівність є правильною при всіх указаних значеннях *x*.

Відповідь. $x \in [2{,}5; + \text{oo})$.

Завдання для самостійної роботи.

Розв’язати нерівність:

1. $(x+1)\sqrt{x+4} \cdot \sqrt{x+7} \leq 0$
2. $\frac{x^2-25}{\sqrt{x+4}} < 0.$
3. $\sqrt{x^2 - x + 1} + \frac{1}{\sqrt{x^2-x+1}} < 2$
4. $\sqrt{x+2} < x.$
5. $\sqrt{5x+6} < -x$
6. $\sqrt{x^2 - 3x + 2} > x + 3.$

7. $\sqrt{2x-1} \leq 3.$

8. $\sqrt{3x+6} > \sqrt{x-3}.$

9. $(x-12)\sqrt{x-3} \leq 0.$

10. $\sqrt{\frac{x+3}{2x}} \geq 2.$

2.2.2. Зведення ірраціональної нерівності до системи раціональних нерівностей.

Основним методом розв'язування ірраціональних нерівностей є метод зведення вихідної нерівності до рівносильної системи раціональних нерівностей або сукупності таких систем.

Проте треба пам'ятати:

1) Піднесення обох частин нерівності до непарного степеня із збереженням знака нерівності завжди є рівносильним перетворенням.
2) Якщо обидві частини нерівності на деякій множині Х визначені та набувають тільки додатних значень, то можна піднести обидві частини нерівності до квадрата або іншого парного степеня із збереженням знака вихідної нерівності, оскільки отримаємо нерівність, рівносильну вихідній на множині Х. [4]

Даний метод грунтується на таких твердженнях:

1. *Нерівність виду* $\sqrt[2n]{f(x)} < \sqrt[2n]{q(x)}$, n $\in N$, є рівносильною системі нерівностей $\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ q(x) > 0 \end{cases}$
2. *Нерівність виду* $\sqrt[2n+1]{f(x)} < \sqrt[2n+1]{q(x)}$, є рівносильною нерівності $f(x) < q(x)$.

Приклад 5. Розв'язати нерівність $\sqrt[3]{\frac{3}{x+1}+\frac{7}{x+2}} < \sqrt[3]{\frac{6}{x-1}}$.

Розв'язання. Дана нерівність рівносильна наступній нерівності:

$$\frac{3}{x+1}+\frac{7}{x+2} < \frac{6}{x-1},$$

Яку після зведення до спільного знаменника можна переписати у вигляді:

$$\frac{4x^2 - 15x - 25}{(x+1)(x+2)(x-1)} < 0,$$

$$\frac{(x + {}^5/_4)(x-5)}{(x+1)(x+2)(x-1)} < 0.$$

Розв'язавши останню нерівність, отримаємо що розв'язком початкової нерівності є всі числа з проміжків $(-\infty; -2), \left(-{}^5/_4; -1\right), (1; 5)$.

3. *Нерівність виду* $\sqrt[2n]{f(x)} < q(x)$, n $\in N$, є рівносильною системі нерівностей $\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ q(x) > 0, \\ f(x) < (q(x))^{2n}. \end{cases}$

4. *Нерівність виду* $\sqrt[2n+1]{f(x)} < q(x)$, є рівносильною нерівності $f(x) < (q(x))^{2n+1}$

Приклад 6. Розв'язати нерівність $\sqrt{4-x} < x+2$.

Розв'язання. Замінимо нерівність рівносильною системою:

$$\begin{cases} 4 - x \geq 0; \\ 2 + x > 0; \\ 4 - x < (x+2)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 4; \\ x > -2; \\ x^2 + 5x > 0. \end{cases} \quad \begin{cases} -2 < x \leq 4 \\ x(x+5) > 0. \end{cases} \quad \begin{cases} -2 < x \leq 4; \\ \left[\begin{array}{l} x < -5; \\ x > 0; \end{array}\right. \end{cases}$$

Відповідь. $0 < x \leq 4$.

Приклад 7. Розв'язати нерівність $\sqrt{x^2 - 3x - 10} < 8 - x$.

Розв'язання. Дана нерівність є рівносильною системі:

$$\begin{cases} x^2 - 3x - 10 \geq 0, \\ 8 - x > 0, \\ x^2 - 3x - 10 < (8-x)^2 \end{cases}$$

Розв'язком першої нерівності є всі числа з проміжків $-\infty < x \leq -2$ і $5 \leq x < +\infty$, розв'язком другої – всі числа з проміжка $x < 8$, і розв'язком третьої – всі числа з проміжка $-\infty < x < {}^{74}/_{13}$.

