

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНИХ ПРОБЛЕМ МЕХАНІКИ І
МАТЕМАТИКИ ІМ. Я.С. ПІДСТРИГАЧА

На правах рукопису

ЛЕСИК ОКСАНА ФЕДОРІВНА

УДК 539.3

ЛІНІЙНІ ТА ГЕОМЕТРИЧНО НЕЛІНІЙНІ КОЛИВАННЯ
ПОДАТЛИВИХ ДО ТРАНСВЕРСАЛЬНИХ ЗСУВУ ТА
СТИСНЕННЯ ОРТОТРОПНИХ ПЛАСТИН І
ЦИЛІНДРИЧНИХ ПАНЕЛЕЙ

Спеціальність 01.02.04 -
механіка деформівного твердого тіла

Дисертаційна робота на здобуття вченого ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Науковий керівник
Марчук Михайло Володимирович,
доктор фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник

Львів-2009

ЗМІСТ

ВСТУП	4
РОЗДІЛ 1. ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ	14
РОЗДІЛ 2. РІВНЯННЯ ГЕОМЕТРИЧНО НЕЛІНІЙНОГО ДИНАМІЧНОГО ДЕФОРМУВАННЯ ПОДАТЛИВИХ ДО ТРАНСВЕРСАЛЬНИХ ЗСУВУ ТА СТИСНЕННЯ ОРТОТРОПНИХ ПРЯМОКУТНИХ ПЛАСТИН І ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК	20
2.1. Тривимірні початково-крайові задачі теорії пружності для тонкого криволінійного шару	22
2.1.1. Співвідношення просторової геометрично нелінійної теорії пружності в змішаній ортогональній системі координат	22
2.1.2. Динамічний напружено-деформований стан тонкого криволінійного шару	32
2.2. Двовимірні рівняння уточненої геометрично нелінійної теорії динамічного деформування податливих до трансверсальних зсуву та стиснення оболонок і пластин	41
2.3. Рівняння геометрично нелінійних коливань податливих до трансверсальних зсуву та стиснення прямокутних ортотропних пластин	51
2.4. Рівняння вільних геометрично нелінійних коливань циліндричних панелей	59
2.5. Висновки до розділу 2.	63
РОЗДІЛ 3. ВПЛИВ ПОДАТЛИВОСТІ ДО ЗСУВУ ТА СТИСНЕННЯ НА ВЛАСНІ ЧАСТОТИ ОРТОТРОПНИХ ПРЯМОКУТНИХ ПЛАСТИН ТА ВИДОВЖЕНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ПАНЕЛЕЙ ЗА ЛІНІЙНИХ КОЛИВАНЬ	64

3.1. Вільні лінійні поперечні коливання прямокутних ортотропних пластин.	64
3.1.1. Постановка задачі	65
3.1.2. Побудова розв'язку.	73
3.1.3. Випадок шарнірно закріпленої вздовж видовжених країв пластини-смуги.	77
3.1.4. Аналіз числових результатів.	78
3.2. Коливання видовжених циліндричних панелей.	81
3.2.1. Постановка задачі	81
3.2.2. Побудова розв'язку задачі.	85
3.2.3. Аналіз числових результатів	89
3.3. Висновки до розділу 3.	94
РОЗДІЛ 4. ГЕОМЕТРИЧНО НЕЛІНІЙНІ КОЛИВАННЯ КОМПОЗИТНОЇ ПЛАСТИНИ-СМУГИ.	95
4.1. Постановка задачі	96
4.2. Відшукування основної частоти нелінійних коливань	101
4.3. Аналіз числових результатів	109
4.4. Висновки до розділу 4.	116
ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ ТА ВИСНОВКИ.	117
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.	119

ВСТУП

Актуальність теми. Тонкостінні композитні елементи пластинчастого та оболонкового типу з регульованими характеристиками міцності та матеріаломісткості знаходять широке застосування у конструкціях і технічних засобах різноманітного цільового призначення. У більшості випадків вони піддаються інтенсивним динамічним, зокрема циклічним, навантаженням. Тому достовірна оцінка такої їх динамічної характеристики, як спектр власних частот є актуальною проблемою при проектуванні з метою запобігання резонансним явищам в експлуатаційних умовах.

Сучасним композитним матеріалам на полімерній основі, з яких виготовляються оболонкові та пластинчасті елементи конструкцій, притаманні специфічні особливості деформування, серед котрих слід відмітити такі, як анізотропія пружних характеристик і податливість до трансверсальних зсуву та стиснення. Інтенсивні циклічні навантаження на тонкостінні елементи можуть бути причиною значних амплітуд коливань, співмірних з товщиною, що обумовлює геометрично нелінійний характер їх деформованого стану. Слід зазначити, що на даний час в літературі наявна незначна кількість праць з дослідження коливань композитних пластин і оболонок при одночасному врахуванні податливості до трансверсальних зсуву та стиснення, особливо в геометрично нелінійному випадку. Переважна більшість результатів в цьому випадку отримана за допомогою числових методів. Тому розробка математичних моделей процесів вільних коливань, що враховують згадані вище основні особливості деформування композитних тонкостінних елементів конструкцій та дозволяють отримати аналітичні вирази для спектрів власних частот за лінійних і амплітудно-частотні залежності за геометрично нелінійних коливань, є важливим науковим і практичним завданням. Дана робота присвячена створенню на основі

уточненої теорії пластин і оболонок таких моделей для ортотропних прямокутних пластин і видовжених циліндричних панелей.

Зв'язок роботи з науковими планами, темами і програмами.

Дослідження за темою дисертації виконувалися в рамках держбюджетних наукових тем за відомчими замовленнями НАН України: «Математичне моделювання, теоретичні та експериментальні методи дослідження фізико-механічних полів у конструкціях із композитів і їх динамічних характеристик з урахуванням міжфазних недосконалостей та контактної взаємодії» (2003–2006р.р., державний реєстраційний номер 0103U000128), «Розвиток математичних моделей і методів дослідження нелінійної динаміки тонкостінних конструкцій із композитних матеріалів стосовно прогнозування їх конструктивної міцності та надійності» (2007–2010р.р., державний реєстраційний номер 0107U000358).

Метою дисертаційної роботи є розвиток математичних моделей, що описують лінійні та геометрично нелінійні вільні коливання податливих до трансверсальних зсуву і стиснення ортотропних прямокутних пластин і видовжених циліндричних панелей, розробка ефективних методів і методик відшукування спектрів власних частот за лінійних коливань та амплітудно-частотних залежностей за геометрично нелінійних коливань.

Для досягнення зазначеної мети:

- на основі варіанту уточненої теорії оболонок зроблено постановку задач про лінійні та геометрично нелінійні коливання податливих до деформацій поперечних зсуву та стиснення прямокутних пластин і видовжених циліндричних панелей;
- запропоновано методика відшукування в замкненому вигляді виразів для спектрів частот вільних лінійних коливань прямокутних пластин і видовжених циліндричних панелей;

- отримано кількісні та якісні оцінки впливу податливості до трансверсальних зсуву і стиснення та геометричних параметрів на власні частоти ортотропних прямокутних пластин і видовжених циліндричних панелей за лінійних коливань;
- побудовано аналітичні залежності між амплітудою та основною власною частотою композитних пластин-смуг за геометрично нелінійних коливань.

Об’єкт дослідження – лінійні та геометрично нелінійні коливання податливих до деформацій поперечних зсуву та стиснення ортотропних пластин і циліндричних панелей.

Предмет дослідження – спектри власних частот за лінійних коливань та амплітудно-частотних залежності за геометрично нелінійних коливань податливих до деформацій поперечних зсуву та стиснення ортотропних пластин і циліндричних панелей на базі варіанту уточненої теорії.

Методи досліджень. Дослідження проводились у рамках варіанту уточненої теорії пластин і оболонок, котрий будується шляхом використання методу розвинення функцій, що описують геометрично нелінійну динаміку пружного тонкого шару, у ряди за поліномами Лежандра від нормальної координати при одночасному задоволенні граничних умов у напруженнях на лицевих поверхнях. Для відшукування розв’язків сформульованих задач про лінійні та геометрично нелінійні коливання податливих до трансверсальних зсуву та стиснення ортотропних пластин і циліндричних панелей використано прямі методи інтегрування диференціальних рівнянь.

Обґрунтованість і достовірність наукових результатів забезпечується коректністю та строгістю математичних постановок задач; використанням апробованих математичних методів; узгодженістю окремих результатів, отриманих у роботі з результатами досліджень, які наведені у

літературних джерелах.

Наукова новизна роботи полягає в:

- постановці на основі варіанту уточненої теорії пластин і оболонок, що враховує податливість до трансверсальних зсуву та стиснення, задач про лінійні та геометрично нелінійні коливання ортотропних пластин і циліндричних оболонок;
- виведенні нових систем диференціальних рівнянь в частинних похідних відносно узагальнених переміщень, що описують вільні лінійні коливання ортотропних прямокутних пластин і видовжених циліндричних панелей;
- отриманні аналітичних виразів значень власних частот за лінійних коливань ортотропних прямокутних пластин і видовжених циліндричних панелей та дослідженні впливу на них податливості до трансверсальних зсуву та стиснення і геометричних параметрів;
- формулюванні задачі про геометрично нелінійні коливання податливих до поперечного зсуву та стиснення пластини-смуги і зведенні її до відшукування розв'язку нелінійного інтегро-диференціального рівняння відносно функції прогину точок серединної лінії;
- побудові в замкненому аналітичному вигляді залежностей між амплітудою та основною власною частотою композитних пластин-смуг за нелінійних коливань;
- отриманні шляхом граничного переходу за параметрами податливості до трансверсальних зсуву та стиснення

результатів, що базуються на використанні класичної теорії при розв'язуванні задач про геометрично нелінійні вільні коливання пластин-смуг;

- визначенні закономірностей генерованих поперечними коливаннями поздовжніх і зсувних коливних процесів у геометрично нелінійному випадку.

Теоретичне та практичне значення одержаних результатів. Одержані в роботі рівняння лінійної та геометрично нелінійної динаміки податливих до трансверсальних зсуву та стиснення прямокутних пластин і циліндричних панелей можуть бути використані для дослідження їх динамічного напружено-деформованого стану при заданих реальних експлуатаційних навантаженнях. Побудовані аналітичні розв'язки та висновки, що з них випливають, знайдуть застосування в інженерній практиці при прогнозуванні та оцінці динамічних властивостей відповідальних тонкостінних конструкцій в галузі машинобудування та в науково-дослідних установах.

Апробація результатів роботи. Основні результати дисертації доповідалися та обговорювалися на:

- Міжнародних наукових конференціях «Математичні проблеми механіки неоднорідних структур» (Львів, 2003, 2006);
- XXII, XXIII та XXV Міжнародних науково-практичних конференціях «Композиційні матеріали в промисловості» (Ялта, 2002, 2003, 2005);
- XXII симпозиумі «Vibration in Physical Systems» (Poznań, 2006);
- Міжнародних симпозиумах Українських інженерів-механіків у Львові (Львів, 2003, 2007, 2009);

- I Міжнародній науково-технічній конференції «Динаміка, міцність і надійність сільськогосподарських машин» (Тернопіль, 2004);
- Міжнародній науковій конференції «Теорія та практика раціонального проектування, виготовлення і експлуатації машинобудівних конструкцій» (Львів, 2008);
- Міжнародній науковій конференції «Сучасні проблеми механіки і математики» (Львів, 2008);
- Міжнародній науковій конференції «Актуальные проблемы нелинейной механики оболочек» (Казань, 2008);
- Міжнародній науковій конференції «Обчислювальна математика і математичні проблеми механіки» (Львів, 2009).

У повному обсязі результати дисертаційної роботи доповідались на:

- науковому семінарі відділу механіки тонкостінних елементів конструкцій Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України;
- спеціалізованому кваліфікаційному семінарі “Математичні проблеми механіки руйнування і поверхневих явищ” Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України під керівництвом члена-кореспондента НАН України, доктора фізико-математичних наук, професора Г. С. Кіта;
- науковому семінарі відділу обчислювальних методів Інституту механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України під керівництвом доктора фізико-математичних наук, професора О. Я. Григоренка.

Публікації. Особистий внесок здобувача. Основні результати дисертаційної роботи опубліковані у 14-ти наукових працях [75–77, 85, 88–95, 107–109, 148] , з них 5 статей [75, 85, 107, 109, 148] у рецензованих наукових журналах із Переліку фахових видань ВАК України для здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук. Основні результати роботи отримані автором самостійно. У всіх працях здобувачеві належить участь у постановці задачі, побудові розв’язків, одержанні числових результатів й участь в обговоренні та аналізі отриманих результатів.

Структура та обсяг дисертації. Дисертаційна робота складається зі вступу, чотирьох розділів, які містять 17 рисунків, 2 таблиці, висновків, а також списку літератури з 157 назв. Загальний обсяг дисертації становить 137 сторінок.

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми дисертації, відзначено зв’язок роботи з науковими темами і програмами, сформульовано мету і задачі дослідження, викладено суть отриманих результатів, їх наукову новизну, теоретичне і практичне значення, подані відомості про публікації, особистий внесок автора та апробацію результатів..

У **першому розділі** за літературними джерелами проаналізовано двовимірні математичні моделі та методи визначення і дослідження напружено-деформованого стану та коливань композитних оболонок і пластин, як раціональних конструктивних елементів різноманітних інженерних споруд і технічних засобів. Відзначено вклад вітчизняних та зарубіжних авторів, роботи яких присвячені даній тематиці.

Наведений у розділі огляд показує, що в літературі практично відсутні дослідження коливань композитних пластин і оболонок з одночасним врахуванням податливості зсуву та стисненню, особливо в геометрично нелінійному випадку.

Показано місце дисертації серед відомих у літературі результатів в даній

науковій тематиці.

Другий розділ присвячений побудові теорії геометрично нелінійного динамічного деформування податливих до зсуву та стиснення ортотропних оболонок і пластин, частковим випадком якого є лінійне деформування. За вихідні співвідношення приймаються рівняння динамічної просторової геометрично нелінійної теорії пружності для тонкого криволінійного шару в змішаній ортогональній системі координат. Зведення тривимірних початково-крайових задач геометрично нелінійної теорії пружності тонкого криволінійного шару до двовимірних проводиться методом апроксимацій характеристик напружено-деформованого стану тонкостінного елемента частинними сумами рядів за поліномами Лежандра від нормальної до серединної поверхні координати з одночасним задоволенням крайових умов у напруженнях на лицевих поверхнях шляхом підстановки частинних сум рядів для компонент несиметричного тензора напружень Кірхгофа в тривимірні рівняння рівноваги при попередньому задоволенні граничних умов у напруженнях на лицевих поверхнях та використанням процедури Бубнова-Гальоркіна по нормальній координаті отримані двовимірні рівняння руху. Аналогічним чином отримані вирази для коефіцієнтів апроксимацій компонент тензора скінченних деформацій та двовимірні співвідношення пружності. З умови мінімуму певним чином побудованого квадратичного функціоналу отримані вирази для коефіцієнтів апроксимацій компонент тензора Кірхгофа через коефіцієнти апроксимацій компонент вектора пружного переміщення та симетричного тензора напружень Піоли. Записані граничні умови на контурі серединної поверхні та початкові умови відносно узагальнених переміщень. Причому, початково-крайові задачі формулюються у вихідній недеформованій системі координат, що дає можливість практичного застосування. Отримана система шести нелінійних за двома просторовими координатами та лінійних за часом рівнянь в частинних похідних відносно узагальнених переміщень, котрі разом з відповідними граничними та початковими умовами складають повну

систему рівнянь нелінійного пружного динамічного деформування податливих до трансверсальних зсуву і поперечного стиснення композитних оболонок і пластин.

У **третьому розділі** розглядаються композитні прямокутні пластини та видовжені циліндричні панелі, для яких на основі отриманих у другому розділі співвідношень уточненої теорії геометрично нелінійного динамічного деформування податливих до трансверсальних зсуву та стиснення оболонок записані рівняння, що описують їх вільні коливання. Оскільки розглядувані тонкостінні елементи вважаються в достатній мірі однорідної будови за товщиною та в процесі вільних коливань не контактують лицевими поверхнями з іншими пружними або жорсткими тілами, то величиною деформації явного стиснення нехтують. В результаті для прямокутної ортотропної пластини отримані три рівняння руху відносно трьох узагальнених переміщень: прогину точок серединної площини та двох кутів повороту нормального до деформації до серединної площини елемента. Сформульована відповідна початково-крайова задача для випадку шарнірного опирання по контуру прямокутної пластини. На основі запропонованих математичних моделей динамічного деформування податливих до трансверсальних зсуву та стиснення композитних пластин і циліндричних оболонок отримано аналітичні вирази для спектрів частот вільних коливань шарнірно закріплених прямокутних пластин і видовжених циліндричних панелей. Досліджено вплив параметрів зсуву та стиснення на значення власних частот. Показана необхідність врахування цих параметрів при проектуванні таких тонкостінних елементів конструкцій.

У **четвертому розділі** розглянуті вільні нелінійні поперечні коливання податливих до трансверсальних деформацій зсуву та стиснення композитних пластин. За допомогою розробленої методики отримані амплітудно-частотні залежності за нелінійних поперечних коливань композитних пластин. Це дало змогу оцінити вплив параметрів податливості до трансверсальних деформацій

зсуву та стиснення на характер скелетних кривих, які ілюструють залежність частоти від заданої амплітуди нелінійних коливань.

Урахування поздовжніх і зсувних хвильових процесів при вільних нелінійних поперечних коливаннях композитних пластин значно ускладнює зв'язок між частотою цих коливань та їх амплітудою. Однак, при певних границях зміни пружних характеристик матеріалу пластини та її параметра тонкостінності можна отримати залежність, яка є аналогічна до класичної. Для матеріалів зі значними зсувними деформаціями та поперечним стисненням характер скелетних кривих значно відрізняється від аналогічних для ізотропних матеріалів. Урахування податливості зсувним деформаціям і поперечному стисненню суттєво впливає на кількісні результати та характер скелетних кривих.

РОЗДІЛ 1

ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

Питанням побудови двовимірних математичних моделей та методам визначення і дослідження напружено-деформованого стану та коливань композитних оболонок і пластин, математичним моделям деформування композитних оболонок і пластин як раціональних конструктивних елементів різноманітних інженерних споруд і технічних засобів приділялась значна увага в останні десятиріччя. Залежно від структурного складу за товщиною тонкостінного елемента застосовуються два підходи до моделювання його деформування: континуальний і дискретний. При розгляді дрібношарових конструкцій двовимірні моделі трактуються як узагальнення та уточнення класичної теорії пластин і оболонок, фундаментальний вклад в становлення якої внесли В. З. Власов [20, 21], І. І. Ворович [25], К. З. Галімов [26–28], О. Л. Гольденвейзер [31], М. А. Кільчевський [59], Х. М. Муштарі [92], В. В. Новожилов [95, 96], П. М. Огібалов [97], С. П. Тимошенко [121], К. Ф. Черних [126]. Практичні потреби врахування в тонкостінних конструкціях неоднорідностей і різноманітних концентраторів напружень та дії полів різної фізичної природи зумовили узагальнення співвідношень класичної теорії. Вагомі результати в цьому напрямку отримали Я. Й. Бурак [12–14], О. Р. Гачкевич [12], Я. М. Григоренко [38, 42, 43], В. Т. Грінченко [47, 48], О. М. Гузь [50, 51], С. О. Калоєров, В. Г. Карнаухов, О. С. Космодаміанський [60], Я. І. Кунець [65], Р. М. Кушнір [69, 71], С. Г. Лехніцький [75, 76], М. М. Николишин [93, 94], В. А. Осадчук [98], В. В. Панасюк, Я. С. Підстригач [109, 110], Ю. М. Подільчук, Г. Т. Сулим [115], В. Ф. Чекурін [125], В. П. Шевченко [127], О. М. Шульга [128, 129] та інші.

Значний поштовх у розвитку уточнених теорій пластин та оболонок дав прогрес у галузі композитних матеріалів. Необхідність врахування такої

характерної особливості дрібношарових композитів, як податливість до поперечного зсуву, зумовила інтенсивні дослідження з уточнення теорій деформування тонкостінних елементів. Основні результати за цим напрямком отримали І. Альтенбах [4, 5], С. А. Амбарцумян [6, 7], В. В. Болотін [9], І. М. Векуа [17], А. Т. Василенко [15, 43], В. В. Васильєв [16], К. З. Галімов [27, 28], Я. М. Григоренко [42, 43, 45], О. М. Гузь [53], О. В. Максимук [105], Ю. В. Немировський, Б. Л. Пелех [103, 105], В. Г. Піскунов [19, 108], Е. Рейснер [111], М. А. Сухорольський [116–118], В. П. Тамуж, М. Г. Тамуров, Г. А. Тетерс, С. П. Тимошенко [121], І. Ю. Хома, Л. П. Хорошун [124] та багато інших вчених.

У багатьох випадках дія на тонкостінні конструкції реальних експлуатаційних навантажень спричиняє переміщення, співвимірні з товщинами складових елементів, що зумовлює геометрично нелінійний характер їх деформованого стану. Постановкам геометрично нелінійних задач і розвитку методів їх розв'язування, які в значній мірі залежать від типу розглядуваного тонкостінного елемента та використовуваної моделі деформування, особливостей прикладених навантажень і виду граничних умов, присвячені роботи Н. А. Алумяе [3], Е. І. Беспалової [41], В. Є. Вериженка [18, 19], А. С. Вольміра [22], І. І. Воровича [25], К. З. Галімова [26, 28], Е. І. Григолюка [34], Я. М. Григоренка [39, 40], О. М. Гузя [50, 51], Б. Я. Кантора, Я. Ф. Каюка, М. С. Корнішина, М. Ф. Морозова [91], Х. М. Муштарі [92] та інших.

У випадку динамічних навантажень на оболонки і пластини при лінійному і геометрично нелінійному деформуванні дослідження, як правило, проводились на основі класичних або технічних уточнених зсувних моделей, які не повною мірою враховують податливість композитів до трансверсальних зсуву та стиснення. Значний вклад у дослідження динаміки пружних тіл, зокрема тонкостінних елементів, внесли Л. О. Айнола [1], Є. І. Беспалова [41], В. В. Болотін [9], Я. Й. Бурак [12], А. С. Вольмір [23, 24], О. Л. Гольденвейзер [32], В. С. Гонткевич [33], В. Т. Грінченко [47–49], Е. І. Григолюк [34, 35],

О. Я. Григоренко [11, 36], Я. М. Григоренко [41], О. М. Гузь [51, 52], Л. Б. Іменітов [58], О. С. Космодаміанський [60], В. А. Крисько [61], В. Д. Кубенко [62–64], П. З. Луговий [77], В. В. Михаськів, М. П. Саврук, І. Т. Селезов [113–114], В. І. Сторожев [60], М. А. Сухорольський [118], А. Ф. Улітко, Р. М. Швець, М. О. Шульга [128, 129] та інші автори.

Найбільш повний аналіз напружено-деформованого стану композитних структур передбачає постановку в рамках просторової теорії пружності, що, однак, малоприйнятно на практиці і вимагає великих обчислювальних ресурсів, оскільки отримання розв'язків у замкненому вигляді на даний час складає певні труднощі. З іншого боку, абстрагування від особливостей поведінки композиційного матеріалу (наприклад, податливості трансверсальним деформаціям зсуву) і застосування класичної теорії оболонок на основі гіпотез Кірхгофа – Лява не завжди може служити навіть як початкове наближення.

Початок вивченню коливань пластин і оболонок дав ще Релей в його «Теорії звуку». Фундаментальні результати в цій області опубліковані Н. А. Алумяє [3], В. В. Болотіним [9], Е. І. Григолюком [35] та іншими авторами. Хоча в цій літературі йде мова про лінійні коливання, але і в такій постановці ці задачі виявляються нелегкими.

Постановкам задач про вільні лінійні та геометрично нелінійні коливання пластин й оболонок і розробці методів їх розв'язування присвячені праці О.І. Беспалової [41], В.В. Болотіна [9], А.С. Вольміра [23, 24], В.Т. Грінченка [47], О.Я. Григоренка [36], Я.М. Григоренка [41], П.С. Ковальчука [63, 64], В.А. Криська [61], В.Д. Кубенка [62–64], Я.І. Кунця [144], Л.В. Курпи [66, 67, 145], М.В. Марчука [79, 82], В.В. Мелешка [49], В.Г. Піскунова [108], Я.Г. Савули [112], С.П. Тимошенка [119, 120], М. Amabili [131], J. Awrejcewicz [132–134], I.K. Banerjee [135], I.C. Chen, Li. A. Dong, C.L. Dym, D.A. Evenren, P.B. Goncalves, E.L. Jansen, L. Librescu [146], E. Madenci, F.M.A. Silva, M. Sundhakar [149], T. Ueda та інших учених.

Однією з основних частин динамічного розрахунку оболонок і пластин є

визначення власних частот. Залежно від контурів пластини та умов закріплення одержуємо той чи інший спектр частот і форм коливань.

Особливим розділом у теорії коливань є дослідження нелінійних коливань, які мають важливі специфічні властивості. Такі коливання можуть виникати в пластинках при великих прогинах, коли деформації та переміщення зв'язані нелінійними співвідношеннями. З іншого боку, деформації можуть знаходитись за межами застосовності закону Гука і нелінійно залежати від зусиль.

