УДК 517.956.4

ⓒ2002 р. **О.Г. Возняк**

Тернопільська академія народного господарства, Тернопіль

ПРО ВЛАСТИВІСТЬ ЛОКАЛІЗАЦІЇ РОЗВ'ЯЗКІВ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ ВИРОДЖЕНИХ РІВНЯНЬ У ПРОСТОРАХ УЗАГАЛЬНЕНИХ ФУНКЦІЙ

Наведена властивість локалізації розв'язків задачі Коші для вироджених рівнянь типу Колмогорова з $\overrightarrow{2b}$-параболічною частиною за основною групою змінних у просторах узагальнених функцій.

The property of the localization of the solutions of the Cauchy problem for degenerate parabolic equations of the Kolmogorov type with $\overrightarrow{2b}$-parabolic part for basic group of variables in spaces of generalized functions is presented.

Нещодавно С.Д. Ейдельман і С.Д. Івасишен означили і почали дослідження нового класу рівнянь — вироджених рівнянь типу Колмогорова з $\overrightarrow{2b}$-параболічною частиною за основною групою змінних. Для рівнянь з цього класу у випадку не залежних від просторових змінних коефіцієнтів у працях [2—5] побудований і досліджений фундаментальний розв'язок, доведені теореми про коректну розв'язність задачі Коші та інтегральне зображення розв'язків, у праці [6] наводиться теорема про однозначну розв'язність задачі Коші з початковими даними з простору $\left(S_{1/\vec{q}}^{1/\overrightarrow{2b}}\right)'$ узагальнених функцій. У даній статті для таких рівнянь наводиться властивість локалізації розв'язків задачі Коші у випадку, коли початкові дані належать до простору $\left(S_{1/\vec{q}}^{1/\overrightarrow{2b}}\right)'$ узагальнених функцій. Викладені тут результати аналогічні до результатів із [1] для вироджених параболічних рівнянь, які узагальнюють класичне рівняння дифузії з інерцією А.М. Колмогорова.

У статті використовуватимемо позначення з [6].

Розглянемо рівняння вигляду

$$\left(\partial_t-\sum_{l=2}^{3}\sum_{j=1}^{n_l}x_{(l-1)j}\partial_{x_{lj}}-\sum_{\|\vec{m}_1\|\le 1}a_{\vec{m}_1}(t)\partial_{x_1}^{\vec{m}_1}\right)\times$$

$$\times u(t,x)=0,(t,x)\in\Pi_{(0,T]},\qquad(1)$$

де коефіцієнти $a_{\vec{m}_1}:[0,T]\to C$, $\|\vec{m}_1\|\le 1$, неперервні й такі, що виконується умова $\overrightarrow{2b}$-параболічності за основною групою змінних t, x_1 [3].

Задамо початкову умову

$$u\,(t,\cdot)\,|_{t=0}=\varphi\,,\varphi\in(S_{1/\vec{q}}^{\vec{\beta}})'.\qquad(2)$$

Під розв'язком задачі Коші (1), (2) розумітимемо функцію $u\,(t,x)$, $(t,x)\in\Pi_{(0,T]}$, яка диференційовна один раз за t,x_2 і x_3 та $2b_j$ разів за $x_{1j}, j\in N_1$, задовольняє рівняння (1) і умову (2) у такому розумінні:

$$\forall\ f\in S_{1/\vec{q}}^{1/\overrightarrow{2b}}:\langle u\,(t,\cdot)\,,f\rangle\underset{t\to 0+}{\to}\langle\varphi,f\rangle\,.$$

Наведемо теорему про властивості локалізації розв'язків задачі (1), (2) у випадку, коли $\varphi\in\left(S_{1/\vec{q}}^{\vec{\beta}}\right)'$, де $\beta_{lj}>\frac{l-1}{q'-1}+\frac{q'}{2b_j(q'-1)}$, $j\in N_l$, $l\in N_0$.

Як зауважувалося [6], простір $S_{1/\vec{q}}^{\vec{\beta}}$ з $\beta_{lj}>1$, $j\in N_l$, $l\in N_0$, містить фінітні функції, тому для узагальнених функцій φ і ψ з простору $\left(S_{1/\vec{q}}^{\vec{\beta}}\right)'$ можна ввести поняття рівності цих функцій в деякій області $\Omega\in R^n$, а саме $\varphi=\psi$ в Ω, якщо $\langle\varphi-\psi,f\rangle=0$ для будь-якої функції $f\in S_{1/\vec{q}}^{\vec{\beta}}$ з носієм $\mathrm{supp} f\subset\Omega$.