Таким чином отримаємо, що розв'язком початкової нерівності є всі числа з проміжків $(-\infty; -2] \left[5; {}^{74}/_{13} \right)$.

5. *Нерівність виду* $\sqrt[2n]{f(x)} > q(x)$, є рівносильною сукупності двох систем нерівностей:

$$\begin{cases} q(x) \geq 0, \\ f(x) > \left(q(x)\right)^{2n} \end{cases} \text{ і } \begin{cases} q(x) < 0, \\ f(x) \geq 0. \end{cases}$$

При цьому множина розв'язків початкової нерівності складається з об'єднання множин розв'язків цих систем.

6. *Нерівність виду* $\sqrt[2n+1]{f(x)} > q(x)$, є рівносильною нерівності $f(x) > \left(q(x)\right)^{2n+1}$. [6]

Зрозуміло, що успішно користуватись цим методом можна лише тоді, коли вмієш розв'язувати раціональні нерівності та їхні системи.

Щоб уникнути помилок при розв'язуванні нерівностей загального виду, треба насамперед знайти область визначення вихідної нерівності, а потім здійснювати рівносильний перехід на області визначення або на її частині.

Приклад 8. Розв'язати нерівність $\sqrt{x^2 - 3x - 10} > x - 2$.

Розв'язання. Дана нерівність є рівносильною сукупності двох систем:

$$\begin{cases} x - 2 \geq 0, \\ x^2 - 3x - 10 > (x-2)^2 \end{cases} \text{ і } \begin{cases} x - 2 < 0, \\ x^2 - 3x - 10 \geq 0. \end{cases}$$

Розв'яжемо першу систему:

$$\begin{cases} x \geq 2, \\ x^2 - 3x - 10 > x^2 - 4x + 4; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 2, \\ x > 14; \end{cases} \quad x > 14, x \in (14; +\infty).$$

Розв'яжемо другу систему:

$$\begin{cases} x < 2, \\ (x+2)(x-5) \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x \in (-\infty, 2), \\ x \in (-\infty, -2) \cup (5; +\infty); \end{cases} \quad x \in (-\infty, 2).$$

Відповідь. $x \in (-\infty, 2) \cup (14; +\infty)$.

Приклад 9. Розв'язати нерівність $\sqrt{\frac{x+5}{2x-1}} > 2$.

Розв'язання. Оскільки права частина нерівності - додатне число, то застосування твердження 3 значно спрощується. Дана нерівність рівносильна нерівності $\frac{x+5}{2x-1} > 4, або\ \frac{x+5}{2x-1} - 4 > 0$,

$$\frac{-7x+9}{2x-1} > 0, \ \frac{7x+9}{2x-1} < 0, \quad \frac{7\left(x-\frac{9}{7}\right)}{2(x-\frac{1}{2})} < 0, \ \left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{9}{7}\right) < 0.$$

Відповідь. $x \in \left(\frac{1}{2}; \frac{9}{7}\right)$.

Приклад 10. Розв'язати нерівність $\sqrt{25-x^2} + \sqrt{x^2+7x} > 3$.

Розв'язання. Знайдемо ОДЗ даної нерівності:

$$\begin{cases} 25 - x^2 \geq 0, \\ x^2 + 7x \geq 0, \end{cases}$$

звідки $0 \leq x \leq 5$. Дві частини нерівності не від'ємні, тому вона рівносильна системі:

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 5, \\ 2\sqrt{25-x^2}\sqrt{x^2+7x} > -16 - 7x. \end{cases}$$

При $0 \leq x \leq 5$ маємо $-16 - 7x < 0$ і $2\sqrt{25-x^2}\sqrt{x^2+7x} \geq 0$;

ому розв'язком останньої нерівності, а значить і початкової нерівності є всі числа з проміжка $0 \leq x \leq 5$.

Приклад 11. Розв'язати нерівність

$$\sqrt{2x-1} + \sqrt{3x-2} < \sqrt{4x-3} + \sqrt{5x-4}.$$

Розв'язання. Знайдемо ОДЗ даної нерівності:

$$\begin{cases} 2x-1\geq 0, \\ 3x-2\geq 0, \\ 4x-3\geq 0, \\ 5x-4\geq 0. \end{cases}$$

Звідки $x \geq 4/5$.

Тоді початкову нерівність можна переписати у вигляді:

$$\sqrt{5x-4}-\sqrt{2x-1} > \sqrt{3x-2}-\sqrt{4x-3}.$$

Так як

$5x-4 \geq 2x-1 \leftrightarrow x \geq 1,$

$3x-2 \geq 4x-3 \leftrightarrow x \leq 1,$

то ОДЗ нерівності варто розбити на дві множини: відрізок $4/5 \leq x \leq 1$ і проміжок $x > 1$ на кожному з них розв'язати дану нерівність.