Треба зауважити, що для визначення спектру власних частот як в однорідних, так і структурно-неоднорідних пластинах і оболонках використовуються співвідношення, в яких присутні похідні від переміщень (звичайні або частинні) лише за просторовими координатами і залежно від конфігурації контуру серединної площини пластини задача зводиться до відшукування коренів алгебраїчного (як правило, трансцендентного) рівняння у випадку можливості аналітичного знаходження власних форм коливань, або до задачі на власні значення для матриць високої розмірності при числових підходах. На даний час ці проблеми хоч і становлять певні труднощі, але за наявності надпотужних електронно-обчислювальних машин знаходяться на стадії успішного вирішення. На відміну від цього, задачі дослідження напружено-деформованого стану пластин і оболонок, зумовленого дією динамічних навантажень (зокрема, циклічних) зводяться до відшукування розв'язків початково-крайових задач для рівнянь гіперболічного або параболічного типу (чи системи рівнянь), що залежно від граничних умов приводить до певних труднощів математичного плану навіть у випадку канонічних областей – прямокутника, еліпса і т. д. Зокрема, у випадку використання класичної теорії, що базується на гіпотезі Кірхгофа – Лява, до цього часу не отримано замкненого повного аналітичного розв'язку задачі динаміки для жорстко защемленої на краях прямокутної пластини [8].

Дослідження різних аспектів динаміки пластин і оболонок на основі класичної теорії при поперечному лінійному деформуванні присвячені роботи

[3, 11, 107, 119]. У даному випадку задача полягає у знаходженні розв'язків початково-крайових задач для параболічного рівняння відносно прогину серединної поверхні. Для багатьох областей та типів граничних умов перерахованими авторами отримані аналітичні розв'язки розглядуваних ними задач.

Однак, класична теорія не дозволяє врахувати навіть одну з таких характерних особливостей композиційних матеріалів, як податливість трансверсальним зсувним деформаціям. Вперше звернув на це увагу С. П. Тимошенко і дав вирішення цієї проблеми на прикладі динаміки композитних балок. Урахуванню зсувних деформацій та інерції повороту нормального елемента, розв'язанню ряду задач динамічного поперечного деформування композитних оболонок і пластин присвячені роботи [6, 10, 35, 78, 108]. У даному випадку необхідно відшукувати розв'язки гіперболічної системи трьох диференціальних рівнянь на узагальнені переміщення. Шляхом застосування певних припущень щодо можливості нехтування інерцією нормального елемента задачу можна спростити зведенням її до системи диференціальних рівнянь параболічного типу. Однак коректність застосування цього припущення потребує детального аналізу в кожному конкретному випадку.

У різноманітних конструкціях та технічних пристроях композитні пластини піддаються настільки інтенсивним ударним навантаженням, що набувають скінченних поперечних деформацій. Тому до оцінки їх динамічної поведінки необхідно застосовувати моделі, які враховують геометричну нелінійність. Однією із перших монографій, присвячених проблемі розрахунку нелінійних коливань оболонок і пластин, є відома монографія А. С. Вольміра [23]. Ці ж питання розглядаються у роботах Н. А. Алумяє [3], О. М. Гузя [51, 52], В. А. Криська [61], М. Ф. Морозова [90, 91] та інших авторів.

Переважає більшість вказаних робіт базується на геометрично нелінійній теорії Кармана, в основі якої лежить гіпотеза Кірхгофа – Лява. Урахування податливості зсувним деформаціям проводилось рядом авторів

шляхом використання технічної теорії на основі гіпотези С. П. Тимошенка, що не дозволяє, однак, враховувати податливість композитних пластин деформаціям поперечного стиснення.

З наведеного огляду літератури видно, що розвиток математичних моделей динамічного деформування податливих на зсув і стиснення композитних оболонок і пластин, які дозволяють оцінити вплив значень параметрів вказаних характеристик на напружений стан та амплітудно-частотні залежності, є актуальною проблемою механіки деформівного твердого тіла. Це стосується як лінійного, так і геометрично нелінійного динамічного деформування композитних оболонок і пластин.

РОЗДІЛ 2

РІВНЯННЯ ГЕОМЕТРИЧНО НЕЛІНІЙНОГО ДИНАМІЧНОГО ДЕФОРМУВАННЯ ПОДАТЛИВИХ ДО ТРАНСВЕРСАЛЬНИХ ЗСУВУ ТА СТИСНЕННЯ ОРТОТРОПНИХ ПРЯМОКУТНИХ ПЛАСТИН І ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК

Розділ присвячений отриманню варіанту уточненої теорії геометрично нелінійного пружного динамічного деформування податливих до зсуву та стиснення ортотропних прямокутних пластин і циліндричних оболонок. Слід відмітити, що переважна більшість досліджень з нелінійної статyki та динаміки тонкостінних елементів конструкцій, що були проведені до цього часу, базувалась на квадратичній теорії Кармана, котра є узагальненням класичної лінійної теорії Кірхгофа – Лява. В окремих роботах використовували співвідношення нелінійної технічної теорії, в основу якої покладена зсувна модель С. П. Тимошенка. Однак, теорії, що ґрунтуються на гіпотезах згаданих авторів, не дають змоги в повній мірі враховувати особливості деформування армованих композитних матеріалів на полімерній основі, з яких виготовляються тонкостінні елементи конструкцій різноманітного цільового призначення. Певний поступ у цьому напрямку зроблено в працях К. З. Галімова [26–28], Я. М. Григоренка [39], В. Г. Піскунова [108], Сьярле (P. G. Ciarlet) [138] та інших.

У праці [79] зведення тривимірних початково-крайових задач геометрично нелінійної теорії пружності тонкого криволінійного шару до двовимірних проведено узагальненим методом апроксимації характеристик напружено-деформованого стану тонкостінного елемента частинними сумами рядів за поліномами Лежандра від нормальної до серединної поверхні координати з

одночасним задоволенням крайових умов у напруженнях на лицевих поверхнях. Цей метод є узагальненням підходу І. М. Векуа [17] до побудови теорій оболонок вищих порядків і був вперше запропонований та детально досліджений у працях Б. Л. Пелеха та М. А. Сухорольського стосовно контактних задач при лінійному деформуванні оболонок і пластин [106]. У подальшому М. А. Сухорольським він був поширений на випадок задання на лицевих поверхнях як напружень, так і переміщень [116, 117]. В результаті в [79] отримана система шести нелінійних за двома просторовими координатами та лінійних за часом рівнянь в частинних похідних відносно узагальнених переміщень, котрі разом з відповідними граничними та початковими умовами складають повну систему рівнянь нелінійного пружного динамічного деформування податливих до трансверсальних зсуву та стиснення оболонок і при $k_1 = k_2 = 0$ – пластин. Причому, початково-крайові задачі формулюються у вихідній недеформованій системі координат.

Ця система рівнянь має мінімальний порядок при явному врахуванні деформацій зсуву та стиснення. В даному розділі на основі описаного вище підходу записана така система рівнянь для загального випадку геометрії серединної поверхні ортотропної оболонки. Оскільки в подальшому в роботі розглядатимуться задачі про вільні коливання ортотропних прямокутних пластин і циліндричних панелей, то в цьому випадку відсутній контакт на лицевих площинах і поверхнях з іншими тонкостінними елементами та пружними або жорсткими тілами. Тоді для спрощення вихідної системи доцільно вважати відсутнім явне трансверсальне стиснення та враховувати його через поправки до жорсткісних характеристик тонкостінних елементів.

2.1. Тривимірні початково-крайові задачі теорії пружності для тонкого криволінійного шару

2.1.1. Співвідношення просторової геометрично нелінійної теорії пружності в змішаній ортогональній системі координат

Нехай криволінійний анізотропний пружний шар V товщини $2h$, віднесений до змішаної ортогональної системи координат ξ^i ($i=1, 2, 3$) на його серединній поверхні $\xi^3 = 0$ (рис.2.1), перебуває під дією об'ємних f^i ($i=1, 2, 3$) та поверхневих динамічних зусиль. Тоді його напружено-деформований стан характеризується вектором динамічного пружного переміщення $\vec{u} = u_i \vec{e}^i \vec{e}^j = u^i \vec{e}_i \vec{e}_j$, тензором скінченних деформацій $T_e = e_{ij} \vec{e}^i \vec{e}^j = e^{ij} \vec{e}_i \vec{e}_j$ і симетричним тензором напружень Піоли $T_\sigma = \sigma_{ij} \vec{e}^i \vec{e}^j = \sigma^{ij} \vec{e}_i \vec{e}_j$, де \vec{e}_i, \vec{e}^i , $i=1, 2, 3$, – коваріантні та контраваріантні базисні вектори системи ξ^i , $i=1, 2, 3$. Компоненти тензора деформації визначаються через компоненти вектора пружного переміщення точок шару за співвідношеннями [50]

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla_i u_j + \nabla_j u_i + \nabla_i u^k \nabla_j u_k), \quad (2.1)$$

де ∇_j означає коваріантне диференціювання по координаті ξ^i і виконується за формулами [50]

$$\nabla_j u_i = \frac{\partial u_i}{\partial \xi^j} - u_k \Gamma_{ij}^k, \quad (2.2)$$

$$\nabla_j u^i = \frac{\partial u^i}{\partial \xi^j} + u_k \Gamma_{kj}^i \quad (2.3)$$

У (2.2), (2.3) Γ_{ji}^k , $i, j, k = 1, 2, 3$, – символи Крістофеля першого роду, котрі визначаються через компоненти метричного тензора $G = g_{ij} \vec{e}^i \vec{e}^j = g^{ij} \vec{e}_i \vec{e}_j$ наступним чином:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{km} \left(\frac{\partial g_{im}}{\partial \xi^j} + \frac{\partial g_{jm}}{\partial \xi^i} - \frac{\partial g_{ji}}{\partial \xi^m} \right). \quad (2.4)$$

Для випадку змішаної ортогональної системи координат ξ^i (рис. 2.1) компоненти метричного тензора визначаються за формулою

$$g_{ij} = g^{ij} = \begin{cases} H_i^2, & i = j; \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

де H_i – коефіцієнти Ляме.

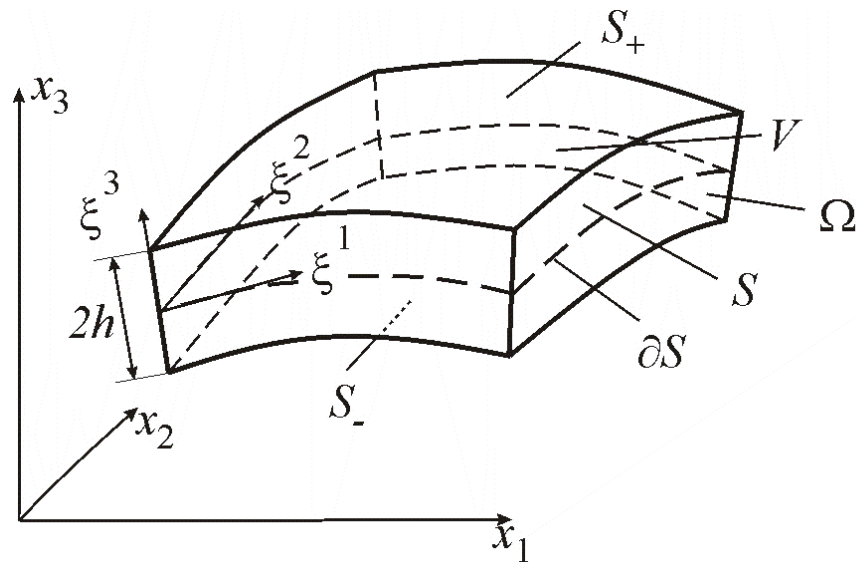


Рис. 2.1. Пружний криволінійний шар

Якщо для матеріалу шару виконується узагальнений закон Гука, то у випадку загальної анізотропії пружних характеристик справедливій залежності [50]

$$\sigma^{ij} = A^{ijkl} e_{kl}, \quad (2.5)$$

де число незалежних компонент A^{ijklm} тензора пружності дорівнює 21. Якщо пружне тіло в кожній точці має площину пружної симетрії, то число незалежних компонент A^{ijklm} скорочується до тринадцяти. Надалі розглядатимемо випадок, коли через кожну точку криволінійного шару проходить три взаємно перпендикулярні площини пружної симетрії. Такий шар називається ортотропним і має три головні напрямки пружності. Число незалежних пружних сталих скорочується до дев'яти. Якщо головні напрямки пружності співпадають з геометричними напрямками, то закон Гука (2.5) для ортотропного матеріалу записується у вигляді

$$\sigma^{ii} = A^{ijj} e_{jj}, \quad i, j = 1, 2, 3; \quad (2.6)$$

$$\sigma^{ij} = 2A^{ijj} e_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3; \quad i \neq j. \quad (2.7)$$

У термінах коефіцієнтів пружності [76] співвідношення, обернені до (2.6), запишуться

$$\begin{aligned} e_{11} &= \frac{1}{E_1} \sigma^{11} - \frac{\nu_{21}}{E_2} \sigma^{22} - \frac{\nu_{31}}{E_3} \sigma^{33}, \\ e_{22} &= -\frac{\nu_{12}}{E_1} \sigma^{11} + \frac{1}{E_2} \sigma^{22} - \frac{\nu_{32}}{E_3} \sigma^{33}, \\ e_{33} &= -\frac{\nu_{13}}{E_1} \sigma^{11} - \frac{\nu_{23}}{E_2} \sigma^{22} + \frac{1}{E_3} \sigma^{33}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

В (2.6) – (2.8) під e_{ii} та σ^{ii} ($i=1,2,3$) слід розуміти фізичні компоненти тензорів деформацій і напружень [90].

З (2.8) можна отримати іншу форму закону Гука для ортотропного тіла, зручну при граничних переходах відносно параметрів E_1/E_3 та E_2/E_3

$$\sigma^{11} = \bar{E}_1(e_{11} + \nu_{21}e_{22}) + \lambda_1\sigma^{33};$$

$$\sigma^{22} = \bar{E}_2(e_{22} + \nu_{12}e_{11}) + \lambda_2\sigma^{33};$$

$$\sigma^{33} = E_0(e_{33} + \lambda_1e_{11} + \lambda_2e_{22});$$

$$\sigma^{12} = 2G_{12}e_{12}; \quad \sigma^{13} = 2G_{13}e_{13}; \quad \sigma^{23} = 2G_{23}e_{23}, \quad (2.9)$$

або ж наступну

$$\sigma^{11} = \bar{E}_1[(1 + \alpha_1)e_{11} + \bar{\nu}_{21}e_{22}] + \lambda_1E_0e_{33};$$

$$\sigma^{22} = \bar{E}_2[\bar{\nu}_{12}e_{11} + (1 + \alpha_2)e_{22}] + \lambda_2E_0e_{33};$$

$$\sigma^{33} = E_0(e_{33} + \lambda_1 e_{11} + \lambda_2 e_{22});$$

$$\sigma^{12} = 2G_{12}e_{12}; \quad \sigma^{13} = 2G_{13}e_{13}; \quad \sigma^{23} = 2G_{23}e_{23}, \quad (2.10)$$

де

$$\alpha_1 = \frac{(v_{31} + v_{21}v_{32})^2}{D} \frac{E_1}{E_3};$$

$$\alpha_2 = \frac{(v_{32} + v_{12}v_{31})^2}{D} \frac{E_2}{E_3}; \quad (2.11)$$

$$\lambda_1 = \frac{v_{31} + v_{21}v_{32}}{\delta^2} \frac{E_1}{E_3};$$

$$\lambda_2 = \frac{v_{32} + v_{12}v_{31}}{\delta^2} \frac{E_2}{E_3}; \quad (2.12)$$

$$\bar{v}_{12} = v_{12} + \frac{v}{D} \frac{E_1}{E_3}; \quad \bar{v}_{21} = v_{21} + \frac{v}{D} \frac{E_2}{E_3};$$

$$\bar{E}_i = E_i / \delta^2, \quad i=1, 2; \quad E_0 = E_3 \delta^2 / D; \quad (2.13)$$

$$D = 1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{13}\nu_{31} - \nu_{32}\nu_{23} - \nu_{13}\nu_{32}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{31}\nu_{12};$$

$$\nu = (\nu_{31} + \nu_{32}\nu_{21})(\nu_{32} + \nu_{31}\nu_{12}); \quad (2.14)$$

$$\delta^2 = 1 - \nu_{12}\nu_{21}; \quad (2.15)$$

E_i – модулі Юнга в напрямках ξ^i ;

ν_{ij} – коефіцієнти Пуассона, які характеризують скорочення в напрямку ξ^j при розтязі в напрямку ξ^i ;

G_{ij} – модулі зсуву між головними напрямками ξ^i та ξ^j ,
 $i, j = 1, 2, 3$.

Рівняння руху точок шару мають вигляд

$$\nabla_i S^{ij} + f^j - \rho \frac{\partial^2 u^j}{\partial t^2} = 0, \quad j = 1, 2, 3, \quad (2.16)$$

де S^{ij} – компоненти несиметричного тензора напружень Кірхгофа

$T_S = S^{ij} \bar{e}_i \bar{e}_j = S_{ij} \bar{e}^i \bar{e}^j$ [90], котрі зв'язані з компонентами симметричного тензора напружень T_σ співвідношеннями

$$S^{ij} = \sigma^{ik} (\delta_k^j + \nabla_k u^j). \quad (2.17)$$

Решта величин у (2.16) мають наступний зміст: ρ – густина матеріалу шару; t – змінна за часовою координатою.

У випадку змішаної ортогональної системи координат з метричним тензором

$$g_{11} = H_1^2, \quad g_{22} = H_2^2, \quad g_{33} = 1;$$

$$g_{ij} = 0, \quad i, j = 1, 2, 3; \quad i \neq j$$

рівняння (2.16) мають вигляд

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \xi^1} (H_2 S^{11}) + \frac{\partial}{\partial \xi^2} (H_1 S^{21}) + \frac{\partial}{\partial \xi^3} (H_1 H_2 S^{31}) - \\ & - \frac{\partial H_2}{\partial \xi^1} S^{22} + \frac{\partial H_1}{\partial \xi^2} S^{12} + H_2 \frac{\partial H_1}{\partial \xi^3} S^{13} + \end{aligned}$$

$$+ H_1 H_2 (f^1 - \rho \ddot{u}^1) = 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi^1} (H_2 S^{12}) + \frac{\partial}{\partial \xi^2} (H_1 S^{22}) + \frac{\partial}{\partial \xi^3} (H_1 H_2 S^{32}) -$$

$$- \frac{\partial H_1}{\partial \xi^2} S^{11} + \frac{\partial H_2}{\partial \xi^1} S^{21} + H_1 \frac{\partial H_2}{\partial \xi^3} S^{23} +$$

$$+ H_1 H_2 (f^2 - \rho \ddot{u}^2) = 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi^1} (H_2 S^{13}) + \frac{\partial}{\partial \xi^2} (H_1 S^{23}) + \frac{\partial S^{33}}{\partial \xi^3} (H_1 H_2) -$$

$$- H_2 \frac{\partial H_1}{\partial \xi^3} S^{11} - H_1 \frac{\partial H_2}{\partial \xi^3} S^{22} +$$

$$+ H_1 H_2 (f^3 - \rho \ddot{u}^3) = 0. \quad (2.18)$$

У (2.18) крапка над позначеннями функцій означає похідну за часовою координатою.

Рівняння (2.1), (2.10), (2.17) і (2.18) складають замкнену систему для визначення двадцяти чотирьох невідомих функцій, що характеризують

тривимірний динамічний геометрично нелінійний напружено-деформований стан криволінійного ортотропного шару.

Сталі в загальних інтегралах диференціальних рівнянь визначають з умов на граничних поверхнях шару S_{\pm} , що описуються рівняннями $\xi^3 = \pm h$, на боковій поверхні $\Omega = \Omega_{\sigma} + \Omega_u$ та з початкових умов. Граничні умови записуються у вигляді

$$S^{3i}(\xi^1, \xi^2, \pm h, t) = X_{3i}^{\pm}(\xi^1, \xi^2, t), \quad i = 1, 2, 3, \quad (\xi^1, \xi^2) \in S_{\pm}, \quad (2.19)$$

$$S^{im}(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t) n_i = p^m(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t),$$

$$i = 1, 2, 3, \quad m = 1, 2, 3, \quad (\xi^1, \xi^2, \xi^3) \in \Omega_{\sigma}, \quad (2.20)$$

$$u^i(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t) = v^i(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t), \quad i = 1, 2, 3, \quad (\xi^1, \xi^2, \xi^3) \in \Omega_u, \quad (2.21)$$

де

n_i – коваріантні компоненти вектора одиничної нормалі до частини Ω_{σ} бокової поверхні недеформованого шару;

X_{3i}^{\pm} – складові вектора напруження на лицевих поверхнях S_{\pm} ;

p^m – складові вектора зусиль, що діють на бокову поверхню деформованого шару, але віднесені до одиниці площі бокової поверхні недеформованого шару;

v^i – компоненти вектора пружного переміщення точок частини бокової поверхні Ω_U .

Початкові умови в момент часу $t = t_0$ мають вигляд

$$u^i \Big|_{t=t_0} = g_1^i(\xi^1, \xi^2, \xi^3);$$

$$\frac{\partial u^i}{\partial t} \Big|_{t=t_0} = g_2^i(\xi^1, \xi^2, \xi^3), \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.22)$$

Тут g_k^i , $k = 1, 2$, – задані функції.

2.1.2. Динамічний напружено-деформований стан тонкого криволінійного шару

Розглянемо випадок, коли криволінійний пружний шар є тонкостінним елементом, тобто справедлива нерівність

$$h/R \ll 1, \quad R = \min(R_1, R_2), \quad R_i = 1/k_i, \quad i = 1, 2. \quad (2.23)$$

Тоді для коефіцієнтів Ляме та їх похідних можна використати наступні формули [20]

$$H_i \approx A_i,$$

$$\frac{\partial H_i}{\partial \xi^3} = k_i A_i,$$

$$\frac{\partial H_i}{\partial \xi^j} = \frac{\partial A_i}{\partial \xi^j}, \quad i, j = 1, 2. \quad (2.24)$$

У (2.23), (2.24) A_1, A_2 та k_1, k_2 – коефіцієнти першої квадратичної форми і головні кривини серединної поверхні шару.

