Семчишин Л.М.,
доцент, к.ф-м.н.,
Тернопільський національний економічний університет

ДО ЧИСЛОВИХ МЕТОДІВ РОЗВ'ЯЗАННЯ РОЗРІДЖЕНИХ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРИЧНИХ РІВНЯНЬ

У значній кількості прикладних задач виникає необхідність розв'язання розріджених систем рівнянь з блочними елементами. Розглянемо метод розв'язування розріджених систем з деякими найхарактернішими способами заповнення.

Нехай система лінійних алгебричних рівнянь вигляду:

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{3,2} & A_{3,3} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_{n-1,n-2} & A_{n-1,n-1} & A_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & A_{n,n-1} & A_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \dots \\ X_{n-1} \\ X_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{1,n+1} \\ A_{2,n+1} \\ A_{3,n+1} \\ \dots \\ A_{n-1,n+1} \\ A_{n,n+1} \end{pmatrix}, \tag{1}$$

елементи якої A_{ij} - це блоки розмірності $m \times m$. Позначимо через $A\begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{bmatrix}$ мінор, розміщений на перетині блочних рядків $i_1, i_2, \ldots, i_k$ та блочних стовпців $j_1, j_2, \ldots, j_k$. За узагальненим правилом Крамера [1] маємо:

$$X_1 = \begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{2,1} & \cdots & A_{1,n+1} & 0 & 0 \\ A_{1,2} & A_{2,2} & \ddots & A_{2,n+1} & \ddots & 0 \\ \ddots & A_{3,2} & \ddots & A_{3,n+1} & \ddots & \cdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & A_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \ddots & A_{n,n+1} & \cdots & A_{n,n} \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & 0 & \cdots & 0 \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & \cdots & 0 \\ 0 & A_{3,2} & A_{3,3} & \ddots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & A_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A_{n,n} \end{vmatrix}$$

Розкладаючи чисельник за мінорами

$$X_i = \left(A\begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{bmatrix}\right)^{-1} \left(\sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} A_{k,n+1} A\begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & i-1 \\ 1 & 2 & \cdots & i-1 \end{bmatrix} \prod_{s=i+1}^{k-1} A_{s,s+1} A\begin{bmatrix} k+1 & \cdots & n \\ k+1 & \cdots & n \end{bmatrix}\right) \tag{2}$$

та ввівши позначення

$$a_{ik} = A\begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & i-1 \\ 1 & 2 & \cdots & i-1 \end{bmatrix} \cdot \prod_{s=i+1}^{k-1} A_{s,s+1} A\begin{bmatrix} k+1 & \cdots & n \\ k+1 & \cdots & n \end{bmatrix} \quad i,k = \overline{1,n}.$$

для визначення невідомої одержимо співвідношення:

$$X_i = \left(A\begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{bmatrix}\right)^{-1} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} A_{k,n+1} a_{i,k}. \tag{3}$$

Якщо до співвідношення (3) застосувати відому рівність Леонарда Ейлера [1], яка пов'язує ланцюгові дроби з рядами та скінченними сумами, то одержимо аналітичне розвинення невідомих даної розрідженої системи лінійних алгебричних рівнянь у скінченні матричні ланцюгові дроби.

Література:

1. Недашковський М.О. Обчислення з $\lambda -$ матрицями / М.О. Недашковський, О.Я. Ковальчук. – К.: Наук. думка, 2007. – 294 с.