На відрізку $4/5 \leq x \leq 1$ справедливі нерівністі:

$\sqrt{5x-4}-\sqrt{2x-1} \leq 0, \sqrt{3x-2}-\sqrt{4x-3} \geq 0,$ тому на відрізку $4/5 \leq x \leq 1$ наша нерівність не має розв'язків.

На проміжку $x > 1$справедливі нерівності:

$\sqrt{5x-4}-\sqrt{2x-1} > 0, \sqrt{3x-2}-\sqrt{4x-3} < 0$ тому будь - яке x з проміжка $x > 1$ є розв'язком нашої нерівності.

Отже, множиною всіх розв'язків нашої нерівності є проміжок $x > 1$.

Завдання для самостійної роботи.

Розв'язати нерівність:

1. $x+1 > \sqrt{2x^2-3x-5}.$
2. $4-x < \sqrt{x^2-2x}.$
3. $\sqrt[3]{x-4} > \sqrt[3]{x-2}-\sqrt[3]{2}.$

4. $\sqrt{\frac{1-x}{2x-5}} < 3.$

5. $\sqrt{3x-6} - \sqrt{2x-3} \leq 1.$

2.2.3. Метод інтервалів

Метод інтервалів грунтується на наступному правилі.

Щоб розв'язати нерівність *f (x)* > 0, треба:

1) знайти ОДЗ нерівності;
2) розв'язати рівняння *f(x) = 0;*
3) розбити за допомогою знайдених коренів ОДЗ нерівності на проміжки (на кожному з цих проміжків функція *f (x)* має постійний знак);
4) визначити, який знак має функція *f (x)* на кожному з цих проміжків, - ті проміжки, на яких *f (x)* > 0, охоплюють всі розв' язки даної нерівності.

З незначними змінами це правило можна використовувати і для розв'язування нерівностей *f(x) < 0, f(x) ≥ 0, f(x) ≤ 0.* [4]

Приклад 12. Розв'язати нерівність $\sqrt{x+6} > \sqrt{x+1} + \sqrt{2x-5}.$

Розв'язання. Позначимо *f(x)* = $\sqrt{x+6} - \sqrt{x+1} - \sqrt{2x-5}$, отже, потрібно розв'язати нерівність *f(x)* > 0 .

1) Знайдемо ОДЗ нерівностей: $\begin{cases} x+6 \geq 0, \\ x+1 \geq 0, \\ 2x-5 \geq 0; \end{cases} \quad x \in [2{,}5; +\infty).$

2) Розв'яжемо рівняння $\sqrt{x+6} = \sqrt{x+1} + \sqrt{2x-5}.$

або $\sqrt{x+6} - \sqrt{x+1} = \sqrt{2x-5},$

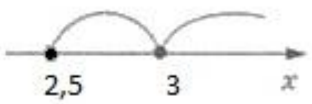
$x + 6 - 2\sqrt{(x+6)(x+1)} + x + 1 = 2x - 5;$

$2\sqrt{x^2+7x+6} = 12; \sqrt{x^2+7x+6} = 6;$

$x^2 + 7x - 30 = 0; \ x_1 = 3, x_2 = -10.$

Перевірка показує, що $x = 3$ дійсно є коренем, а $x = -10$ - сторонній корінь рівняння.

1) Точка 3 ділить ОДЗ $x \in [2{,}5; +\infty)$ на два



проміжки: $[2{,}5;3),(3;+\infty)$. Сама точка 3 не входить у жодний з проміжків, тому що *f*(3) = 0.

2) Визначимо знаки функції *f (x)* на кожному проміжку:

а) $x \in [2{,}5;3)$. Оберемо деяку контрольну точку, наприклад, $x = 2{,}5$, $f(2{,}5) = \sqrt{8{,}5} - \sqrt{3{,}5} > 0. \Rightarrow f(x) > 0$;

б) $x \in (3;+\infty)$. Оберемо $x = 4, f(4) = \sqrt{10} - \sqrt{5} - \sqrt{3} < 0, f(x) < 0$.

Відповідь. $x \in$ [2,5; 3) .

Приклад 13. Розв'язати нерівність $2\sqrt[3]{x^2} - 5\sqrt[3]{x} > 3$.

Розв'язання. ОДЗ нерівності: (- ∞, +∞).