З урахуванням (2.24) для ненульових символів Крістофеля, присутніх у формулах коваріантного диференціювання (2.2) та (2.3), маємо

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_1}{\partial \xi^1}; \quad \Gamma_{12}^1 = \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_1}{\partial \xi^2}; \quad \Gamma_{13}^1 = k_1;$$

$$\Gamma_{21}^1 = \Gamma_{12}^1; \quad \Gamma_{22}^1 = -\frac{A_2}{A_1^2} \frac{\partial A_2}{\partial \xi^1}; \quad \Gamma_{31}^1 = k_1;$$

$$\Gamma_{11}^2 = -\frac{A_1}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \xi^2}; \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \xi^1};$$

$$\Gamma_{21}^2 = \Gamma_{12}^2; \quad \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{12}^2; \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \xi^2};$$

$$\Gamma_{23}^2 = k_2; \quad \Gamma_{32}^2 = k_2;$$

$$\Gamma_{11}^3 = -A_1^2 k_1; \quad \Gamma_{22}^3 = -A_2^2 k_2. \quad (2.25)$$

Для коваріантних похідних коваріантних компонент вектора пружного переміщення маємо

$$\nabla_1 u_1 = \frac{\partial u_1}{\partial \xi^1} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_1}{\partial \xi^1} u_1 + \frac{A_1}{A_2^2} \frac{\partial A_1}{\partial \xi^2} u_2 + A_1^2 k_1 u_3;$$

$$\nabla_1 u_2 = \frac{\partial u_2}{\partial \xi^1} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_1}{\partial \xi^2} u_1 - \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \xi^1} u_2;$$

$$\nabla_1 u_3 = \frac{\partial u_3}{\partial \xi^1} - k_1 u_1;$$

$$\nabla_2 u_1 = \frac{\partial u_1}{\partial \xi^2} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_1}{\partial \xi^2} u_1 - \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \xi^1} u_2;$$

$$\nabla_2 u_2 = \frac{\partial u_2}{\partial \xi^2} + \frac{A_2}{A_1^2} \frac{\partial A_2}{\partial \xi^1} u_1 - \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \xi^2} u_2 + A_2^2 k_2 u_3;$$

$$\nabla_2 u_3 = \frac{\partial u_3}{\partial \xi^2} - k_2 u_2;$$

$$\nabla_3 u_1 = \frac{\partial u_1}{\partial \xi^3} - k_1 u_1;$$

$$\nabla_3 u_2 = \frac{\partial u_2}{\partial \xi^3} - k_2 u_2; \quad \nabla_3 u_3 = \frac{\partial u_3}{\partial \xi^3}. \quad (2.26)$$

Коваріантні похідні контраваріантних компонент вектора переміщень визначаються за формулами

$$\nabla_1 u^1 = \frac{\partial u^1}{\partial \xi^1} + \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_1}{\partial \xi^1} u^1 + \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_1}{\partial \xi^2} u^2 + k_1 u^3;$$

$$\nabla_1 u^2 = \frac{\partial u^2}{\partial \xi^1} - \frac{A_1}{A_2^2} \frac{\partial A_1}{\partial \xi^2} u^1 + \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \xi^1} u^2;$$

$$\nabla_1 u^3 = \frac{\partial u^3}{\partial \xi^1} - A_1^2 k_1 u^1;$$

$$\nabla_2 u^1 = \frac{\partial u^1}{\partial \xi^2} + \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_1}{\partial \xi^2} u^1 - \frac{A_2}{A_1^2} \frac{\partial A_2}{\partial \xi^1} u^2;$$

$$\nabla_2 u^2 = \frac{\partial u^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \xi^1} u^1 + \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \xi^2} u^2 + k_2 u^3;$$

$$\nabla_2 u^3 = \frac{\partial u^3}{\partial \xi^2} - A_2^2 k_2 u^2;$$

$$\nabla_3 u^1 = \frac{\partial u^1}{\partial \xi^3} + k_1 u^1;$$

$$\nabla_3 u^2 = \frac{\partial u^2}{\partial \xi^3} + k_2 u^2; \quad \nabla_3 u^3 = \frac{\partial u^3}{\partial \xi^3}. \quad (2.27)$$

Оскільки узагальнений закон Гука (2.5) записується в термінах фізичних компонент тензорів напружень T_σ і деформацій T_ϵ , то необхідно спочатку визначити коваріантні похідні від компонент вектора пружного переміщення через фізичні компоненти v_i , які у змішаній системі координат визначаються за формулами

$$v_i = H_i u^i = u_i / H_i, \quad i = 1, 2; \quad u_3 = u^3 = v_3. \quad (2.28)$$

З урахуванням (2.28) та (2.24) формули (2.26), (2.27) запишемо у вигляді

$$\nabla_1 u_1 = A_1 \frac{\partial v_1}{\partial \xi^1} + \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \xi^2} v_2 + A_1^2 k_1 v_3;$$

$$\nabla_1 u_2 = A_2 \frac{\partial v_2}{\partial \xi^1} - \frac{\partial A_1}{\partial \xi^2} v_1;$$

$$\nabla_1 u_3 = \frac{\partial v_3}{\partial \xi^1} - k_1 A_1 v_1;$$

$$\nabla_2 u_1 = A_1 \frac{\partial v_1}{\partial \xi^2} - \frac{\partial A_2}{\partial \xi^1} v_2;$$

$$\nabla_2 u_2 = A_2 \frac{\partial v_2}{\partial \xi^2} + \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial \xi^1} v_2 + A_2^2 k_2 v_3;$$

$$\nabla_2 u_3 = \frac{\partial v_3}{\partial \xi^2} - k_2 A_2 v_2; \quad (2.29)$$

$$\nabla_1 u^1 = \nabla_1 u_1 / A_1^2; \quad \nabla_1 u^2 = \nabla_1 u_2 / A_2^2;$$

$$\nabla_1 u^3 = \nabla_1 u_3;$$

$$\nabla_2 u^1 = \nabla_2 u_1 / A_1^2; \quad \nabla_2 u^2 = \nabla_2 u_2 / A_2^2;$$

$$\nabla_2 u^3 = \nabla_2 u_3;$$

$$\nabla_3 u^1 = \nabla_3 u_1 / A_1^2; \quad \nabla_3 u^2 = \nabla_3 u_2 / A_2^2;$$

$$\nabla_3 u^3 = \nabla_3 u_3. \quad (2.30)$$

Фізичні компоненти тензора деформації $e_{(i)(j)}$ визначаються через коваріантні компоненти e_{ij} за формулами

$$e_{(i)(j)} = \frac{e_{ij}}{H_i H_j}, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (2.31)$$

Ввівши позначення

$$\varepsilon_{ij} = \nabla_j u^i, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (2.32)$$

для $e_{(i)(j)}$ можна записати вирази

$$e_{(i)(j)} = \frac{1}{2}(\varepsilon_{ij} + \varepsilon_{ji}) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ki} \varepsilon_{kj}, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (2.33)$$

У подальших випадках для фізичних компонент тензорів деформацій та напружень дужки біля індексів опускаємо, а для фізичних компонент вектора переміщень використовуватимемо звичні позначення u_i , $i = 1, 2, 3$.

Рівняння руху (2.18) в термінах фізичних компонент і з урахуванням (2.24), (2.25) набудуть вигляду

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \xi^1} (A_2 S^{11}) + \frac{\partial}{\partial \xi^2} (A_1 S^{21}) + A_1 A_2 \frac{\partial S^{31}}{\partial \xi^3} - \\ & - \frac{\partial A_2}{\partial \xi^1} S^{22} + \frac{\partial A_1}{\partial \xi^2} S^{12} + \\ & + A_1 A_2 k_1 S^{13} + A_1 A_2 (f^1 - \rho \ddot{u}_1) = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \xi^2} (A_1 S^{22}) + \frac{\partial}{\partial \xi^1} (A_2 S^{12}) + A_1 A_2 \frac{\partial S^{32}}{\partial \xi^3} + \\ & + \frac{\partial A_2}{\partial \xi^1} S^{21} - \frac{\partial A_1}{\partial \xi^2} S^{11} + \\ & + A_1 A_2 k_2 S^{23} + A_1 A_2 (f^2 - \rho \ddot{u}_2) = 0; \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi^1} (A_2 S^{13}) + \frac{\partial}{\partial \xi^2} (A_1 S^{23}) + A_1 A_2 \frac{\partial S^{33}}{\partial \xi^3} -$$

$$\begin{aligned}
& -A_1A_2k_1S^{11} - A_1A_2k_2S^{22} + \\
& + A_1A_2(f^3 - \rho\ddot{u}_3) = 0.
\end{aligned} \tag{2.34}$$

Отже, нехтуючи в (2.1), (2.10), (2.17) і (2.18) величинами порядку $O(h/R)$, отримуємо систему рівнянь з незалежними від координати ξ^3 коефіцієнтами, яка наближено описує тривимірний динамічний геометрично нелінійний напружено-деформований стан тонкого криволінійного шару.

2.2. Двовимірні рівняння уточненої геометрично нелінійної теорії динамічного деформування податливих до трансверсальних зсуву та стиснення оболонок і пластин

З метою врахування податливості матеріалу розглянутого вище тонкого пружного криволінійного шару до трансверсальних деформацій зсуву та стиснення для побудови двовимірних рівнянь згідно з підходом, запропонованим у вищезгаданих роботах [116, 117], для фізичних компонент векторів пружного переміщення \vec{u} та об'ємних сил \vec{f} , компонент тензорів напружень T_S і деформацій T_e приймаємо наступні апроксимаційні вирази за координатою $\alpha = \xi^3/h$:

$$u_i = u_i^0 P_0(\alpha) + u_i^1 P_1(\alpha),$$

$$f^i = f_0^i P_0(\alpha) + f_1^i P_1(\alpha), \quad i = 1, 2, 3; \quad (2.35)$$

$$S^{ij} = S_0^{ij} P_0(\alpha) + S_1^{ij} P_1(\alpha),$$

$$S^{i3} = \sum_{k=0}^4 S_k^{i3} P_k(\alpha), \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2;$$

$$S^{33} = \sum_{k=0}^3 S_k^{33} P_k(\alpha), \quad (2.36)$$

$$e_{ij} = e_{ij}^0 P_0(\alpha) + e_{ij}^1 P_1(\alpha), \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2, 3;$$

$$e_{33} = e_{33}^0 P_0(\alpha), \quad (2.37)$$

де $P_k(\alpha)$, $k = 0, 1, 2, \dots$ – поліноми Лежандра k -го порядку від змінної α .

Із граничних умов (2.19) на поверхнях $\alpha = \pm 1$ маємо

$$S_3^{3i} = X_i^- - S_1^{3i},$$

$$S_4^{3i} = X_i^+ - S_0^{3i} - S_2^{3i}, \quad i = 1, 2;$$

$$S_2^{33} = X_3^+ - S_0^{33}, \quad S_3^{33} = X_3^- - S_1^{33}, \quad (2.38)$$

де

$$X_i^\pm = (X_{3i}^+ \pm X_{3i}^-) / 2.$$

Шляхом підстановки (2.35), (2.36) у рівняння (2.34) з використанням процедури Бубнова – Гальоркіна [90] за нормальною координатою α до серединної поверхні шару при системі базисних функцій P_0 і P_1 отримуємо двовимірні рівняння руху

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \xi^1} (A_2 S_o^{11}) + \frac{\partial}{\partial \xi^2} (A_1 S_o^{21}) - \frac{\partial A_2}{\partial \xi^1} S_o^{22} + \frac{\partial A_1}{\partial \xi^2} S_o^{12} + \\ & + A_1 A_2 (k_1 S_o^{13} + \frac{1}{h} X_1^-) + A_1 A_2 (f_0^1 - \rho \dot{u}_1^0) = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \xi^1} (A_2 S_o^{12}) + \frac{\partial}{\partial \xi^2} (A_1 S_o^{22}) - \frac{\partial A_1}{\partial \xi^2} S_o^{11} + \frac{\partial A_2}{\partial \xi^1} S_o^{21} + \\ & + A_1 A_2 (k_2 S_o^{23} + \frac{1}{h} X_2^-) + A_1 A_2 (f_0^2 - \rho \ddot{u}_2^0) = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \xi^1} (A_2 S_1^{11}) + \frac{\partial}{\partial \xi^2} (A_1 S_1^{21}) - \frac{\partial A_2}{\partial \xi^1} S_1^{22} + \frac{\partial A_1}{\partial \xi^2} S_1^{12} + \\ & + A_1 A_2 (k_1 S_1^{13} - \frac{3}{h} S_0^{31} + \frac{3}{h} X_1^+) + \\ & + A_1 A_2 (f_1^1 - \rho \ddot{u}_1^1) = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \xi^1} (A_2 S_1^{12}) + \frac{\partial}{\partial \xi^2} (A_1 S_1^{22}) - \frac{\partial A_1}{\partial \xi^2} S_1^{11} + \frac{\partial A_2}{\partial \xi^1} S_1^{21} + \\ & + A_1 A_2 (k_2 S_1^{23} - \frac{3}{h} S_0^{32} + \frac{3}{h} X_2^+) + \\ & + A_1 A_2 (f_1^2 - \rho \ddot{u}_2^1) = 0; \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi^1} (A_2 S_o^{13}) + \frac{\partial}{\partial \xi^2} (A_1 S_o^{23}) + A_1 A_2 (\frac{1}{h} X_3^- - k_1 S_0^{11} -$$

$$-k_2 S_0^{22}) + A_1 A_2 (f_0^3 - \rho \ddot{u}_3^0) = 0;$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi^1} (A_2 S_1^{13}) + \frac{\partial}{\partial \xi^2} (A_1 S_1^{23}) + A_1 A_2 \left(\frac{3}{h} X_3^+ - \frac{3}{h} S_0^{33} - \right. \\ \left. - k_1 S_1^{11} - k_2 S_1^{22} \right) + A_1 A_2 (f_1^3 - \rho \ddot{u}_3^1) = 0. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Оскільки, при нескінченно малих деформаціях

$$S^{ij} \equiv \sigma^{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

то порядок апроксимаційних наближень для компонент тензора Піоли T_σ буде таким самим, як і у виразах (2.36).

З умови мінімуму квадратичного функціонала [79]

$$R = \int_{-1}^1 \left\{ \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left[S^{ij} - \sigma^{ik} (\delta_k^i + \nabla_k u^j) \right]^2 \right\} d\alpha, \quad (2.40)$$

де в (2.40) під S^{ij} , σ^{ik} та u^i треба розуміти їх апроксимаційні наближення, отримаємо вирази для коефіцієнтів апроксимацій S_k^{ij} , котрі наявні в рівняннях рівноваги (2.39):

$$S_0^{11} = \sigma_0^{11}(1 + \varepsilon_{11}^0) + \frac{A_2}{A_1} \sigma_0^{12} \varepsilon_{12}^0 + \frac{1}{A_1} \sigma_0^{13} \varepsilon_{13}^0 +$$

$$+ \frac{1}{3} (\sigma_1^{11} \varepsilon_{11}^1 + \frac{A_2}{A_1} \sigma_1^{12} \varepsilon_{12}^1),$$

$$S_0^{12} = \frac{A_1}{A_2} \sigma_0^{11} \varepsilon_{21}^0 + \frac{1}{3} \sigma_1^{11} \varepsilon_{21}^1 + \sigma_0^{12}(1 + \varepsilon_{22}^0) +$$

$$+ \frac{1}{3} \sigma_1^{12} \varepsilon_{22}^1 + \frac{1}{A_2} \sigma_0^{13} \varepsilon_{23}^0,$$

$$S_0^{13} = A_1(\sigma_0^{11} \varepsilon_{31}^0 + \frac{1}{3} \sigma_1^{11} \varepsilon_{31}^1) + A_2(\sigma_0^{12} \varepsilon_{32}^0 +$$

$$+ \frac{1}{3} \sigma_1^{12} \varepsilon_{32}^1) + \sigma_0^{13}(1 + \varepsilon_{33}^0),$$

$$S_1^{11} = \sigma_1^{11}(1 + \varepsilon_{11}^0) + \frac{A_2}{A_1} \sigma_1^{12} \varepsilon_{21}^0 + \frac{1}{A_1} \sigma_1^{13} \varepsilon_{13}^0 +$$

$$+ \sigma_0^{11} \varepsilon_{11}^1 + \frac{A_2}{A_1} \sigma_0^{12} \varepsilon_{12}^1,$$

$$S_1^{12} = \frac{A_1}{A_2} \sigma_1^{11} \varepsilon_{21}^0 + \sigma_1^{11} \varepsilon_{21}^0 + \sigma_1^{12} (1 + \varepsilon_{22}^0) + \\ + \sigma_0^{12} \varepsilon_{22}^1 + \frac{1}{A_2} \sigma_1^{13} \varepsilon_{23}^0,$$

$$S_1^{13} = A_1 (\sigma_0^{11} \varepsilon_{31}^1 + \sigma_1^{11} \varepsilon_{31}^0) + A_2 (\sigma_0^{12} \varepsilon_{32}^1 + \\ + \sigma_1^{12} \varepsilon_{32}^0) + \sigma_1^{13} (1 + \varepsilon_{33}^0),$$

$$S_0^{31} = \sigma_0^{31} (1 + \varepsilon_{11}^0) + \frac{1}{3} \sigma_1^{13} \varepsilon_{11}^1 + \frac{A_2}{A_1} (\sigma_0^{23} \varepsilon_{21}^0 + \\ + \frac{1}{3} \sigma_1^{23} \varepsilon_{12}^1) + \frac{1}{A_1} \sigma_0^{33} \varepsilon_{33}^0, \quad (1 \leftrightarrow 2),$$

$$S_0^{33} = A_1 (\sigma_0^{13} \varepsilon_{31}^0 + \frac{1}{3} \sigma_1^{13} \varepsilon_{31}^1) + A_2 (\sigma_0^{23} \varepsilon_{32}^0 + \\ + \frac{1}{3} \sigma_1^{23} \varepsilon_{32}^1) + \sigma_0^{33} (1 + \varepsilon_{33}^0). \quad (2.41)$$

У (2.41) прийняті позначення

$$\varepsilon_{11}^k = \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_1^k}{\partial \xi^1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \xi^2} u_2^k + k_1 u_3^k;$$

$$\varepsilon_{21}^k = \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_2^k}{\partial \xi^1} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \xi^2} u_1^k;$$

$$\varepsilon_{31}^k = \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_3^k}{\partial \xi^1} - k_1 u_1^k, \quad k = 0, 1, \quad 1 \leftrightarrow 2; \quad (2.42)$$

$$\varepsilon_{i3}^0 = u_i^1 / h, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.43)$$

Підставивши апроксимаційні вирази для u_i з (2.35) та e_{ij} з (2.37) у (2.33) і застосувавши процедуру Бубнова – Гальоркіна аналогічним чином, як до рівнянь рівноваги, отримуємо двовимірні деформаційні співвідношення

$$e_{ij}^0 = \frac{1}{2} (\varepsilon_{ij}^0 + \varepsilon_{ji}^0) + \sum_{k=1}^3 \left(\frac{1}{2} \varepsilon_{kj}^0 \varepsilon_{ki}^0 + \frac{1}{6} \varepsilon_{kj}^1 \varepsilon_{ki}^1 \right),$$

$$e_{ij}^1 = \frac{1}{2}(\varepsilon_{ij}^1 + \varepsilon_{ji}^1) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 (\varepsilon_{kj}^1 \varepsilon_{ki}^0 + \varepsilon_{kj}^0 \varepsilon_{ki}^1), \quad i, j = 1, 2;$$

$$e_{i3}^0 = \frac{1}{2}(\varepsilon_{i3}^0 + \varepsilon_{3i}^0) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{k3}^0 \varepsilon_{ki}^0,$$

$$e_{i3}^1 = \frac{1}{2} \varepsilon_{i3}^1 + \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{k3}^0 \varepsilon_{ki}^1, \quad i = 1, 2;$$

$$e_{33}^0 = \varepsilon_{33}^0 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 (\varepsilon_{k3}^0)^2. \quad (2.44)$$

Записавши аналогічний до (2.40) функціонал стосовно залежностей (2.9), отримуємо двовимірні співвідношення пружності

$$\sigma_n^{ij} = A_{nm}^{ijkl} e_{kl}^m.$$

Після підстановки відповідних апроксимаційних наближень в умови (2.6), (2.7) отримаємо

$$\sigma_k^{11} = \bar{E}_1 (e_{11}^k + \nu_{12} e_{22}^k) + \lambda_1 \sigma_k^{33}, \quad k = 1, 2; \quad (2.45)$$

$$\sigma_0^{13} = \frac{14}{15} \cdot G_{13} \cdot 2e_{13}^0, \quad \sigma_1^{13} = \frac{7}{10} \cdot G_{13} \cdot 2e_{13}^1; \quad (2.46)$$

$$(1 \Leftrightarrow 2)$$

$$\sigma_0^{33} = \frac{5}{6} E_0 (e_{33}^0 + \lambda_1 e_{11}^0 + \lambda_2 e_{22}^0),$$

$$\sigma_1^{33} = \frac{7}{10} E_0 (e_{11}^1 + \lambda_2 e_{22}^2); \quad (2.47)$$

$$\sigma_k^{12} = 2G_{12} e_{12}^k, \quad k = 1, 2. \quad (2.48)$$

Після підстановки відповідних апроксимаційних наближень в граничні умови (2.20), (2.21) отримаємо

$$S_k^{im} n_i \Big|_{\Omega_\sigma} = p_k^m(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t), \quad (\xi^1, \xi^2, \xi^3) \in \Omega_\sigma, \quad (2.49)$$

$$u_m^k \Big|_{\Omega_u} = g_m^k(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t), \quad (\xi^1, \xi^2, \xi^3) \in \Omega_u, \quad (2.50)$$

$$k = 0, 1; \quad m = 1, 2, 3.$$

Початкові умови відносно узагальнених переміщень u_i^k запишемо у вигляді

$$u_i^k \Big|_{t=t_0} = g_i^{(1)k}(\xi^1, \xi^2, \xi^3), \quad \frac{\partial u_i^k}{\partial t} \Big|_{t=t_0} = g_i^{(2)k}(\xi^1, \xi^2, \xi^3), \quad (2.51)$$

$$k = 0, 1, \quad i = 1, 2, 3.$$

Виконавши послідовно підстановки (2.44) \rightarrow (2.45)–(2.48) \rightarrow (2.41) \rightarrow (2.39), отримаємо шість нелінійних за двома просторовими координатами та лінійних за часом рівнянь в частинних похідних відносно узагальнених переміщень, котрі разом з відповідними граничними та початковими умовами складають повну систему рівнянь нелінійного пружного динамічного деформування податливих трансверсальним зсувам і поперечному стисненню оболонок і пластин (при $k_1 = k_2 = 0$). Причому, початково-крайові задачі формулюються у вихідній недеформованій системі координат.

2.3. Рівняння геометрично нелінійних коливань податливих до трансверсальних зсуву та стиснення прямокутних ортотропних пластин

Розглянемо прямокутну ортотропну пластину товщини $2h$ з віднесеною до декартової системи координат $x_1 0 x_2$ серединною площиною. Поклавши в

рівняннях руху (2.39) коефіцієнти першої квадратичної форми та головні кривини рівними

$$A_1 = A_2 = 1; \quad k_1 = k_2 = 0$$

та припускаючи відсутність об'ємних і поверхневих зусиль отримуємо рівняння вільних геометрично нелінійних коливань податливих до трансверсальних зсуву та стиснення прямокутних пластин

$$\frac{\partial S_0^{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial S_0^{21}}{\partial x_2} - \rho \ddot{u}_1^0 = 0;$$

$$\frac{\partial S_0^{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial S_0^{22}}{\partial x_2} - \rho \ddot{u}_2^0 = 0; \quad (2.52)$$

$$\frac{\partial S_1^{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial S_1^{21}}{\partial x_2} - \frac{3}{h} S_0^{31} - \rho \ddot{u}_1^1 = 0;$$

$$\frac{\partial S_1^{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial S_1^{22}}{\partial x_2} - \frac{3}{h} S_0^{32} - \rho \ddot{u}_2^1 = 0; \quad (2.53)$$

$$\frac{\partial S_0^{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial S_0^{23}}{\partial x_2} - \rho \ddot{u}_3^0 = 0;$$

$$\frac{\partial S_1^{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial S_1^{23}}{\partial x_2} - \frac{3}{h} S_0^{33} - \rho \ddot{u}_3^1 = 0. \quad (2.54)$$

Оскільки за вільних коливань пластини на їхніх лицевих площинах відсутні навантаження та контакт із жорсткими або пружними тілами та іншими тонкостінними елементами, то можна вважати функцію u_3^1 , що явно виражає стиснення нормального перед деформуванням до серединної площини елемента, достатньо малою в порівнянні з рештою п'яти функціями узагальнених переміщень. Тобто в даному випадку можна вважати, що

$$u_3^1 = 0. \quad (2.55)$$

Враховуючи також той факт, що при поперечному як статичному, так і динамічному деформуванні тонкостінних елементів домінуючою функцією є вертикальне зміщення u_3^0 точок серединної поверхні [23]

$$\left| u_3^0 \right| \gg \left| u_i^k \right|, \quad k = 0, 1; \quad i, j = 1, 2. \quad (2.56)$$

То в даному випадку деформаційним співвідношенням (2.44) з врахуванням позначень (2.42), (2.43) та введенням в розгляд узагальнених переміщень

$$u_1^0 = u_1; \quad u_2^0 = u_2; \quad u_1^1 = h\gamma_1; \quad u_2^1 = h\gamma_2; \quad u_3^0 = w. \quad (2.57)$$

Можна надати вигляду

$$e_{11}^0 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} \right)^2, \quad e_{22}^0 = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x_2} \right)^2,$$

$$e_{13}^0 = \frac{1}{2} \left(\gamma_1 + \frac{\partial w}{\partial x_1} \right), \quad e_{23}^0 = \frac{1}{2} \left(\gamma_2 + \frac{\partial w}{\partial x_2} \right),$$

$$e_{12}^0 = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{R} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial w}{\partial x_1} \frac{\partial w}{\partial x_2} \right],$$

$$e_{11}^1 = \frac{\partial \gamma_1}{\partial x_1}, \quad e_{22}^1 = \frac{1}{R} \frac{\partial \gamma_2}{\partial x_2},$$

$$e_{12}^1 = \frac{h}{2} \left(\frac{\partial \gamma_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial x_1} \right). \quad (2.58)$$

Всі решта коефіцієнтів розкладу e_{ij}^k тензора деформацій внаслідок (2.56) будуть нульовими.

Відмітимо, що в (2.57) u_i , $i=1, 2$ – тангенціальні, а w – нормальне зміщення точок серединної площини пластини, а γ_i , $i=1, 2$ – кути повороту

нормального елемента.

Для ненульових коефіцієнтів розкладів компонент тензора напружень Кірхгофа із (2.41) маємо вирази

$$S_k^{ij} \approx \sigma_k^{ij}, \quad k=0,1; \quad i,j=1,2;$$

$$S_0^{i3} \approx \sigma_0^{i3} + \sigma_0^{ii} \varepsilon_{3i}^0 + \sigma_0^{i,3-i} \varepsilon_{3,3-i}^0, \quad i=1,2. \quad (2.59)$$

Система рівнянь руху (2.52) – (2.54) в даному випадку складатиметься з двох рівнянь (2.52), двох рівнянь (2.53) та першого рівняння (2.54) з використанням загально прийнятих позначень для узагальнених зусиль

$$\sigma_0^{ii} = N_i / 2h, \quad \sigma_1^{ii} = 3M_i / 2h^2,$$

$$\sigma_0^{i3} = Q_i / 2h, \quad i=1,2,$$

$$\sigma_0^{12} = S / 2h, \quad \sigma_1^{12} = 3H / 2h^2 \quad (2.60)$$

та має вигляд

$$\frac{\partial N_1}{\partial x_1} + \frac{\partial S}{\partial x_2} = 2\rho h \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial S}{\partial x_1} + \frac{\partial N_2}{\partial x_2} = 2\rho h \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial x_1} + \frac{\partial H}{\partial x_2} - Q_1 = \frac{2}{3}\rho h^3 \frac{\partial^2 \gamma_1}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial H}{\partial x_1} + \frac{\partial M_2}{\partial x_2} - Q_2 = \frac{2}{3}\rho h^3 \frac{\partial^2 \gamma_2}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(N_1 \frac{\partial w}{\partial x_1} + S \frac{\partial w}{\partial x_2} + Q_1 \right) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x_2} \left(N_2 \frac{\partial w}{\partial x_2} + S \frac{\partial w}{\partial x_1} + Q_2 \right) +$$

$$+ q = 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \quad (2.61)$$

Залежності між узагальненими зусиллями та деформаціями, які є наслідком (2.45), в даному випадку при спів паданні напрямків ортотропії з координатними осями мають вигляд

$$N_1 = B_1[(1 + \alpha_1)e_{11}^0 + \bar{\nu}_{21}e_{22}^0],$$

$$M_1 = D_1[(1 + \alpha_1)e_{11}^1 + \bar{\nu}_{21}e_{11}^1], \quad 1 \Leftrightarrow 2;$$

$$S = B_{12} 2e_{12}^0; \quad H = D_{12} 2e_{12}^1;$$

$$Q_i = \Lambda_i 2e_{i3}^0, \quad i = 1, 2, \tag{2.62}$$

де

$$B_i = 2\bar{E}_i h, \quad D_i = h^2 B_i / 3,$$

$$\Lambda_i = 2k' h G_{i3}, \quad i = 1, 2;$$

$$B_{12} = 2G_{12} h; \quad D_{12} = 2G_{12} h^3 / 3; \quad k' = 14/15,$$

А всі решта коефіцієнтів означено в (2.11) – (2.15).

Рівняння (2.61), (2.62) та (2.58) описують процес вільних геометрично нелінійних поперечних коливань податливих до трансверсальних зсуву та стиснення прямокутних ортотропних пластин.

Граничні умови для найбільш характерних випадків закріплення країв мають вигляд:

а) жорстке защемлення

$$u_n = u_\mu = 0, \quad w = 0, \quad \gamma_n = \gamma_\mu = 0; \quad (2.63)$$

б) шарнірне закріплення

$$u_n = u_\mu = 0, \quad w = 0, \quad M_n = 0, \quad H_{n\mu} = 0; \quad (2.64)$$

в) вільний край

$$N_n = 0, \quad S_{n\mu} = 0, \quad Q_n = 0, \quad M_n = 0, \quad H_{n\mu} = 0, \quad (2.65)$$

де n, μ – напрямки зовнішньої нормалі та дотичної в точках краю.

У випадку необхідності визначення амплітуди початкові умови для узагальнених переміщень мають вигляд

$$u_i|_{t=t_0} = \bar{u}_i, \quad \gamma_i|_{t=t_0} = \bar{\gamma}_i, \quad w|_{t=t_0} = \bar{w}, \quad (2.66)$$

$$\dot{u}_i|_{t=t_0} = \bar{\dot{u}}_i, \quad \dot{\gamma}_i|_{t=t_0} = \bar{\dot{\gamma}}_i, \quad \dot{w}|_{t=t_0} = \bar{\dot{w}}, \quad i = 1, 2,$$

де однією та двома рисками позначені задані функції.

2.4. Рівняння вільних геометрично нелінійних коливань циліндричних панелей

Якщо для геометричних характеристик серединної поверхні оболонки прийняти вирази

$$A_1 = 1, \quad A_2 = R, \quad k_1 = 0, \quad k_2 = 1/R, \quad (2.67)$$

що відповідає циліндричній оболонці, фрагмент якої у вигляді панелі зображено на рис. 2.2

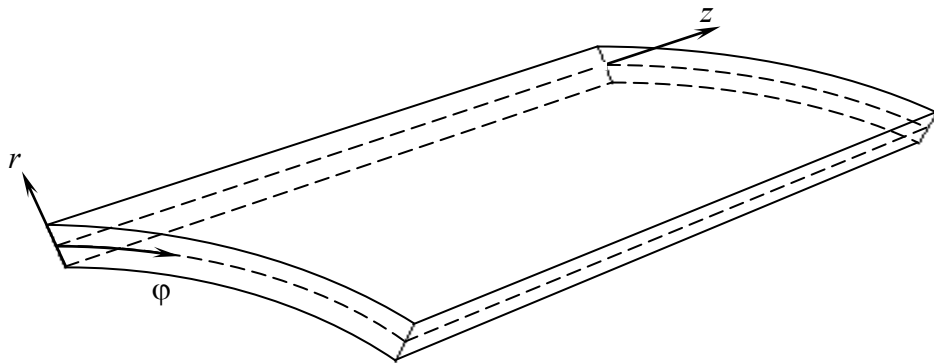


Рис. 2.2. Циліндрична панель

і вважати справедливими умови (2.55), (2.56) то рівняння руху (2.39) набудуть вигляду

$$\frac{\partial N_1}{\partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial S}{\partial \varphi} = 2\rho h \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_2}{\partial \varphi} + \frac{1}{R} \left[Q_2 + \frac{N_2}{R} \left(\frac{\partial w}{\partial \varphi} - u_2 \right) + S \frac{\partial w}{\partial z} \right] = \\ = 2\rho h \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial H}{\partial \varphi} - Q_1 = \frac{2}{3} \rho h^3 \frac{\partial^2 \gamma_1}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial H}{\partial z} + \frac{\partial M_2}{\partial \varphi} - Q_2 = \frac{2}{3} \rho h^3 \frac{\partial^2 \gamma_2}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[Q_1 + N_1 \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{S}{R} \left(\frac{\partial w}{\partial \varphi} - u_2 \right) \right] +$$

$$+ \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[Q_2 + \frac{N_2}{R} \left(\frac{\partial w}{\partial \varphi} - u_2 \right) + S \frac{\partial w}{\partial z} \right] -$$

$$- \frac{N_2}{R} = 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \quad (2.68)$$

Залежності між узагальненими зусиллями та деформаціями матимуть вигляд, аналогічний до (2.62), але з наступними деформаційними співвідношеннями

$$e_{11}^0 = \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2,$$

$$e_{22}^0 = \frac{1}{R} \frac{\partial u_2}{\partial \varphi} + \frac{w}{R} + \frac{1}{2} \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \varphi} - u_2 \right)^2,$$

$$e_{12}^0 = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{R} \frac{\partial u_1}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial z} \left(\frac{\partial w}{\partial \varphi} - u_2 \right) \right],$$

$$e_{11}^1 = \frac{\partial \gamma_1}{\partial z}, \quad e_{22}^1 = \frac{1}{R} \frac{\partial \gamma_2}{\partial \varphi},$$

$$e_{12}^1 = \frac{\partial \gamma_2}{\partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial \gamma_1}{\partial \varphi},$$

$$e_{13}^0 = \gamma_1 + \frac{\partial w}{\partial z}, \quad e_{23}^0 = \gamma_2 + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial w}{\partial \varphi} - u_2 \right). \quad (2.69)$$

Рівняння (2.68), (2.62) та (2.69) описують вільні геометрично нелінійні коливання циліндричних панелей, податливість матеріалу яких до трансверсального зсуву врахована в (2.62) явно, а до стиснення – неявно шляхом поправок до жорсткісних характеристик. До цих рівнянь необхідно в кожному конкретному випадку додати умови на краях панелі.

2.5. Висновки до розділу 2

Таким чином, у розділі отримані математичні моделі процесів вільних геометрично нелінійних поперечних коливань податливих до трансверсальних зсуву та стиснення ортотропних прямокутних пластин і циліндричних оболонок (в частковому випадку – циліндричних панелей). Зауважимо, що граничним переходом $E_3 \rightarrow \infty$ для модуля Юнга в поперечному напрямку в співвідношеннях пружності цих моделей отримуються рівняння узагальненої нелінійної теорії С.П. Тимошенка. Подальший граничний перехід $G_{i3} \rightarrow \infty, i = 1, 2$ приводить до рівнянь нелінійної квадратичної теорії Кармана.

Частковим випадком отриманих рівнянь є співвідношення, що описують процеси вільних лінійних поперечних коливань вказаних тонкостінних елементів, які будуть наведені та використані нижче.

Теоретичні результати розділу, що визначають новизну дисертаційної роботи, викладені у публікаціях [81, 84, 86, 87, 89].

РОЗДІЛ 3

ВПЛИВ ПОДАТЛИВОСТІ ДО ЗСУВУ ТА СТИСНЕННЯ НА ВЛАСНІ ЧАСТОТИ ОРТОТРОПНИХ ПРЯМОКУТНИХ ПЛАСТИН ТА ВИДОВЖЕНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ПАНЕЛЕЙ ЗА ЛІНІЙНИХ КОЛИВАНЬ

Ортотропні прямокутні пластини та видовжені циліндричні панелі є досить поширеними конструктивними елементами у сучасній техніці. У більшості випадків вони піддаються інтенсивним динамічним, зокрема циклічним, навантаженням. Тому достовірна оцінка такої їх динамічної характеристики, як спектр власних частот коливань є досить актуальною проблемою при проектуванні з метою уникнення резонансних явищ в експлуатаційних умовах.

3.1. Вільні лінійні поперечні коливання прямокутних ортотропних пластин

Переважаюча більшість виконаних досліджень про вільні лінійні коливання ортотропних прямокутних пластин базувались на використанні зсувної моделі С. П. Тимошенка [10, 56, 135, 137, 139, 140, 153], яка, однак, не враховує податливості до поперечного стиснення. Тому в роботі використано уточнену математичну модель динамічного деформування податливих до зсуву та стиснення композитних пластин [79], що дозволило в замкненому вигляді

отримати вирази для спектра власних частот коливань шарнірно опертої прямокутної пластини.

3.1.1. Постановка задачі

Розглянемо прямокутну композитну ортотропну пластину сталої товщини $2h$ розміром $a_1 \times a_2$ з приведеними фізико-механічними характеристиками. Серединну площину пластини віднесемо до декартової системи координат $x_1 0 x_2$ з початком у лівому нижньому куті зайнятого нею прямокутника (рис. 3.1)

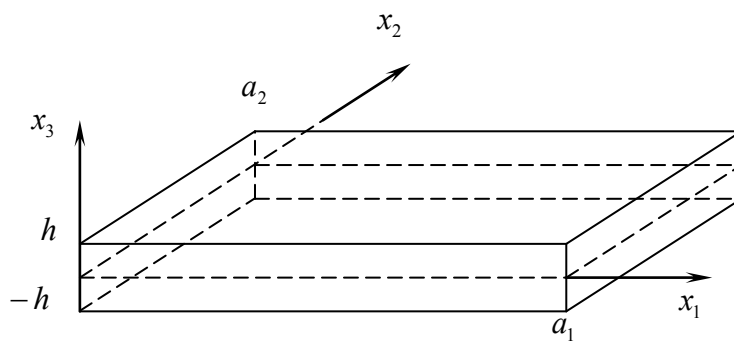


Рис. 3.1

За лінійних коливань пластини система рівнянь руху (2.61) розпадається на дві незалежні підсистеми. Три останні рівняння описують поперечні лінійні вільні коливання і мають вигляд

$$\frac{\partial M_1}{\partial x_1} + \frac{\partial H}{\partial x_2} - Q_1 = \frac{2}{3} h^3 \frac{\partial^2 \gamma_1}{\partial t^2};$$

$$\frac{\partial H}{\partial x_1} + \frac{\partial M_2}{\partial x_2} - Q_2 = \frac{2}{3} h^3 \frac{\partial^2 \gamma_2}{\partial t^2};$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial x_2} = 2h\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \quad (3.1)$$

Співвідношення пружності (2.62) між узагальненими зусиллями та компонентами тензора деформацій серединної площини в даному випадку можна представити у вигляді

$$M_1 = D_1((1 + \alpha_1)e_1 + (v_{21} + \alpha_{12})e_2);$$

$$M_2 = D_2((v_{12} + \alpha_{21})e_1 + (1 + \alpha_2)e_2);$$

$$H = 2D_{12}e_{13};$$

$$Q_i = 2\Lambda_{i3}e_{i3}, \quad i=1,2 \quad . \quad (3.2)$$

Деформаційні співвідношення між компонентами тензора деформацій і узагальненими переміщеннями (2.58) набудуть вигляду

$$e_1 = \frac{\partial \gamma_1}{\partial x_1};$$

$$e_2 = \frac{\partial \gamma_2}{\partial x_2};$$

$$2e_{12} = \frac{\partial \gamma_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial x_1};$$

$$2e_{13} = \gamma_1 + \frac{\partial w}{\partial x_1};$$

$$2e_{23} = \gamma_2 + \frac{\partial w}{\partial x_2}. \quad (3.3)$$

У цих формулах

$$D_i = \frac{2}{3} \frac{E_i h^3}{(1 - \nu_1 \nu_2)},$$

$$\Lambda_i = 2k'hG_{i3}, \quad i = 1, 2,$$

$$D_{12} = \frac{2h^3}{3} G_{12},$$

$$k' = 14/15;$$

ν_{ij} – коефіцієнти Пуассона, які характеризують скорочення в напрямку x_j при розтягу в напрямку x_i ,

E_i – модулі Юнга в напрямках x_i ; G_{ij} – модулі зсуву між головними напрямками x_i та x_j , $i, j = 1, 2, 3$; k' - коефіцієнт зсуву,

$$\alpha_i = \frac{7}{10} \frac{E_0}{E_i} \lambda_i^2, \quad i = 1, 2;$$

$$\alpha_{12} = \frac{7}{10} \frac{E_0}{E_1} \lambda_1 \lambda_2;$$

$$\alpha_{21} = \frac{7}{10} \frac{E_0}{E_2} \lambda_1 \lambda_2;$$

$$\lambda_i = \frac{v_{i3} + v_{ij}v_{ji}}{1 - v_{ij}v_{ji}} \frac{E_i}{E_3}, \quad i=1,2;$$

$$E_0 = \frac{E_3(1 - v_{12}v_{21})}{1 - v_{12}v_{21} - v_{13}v_{31} - v_{23}v_{32} - v_{12}v_{23}v_{31} - v_{21}v_{13}v_{32}}.$$

Величини λ_i та E_0 характеризують податливість до стиснення через коефіцієнти Пуассона $v_{3i}, v_{i3}, i=1,2$ у поперечному напрямку та модуль Юнга E_3 [99].

Після підстановки (3.3) в (3.2) та результату в (3.1) отримаємо рівняння руху в узагальнених переміщеннях:

$$\bar{D}_1 \frac{\partial^2 \gamma_1}{\partial x_1^2} + D_{12} \frac{\partial^2 \gamma_1}{\partial x_2^2} - \Lambda_1 \gamma_1 + [D_{12} + D_1(v_{21} + \alpha_{12})] \frac{\partial^2 \gamma_2}{\partial x_1 \partial x_2} -$$

$$- \Lambda_1 \frac{\partial w}{\partial x_1} = \frac{2}{3} h^3 \frac{\partial^2 \gamma_1}{\partial t^2};$$

$$[D_{12} + D_2(v_{12} + \alpha_{21})] \frac{\partial^2 \gamma_1}{\partial x_1 \partial x_2} + D_{12} \frac{\partial^2 \gamma_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \bar{D}_2 \frac{\partial^2 \gamma_2}{\partial x_2^2} - \Lambda_2 \gamma_2 -$$

$$- \Lambda_2 \frac{\partial w}{\partial x_2} = \frac{2}{3} h^3 \frac{\partial^2 \gamma_2}{\partial t^2};$$

$$\Lambda_1 \frac{\partial \gamma_1}{\partial x_1} + \Lambda_2 \frac{\partial \gamma_2}{\partial x_2} + \Lambda_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \Lambda_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} = 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (3.4)$$

де $\bar{D}_i = D_i(1 + \alpha_i)$, $i=1,2$ – узагальнені згинні жорсткості пластини в напрямках координатних осей x_i .

У праці [99] показано, що при вільних поперечних коливаннях пластин інерцією нормального елемента до серединної площини можна знехтувати.

Використовуючи цей факт, системі (3.4) надано вигляду

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \varepsilon_1 \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \alpha_1^2 \right) \gamma_1 + (\varepsilon_1 + \nu_1) \frac{\partial^2 \gamma_2}{\partial x_1 \partial x_2} -$$

$$- \alpha_1^2 \frac{\partial w}{\partial x_1} = 0;$$

$$(\varepsilon_2 + \nu_2) \frac{\partial^2 \gamma_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \left(\varepsilon_2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \alpha_2^2 \right) \gamma_2 -$$

$$- \alpha_2^2 \frac{\partial w}{\partial x_2} = 0;$$

$$\frac{\partial \gamma_1}{\partial x_1} + \frac{1}{g} \frac{\partial \gamma_2}{\partial x_2} + \left[\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right] w = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \quad (3.5)$$

Тут

$c = \sqrt{\Lambda_1 / 2h\rho}$ – швидкість поширення зсувних хвиль у напрямку Ox_1 ;

$$v_1 = \frac{v_{21} + \alpha_{12}}{1 + \alpha_1};$$

$$v_2 = \frac{v_{12} + \alpha_{21}}{1 + \alpha_2};$$

$$g = G_{13} / G_{23};$$

$$\varepsilon_i = D_{12} / \bar{D}_i;$$

$$\varkappa_i^2 = \Lambda_i / \bar{D}_i;$$

$$\bar{D}_i = (1 + \alpha_i) D_i, \quad i = 1, 2.$$

Щоб однозначно розв'язати систему рівнянь (3.5), необхідно додати відповідні крайові умови на границі при $x_i = 0; a_i$, $i = 1, 2$ та початкові умови в момент часу $t = t_0$.

У випадку шарнірного закріплення пластини крайові умови записуємо у вигляді

$$w(x_1, x_2, t) \Big|_{x_1=0; a_1} = w(x_1, x_2, t) \Big|_{x_2=0; a_2} = 0;$$

$$M_1(x_1, x_2, t) \Big|_{x_1=0; a_1} = M_2(x_1, x_2, t) \Big|_{x_2=0; a_2} = 0;$$

$$H(x_1, x_2, t) \Big|_{x_1=0; a_1} = H(x_1, x_2, t) \Big|_{x_2=0; a_2} = 0. \quad (3.6)$$

Початкові умови, необхідні для визначення амплітуди коливань точок серединної площини пластини, прийнято записувати у вигляді

$$w(x_1, x_2, t_0) = w_0(x_1, x_2);$$

$$\frac{\partial}{\partial t} w(x_1, x_2, t_0) = w_1(x_1, x_2, t_0), \quad (3.6)$$

де w_0 – задана форма зігнутої серединної площини пластини, а w_1 – вертикальна швидкість її точок в момент часу $t = t_0$.

Система (3.5) разом із крайовими (3.6) і початковими (3.7) умовами складає математичну модель процесу вільних лінійних поперечних коливань шарнірно закріплених по контуру прямокутних ортотропних пластин, які податливі до деформацій поперечного зсуву та стиснення.

3.1.2. Побудова розв'язку

Для відшукування спектру частот вільних лінійних поперечних коливань прямокутної пластини невідомі функції в (3.5) вибираємо таким чином, щоб задовольнялись крайові умови (3.6):

$$w(x_1, x_2, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn}(t) \sin \mu_1^m x_1 \sin \mu_2^n x_2,$$

$$\gamma_1(x_1, x_2, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_1^{mn}(t) \cos \mu_1^m x_1 \sin \mu_2^n x_2,$$

$$\gamma_2(x_1, x_2, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_2^{mn}(t) \sin \mu_1^m x_1 \cos \mu_2^n x_2, \quad (3.8)$$

де

$$\mu_1^m = \frac{m\pi}{a_1};$$

$$\mu_2^n = \frac{n\pi}{a_2}.$$

Підставляючи (3.8) у рівняння (3.5) та застосовуючи метод Бубнова-Гальоркіна за змінними x_1 та x_2 при вибраних координатних функціях, одержимо нескінченну систему рівнянь для визначення функцій $w_{mn}(t)$,

$\gamma_i^{mn}(t)$, $i=1,2$, яка внаслідок взаємної ортогональності координатних функцій в (3.8) та їх перших і других похідних, складається з наступних незалежних підсистем функціонально-диференціальних рівнянь

$$[(\mu_1^m)^2 + e_1(\mu_2^n)^2 + \mathfrak{a}_1^2]\gamma_1^{mn} + (\varepsilon_1 + \nu_1)\mu_1^m \mu_2^n \gamma_2^{mn} =$$

$$= -\mathfrak{a}_1^2 \mu_1^m w_{mn};$$

$$(\varepsilon_2 + \nu_2)\mu_1^m \mu_2^n \gamma_1^{mn} + [e_2(\mu_1^m)^2 + (\mu_2^n)^2 - \mathfrak{a}_2^2]\gamma_2^{mn} =$$

$$= -\mathfrak{a}_2^2 \mu_2^n w_{mn};$$

$$-\mu_1^m \gamma_1^{mn} - \mu_2^n \gamma_2^{mn} - [(\mu_1^m)^2 + \frac{1}{g}(\mu_2^n)^2] w_{mn} =$$

$$= \frac{1}{c^2} \frac{d^2 w_{mn}}{dt^2}. \quad (3.9)$$

З перших двох функціональних рівнянь підсистеми (3.8) маємо

$$\gamma_i^{mn}(t) = -\frac{(\mu_1^m)^2 \bar{\Delta}_i}{\mathfrak{x}_1^2 \bar{\Delta}} w_{mn}(t), \quad i=1,2, \quad (3.10)$$

де

$$\bar{\Delta} = \frac{\Delta}{\mathfrak{x}_1^4};$$

$$\bar{\Delta}_i = -\frac{\Delta_i}{\mathfrak{x}_1^2 (\mu_1^m)^3}, \quad i=1,2;$$

$$\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21};$$

$$a_{11} = (\mu_1^m)^2 + \varepsilon_2 (\mu_2^n)^2 + \mathfrak{x}_1^2;$$

$$a_{22} = \varepsilon_2 (\mu_1^m)^2 + (\mu_2^n)^2 + \mathfrak{x}_2^2;$$

$$a_{12} = (\varepsilon_1 + \nu_1) \mu_1^m \mu_2^n;$$

$$a_{21} = (\varepsilon_2 + \nu_2) \mu_1^m \mu_2^n;$$

$$\Delta_1 = -\mathfrak{x}_1^2 \mu_1^m a_{22} + \mathfrak{x}_2^2 \mu_2^n a_{12};$$

$$\Delta_2 = -\mathfrak{x}_2^2 \mu_2^n a_{11} + \mathfrak{x}_1^2 \mu_1^m a_{21}.$$

Після підстановки (3.10) в третє рівняння (3.9) отримуємо систему розв'язувальних рівнянь, які описують процес вільних лінійних коливань шарнірно закріплених по контуру прямокутних пластин, які податливі до трансверсальних деформацій зсуву та стиснення

$$\ddot{w}_{mn} + c^2 \left[\mu_1^2 + \frac{1}{g} \mu_2^2 - \frac{\mu_1^4}{\alpha_1^2} \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{\bar{\Delta}_1}{\Delta} + \frac{1}{g} \frac{\mu_2^2}{\mu_1^2} \frac{\bar{\Delta}_2}{\Delta} \right) \right] w_{mn} = 0. \quad (3.11)$$

З (3.11) отримуємо вираз для квадратів частот вільних поперечних коливань розглянутої пластини

$$\omega_{mn}^2 = \frac{E_1(1+\alpha_1)}{\rho a_1^2} \left(\frac{h}{a_1} \right)^2 \frac{m^4 \pi^4}{3(1-\nu_{12}\nu_{21})} \times \\ \times \left\{ \frac{\kappa_1^2}{(\mu_1^m)^2} \left[1 + \frac{1}{g} \frac{(\mu_2^n)^2}{(\mu_1^m)^2} \right] - \right. \\ \left. - \frac{1}{\Delta} \left[\Delta_1 + \frac{1}{g} \frac{(\mu_2^n)^2}{(\mu_1^m)^2} \Delta_2 \right] \right\}. \quad (3.12)$$

3.1.3. Випадок шарнірно закріпленої вздовж видовжених країв пластини-смуги

Введемо до розгляду безрозмірну величину $\bar{\omega}_{mn}$, зв'язану з ω_{mn} , співвідношенням

$$\bar{\omega}_{mn} = \omega_{mn} \sqrt{\frac{\rho}{E_1}} a_1. \quad (3.13)$$

Провівши у виразі для ω_{mn} з (3.2) граничний перехід $a_1/a_2 \rightarrow 0$, тобто розглядаючи шарнірно закріплену вздовж видовжених країв пластину-смугу, для безрозмірної частоти $\bar{\omega}_{mn}$ отримаємо

$$\bar{\omega}_{mn} = \left(\frac{h}{a_1} \right) m^2 \pi^2 \sqrt{\frac{1 + \alpha_1}{3\delta^2 + m^2 \pi^2 (h/a_1)^2 (E_1/G_{13})(1 + \alpha_1)}}, \quad (3.14)$$

що співпадає з результатом праці [99].

З (3.14) видно, що наявність коефіцієнта α_1 при $\alpha_1 > 0$ приводить до збільшення значення ω_{mn} у порівнянні з випадком $\alpha_1 = 0$:

$$\bar{\omega}_{mn} = \left(\frac{h}{a_1} \right) m^2 \pi^2 \frac{1}{\sqrt{3\delta^2 + m^2 \pi^2 (h/a_1)^2 (E_1/G_{13})}}. \quad (3.15)$$

Формула (3.15) дає вираз для спектра безрозмірних власних частот податливої лише до трансверсального зсуву пластини-смуги, що узгоджується з [119]. Подальший граничний перехід в (3.15) по параметру $E_1/G_{13} \rightarrow 0$ дає результат класичної теорії пластин

$$\bar{\omega}_{mn} = \left(\frac{h}{a_1} \right) \frac{m^2 \pi^2}{\sqrt{3\delta^2}}. \quad (3.16)$$

3.1.4. Аналіз числових результатів

Числові розрахунки за формулою (3.13) для пластини з параметром тонкостінності $h/a_1 = 0.1$ та фізико-механічними характеристиками $E_1 = E_2 = E$; $G_{13} = G_{23} = G'$; $\nu_{12} = \nu_{21} = \nu = 0.425$; $G_{12} = E/2(1+\nu)$ (рис. 3.1–3.3) наведені залежності основної безрозмірної частоти $\bar{\omega}_{00}$ від параметра податливості трансверсальному зсуву E/G' без урахування стиснення ($E/E_3 = 0$ – товста лінія) та з урахуванням ($E/E_3 = 1$ – тонка лінія) при $a_1/a_2 = \lambda = 1,0; 0,5; 0,1$ відповідно.