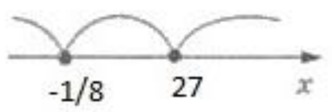
Розв'яжемо рівняння $2\sqrt[3]{x^2} - 5\sqrt[3]{x} = 3$.

Для цього зробимо заміну $\sqrt[3]{x}$ = y;

$2y^2 - 5y - 3 = 0, y_1 = 3, y_2 = -\frac{1}{2}$.

Тоді $\sqrt[3]{x} = 3,\ x_1 = 27,\ \sqrt[3]{x} = -\frac{1}{2}, x_2 = -\frac{1}{8}$.

Точки 27 і $-\frac{1}{8}$ розбивають ОДЗ на три проміжки: $\left(-\infty,-\frac{1}{8}\right),\left(-\frac{1}{8},27\right),(27,+\infty)$



1) $x \in \left(-\infty,-\frac{1}{8}\right)$, контрольна точка $x = -1$.

Маємо: $2\sqrt[3]{1} - 5\sqrt[3]{1} = 2 + 5 = 7 > 3$;

2) $x \in \left(-\frac{1}{8},27\right)$, контрольна точка $x = 0$, маємо: $0 < 3$;

3)$x \in (27,+\infty)$, контрольна точка $x = 64$, тоді $2\sqrt[3]{64^2} - 5\sqrt[3]{64} = 2\cdot 16 - 5\cdot 4 = 32 - 20 = 12 > 3$.

Відповідь. $x \in \left(-\infty;\ -\frac{1}{8}\right) \cup (27;+\infty)$.

Зауважимо, що розв'язуючи дану нерівність цим методом, ми одночасно розв'язали рівняння $2\sqrt[3]{x^2} - 5\sqrt[3]{x} = 3$ $(, x_1 = 27, x_2 = -\frac{1}{8})$ і нерівність $2\sqrt[3]{x^2} - 5\sqrt[3]{x} > 3$ $\left(x \in \left(-\frac{1}{8},27\right)\right)$. У цьому полягає особливість методу інтервалів.

Метод інтервалів часто називають *загальним методом* розв'язування нерівностей. Справа в тому, що цим методом можна розв'язувати не тільки ірраціональні нерівності, але і будь-які інші нерівності (раціональні, показникові, логарифмічні тощо). [8]

Приклад 14. Розв'язати систему нерівностей $\begin{cases} \sqrt{4x-7} < x, \\ \sqrt{x+5} + \sqrt{5-x} > 4. \end{cases}$

Розв'язання. Розв'яжемо спочатку кожну з нерівностей системи окремо, а потім знайдемо переріз одержаних проміжків.

1. $\sqrt{4x-7} < x$. ОДЗ: $x \in \left[\frac{7}{4}, +\infty\right)$.

Рівняння $\sqrt{4x-7} = x$ зводимо до рівняння $x^2 - 4x + 7 = 0$, яке не має розв'язків. Тому розглянемо проміжок $\left[\frac{7}{4}, +\infty\right)$. Контрольна точка $x = \frac{7}{4}$. Маємо: $\sqrt{4 \cdot \frac{7}{4} - 7} = 0 < \frac{7}{4}$ – задовольняє нерівність. Отже, розв'язком нерівності є проміжок $x \in \left[\frac{7}{4}, +\infty\right)$.

2. $\sqrt{x+5} + \sqrt{5-x} > 4$. ОДЗ: $x \in [-5; 5]$.

Рівняння $\sqrt{x+5} + \sqrt{5-x} = 4$ має корені $x_1 = -4$; $x_2 = 4$. Вони розбивають ОДЗ на три проміжки: [-5; -4), (-4; 4), (4; 5].

Перевірка за допомогою контрольних точок показує, що розв’язком нерівності є проміжок $x \in$ (-4; 4).

Тепер знаходимо $\left[\frac{7}{4}, +\infty\right) \cap (-4; 4) = \left(\frac{7}{4}; 4\right]$.

Відповідь. $x \in \left(\frac{7}{4}; 4\right]$.

Завдання для самостійної роботи.