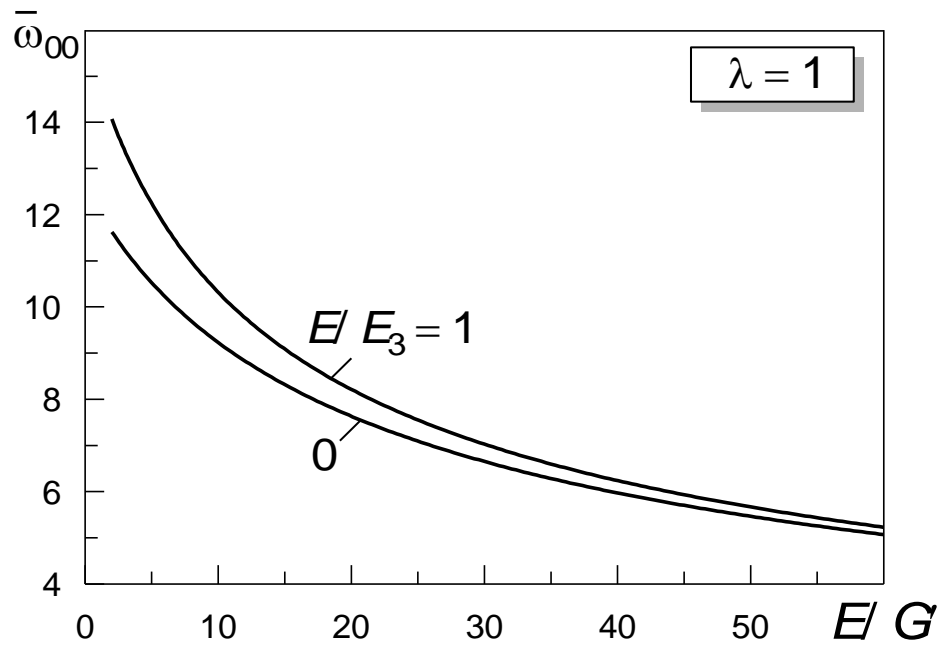


Рис. 3.2

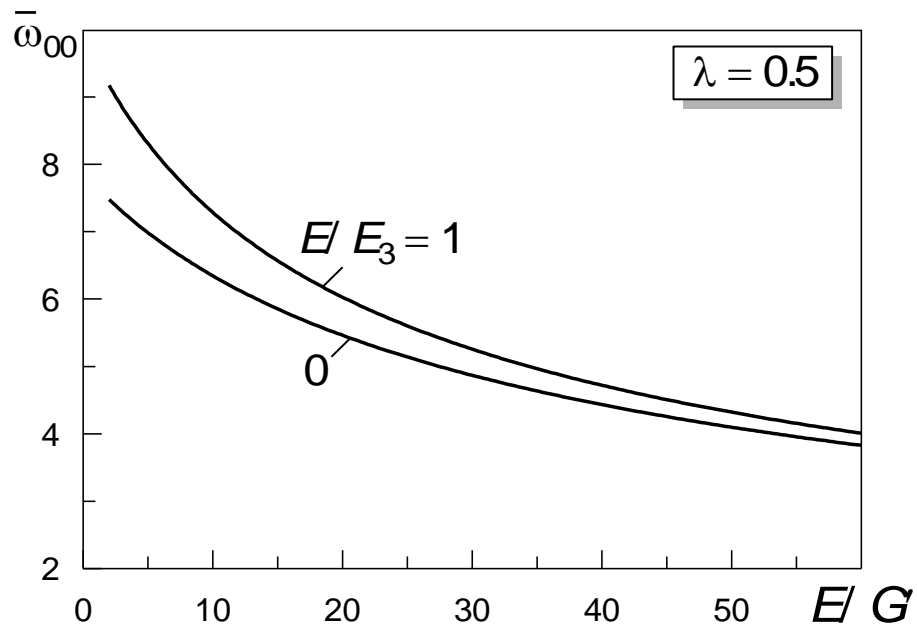


Рис. 3.3

Як видно з рисунків, збільшення параметра E/G' , котрий характеризує опірність до деформацій трансверсального зсуву, приводить до пониження значень власних частот пластини при всіх розглянутих співвідношеннях λ між довжинами взаємоперпендикулярних сторін.

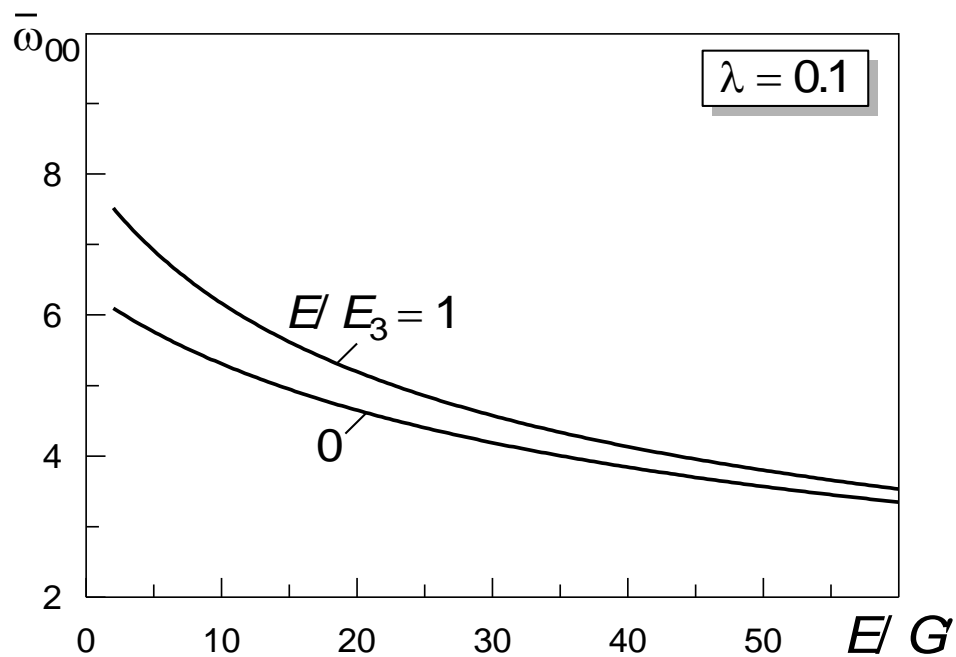


Рис. 3.4

Врахування ж поперечного стиснення навпаки, збільшує значення власних частот, що видно як з рисунків, так і таблиці 3.1. Для матеріалів, що мають пружні характеристики близькі до таких, які є в ізотропних матеріалів. Таке збільшення значення основної частоти сягає меж 15 % .

Таблиця 3.1

E_1/E_3 \ λ	1,0	0,5	0,1
0	11,224	7,301	5,980
1	13,372	8,885	7,299

Аналіз даних таблиці 3.1 показує, що для трансверсально-ізотропного випадку пружних характеристик матеріалу максимальне значення основної частоти має квадратна пластина.

3.2. Коливання видовжених циліндричних панелей

3.2.1. Постановка задачі

Розглянемо видовжену композитну циліндричну панель товщини $2h$ з радіусом серединної поверхні R і кутом розхилу $2\varphi_0$ (рис. 3.5).

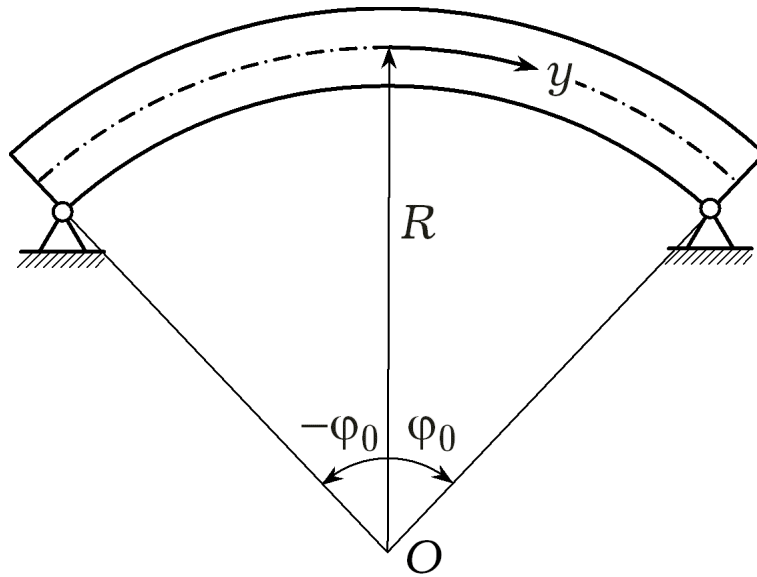


Рис. 3.5

За вільних коливань такого тонкостінного елемента, який є фрагментом циліндричної видовженої оболонки, функції, що описують його динамічний напружено-деформований стан залежить лише від кутової координати. Тому із системи рівнянь руху (2.68) залишаться тільки три наступні рівняння

$$\frac{\partial N}{\partial y} + \frac{1}{R} Q = 2\rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{1}{R} N = 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} - Q = \frac{2}{3} \rho h^3 \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2}, \quad (3.19)$$

Співвідношення пружності, які є наслідком (2.62), в даному випадку набудуть вигляду

$$N = \bar{B} \varepsilon_1^0,$$

$$M = \bar{D} \varepsilon_1^1,$$

$$Q = \Lambda \varepsilon_{13}^0, \quad (3.20)$$

З деформаційних співвідношень (2.69) для даного випадку маємо

$$\varepsilon_1^0 = \frac{\partial u}{\partial y} + w/R,$$

$$\varepsilon_1^1 = \frac{\partial \gamma}{\partial y},$$

$$\varepsilon_{13}^0 = \gamma + \frac{\partial w}{\partial y} - u/R. \quad (3.21)$$

У рівностях (3.17) – (3.21) прийняті позначення:

$y = R \varphi$, φ – кутова координата на серединній поверхні панелі;

N – розтягуюче (стискаюче) зусилля вздовж кутової координати;

M – згинний момент; Q – перерізує зусилля;

u – переміщення точок серединної поверхні вздовж тангенціальної координати y (рис. 3.5);

γ – кут повороту нормального до серединної поверхні елемента перед деформуванням;

w – переміщення точок серединної поверхні вздовж радіальної координати;

$\bar{B} = 2Eh(1 + \alpha)/(1 - \nu^2)$ – узагальнена жорсткість панелі на розтяг;

$\bar{D} = h^2\bar{B}/3$ – узагальнена згинна жорсткість панелі;

$\Lambda = 2k'hG'$ – зсувна жорсткість панелі;

$\alpha = (1 + \nu)(\nu')^2 / (1 - \nu - 2\nu\nu')$ (E/E');

E, ν – модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона в серединній та еквідистантних їй поверхнях;

E', ν' – ті ж величини в площинах, перпендикулярних до серединної поверхні;

G' – трансверсальний модуль зсуву;

ρ – густина матеріалу панелі; $k' = 14/15$.

Граничні умови на видовжених торцях панелі $y = \pm b_0 = \pm R\varphi_0$ у випадку їх шарнірного закріплення на нижній лицевій поверхні (рис. 3.5) мають вигляд

$$N(\pm b_0) = 0, \quad M(\pm b_0) = 0, \quad w(\pm b_0) = 0. \quad (3.22)$$

Рівняння (3.17) – (3.19) разом із співвідношеннями (3.20), (3.21) та граничними умовами (3.22) складають математичну модель, що описує процес малих вільних коливань розглянутої видовженої циліндричної панелі. Податливість матеріалу панелі до поперечного стиснення в даній моделі враховується наявністю у виразах для жорсткісних характеристик коефіцієнта α , що залежить від трансверсальних пружних сталей E' та ν' .

3.2.2. Побудова розв'язку задачі

Почергова підстановка (3.21) \rightarrow (3.20) \rightarrow (3.17) – (3.19) та нехтування інерцією повороту γ [99] приводить до системи рівнянь руху в узагальнених переміщеннях

$$\bar{B}(u'' + w'/R) + \frac{\Lambda}{R}(\gamma + w' - u/R) = 2\rho h\ddot{u}, \quad (3.23)$$

$$\Lambda(\gamma' + w'' - u'/R) - \frac{\bar{B}}{R}(u' + w/R) = 2\rho h\ddot{w}, \quad (3.24)$$

$$\bar{D}\gamma'' - \Lambda(\gamma + w' - u/R) = 0. \quad (3.25)$$

Тут і надалі штрих означає похідну по y , а крапка – по t .

З рівняння (3.25) отримуємо вираз для тангенціального переміщення u

$$u = R(\gamma + w' - \gamma'' / \kappa^2), \quad (3.26)$$

де $\kappa^2 = \Lambda / \bar{D}$.

Виключаючи з допомогою (3.26) із рівнянь (3.23), (3.24) функцію u , отримуємо наступні два рівняння

$$\begin{aligned} & \gamma'' + w''' - \gamma^{IV} / \kappa^2 + w^I / R^2 + \\ & + \gamma^{IV} + \frac{\bar{D}}{\bar{B}R^2} \gamma'' = \frac{1}{c_1^2} (\ddot{\gamma} + \ddot{w}^I - \ddot{\gamma}'' / \kappa^2) = 0, \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} & -\gamma'' + w''' + \left(\frac{\bar{D}}{\bar{B}} + \frac{\bar{D}}{\Lambda} \right) \gamma^{IV} - \\ & - w^I / R^2 = \frac{1}{c_1^2} \ddot{w}^I. \end{aligned} \quad (3.28)$$

У (3.27), (3.28) $c_1 = \sqrt{2h\rho/\bar{B}}$ – швидкість поширення хвиль вздовж кільцевої координати.

Почергове сумування та віднімання (3.27) і (3.28) дозволяє отримати систему розв'язувальних рівнянь задачі про лінійні вільні коливання розглянутої панелі

$$\begin{aligned} \gamma^{IV} + 1/R^2 \gamma^{II} &= 3(2\ddot{w} - \ddot{\gamma} - \ddot{\gamma}^{II} / \kappa^2) / (c_1^2 h^2), \\ \gamma^{IV} - 1/R^2 \gamma^{II} - 6(\gamma^{II} - \gamma^{IV} / \kappa^2 + w^{III} + 1/R^2 w^I) / h^2 &= \\ &= 3(\ddot{\gamma}^{II} / \kappa^2 - \ddot{\gamma}) / (c_1^2 h^2), \end{aligned} \quad (3.29)$$

Для задоволення двох останніх граничних умов з (3.22) розв'язок системи рівнянь (3.29) шукаємо у вигляді

$$\begin{aligned} w &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} w_n \cos \lambda_n y \right) e^{i\omega t}, \\ \gamma &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \sin \lambda_n y \right) e^{i\omega t}, \end{aligned} \quad (3.30)$$

де

$$\lambda_n = k_n / R, \quad k_n = \frac{2n+1}{2} \pi / \varphi_0, \quad \omega - \text{шукана частота коливань.}$$

Оскільки, з урахуванням виразу для N та рівності (3.26), $N = \bar{B}[R(\gamma' + w'' - \gamma''' / \kappa^2) + w / R]$, то перша рівність із (3.22) задовольняється

автоматично. Для інших типів граничних умов необхідно використовувати більш складні розклади для функцій w та γ по координаті y , як і у випадку задач про мале поперечне деформування.

Після підстановки (3.30) в (3.29) та прирівнювання до нуля визначника для кожної незалежної підсистеми для визначення величини $\mu_n = \omega_n / c_1$ маємо біквдратне рівняння

$$\mu_n^4 - \frac{2(1+k_n^2)}{R^2} \left[\frac{1}{2} + \frac{\varepsilon^2 k_n^2}{6} \frac{1}{1 + \varepsilon^2 k_n^2 / \bar{\kappa}^2} \right] \mu_n^2 + \frac{\varepsilon^2 k_n^2}{3} \frac{1}{R^4} \frac{(k_n^2 - 1)^2}{1 + \varepsilon^2 k_n^2 / \bar{\kappa}^2} = 0.$$

Тут $\bar{\kappa}^2 = h^2 \kappa^2$.

Звідси для спектру безрозмірних частот

$$\bar{\omega}_n = \omega_n h \sqrt{\rho / E}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

отримуємо вираз

$$\bar{\omega}_n = \varepsilon a_n / \sqrt{(1 - \nu^2)}, \quad (3.31)$$

де

$$a_n^2 = (1 + k_n^2) [1 + \alpha + \eta_n^2 + \sqrt{(1 + \alpha)^2 + \eta_n^4 + (1 + \alpha)\eta_n^2 \bar{k}_n}] / 2,$$

$$\eta_n^2 = (k_n^2 \varepsilon^2 / 3) / [1 / (1 + \alpha) + \beta_n^2 / \delta^2],$$

$$\beta_n^2 = k_n^2 [\varepsilon^2 (E / G') / k'],$$

$$\delta^2 = 3(1 - \nu^2),$$

$$\bar{k}_n = 2(6/k_n^2 - 1/k_n^4 - 1) / (1 + 1/k_n^2)^2.$$

3.2.3. Аналіз числових результатів

За формулою (3.31) проведено визначення спектру безрозмірних частот власних коливань видовженої циліндричної панелі з кутом розхилу $2\varphi_0 = \pi/2$. На рис. 3.6 – 3.11 наведено залежності безрозмірних частот $\bar{\omega}_n$ для $n = 0, 1, 2$. Нумерація рисунків відповідає числам 0, 1, 2. Для всіх цих випадків розрахунки проводились при $h/R = 0.1$ та $\nu = 0.375$.

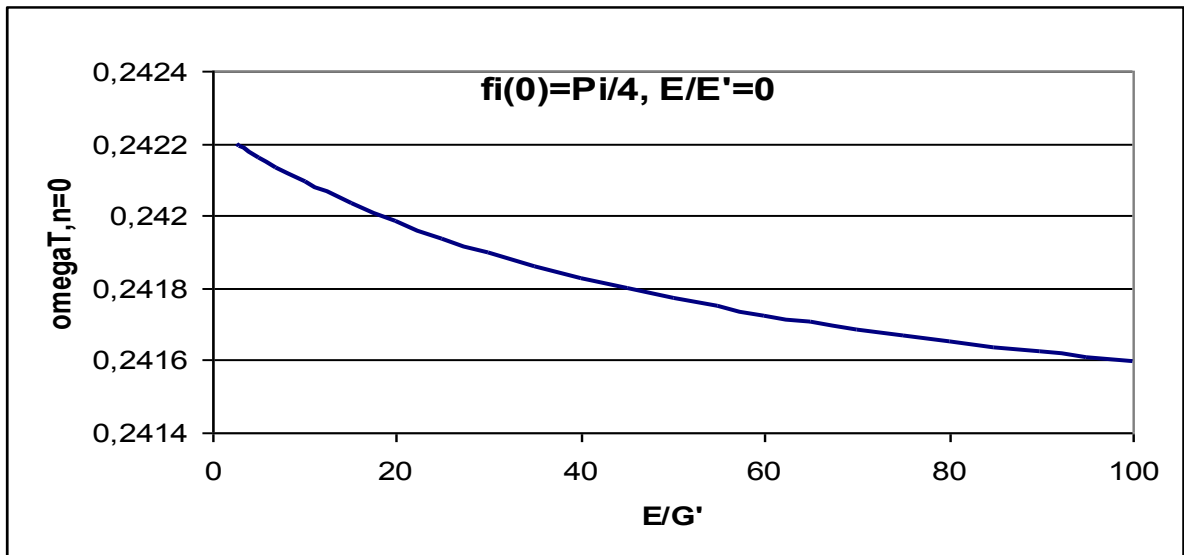


Рис. 3.6

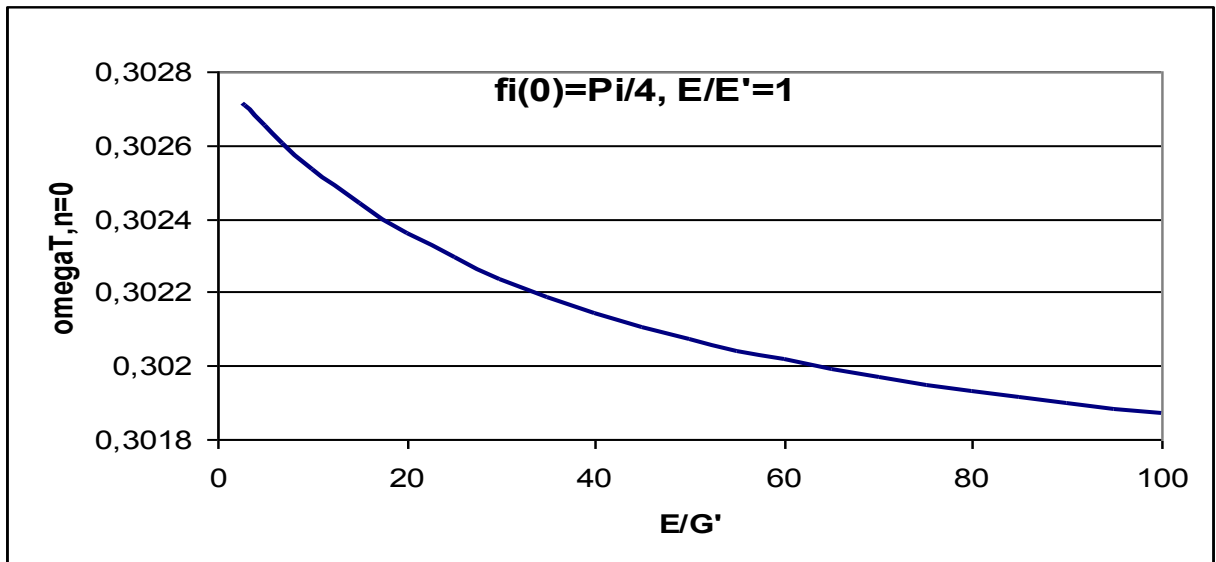


Рис. 3.7

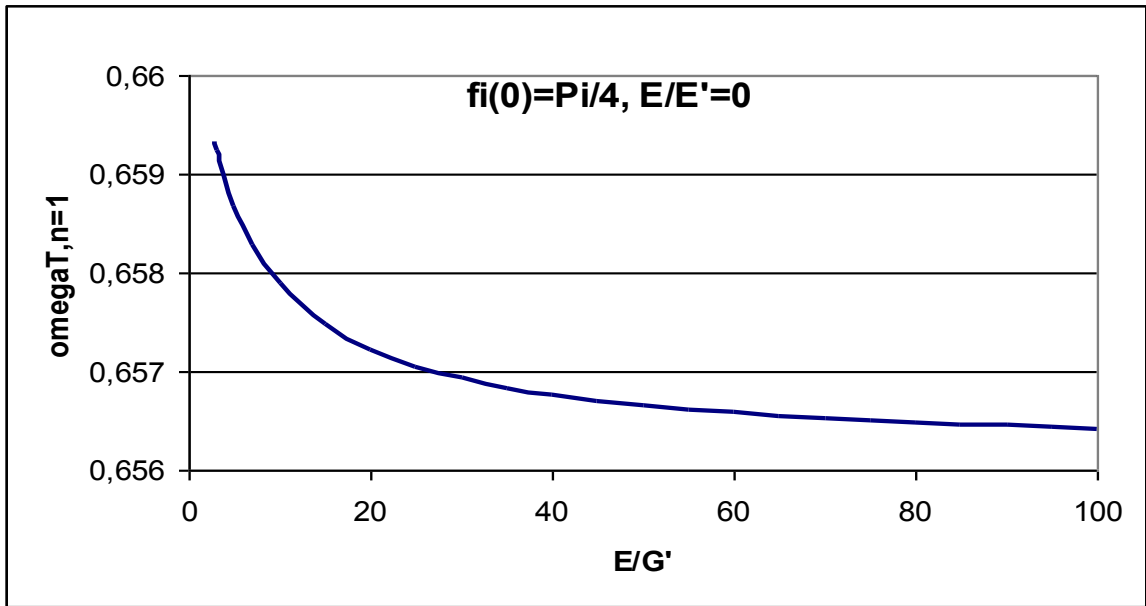


Рис. 3.8

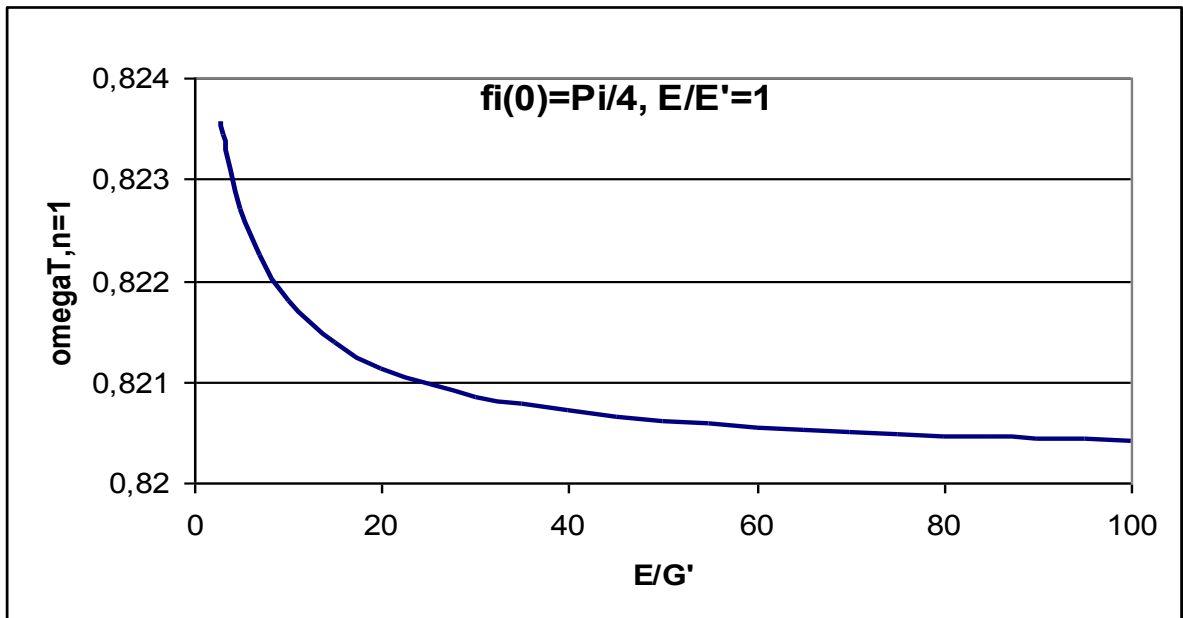


Рис. 3.9

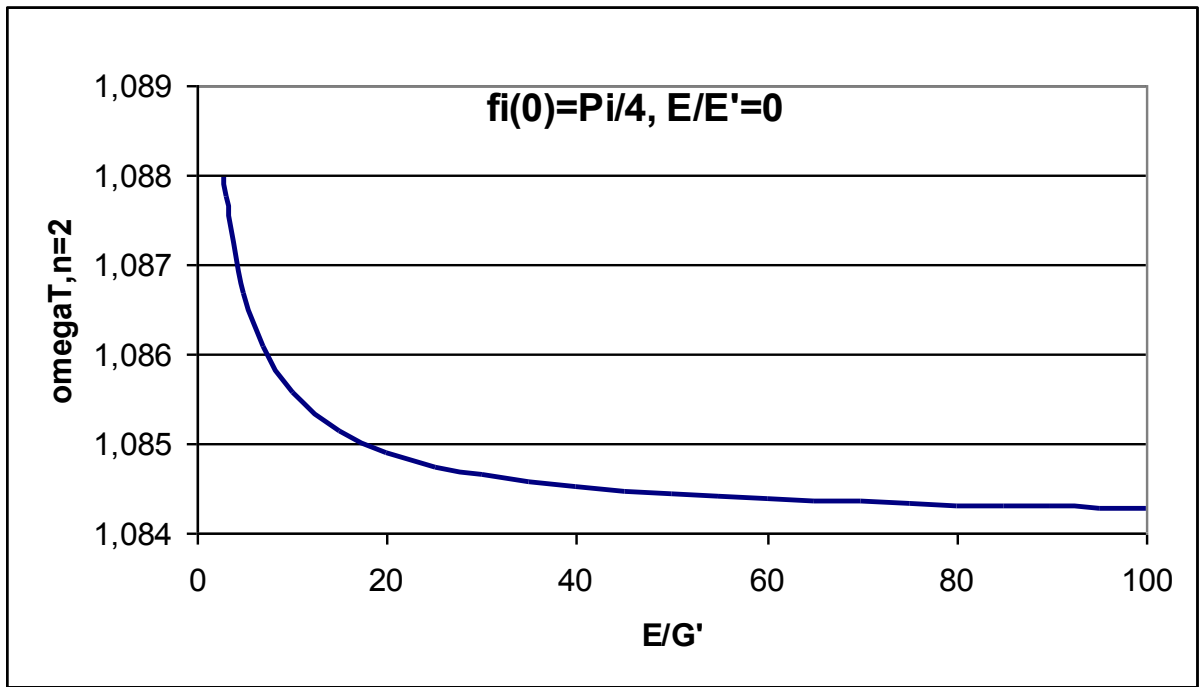


Рис. 3.10

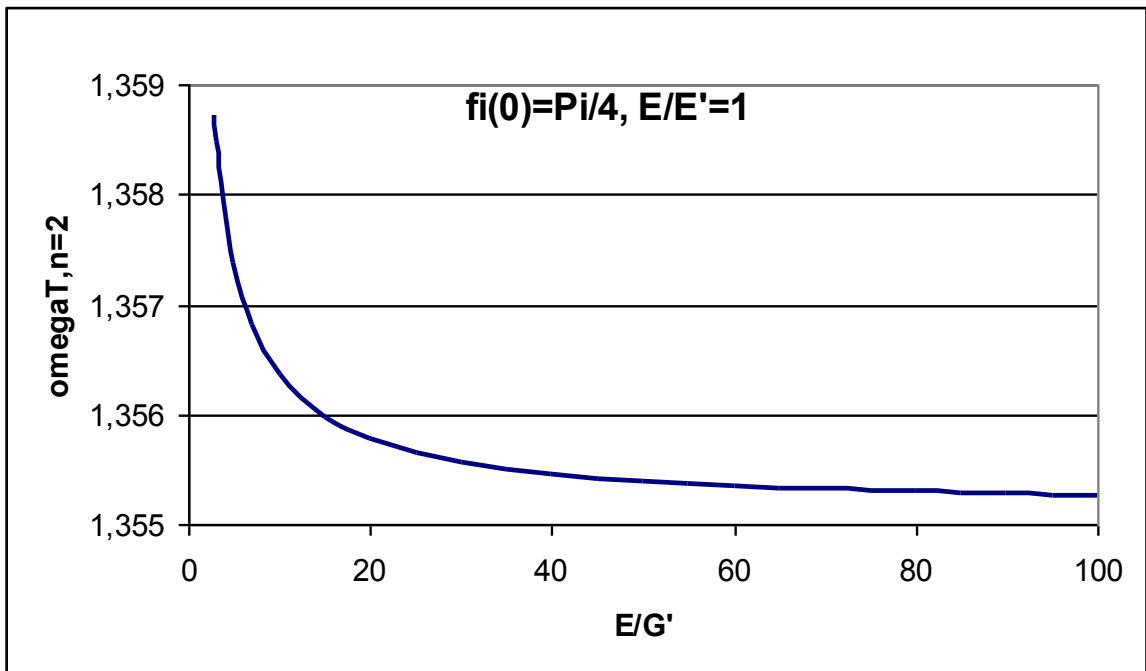


Рис. 3.11

Таблиця 3.2

E/E' \ $\bar{\omega}_n$	$\bar{\omega}_0$	$\bar{\omega}_1$	$\bar{\omega}_2$
0	0,242196	0,659325	1,087975
1	0,302707	0,823562	1,358710

У таблиці 3.2 наведені значення безрозмірних власних частот $\bar{\omega}_n$ для $n = 0, 1, 2$ при $h/R = 0,1$ та $\nu = 0,375$. Верхній рядок таблиці відповідає значенням за відсутності трансверсального стиснення ($E/E' = 0$), а нижній – при однакових модулях Юнга в радіальному та кільцевому напрямках ($E/E' = 1$). Відмічається суттєве збільшення значень власних частот, а відповідно і підвищення жорсткості циліндричної панелі, при $E/E' = 1$ в порівнянні з випадком, коли $E/E' = 0$. Зменшення зсувної жорсткості, тобто збільшення параметра E/G' , навпаки приводить до зменшення жорсткості панелі та відповідно до пониження значень власних частот коливань.

3.3. Висновки до розділу 3

На основі математичної моделі динамічного деформування податливих до поперечного зсуву та стиснення композитних пластин отримано аналітичний вираз для спектру частот вільних коливань шарнірно опертих прямокутних пластин. Проаналізовано вплив вказаних параметрів на основну частоту коливань. Аналіз результатів розрахунку основної частоти поперечних коливань прямокутних композитних пластин показує значний вплив на її величину параметрів податливості до трансверсальних зсуву та стиснення, що вказує на необхідність врахування цих параметрів при проектуванні таких пластин.

Розглянуто співвідношення уточненої теорії динамічного деформування циліндричних оболонок, яка враховує явно податливість матеріалу до трансверсального зсуву та неявно – до стиснення. На цій основі отримано систему розв'язувальних рівнянь, що описує малі вільні коливання видовжених циліндричних панелей. Знайдено аналітичний вираз для спектру власних частот і досліджено вплив параметрів зсуву та стиснення на їх значення.

РОЗДІЛ 4

ГЕОМЕТРИЧНО НЕЛІНІЙНІ КОЛИВАННЯ КОМПОЗИТНОЇ ПЛАСТИНИ–СМУГИ

Переважає більшість досліджень з нелінійної динаміки тонкостінних елементів конструкцій (оболонок і пластин), що були проведені до цього часу, базувались на квадратичній теорії Кармана, котра є узагальненням класичної теорії Кірхгофа – Лява на випадок геометричної нелінійності [23, 24, 34, 63, 64, 143]. В окремих роботах використовувалися співвідношення нелінійної технічної теорії, в основу якої покладена модель С. П. Тимошенка [61, 78, 91, 114, 129, 131, 136, 142, 145, 147, 149, 151]. Однак теорії, що базуються на гіпотезах згаданих авторів, не дозволяють у повній мірі враховувати особливості поведінки композитних матеріалів.

У цьому розділі на основі розглянутої вище математичної моделі нелінійного динамічного деформування пластин приведена система диференціальних рівнянь, що описує нелінійні поперечні коливання податливих трансверсальним деформаціям зсуву та стиснення композитних пластин. Ураховуються генеровані поперечним хвильовим процесом поздовжні та зсувні коливання. Отриманий зв'язок між амплітудами генерованих поздовжніх та зсувних коливань із амплітудою вільних нелінійних поперечних коливань. Побудовані скелетні криві залежності основної частоти нелінійних поперечних коливань смуги-пластини від амплітуди. Проведено аналіз впливу параметрів податливості трансверсальним зсувним деформаціям та поперечному стисненню на характер цієї залежності.

4.1. Постановка задачі

Розглядаємо пластину, один з розмірів якої значно перевищує інший розмір. Тоді динамічний геометрично нелінійний напружено-деформований стан такої пластини-смуги є залежним лише від однієї просторової координати $x = x_1$ в її серединній площині і описується співвідношеннями, які одержуємо із (2.58), (2.61) та (2.60) при $u_1^0 = u$, $u_1^1 = h\gamma$, $u_2^0 = u_2^1 = 0$, $u_3^0 = w$, $u_3^1 = 0$.

Рівняння руху пластини у цьому випадку матимуть вигляд

$$\frac{\partial}{\partial x} S_0^{11} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial x} S_0^{13} = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial x} S_0^{11} - \frac{3}{h} S_0^{31} = \rho h \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2}. \quad (4.1)$$

Залежності між компонентами апроксимацій тензорів напружень Кірхгофа та Піоли при $|u| \ll |w|$, $|\gamma| \ll |w|$ подаються формулами

$$S_0^{11} \approx \sigma_0^{11},$$

$$S_1^{11} \approx \sigma_1^{11},$$

$$S_0^{13} = \sigma_0^{11} w' + \sigma_0^{13},$$

$$S_0^{31} = \sigma_0^{13}. \quad (4.2)$$

Деформаційні співвідношення у цьому випадку набувають вигляду

$$e_1^0 = u' + \frac{1}{2}(w')^2,$$

$$e_1^1 = h\gamma',$$

$$e_{13}^0 = \frac{1}{2}(\gamma + w'). \quad (4.3)$$

Вводячи до розгляду загальноприйняті позначення для розтягуючого зусилля N , згинного моменту M та перерізуючої сили Q , запишемо співвідношення пружності у такому вигляді:

$$N = \bar{B}e_1^0 ,$$

$$M = \bar{D}e_1^1 ,$$

$$Q = \Lambda e_{13}^0 . \tag{4.4}$$

У цих співвідношеннях маємо такі характеристики жорсткості: \bar{B} – узагальненої на розтяг, \bar{D} – узагальненої на згин і Λ – на зсув, які визначаються через пів товщину h та фізико-механічні сталі матеріалу

$$\bar{B} = \frac{2Eh}{(1-\nu^2)}(1+\alpha) ,$$

$$\bar{D} = \frac{h^2}{3}\bar{B} ,$$

$$\Lambda = \frac{5h}{3}G' ,$$

$$\alpha = \frac{(1+\nu)(\nu')^2}{1-\nu-2\nu\nu'} \frac{E}{E'} . \tag{4.5}$$

Тут E, ν – модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона в серединній та еквідистантних їй площинах; E', ν' – ті ж величини в площинах, перпендикулярних до серединної площини; G' – трансверсальний модуль зсуву.

Рівняння руху (4.1) в термінах введених зусиль приймуть вигляд

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 2\rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} ;$$

$$\frac{\partial M}{\partial x} - Q = \frac{2}{3} \rho h^3 \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2} ;$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(N \frac{\partial w}{\partial x} + Q \right) = 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} . \quad (4.6)$$

Шляхом послідовної підстановки співвідношень (4.3) в (4.4) і результату в (4.6) отримаємо нелінійну систему диференціальних рівнянь у переміщеннях

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} ; \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2} - \alpha_1^2 \left(\gamma + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2} ; \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{3}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} +$$

$$+ \alpha_2^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\gamma + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (4.9)$$

де $c_1 = \sqrt{B/2\rho h}$ – швидкість поширення поздовжніх хвиль у пластині;

$$\alpha_1^2 = \Lambda/\bar{D}; \quad \alpha_2^2 = \alpha_1^2 h^2/3.$$

Розмістимо початок координати x посередині між перпендикулярними сторонами пластини, розташованими на віддалі $2a$ одна від одної (рис. 4.1).

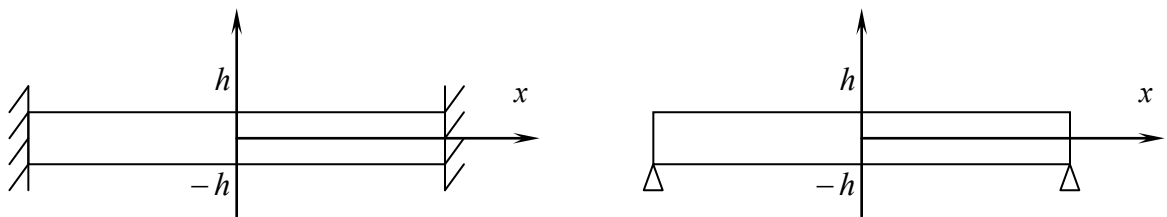


Рис. 4.1

Тоді у випадку шарнірного опирання цих сторін крайові умови матимуть вигляд

$$u(\pm a, t) = 0,$$

$$w(\pm a, t) = 0.$$

$$M(\pm a, t) = 0, \tag{4.10}$$

а для жорсткого защемлення

$$u(\pm a, t) = 0,$$

$$w(\pm a, t) = 0,$$

$$\gamma(\pm a, t) = 0. \tag{4.11}$$

4.2. Відшукання основної частоти нелінійних коливань

Для відшукання основної частоти нелінійних поперечних коливань за шарнірного закріплення країв $x = \pm a$ невідомі функції в (4.7) – (4.9) у праці [82] вибрані у вигляді

$$w = W(t) \cos \lambda x, \quad \gamma = Y(t) \sin \lambda x, \quad u = U(t) \sin 2\lambda x ,$$

$$\lambda = \pi / 2a , \tag{4.12}$$

Для жорсткого защемлення основні форми коливань апроксимуємо виразами

$$w = W(t) \cos^2 \lambda x, \quad \gamma = Y(t) \sin 2\lambda x, \quad u = U(t) \sin 4\lambda x . \tag{4.13}$$

Розглянемо випадок жорсткого защемлення країв пластини, оскільки для випадку шарнірного опирання задача розв'язана в [82]. Підставимо (4.13) в систему рівнянь (4.7) – (4.9) і нехтуючи в рівнянні (4.8) інерцією нормального до серединної площини елемента, отримаємо вираз для амплітуди зсувних коливань

$$Y(t) = \frac{\alpha_1^2 \lambda}{\alpha_1^2 + 4\lambda^2} W(t) . \tag{4.14}$$

Для визначення амплітуди поздовжніх коливань $U(t)$ із (4.7) маємо звичайне диференціальне рівняння

$$\ddot{U}(t) + 4 \omega_u^2 U(t) = \frac{1}{4} \lambda \omega_u^2 W^2(t) , \tag{4.15}$$

розв'язок якого записується у вигляді

$$U(t) = C_1 \sin \omega_u t + C_2 \cos \omega_u t + \frac{1}{8} \lambda \omega_u \int_0^t W^2(\tau) \sin \omega_u (t - \tau) d\tau, \quad (4.16)$$

де $\omega_u = 2\lambda c_1$ – основна частота лінійних поздовжніх вільних коливань пластини.

З умови, що в початковий момент часу $t = 0$ швидкість точок серединної площини вздовж осі x дорівнює нулю, а сама серединна площина приймає форму поверхні

$$w(0, x) = W(0) \cos^2 \lambda x, \quad (4.17)$$

визначаємо сталі інтегрування

$$C_1 = 0, \quad C_2 = \frac{1}{16} W^2(0). \quad (4.18)$$

Вводячи до розгляду безрозмірні величини

$$\xi(t) = W(t)/2h, \quad \eta(t) = U(t)/2a. \quad (4.19)$$

шляхом підстановки (4.14) і (4.16) з урахуванням (4.18) у (4.9), після застосування процедури Бубнова – Гальоркіна [90], отримуємо інтегродиференціальне рівняння на функцію безрозмірного прогину точок серединної площини за нелінійних поперечних коливаннях розглядуваної пластини-смуги

$$\ddot{\xi}(t) + \omega_0^2 \xi(t) + \frac{\omega_0^2}{2} K \xi(t) \left\{ \xi^2(t) - \left[\xi^2(0) \cos \omega_u t + \omega_u \int_0^t \xi^2(\tau) \sin \omega_u (t - \tau) d\tau \right] \right\} = 0, \quad (4.20)$$

де $\omega_0 = \frac{4\sqrt{3}}{3} c_2 \lambda^2 / \sqrt{\alpha_1^2 + 4\lambda^2}$ – основна частота лінійних вільних поперечних коливань пластини із жорстко защемленими краями;

$$K = K_c (1 + 4\beta),$$

$$\beta = \frac{\pi^2}{12} (h/a)^2 \frac{1}{k'} (E/G') \frac{1+\alpha}{1-\nu^2},$$

$$K_c = 3/4. \quad (4.21)$$

Задамо поперечний коливний процес у вигляді

$$\xi(t) = A \cos \omega t, \quad (4.22)$$

де A – безрозмірна амплітуда, ω – шукана частота коливань.

Інтегруючи, як і в праці [23], рівняння (4.20) за повним періодом коливань $T = 2\pi / \omega$ отримаємо залежність між частотою нелінійних поперечних коливань ω та їх амплітудою A

$$\omega^2 = \omega_0^2 \left[1 + \frac{3}{4} K A^2 \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{3} \frac{\omega}{\pi} R \right) \right], \quad (4.23)$$

де

$$R = \frac{\pi}{\omega} + \frac{1}{1-4p^2} \frac{\pi}{2\omega} - \frac{1}{\omega_u} \frac{4p^2(1-2p^2)}{(1-4p^2)^2} \sin \frac{2\pi}{p}. \quad (4.24)$$

$$p = \omega / \omega_u. \quad (4.25)$$

На відміну від степеневої залежності між ω та A , отриманої в [23] без урахування вимушених поздовжніх коливань, залежність (4.20) має трансцендентну нелінійність. Тому проведемо аналіз величини p при коливаннях, близьких до лінійних:

$$p^2 \approx p_0^2 = \frac{\omega_0^2}{\omega_u^2} = \frac{\pi^2}{16} \left(\frac{h}{a} \right)^2 K. \quad (4.26)$$

При $E/G' \leq 100$, $h/a \leq 1/10$

$$K < 3 \left\{ 1 + \frac{\pi^2}{10} \left[1 + \frac{(1+\nu)\nu\nu'}{1-\nu-2\nu\nu'} \right] \right\}. \quad (4.27)$$

Отже, $p^2 = O((h/a)^2)$. (4.28)

Нехтування в (4.24) величиною p^2 дозволяє записати формулу

$$\omega^2 = \omega_0^2 \left(1 + \frac{3}{4} KA^2 \right), \quad (4.29)$$

яка виражає залежність між основною частотою ω геометрично нелінійних поперечних коливань жорстко защемленої по видовжених краях пластини-смуги та її амплітудою A . Ця рівність співпадає за формою з приведеною в праці [23] для достатньо довгої пластинки з шарнірно закріпленими краями при застосуванні класичної теорії. У випадку нерухомих шарнірів для коефіцієнта K в [23] отримано значення $K_c = 3/4$.

Якщо у виразі (4.21) для K виконаємо граничний перехід по параметру податливості до трансверсального зсуву, то отримаємо

$$\lim_{E/G' \rightarrow 0} K(E/G') = K_c = 3/4, \quad (4.30)$$

результат, котрий відповідає класичній теорії.

Вираз для безрозмірної амплітуди генерованих поздовжніх коливань, визначеної з (4.14) з урахуванням (4.18) і (4.22) при $\xi(0) = A$, має вигляд

$$\eta(t) = \frac{\pi A^2}{16} \left(\frac{h}{a}\right)^2 \left[1 + \cos \omega_u t + \frac{1}{1 - 4(\omega/\omega_u)} (\cos 2\omega t - \cos \omega_u t) \right]. \quad (4.31)$$

Цей коливний процес складається з вимушених коливань з частотою 2ω та амплітудою $\frac{\pi A^2 h}{8} \left(\frac{h}{a}\right)^2$, на які накладаються коливання з більш високою власною частотою лінійних коливань ω_u .

Зсувні коливання відбуваються синхронно з поперечними з амплітудою $\frac{3\pi h}{K a} A$.

Відношення μ , тобто величини ω до власної частоти ω_0 лінійних поперечних коливань пластини має вигляд

$$\mu = \frac{\omega}{\omega_0} = \sqrt{1 + 3/4 K A^2}. \quad (4.32)$$

Ця рівність є амплітудно-частотним рівнянням, яке зв'язує основну частоту коливань пластини та їх задану амплітуду. Очевидно, що при

$$A \ll 1 \quad (4.33)$$

отримуємо випадок лінійних коливань.

В праці [82] отримано аналогічну до (4.33) амплітудно-частотну залежність для випадку шарнірно закріплених видовжених країв пластини-смуги, коли

$$K_1 = K_c(1 + \beta), \quad (4.34)$$

а $\omega_0 = \omega_0^1 = c_2 \lambda^2 / \sqrt{\alpha_1^2 + \lambda^2}$ – основна частота лінійних власних поперечних коливань пластини із шарнірно закріпленими краями.

Граничний перехід в (4.34) за параметром податливості до трансверсальних зсувних деформацій E/G'

$$\lim_{E/G' \rightarrow 0} K_1(E/G') = K_c = 3 \quad (4.35)$$

дає класичний результат з праці [23].

4.3. Аналіз числових результатів

Проведемо дослідження впливу параметрів податливості до трансверсальних зсувних деформацій E/G' та поперечного стиснення E/E' на характер поведінки коефіцієнта K в порівнянні із класичним його значенням $K_c = 3/4$.

Розглянемо величину

$$\varepsilon = \frac{K - K_c}{K_c} \cdot 100\% = \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{h}{a}\right)^2 \frac{1}{k'} \left(\frac{E}{G'}\right) \frac{1 + \alpha}{1 - \nu^2} \cdot 100\%, \quad (4.36)$$

яка характеризує відносне відхилення K від класичного значення. На рис. 4.2 зображено залежність величини ε від E/G' при значеннях $h/a = 1/10, 1/20, 1/50$; $\nu = 0,475$ та певних значеннях E/E' .

Як видно, податливість до зсувних деформацій суттєво впливає на величину коефіцієнта K при середніх значеннях параметра тонкостінності h/a .