Розв’язати нерівність:

1. $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{x+3} < 0$
2. $\sqrt[3]{x-2} > \sqrt[3]{x-1} - 1$
3. $\sqrt{x} - \sqrt{6x+1} < \sqrt{2x+1}$

4. $x - 1 > 2\sqrt{\frac{4}{x^2} - \frac{3}{4}}$

5. $\frac{3-x}{\sqrt{15-x}} < 1.$

ЛІТЕРАТУРА

1. Алгебра і початки аналізу: Підруч. для 10 кл. загальноосвіт. Навч. Закладів: профільний рівень / Є.С. Нелін. – Х.: Гімназія, 2010.
2. Бевз Г.П. Методика викладання математики.– К.: Вища школа, 1989 .
3. Бевз Г.П. Нерівності / Г.П. Бевз // Математика в школі. – 2009. – № 1 – 2. С. 23 – 27.
4. Белешко Д.Т. Розв’язуємо ірраціональні рівняннята нерівності: Навч. Пос. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2012. – 80с.
5. Булинко Г. Основні способи розв’язування ірраціональних рівнянь: підготовка до ДПА і ЗНО / Г. Булинко // Математика. Шкільний світ. – 2014. – № 23. – С.18 – 23.
6. Гече Ф.Е. Збірник конкурсних тестових завдань з математики. – Ужгород: В-во «Shark», 2015. – 238с.
7. Григор'єв А.М. Ірраціональні рівняння. / / Квант.- 1972 .-№ 1.- с.46-49.
8. Єгоров Г. Ірраціональні нерівності. / / Математика. Перше вересня. 2002. -№ 15. - С.13-14.
9. Єгоров Г. Ірраціональні рівняння. / / Математика. Перше вересня. - 2002. - № 5. - С.9-13.
10. Задачи по математике. Уравнения и неравенства. Справочное пособие. Вавилов В.В., Мельников И.И., Олехник С.Н., Пасиченко П.И. – М.: Наука. Гл. ред. физ. – мат. лит., 1987 – 240с.
11. Задачі з параметрами: Навч. Посіб. / В.К. Репета, Н.О. Клешня, М.В. Коробова, Л.А. Репета. – К.: Вища школа, 2006.
12. Збірник тестових завдань з математики для абітурієнтів / В.І.Беспальчук, А.В.Прус, І.А.Сверчевська та ін.; Під. ред. В.В.Михайленка. – Житомир: ЖДТУ, 2005.

13. Каленик М.В. Збірник наукових статей студентів фізико-математичного факультету. – Випуск 6. – Суми: ФМФ, 2012. – 292с.
14. Козирева О. А. Розв’язування ірраціональних рівнянь: урок у 10 класі / О.А. Козирева // Математика в школах України. – 2011. – № 32. – С.16 – 18.
15. Кузнєцова Г.М. Програма для загаль. шкіл, гімназій, ліцеїв: Математіка.5-11 кл. - М.: Дрофа, 2004, 320 с.
16. Кушнір В.А. Інноваційні методи навчання математики / Науково-методичний посібник. – Кіровоград, РВВ КДПУ ім. В. Винниченка, 2008. – 148 с.
17. Лиман Ф.М. Фізико-математична освіта: Зб. наукових праць. – Суми : Вид-во фізико-математичного факультету СумДПУ імені А.С. Макаренка, 2014. – №1 (6). – 240 с.
18. Математика на вступних випробуваннях: Навч. посіб. / К. Г. Валєєв, І.А. Джалладова. – К.: КНЕУ, 2006.
19. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Номирський Д.А., Якір М.С. Алгебра і початки аналізу: підручник для 10 класу загальноосвіт. закладів. Академічний рівень. – К.: Гімназія, 2010.
20. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Рабінович Ю.М., Якір М.С. Алгебра і початки аналізу. 10 клас. Збірник задач і контрольних робіт. – Х. : Гімназія, 2010.
21. Пометун О.І. Сучасний урок. Інтерактивні технології навчання. – К.: А.С.К., 2004. – 192 с.
22. Пометун О.І., Пироженко Л.В. Сучасний урок. Інтерактивні технології навчання: Наук. - метод. пос. – К.: Вид-во А.С.К.,2003.
23. Романюк В.Я., Дутко Л.І. Технології інтерактивного навчання на уроках математики. – Львів: Тріада плюс, 2004.
24. Сканаві М.І. Збірник задач з математики для вступників у ВНЗ. – К.: Вища шк., 1994.

25. Слєпкань З.І. Методика навчання математики. – К.,: «Зодіак-ЕКО», 2000.
26. Цибульська А. Деякі способи розв'язування ірраціональних рівнянь. Урок – практикум, 11 клас: Нестандартний урок // Математика. – 2006. – № 3. – С.13 – 18.
27. Шахмайстер А.Х. Иррациональные уравнения и неравенства. – 4 – е издание – СПб.: «Петроглиф»: «Виктория плюс»: М.: Издательство МЦНМО 2011. – 216с.
28. Энциклопедический словарь юного математика / Сост. Э – 68 А.П. Савин. – М.: Педагогика, 1989. – 352с.