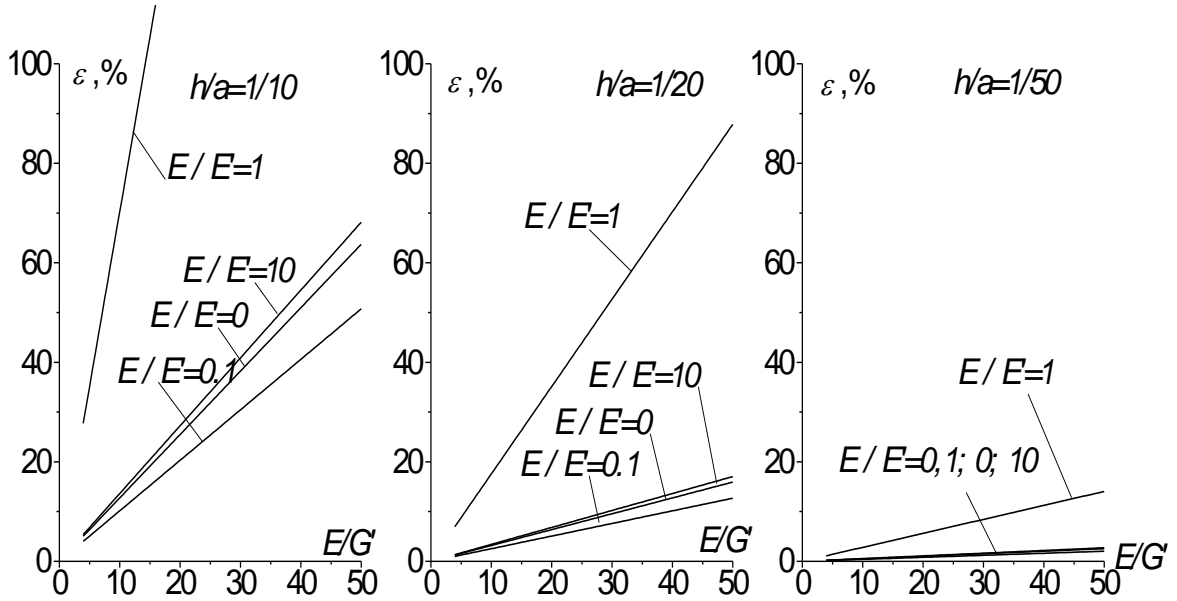


Рис. 4.2 Залежність величини ε від E/G' при різних значеннях параметра тонкостінності h/a та $\nu = 0,475$.

Однак, залежність від E/E' не є монотонною, оскільки цей параметр не може змінюватись довільно внаслідок необхідності виконання умови [76]

$$E\nu' = E'\nu. \quad (4.37)$$

Вводимо в розгляд безрозмірні частоти

$$\mu_1 = \frac{\omega}{\omega_0} = \sqrt{1 + \frac{3}{4} K A^2},$$

$$\mu_2 = \frac{\omega}{\omega_0^1} = \sqrt{1 + \frac{3}{4} K_1 A^2} \quad (4.38)$$

та розглянемо величину

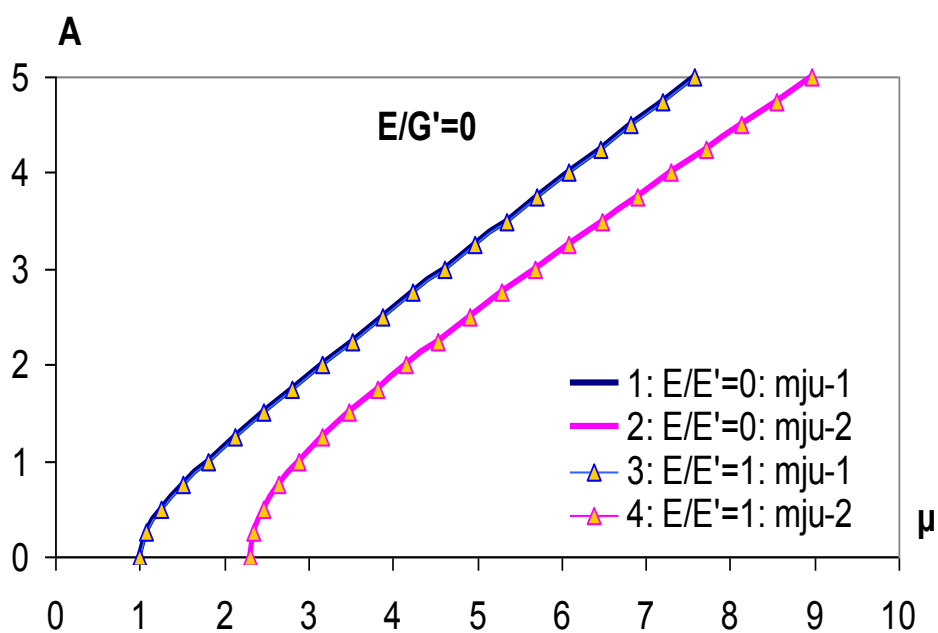
$$\eta = \frac{\omega_0^1}{\omega_0} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \sqrt{\frac{1 + 4\bar{\alpha}(h/a)^2}{1 + \bar{\alpha}(h/a)^2}},$$

$$\bar{\alpha} = \frac{\pi^2}{4} \frac{E}{G'} \frac{1}{k'} \frac{1 + \alpha}{1 - \nu^2}. \quad (4.39)$$

Очевидно, що при $h/a \ll 1$ та обмеженому значенні податливості на трансверсальний зсув E/G'

$$\eta \approx 4\sqrt{3}/3 \approx 2,31. \quad (4.40)$$

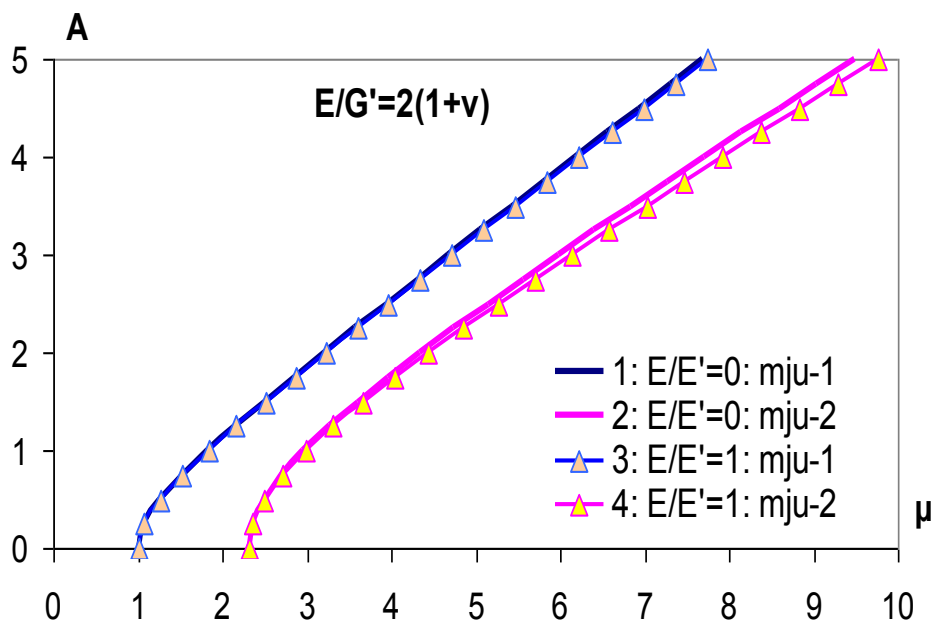
У координатах μ , A будемо скелетні криві [23], які ілюструють залежності між безрозмірними частотами μ_1 і μ_2 та безрозмірною амплітудою A .



a)

Рис. 4.3

Коефіцієнт η назвемо коефіцієнтом впливу на амплітудно-частотну характеристику жорстко зацемлених країв порівняно із шарнірно закріпленими. На рис. 4.3, 4.4 наведено скелетні криві для $h/a = 0,1$, $\nu = \nu' = 0,375$ при різних значеннях E/G' : $E/G' = 0$ – відсутні деформації зсуву та стиснення, $E/G' = 2(\nu + 1)$ – ізотропний матеріал, $E/G' = 10$ та 60 .



б)

Рис. 4.3

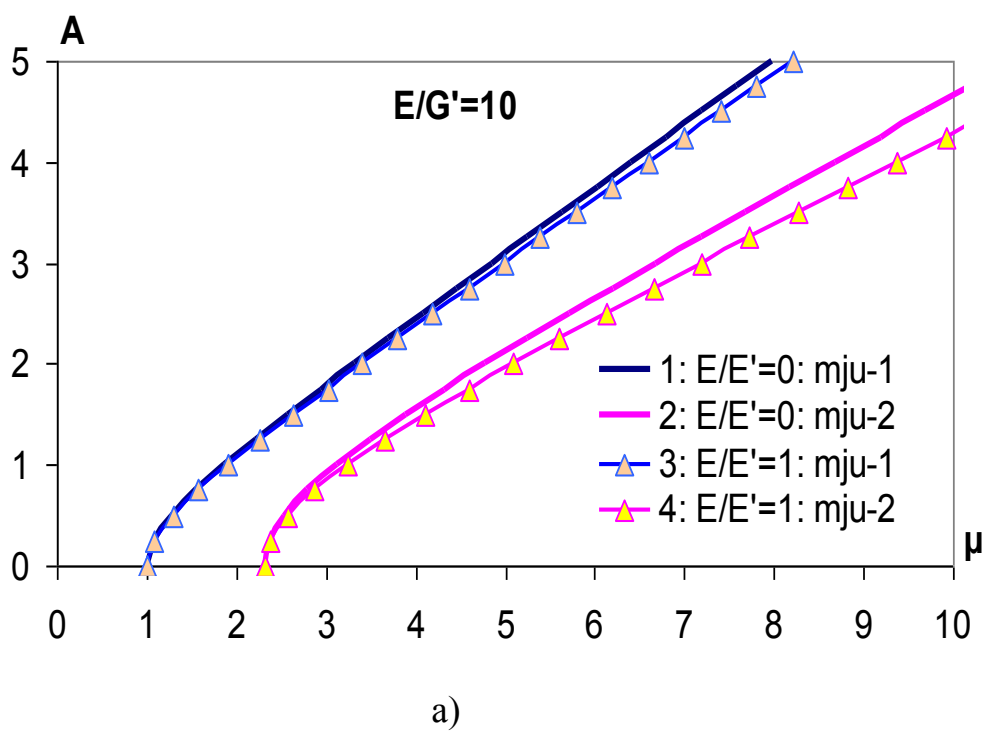


Рис. 4.4

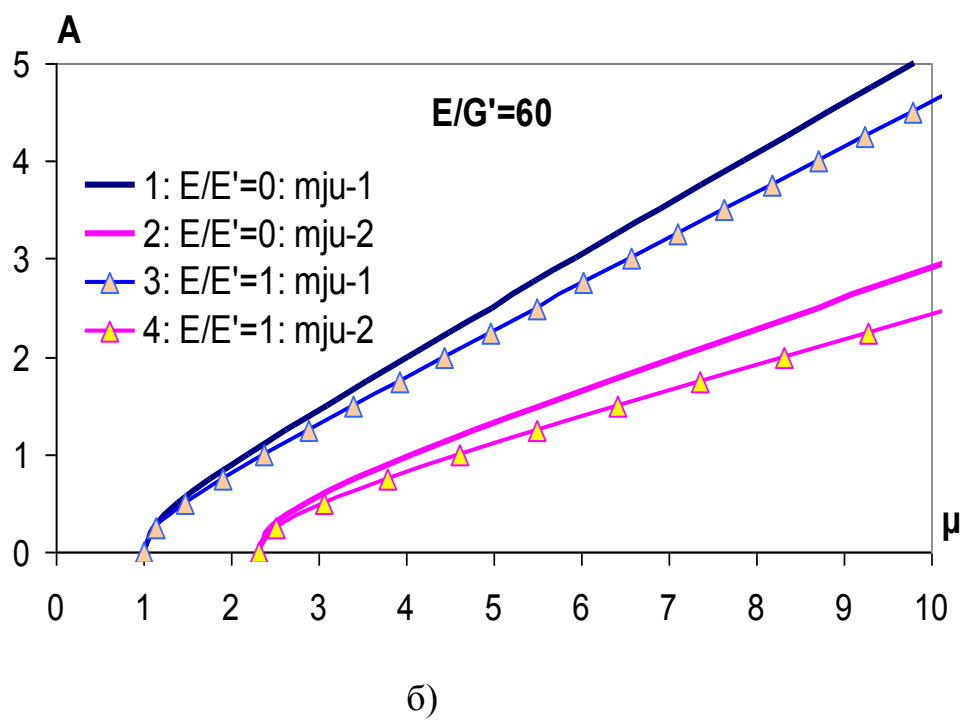


Рис. 4.4

При значенні $h/a = 0,1$, $\nu = \nu' = 0,375$ по скелетних кривих, зображених на вказаних рисунках (товста лінія відповідає шарнірному закріпленню, а тонка лінія – жорсткому защемленню країв) спостерігається значний вплив типу закріплення країв і параметра податливості E/G' та врахування податливості до стиснення E/E' на кількісні значення μ_1 і μ_2 при $1 \leq A \leq 5$ у порівнянні із класичними результатами при $E/G' = 0$.

4.4. Висновки до розділу 4

Таким чином, у **четвертому розділі** за допомогою розробленої методики отримані амплітудно-частотні залежності за нелінійних поперечних коливань композитних смуг-пластин. Це дало змогу оцінити вплив параметрів податливості до трансверсальних деформацій зсуву та стиснення на характер скелетних кривих, які ілюструють залежність частоти від заданої амплітуди нелінійних коливань.

Урахування поздовжніх і зсувних хвильових процесів при вільних нелінійних поперечних коливаннях композитних пластин значно ускладнює зв'язок між частотою цих коливань та їх амплітудою. Однак при певних границях зміни пружних характеристик матеріалу пластини та її параметра тонкостінності можна отримати залежність, яка є аналогічна до класичної. Для матеріалів зі значними зсувними деформаціями та поперечним стисненням характер скелетних кривих значно відрізняється від аналогічних для ізотропних матеріалів. Урахування податливості зсувним деформаціям і поперечному стисненню суттєво впливає на кількісні результати та характер скелетних кривих.

Основні результати розділу, що визначають новизну роботи, викладені у публікаціях [85, 88, 100, 101, 148].

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ ТА ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі вирішено наукове завдання – на основі варіанту уточненої теорії оболонок зроблено постановку задач про лінійні та геометрично нелінійні вільні коливання податливих до трансверсальних зсуву та стиснення ортотропних пластин та видовжених циліндричних панелей і отримано аналітичні вирази для спектрів частот їх вільних лінійних коливань. Проведено аналіз впливу параметра трансверсального зсуву та врахування податливості поперечному стисненню на значення власних частот. Отримано аналогічні до класичних залежності між амплітудою та основною частотою вільних геометрично нелінійних коливань композитної пластини-смуги та досліджено вплив на них умов закріплення видовжених країв.

При цьому отримані наступні результати:

- На основі співвідношень варіанту уточненої теорії оболонок виведено систему диференціальних рівнянь в частинних похідних відносно узагальнених переміщень, що описує вільні лінійні поперечні коливання прямокутних ортотропних пластин. Причому, податливість до трансверсального зсуву враховується явно, а до поперечного стиснення – неявно шляхом поправок до жорсткісних характеристик пластини, що містять трансверсальні пружні сталі матеріалу.
- Розроблено методику аналітичного визначення спектру власних частот шарнірно закріпленої по контуру прямокутної ортотропної пластини. Показано, що зниження трансверсальної зсувної жорсткості приводить до зменшення, а врахування податливості до поперечного стиснення – до збільшення значень власних частот.
- На основі співвідношень уточненої теорії динамічного деформування циліндричних оболонок, яка враховує податливість матеріалу

до трансверсального зсуву та неявно – до стиснення, отримано нову розв’язувальну систему диференціальних рівнянь, що описує вільні лінійні коливання видовжених композитних циліндричних панелей. У випадку шарнірного закріплення видовжених країв панелі на нижній лицевій поверхні знайдено в замкненому вигляді вираз для спектру її власних частот. Це дозволило встановити, що врахування податливості до поперечного стиснення може привести до близько 25% – го збільшення значень власних частот.

- Виведено систему нелінійних за просторовою змінною диференціальних рівнянь відносно узагальнених переміщень, що описує процес геометрично нелінійних поперечних коливань композитних пластин-смуг. Задача відшукування функції прогину точок серединної лінії зведена до нелінійного інтегро-диференціального рівняння, з якого отримано залежність між основною частотою та амплітудою поперечних коливань. Встановлено, що врахування податливості до трансверсальних зсуву та стиснення суттєво впливає на характер поведінки скелетних кривих у порівнянні з результатами за класичною нелінійною теорією при амплітудах, більших за товщину.

- Отримано вирази для поздовжнього та зсувного коливних процесів у податливій до трансверсальних зсуву та стиснення пластині-смузі, котрі генеруються її поперечними геометрично нелінійними коливаннями. Це дало змогу встановити складний характер поздовжніх і синхронний з поперечними зсувних коливань та визначити їх амплітуди і частоти.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Айнола Л. О. О расчетных моделях упругих пластинок для динамических задач / Л. О. Айнола // ENSV Teaduste Akad. Toimetised. Fuus.-matem. JA tehn. Seer. = Изв. АН ЭстССР. Сер. физ.-мат. и техн. наук. – 1963. – **12**, № 1. – С. 31–37.
2. Авраменко Л. Е. Динамическая задача теплопроводности для оболочек при действии локальных источников тепла / Л. Е. Авраменко, В. П. Шевченко // Теорет. и прикл. механика. – 2003. – Вып. 38. – С. 153–157.
3. Алумяэ Н. А. О представлении основных соотношений нелинейной теории оболочек / Н. А. Алумяэ // Прикл. математика и механика. – 1956. – **20**, № 1. – С. 136–139.
4. Альтенбах И. Моделирование и расчет многослойных оболочек на основе теории типа Тимошенко с 6 степенями свободы / И. Альтенбах, Х. Альтенбах, Э. Наст // Механика композит. материалов. – 1993. – № 4. – С. 500–510.
5. Альтенбах Х. Теория оболочек, учитывающая деформации поперечного сдвига и обжатия / Х. Альтенбах, Г. И. Львов, С. В. Лысенко // Механика композит. материалов. – 1997. – **33**, № 6. – С. 768–780.
6. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек / С. А. Амбарцумян. – М.: Наука, 1974. – 448 с.
7. Амбарцумян С. А. Об устойчивости и колебаниях анизотропных пластинок / С. А. Амбарцумян, А. А. Хачатрян // Изв. АН СССР. Отделение технических наук. Механика и машиностроение. – 1960. – № 1. – С. 113–122.

8. Барановский Г. К. Свободные колебания жесткозакрепленной прямоугольной пластины / Г. К. Барановский, И. Г. Кадомцев // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2000. – № 3. – С. 170–178.
9. Болотин В. В. Колебания пластинок / В. В. Болотин, В. Н. Москаленко. – М.: Машиностроение, 1968. – (Прочность, устойчивость, колебания: Справочник в 3 т.). – Т. 3. – С. 370–417.
10. Бочкарев С. А. Решение задачи о собственных колебаниях многослойных оболочек Тимошенко / С. А. Бочкарев, Е. П. Килман, В. П. Матвеев // Вестн. ПГТУ. Вычисл. математика и механика. – 2000. – Спец. вып. – С. 3–12.
11. Будаков В. Д. Решение задачи о свободных колебаниях прямоугольных в плане ортотропных пологих оболочек переменной толщины / В. Д. Будаков, А. Я. Григоренко, С. В. Пузырев // Прикл. механика. – 2007. – **43**, № 4. – С. 89–98.
12. Бурак Я. И. Влияние периодических по времени электромагнитных полей на вынужденные колебания электропроводной пластины / Я. И. Бурак, А. Р. Гачкевич // Динамика и прочность машин. – Харьков, 1975. – **21**. – С. 102–107.
13. Бурак Я. Й. Енергетичний підхід до побудови рівнянь пружних оболонок в узагальнених змінних / Я. Й. Бурак, Ю. Д. Зозуляк // Доп. НАН України. Сер. А. – 1995. – № 6. – С. 41–43.
14. Бурак Я. Й. Про побудову аналогу функціоналу Лагранжа крайових задач нелінійної теорії пружних пластин / Я. Й. Бурак, Г. І. Мороз // Доп. НАН України. Сер. А. – 1999. – № 2. – С. 7–11.
15. Василенко А. Т. К учету поперечного обжатия в задачах статики слоистых оболочек / А. Т. Василенко // Прикл. механика. – 1986. – **22**, № 8. – С. 72–78.

16. Васильев В. В. Механика конструкций из композиционных материалов / В. В. Васильев. – М.: Машиностроение, 1988. – 272 с.
17. Векуа И. Н. Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек / И. Н Векуа. – М.: Наука, 1982. – 288 с.
18. Вериженко В. Е. К теории нелинейно упругих слоистых оболочек с учетом деформаций поперечного сдвига / В. Е. Вериженко // Прикл. механика. – 1984. – **20**, № 9. – С. 124–127.
19. Вериженко В. Е. Уточненная динамическая теория многослойных оболочек и пластин. Сообщение 1. Исходные гипотезы и соотношения / В. Е. Вериженко, В. Г. Пискунов, В. К. Присяжнюк, П. Я. Табаков // Проблемы прочности. – 1996. – № 5. – С. 91–99.
20. Власов В. З. Общая теория оболочек и ее приложения в технике / В. З. Власов. – Л.: Гостехтеоретиздат, 1949. – 784 с.
21. Власов В. З. Избранные труды / В. З. Власов. – М.: Изд-во АН СССР, 1962. – Т. 1. – 528 с.
22. Вольмир А. С. Гибкие пластинки и оболочки / А. С. Вольмир. – М.: Гостехиздат, 1956. – 420 с.
23. Вольмир А. С. Нелинейная динамика пластин и оболочек / А. С. Вольмир. – М.: Наука, 1972. – 432 с.
24. Вольмир А. С. Нелинейные собственные колебания прямоугольных пластин и цилиндрических панелей / А. С. Вольмир, Л. А. Логвинская, В. В. Рогалевич // Докл. АН СССР. – 1972. – **205**, № 2. – С. 300–302.
25. Ворович И. И. Некоторые вопросы механики сплошной среды и математические проблемы теории тонкостенных конструкций / И. И. Ворович, Л. П. Лебедев // Прикл. механика. – 2002. – **38**, № 4. – С. 3–19.
26. Галимов К. З. Основы нелинейной теории тонких оболочек /

- К. З. Галимов. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1975. – 326 с.
27. Галимов К. З. Теория оболочек с учетом поперечного сдвига / К. З. Галимов. – Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1977. – 212 с.
28. Галимов К. З. К построению нелинейной теории тонких оболочек сложной формы с учетом поперечных сдвигов и обжатия / К. З. Галимов // Исследования по теории пластин и оболочек: В 2-х ч. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1984. – Вып. 17. – Ч. 1. – С. 70–109.
29. Галимов Ш. К. О применении полиномов Лежандра к построению уточненной теории трехслойных пластин и оболочек / Ш. К. Галимов // Исследования по теории пластин и оболочек. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1973. – Вып. 10. – С. 371–385.
30. Галимов Ш. К. Уточненные теории пластин и оболочек / Ш. К. Галимов. – Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1990. – 134 с.
31. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек / А. Л. Гольденвейзер. – М.: Наука, 1976. – 512 с.
32. Гольденвейзер А. Л. Свободные колебания тонких упругих оболочек / А. Л. Гольденвейзер, В. Б. Лидский, П. Е. Товстик – М.: Наука, 1979. – 384 с.
33. Гонткевич В. С. Собственные колебания пластин и оболочек / В. С. Гонткевич. – Киев: Наук. думка, 1964. – 287 с.
34. Григолюк Э. И. О колебаниях панели, испытывающей конечные прогибы / Э. И. Григолюк // Прикл. математика и механика. – 1955. – **19**, вып. 3. – С. 376–382.
35. Григолюк Э. И. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек / Э. И. Григолюк, И. Т. Селезов. – М.: ВИНТИ, 1973. – 272 с. – (Итоги науки и техники. Сер. Механика твердых деформируемых тел. – Т. 5).

36. Григоренко О. Я. Розв'язання осесиметричної задачі про вільні коливання п'єзокерамічних порожнистих циліндрів скінченної довжини методом сплайн-колокацій / О. Я. Григоренко, Т. Л. Єфімова, І. А. Лоза // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – **51**, № 3. – С. 112–120.
37. Григоренко А. Я. О напряженно-деформированном состоянии прямоугольных в плане пологих оболочек переменной толщины в уточненной постановке / А. Я. Григоренко, Н. П. Яремченко // Прикл. механика. – 2007. – **43**, № 10. – С. 80–91.
38. Григоренко Я. М. Изотропные и анизотропные оболочки вращения переменной жесткости / Я. М. Григоренко. – Киев: Наук. думка, 1973. – 228 с.
39. Григоренко Я. М. Некоторые подходы к численному решению линейных и нелинейных задач теории оболочек в классической и уточненной постановках / Я. М. Григоренко // Прикл. механика. – 1996. – **32**, № 6. – С. 3–31.
40. Григоренко Я. М. Численное решение краевых задач о больших прогибах длинной цилиндрической панели / Я. М. Григоренко, З. Н. Бахрамова, Г. К. Судацова // Прикл. механика. – 1978. – **14**, № 10. – С. 47–51.
41. Григоренко Я. М. Свободные колебания элементов оболочечных конструкций / Я. М. Григоренко, Е. И. Беспалова, А. В. Китайгородский, А. И. Шинкарь. – Киев: Наук. думка, 1986. – 171 с.
42. Григоренко Я. М. Теория оболочек переменной жесткости / Я. М. Григоренко, А. Т. Василенко. – К.: Наук. думка, 1981. – Методы расчета оболочек: В 5 т. / Под общ. ред. акад. АН Украины А. Н. Гузя. – Т. 4. – 544 с.
43. Григоренко Я. М. Задачи статики анизотропных неоднородных оболочек / Я. М. Григоренко, А. Т. Василенко. – М.: Наука, 1992. – 336 с.

44. Григоренко Я. М. Розв'язування задач і дослідження напруженого стану циліндричних оболонок змінної товщини з некруговим поперечним перерізом на основі сплайн-апроксимації / Я. М. Григоренко, О. Я. Григоренко, Л. І. Захарійченко // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2006. – **49**, № 1. – С. 7–19.
45. Григоренко Я. М. Статика элементов конструкций / Я. М. Григоренко, А. Т. Василенко, И. Г. Емельянов и др. – К.: «А.С.К.», 1999. – Механика композитов: В 12 т. / Под общ. ред. акад. НАНУ А. Н. Гузя. – К.: Наук. думка, 1993–2003. – Т. 8. – 379 с.
46. Григорьянц Н. М. Свободные колебания тонких плит с учетом инерции вращения / Н. М. Григорьянц // Строит. механика и расчет сооружений. – 1961. – № 3. – С. 36–37.
47. Гринченко В. Т. Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров / В. Т. Гринченко. – Киев: Наук. думка, 1978. – 264 с.
48. Гринченко В. Т. Динамическая задача теории упругости для прямоугольной призмы / В. Т. Гринченко, А. Ф. Улитко // Прикл. механика. – 1971. – **7**, № 9. – С. 50–57.
49. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. – Киев: Наукова думка, 1981. – 284 с.
50. Гузь А. Н. Трехмерная теория устойчивости стержней, пластин и оболочек / А. Н. Гузь, И. Ю. Бабич. – Киев: Вища шк., 1980. – 168 с.
51. Гузь А. Н. Динамика и устойчивость материалов / А. Н. Гузь, Н. А. Шульга, И. Ю. Бабич, А. С. Космодамианский, Ю. Н. Лапуста, А. Н. Подлипенец, Я. Я. Рущицкий, В. И. Сторожев, В. Н. Чехов, В. А. Шпак. – К.: Наук. думка «А.С.К.», 1993. – Механика композитов: В 12 т. / Под общ. ред. акад. НАНУ А. Н. Гузя. – Т. 2. – 429 с.
52. Гузь А. Н. Динамические задачи теории упругости с ограничениями в виде неравенств / А. Н. Гузь, В. В. Зозуля / Доп. АН УРСР. – 1991. –

- № 5. – С. 47–50.
53. Гузь А. Н. Решение двумерных краевых задач теории оболочек из композитных материалов / А. Н. Гузь, К. И. Шнеренко // Мех. композит. матер. – 2000. – **36**, № 4. – С. 465–472.
 54. Гуртовий А. Г. О сравнительном анализе уточненных моделей слоистых ортотропных пластин / А. Г. Гуртовий, В. Г. Пискунов // Прикл. механика. – 1998. – **34**, № 1. – С. 79–84.
 55. Дикинсон С. М. Изгибные колебания прямоугольных ортотропных пластинок / С. М. Дикинсон // Тр. Американского об-ва инженеров-механиков. Сер. прикл. механика. – 1969. – № 1. – С. 109–119.
 56. Дубинкин М. В. Колебания плит с учетом инерции вращения и сдвига / М. В. Дубинкин // Изв. АН СССР. Отд-ние техн. наук. – 1958. – № 12. – С. 131–135.
 57. Еременко С. Ю. Собственные колебания и динамика композитных материалов и конструкций / С. Ю. Еременко. – Киев: Наук. думка, 1992. – 184 с.
 58. Именитов Л. Б. К вопросу о собственных колебаниях прямоугольных пластинок / Л. Б. Именитов // Тр.VII Всесоюзн. конф. по теории оболочек и пластин. – М.: Наука, 1970. – С. 251–255.
 59. Кильчевский Н. А. Лекции по аналитической механике оболочек / Н. А. Кильчевский. – Киев: Вища шк., 1974. – 231 с.
 60. Космодамианский А. С. Динамические задачи теории упругости для анизотропных сред / А. С. Космодамианский, В. И. Сторожев. – Киев: Наук. думка, 1985. – 176 с.
 61. Крысько В. А. Нелинейная статика и динамика неоднородных оболочек / В. А. Крысько. – Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1976. – 216 с.
 62. Кубенко В. Д. Динамика элементов конструкций / В. Д. Кубенко,

- А. Э. Бабаев, Е. И. Беспалова и др. – К.: «А.С.К.», 1999. – Механика композитов: В 12 т. / Под общ. ред. акад. НАНУ А. Н. Гузя. – К.: Наук. думка, 1993–2003. – Т. 9. – 379 с.
63. Кубенко В. Д. Нелинейные задачи колебаний тонких оболочек (Обзор) / В. Д. Кубенко, П. С. Ковальчук // Прикл. механика. – 1998. – **34**, № 8. – С. 3–31.
64. Кубенко В. Д. Нелинейные колебания цилиндрических оболочек / В. Д. Кубенко, П. С. Ковальчук, Н. П. Подчасов. – К.: Вища шк., 1989. – 208 с.
65. Кунець Я. І. Концентрація динамічних напружень поблизу отвору довільної форми в півплощині / Я. І. Кунець, В. В. Матус, В. В. Пороховський // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2001. – **44**, № 4. – С. 123–128.
66. Курпа Л. В. Исследование собственных колебаний пологих оболочек с использованием метода R-функций и сплайн-аппроксимации / Л. В. Курпа, А. А. Осетров // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2007. – **50**, № 4. – С. 83–93.
67. Курпа Л. В. Метод R-функцій у задачах досліджень геометрично нелінійних коливань пологих оболонок / Л. В. Курпа, Г. В. Пільгун // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2007. – **50**, № 1. – С. 117–124.
68. Курпа Л. В. Исследование собственных колебаний многослойных пологих оболочек и пластин сложной формы в плане / Л. В. Курпа, А. В. Чистилина // Пробл. прочности. – 2003. – № 2 – С. 112–123.
69. Кушнір Р. М. Ключові рівняння для складеної циліндричної оболонки з власними напруженнями та дефектами структури / Р. М. Кушнір // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2001. – **44**, № 4. – С. 77–84.
70. Кушнір Р. М. Нелінійні задачі статички і динаміки податливих

- трансверсальним деформаціям зсуву та стиснення пластин і оболонок / Р. М. Кушнір, М. В. Марчук, В. А. Осадчук // Актуальные проблемы механики деформируемого твердого тела. – Донецьк: Юго-Восток, 2006. – С. 238–240.
71. Кушнір Р. М. Пружний та пружно-пластичний граничний стан оболонок з дефектами / Р. М. Кушнір, М. М. Николишин, В. А. Осадчук. – Львів: Національна академія наук України. ІППММ ім. Я. С. Підстригача. Вид-во «СПОЛОМ», 2003. – 320 с.
72. Лесик О.Ф. Власні коливання композитних видовжених циліндричних панелей / О.Ф. Лесик, М.В. Марчук, В.С. Пакош // Машинознавство. – 2009. – № 3(141). – С. 37–39.
73. Лесик О. Вільні коливання податливих до трансверсальних зсув та стиснення видовжених композитних циліндричних панелей / О. Лесик, М. Марчук, В. Пакош, Ф. Якімов // Обчислювальна математика і математичні проблеми механіки. – Львів, 2009. – С. 146–149.
74. Лесик О. Власні коливання композитних видовжених циліндричних панелей / О. Лесик, М. Марчук, В. Пакош // Міжнародний симпозіум українських інженерів-механіків у Львові: Матеріали доповідей. – Львів: КІНПАТРИ ЛТД. – 2009. – С. 47–48.
75. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки / С. Г. Лехницкий. – М.: Гос. изд-во техн.-теор. лит., 1957. – 463 с.
76. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела / С. Г. Лехницкий. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
77. Луговой П. З. Динамика тонкостенных конструкций при нестационарных нагрузках / П. З. Луговой // Прикл. механика. – 2001. – **37**, № 5. – С. 44–73.
78. Маня В. Колебания упругих тонких плоских пластин в теории без гипо-

- тезы Лява – Кирхгофа / В. Маня // Rev. roumaine sci. techn. Ser. mec. appl. – 1964. – 9, № 5. – С. 1135–1154.
79. Марчук М. В. Нелінійне деформування і коливання податливих трансверсальним деформаціям зсуву та стиснення пластин і оболонок / М. В. Марчук // Машинознавство. – 2005. – № 10. – С. 9–14.
80. Марчук М. В. Динамическое деформирование прямоугольных композитных пластин / М. В. Марчук, В. С. Пакош // Композиционные материалы в промышленности. – Киев, 1999. – С. 23.
81. Марчук М. В. Уточнені рівняння геометрично нелінійного деформування податливих до трансверсальних зсуву та стиснення композитних пластин / М. В. Марчук, В. С. Пакош, О. Ф. Лесик // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2007. – Вип. 5. – С. 134–143.
82. Марчук М. В. Нелінійні коливання податливих трансверсальним деформаціям зсуву та стиснення композитних пластин / М. В. Марчук, В. С. Пакош, Р. І. Тучапський, М. М. Хом'як // Машинознавство. – 2001. – № 11. – С. 19–22.
83. Марчук М. Динамічний напружено-деформований стан композитних пластин / М. Марчук, В. Пакош, Ф. Якімов // Математичні проблеми механіки неоднорідних структур. – Львів, 2000. – Т. 2. – С. 239–243.
84. Марчук М. В. Нелинейные поперечные собственные колебания ортотропных композитных пластин / М. В. Марчук, В. С. Пакош, О. Ф. Лесик // Актуальные проблемы нелинейной механики оболочек. – Казань; Изд-во Казанск. гос. ун-та. 2008. – С. 96–97.
85. Марчук М. Ампліудно-частотні залежності за нелінійних коливань податливих трансверсальним зсуву та стисненню пластин / М. В. Марчук, В. С. Пакош, О. Ф. Лесик, Г. С. Крук // Математичні проблеми механіки неоднорідних структур. – Львів, 2006. – Т. II. – С. 132–135.

86. Марчук М. Нелінійні поперечні коливання композитних пластин / М. Марчук, В. Пакош, О. Лесик // Міжнародний симпозіум українських інженерів-механіків у Львові: Тези доповідей. – Львів: КІНПАТРИ ЛТД. – 2007. – С. 69.
87. Марчук М. Динамічне деформування прямокутних шаруватих пластин, податливих на зсув і стиснення / М. Марчук, В. Пакош, О. Лесик, // Математичні проблеми механіки неоднорідних структур: Львів, 2003. – С. 91–92.
88. Марчук М.В. Вплив податливості трансверсальним деформаціям зсуву та стиснення на амплітудно-частотну залежність при нелінійних коливаннях пластин / М.В. Марчук, І.Є. Гураєвська, О.Ф. Лесик, В.С. Пакош // Динаміка, міцність і надійність с/г машин. – Тернопіль: ТДТУ, 2004. – С. 174–180.
89. Марчук М. Нелінійна динаміка та власні поперечні коливання ортотропних композитних пластин / М. Марчук, В. Пакош, О. Лесик // Теорія та практика раціонального проектування, виготовлення і експлуатації машинобудівних конструкцій: Праці конференції. – Львів: КІНПАТРИ ЛТД. – 2008. – С. 121–123.
90. Морозов Н. Ф. Избранные двумерные задачи теории упругости / Н. Ф. Морозов. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1978. – 182 с.
91. Морозов Н. Ф. О нелинейных колебаниях тонких пластин с учетом инерции вращения / Н. Ф. Морозов // Докл. АН СССР. – 1967. – **176**, № 3. – С. 522–525.
92. Муштари Х. М. Нелинейная теория упругих оболочек / Х. М. Муштари, К. З. Галимов. – Казань: Таткнигоиздат, 1957. – 431 с.
93. Николишин М. М. Влияние упругой среды на напряженное состояние цилиндрической оболочки с конечной сдвиговой жесткостью, ослабленной системой разрезов / М. М. Николишин // Прикл. механика. – 1985. –

№ 3. – С. 56–61.

94. Николишин М. М. Математична модель поверхневої тріщини в тонкостінних елементах конструкцій / М. М. Николишин // Вісн. нац. ун-ту «Львівська політехніка». Оптимізація виробничих процесів і техн. контроль у машинобудуванні та приладобудуванні. – 2002. – № 467. – С. 103–107.
95. Новожилов В. В. Основы нелинейной теории упругости / В. В. Новожилов. – Л.-М.: Гостехиздат, 1958. – 211 с.
96. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек / В. В. Новожилов. – Л.: Судпромиздат, 1962. – 431 с.
97. Огибалов П. М. Оболочки и пластинки / П. М. Огибалов, М. А. Колтунов. – М.: Изд-во МГУ, 1969. – 695 с.
98. Осадчук В. А. Напряженно-деформированное состояние и предельное равновесие оболочек с разрезами / В. А. Осадчук. – Киев: Наук. думка, 1986. – 224 с.
99. Осадчук В. А. Математична модель динамічного деформування податливих до зсуву та стиску композитних пластин / В. А. Осадчук, М. В. Марчук // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2005. – Вип. 3. – С. 43–50.
100. Пакош В. С. Вплив граничних умов на амплітудно-частотні залежності при нелінійних коливаннях композитних пластин / В. С. Пакош, О. Ф. Лесик // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2005. – Вип. 3. – С. 94–98.
101. Пакош В. Власні поперечні нелінійні коливання ортотропних композитних пластин / В. Пакош, О. Лесик, І. Гураєвська // Сучасні проблеми механіки і математики: В 3-х т. – Львів, 2008. – Т. 2. – С. 166–168.

102. Пакош В. С. Поперечні коливання податливих до зсуву та стиску прямокутних композитних пластин / В. С. Пакош, О. Ф. Лесик, М. М. Хом'як // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2006. – Вип. 4. – С. 170–174.
103. Пелех Б. Л. Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью / Б. Л. Пелех. – Киев: Наук. думка, 1973. – 248 с.
104. Пелех Б. Л. Слоистые анизотропные пластины и оболочки с концентраторами напряжений / Б. Л. Пелех, В. А. Лазько. – Киев: Наук. думка, 1982. – 296 с.
105. Пелех Б. Л. Контактные задачи для слоистых элементов конструкций и тел с покрытиями / Б. Л. Пелех, А. В. Максимук, И. М. Коровайчук. – Киев: Наук. думка, 1988. – 280 с.
106. Пелех Б. Л. Про один новий підхід до побудови теорії оболонок з врахуванням граничних умов на поверхнях / Б. Л. Пелех, М. А. Сухорольский // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1978. – № 5. – С. 441–444.
107. Петрашень Г. И. О колебаниях однородных и слоистых пластин / Г. И. Петрашень, Л. А. Молотков // Теория оболочек и пластин. – Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1964. – С. 788–794.
108. Пискунов В. Г. Динамическая сдвиговая модель слоистых пластин / В. Г. Пискунов, И. М. Дидыченко, А. Ю. Федоренко // Механика композит. материалов. – 2001. – 37, № 1. – С. 63–72.
109. Підстригач Я. С. Вибрані праці / Я. С. Підстригач. – Київ: Наук. думка, 1995. – 460 с.
110. Подстригач Я. С. Термоупругость тонких оболочек / Я. С. Подстригач, Р. Н. Швец. – Киев: Наук. думка, 1978. – 344 с.
111. Рейсснер Е. Непротиворечивое определение деформации сдвига в

- слоистых анизотропных пластинах / Е. Рейсснер // Ракетная техника и космонавтика. – 1972. – № 5. – С. 193–195.
112. Савула Я. Г. Чисельне моделювання вільних коливань пружних тіл з тонким покриттям / Я. Г. Савула, О. С. Коссак // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1999. – **42**, № 1. – С. 118–124.
113. Селезов І. Т. Дослідження поперечних коливань пластини / І. Т. Селезов // Прикл. механіка. – 1960. – **6**, № 3. – С. 319–327.
114. Селезов І. Т. Про гіпотези, які лежать в основі уточнених рівнянь поперечних коливань пластин, і деякі особливості цих рівнянь / І. Т. Селезов // Прикл. механіка. – 1961. – **7**, № 5. – С. 538–546.
115. Сулим Г. Т. Асимптотичний аналіз динамічної взаємодії тонкого прямолінійного п'єзоелектричного включення з пружним середовищем за поздовжнього зсуву / Г. Т. Сулим, Я. І. Кунець, Р. В. Рабош // Вісн. Донецького університету. – 2008. – № 1. – С. 137–141.
116. Сухорольський М. А. Спрощені математичні моделі напруженого стану тонкого шару / М. А. Сухорольський // Вісн. держ. ун-ту «Львівська політехніка». Прикладна математика. – 1997. – № 320. – С. 140–141.
117. Сухорольський М. А. Редукція тривимірної задачі теорії пружності для криволінійного шару до двовимірної / М. А. Сухорольський // Вісн. держ. ун-ту «Львівська політехніка». Прикладна математика. – 1998. – № 346. – С. 115–119.
118. Сухорольський М. А. Узагальнений розв'язок динамічної задачі для оболонки Тимошенка / М. А. Сухорольський // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2000. – Вип. 57. – С. 162–165.
119. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле / С. П. Тимошенко. – М.: Физматгиз, 1959. – 440 с.
120. Тимошенко С. П. Прочность и колебания элементов конструкций /

- С. П. Тимошенко. – М.: Наука, 1971. – 807 с.
121. Тимошенко С. П. Пластинки и оболочки / С. П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. – М.: Физматгиз, 1963. – 635 с.
122. Филиппов А. П. Деформирование элементов конструкций под действием ударных и импульсных нагрузок / А. П. Филиппов, С. С. Кохманюк, Е. Г. Янютин. – Киев: Наук. думка, 1978. – 184 с.
123. Хома И. Ю. Обобщенная теория анизотропных оболочек. – Киев: Наук. думка, 1986. – 170 с.
124. Хорошун Л. П. Новая математическая модель неоднородного деформирования композитов / Л. П. Хорошун // Механика композит. материалов. – 1995. – **31**, № 3. – С. 310–318.
125. Чекурин В. Ф. Вариационный метод решения прямых и обратных задач теории упругости для бесконечной полосы / В. Ф. Чекурин // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1999. – № 2. – С. 58–70.
126. Черных К. Ф. Линейная теория оболочек / К. Ф. Черных. – Л.: ЛГУ. – Ч. I. – 1962. – 274 с.; Ч. II. – 1964. – 395 с.
127. Шевченко В. П. Методи фундаментальних розв'язків у механіці тонкостінних конструкцій / В. П. Шевченко, А. С. Гольцев, К. М. Довбня // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2001. – **37**, № 3. – С. 21–28.
128. Шульга Н. А. Структура частотного спектра неосесимметричных колебаний трансверсально-изотропного полого шара / Н. А. Шульга, А. Я. Григоренко, Т. Л. Ефимова, Т. Л. Рамская // Вычисл. и прикл. математика. – 1986. – Вып. 59. – С. 153–156.
129. Шульга Н. А. Нелинейные осесимметричные колебания трехслойных оболочек вращения при импульсных нагружениях / Н. А. Шульга, В. Ф. Мейш, Ю. А. Хатренко // Теорет. и прикл. механика. – 2001. – № 33. – С. 159–163.

130. Aalami B. Large deflection behavior of ship plate panels under normal pressure and in-plate loading / B. Aalami, I. C. Chapman // Royal Institute of Naval Architecture, Suppl. Paper. – 1972. – **144**. – P. 155–181.
131. Amabili M. Effect of Boundary Conditions on Nonlinear Vibrations of Circular Cylindrical Panels / M. Amabili // Trans ASME. J. Appl. Mech. – 2007. – **74**, No. 4. – P. 645 – 657.
132. Awrejcewicz J. Nonclassical Thermoelastic Problems in Nonlinear Dynamics of Shells / J. Awrejcewicz, V. A. Krysko // Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2003, monograph, 428 p.
133. Awrejcewicz J. Nonlinear Dynamics of Continuous Elastic Systems / J. Awrejcewicz, A. F. Vakakis, V. A. Krysko // Springer-Verlag, Berlin, 2004, monograph, 341 p. ISBN 3-540-20515-2.
134. Awrejcewicz J. Thermo-Dynamics of Plates and Shells / J. Awrejcewicz, V. A. Krysko, A. V. Krysko // Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2007. – 777 p. ISBN: 3-540-34261-3.
135. Banerjee J. R. Explicit analytical expressions for frequency equation and mode shapes of composite beams. / J. R. Banerjee // Int. J. Solids and Struct. – 2001. – **38**, No. 14. – P. 2415–2426.
136. Bielski W. On existence of solutions for geometrically nonlinear shells and plates / W. Bielski, I. I. Telega // Z. angew. Math. und Mech. – 1988. – **68**, No. 4. – P. 155–157.
137. Cabańska–Placzkiewicz K. Dynamic analysis of sandwich cylindrical shells. Динамический анализ многослойных цилиндрических оболочек / K. Cabańska–Placzkiewicz // Проблемы прочности. – 2000. – № 4. – С. 119–127.
138. Ciarlet P. G. Justification of a two-dimensional nonlinear shell model of Koiter's type / P. G. Ciarlet, A. Roquefort // Chinese Ann. Math. Ser. B 22. –

2001. – 2. – P. 129–144.
139. Gong Shan-chu. Частоты колебаний шарнирно закрепленной квадратной пластины с ребрами жесткости / Shan-chu Gong, Jiang-he Yang // Changde shifan xuebao. Ziran kexue ban. = J. Changde Teach. Univ. Natur. Shi. Ed. – 2001. – **13**, No. 1. – P. 18–19.
140. Gutierrez R. H. Transverse vibrations of rectangular plates elastically restrained against rotation along the edges with varying stiffener length / R. H. Gutierrez, P. A. Laura // J. Sound and Vibration. – 1985. – No. 102. – P. 493–499.
141. Haldar S. Free vibration of composite skewed cylindrical shell and panel by finite element method // J. Sound and Vibr. – 2008. – **311**. – P. 9–19.
142. Hong Yuan Nonlinear vibration of corrugated shallow shells under uniform load / Yuan Hong, Liu Ren-huai // Applied Mathematics and Mechanics. – 2007. – 28, No. 5. – P. 573–580.
143. Kirby R. M. Solution of von-Karman dynamic non-linear plate equations using a pseudo-spectral method / R. M. Kirby, Z. Yosibash // Comput. Meth. Appl. Mech. and Engng. – 2004. – **193**, No. 6-8. – P. 575–599.
144. Kunets Y. I. Scattering of SH-Wave by an Elastic Fiber of Non Classical Cross Section with an Interface Crack / Y. I. Kunets, V. V. Matus, V. V. Mykhas'kiv, A. Böstrom, Ch. Zhang // Mechanics of Composite Materials. – 2008. – Vol. **44**, No. 2. – P. 165 – 172.
145. Kurpa L. V., Timchenko G. N. Studying the free vibrations of multilayer plates with a complex planform // Int. Appl. Mech. – 2006. – **42**, No 1. – P. 103–109.
146. Librescu L. Recent developments in the modeling and behavior of advanced sandwich constructions: A survey. / L. Librescu, T. Hause // Composite Struct. – 2000. – **48**. – P. 1–17.

147. Lopez S. Geometrically nonlinear analysis of plates and cylindrical shells by a predictor – corrector method // *Int. J. Comput. Struct.* – 2001. – **79**, No. 15. – P. 1405–1415.
148. Marchuk M. Influence of Pliability to Transversal Deformations of Shear and Compression on Correlation Frequency from Amplitude for Nonlinear Oscillations of Composite Plates / M. Marchuk, V. Pakosh, O. Lesyk, I. Hurayewska // *Vibrations in Physical Systems.* – 2006. – Vol. XXII. – P. 251–256.
149. Marur Sudhakar R. Advances in nonlinear vibration analysis of structures. Part. I. Beams / Sudhakar R. Marur // *Sadhana.* – 2001. – **26**, No. 3. – P. 243–249.
150. Matus V. Wave Propagation in 2-D Elastic Composites with Partially Debonded Fibers by the Null Field Approach / V. Matus, Y. Kunets, V. Mykhas'kiv, A. Böstrom, Ch. Zhang // *Waves in Random and Complex Media.* – 2009. – Vol. **19**, No. 4. – P. 654 – 669.
151. Nagaya K. Transverse vibration of a rectangular plate with an eccentric circular inner boundary / K. Nagaya // *Int. J. Solids and Struc.* – 1980. – **16**. – P. 1007–1016.
152. Naghdi P. M. On the theory of thin elastic shell / P. M. Naghdi // *Quarterly Appl. Math.* – 1957. – **14**, No. 4. – P. 369–380.
153. Nair P. S. On vibration of plates with varying stiffener length / P. S. Nair, M. S. Rao // *J. Sound and Vibration.* – 1984. – No. 95. – P. 19–30.
154. Ohga Mitao, Murata Motozi. Large deformation dynamic analysis thin plates by FEIM method / Mitao Ohga, Motozi Murata // *Mem. Fac. Engng. Ehme Univ.* – 1988. – **11**, No. 3. – P. 201–210.
155. Pakosh V. Approximate solutions of dynamic problems for rectangular composite plates / V. Pakosh, M. Marchuk // *Engng. Transactions.* – 1997. –

45, No. 3–4. – P. 463–470.

156. Pakosh V. The dynamic stressed state of a rectangular composite plate rigidly fixed along its edges / V. Pakosh // *Journal of Mathematical Sciences*. – 1999. – **96**, No. 1. – P. 2911-2915.
157. Scarpa F., Tomlinson G. On static and dynamic desing criteria of sandwich plate structures with a negative Poissen's ratto core / F. Scarpa, G. Tomlinson // *Appl. Mech. and Engng.* – 2000. – **5**, No. 1. – P. 207–222.