Оскільки $S_{1/\vec{q}}^{1/\overrightarrow{2b}}\subset S_{1/\vec{q}}^{\vec{\beta}}$, $\beta_{lj}>1$, $j\in N_l$, $l\in$

N_0, то $\left(S_{1/\vec{q}}^{\vec{\beta}}\right)' \subset \left(S_{1/\vec{q}}^{1/\overrightarrow{2b}}\right)'$ і для $\varphi \in \left(S_{1/\vec{q}}^{\vec{\beta}}\right)'$ згідно з теоремою з [6] існує єдиний розв'язок u задачі (1), (2), який визначається формулою

$$u(t,x) = \langle \varphi, Z(t,x;0,\cdot)\rangle, (t,x) \in \Pi_{(0,T]}. \quad (3)$$

Вивчимо властивості локалізації цього розв'язку.

Теорема. *Якщо узагальнена функція* $\varphi \in \left(S_{1/\vec{q}}^{\vec{\beta}}\right)'$, $\vec{\beta} \equiv (\beta_{11}, ..., \beta_{1n_1}, \beta_{21}, ..., \beta_{2n_2}, \beta_{31}, ..., \beta_{3n_3})$, *де* $\beta_{lj} > \frac{l-1}{q'-1} + \frac{q'}{2b_j(q'-1)}$, $j \in N_l$, $l \in N_0$, *збігається в області* $\Omega \in R^n$ *з неперервною функцією* ψ, *то для довільного компакта* $K \subset \Omega$ $u(t,x) \underset{t\to 0+}{\to} \psi(x)$ *рівномірно щодо* $x \in K$.

Доведення. Доведення спочатку наведемо для випадку, коли $\psi = 0$ в Ω.

Нехай K' — компакт в R^n такий, що $K \subset K' \subset \Omega$. Розглянемо функцію $\theta \in S_{1/\vec{q}}^{\vec{\beta}}$ таку, що $\operatorname{supp}\theta \subset \Omega$ і $\theta = 1$ на K'. Оскільки функції $\theta(\cdot) Z(t,x;0,\cdot)$ і $(1-\theta(\cdot)) Z(t,x;0,\cdot)$ при кожних фіксованих $t \in (0,T]$ і $x \in R^n$ належать до простору $S_{1/\vec{q}}^{\vec{\beta}}$, то згідно з формулою (3) і лінійністю функціонала φ маємо

$$u(t,x) = \langle \varphi, \theta(\cdot) Z(t,x;0,\cdot)\rangle +$$
$$+ \langle \varphi, (1-\theta(\cdot)) Z(t,x;0,\cdot)\rangle, (t,x) \in \Pi_{(0,T]}. \quad (4)$$

Враховуючи те, що узагальнена функція φ дорівнює нулю в області Ω, а $supp(\theta(\cdot) Z(t,x;0,\cdot)) \subset \Omega$, з рівності (4) і лінійності функціонала φ одержуємо формулу

$$u(t,x) = t\left\langle \varphi, t^{-1}(1-\theta(\cdot)) Z(t,x;0,\cdot)\right\rangle,$$
$$(t,x) \in \Pi_{(0,T]}.$$

Для доведення твердження теореми у розглядуваному випадку досить встановити, що функції $g_{t,x}(\xi) \equiv t^{-1}(1-\theta(\xi)) Z(t,x;0,\xi)$, $\xi \in R^n$, обмежені у просторі $S_{1/\overrightarrow{q}}^{\overrightarrow{\beta}}$ рівномірно щодо $t \in (0,\gamma)$ і $x \in K$, якщо γ досить мале, тобто

$$\left|\xi^{\vec{k}} \partial_\xi^{\vec{s}} g_{t,x}(\xi)\right| \le C \vec{A}^{\vec{k}} \vec{B}^{\vec{s}} \vec{k}^{\vec{k}/\vec{q}} \vec{s}^{\vec{s}\vec{\beta}},$$

$$\xi \in R^n, \left\{\vec{k}, \vec{s}\right\} \subset Z_+^n, \quad (5)$$

де $C > 0$ і $\left\{\vec{A}, \vec{B}\right\} \in R_+^n$ не залежать від параметрів t і x, які змінюються вищезазначеним способом. Оскільки $g_{t,x}(\xi) = 0$ для $\xi \in K'$, то оцінку (5) досить встановити для $\xi \in R^n \backslash K'$.

Використовуючи формулу диференціювання добутку двох функцій, маємо

$$\left|\xi^{\vec{k}} \partial_\xi^{\vec{s}} g_{t,x}(\xi)\right| = t^{-1} \left|\xi^{\vec{k}} \sum_{\vec{r} \le \vec{s}} C_{\vec{s}}^{\vec{r}} \partial_\xi^{\vec{r}} (1-\theta(\xi)) \times \right.$$
$$\left. \times \partial_\xi^{\vec{s}-\vec{r}} Z(t,x;0,\xi)\right| \le G'_{t,x}(\xi) + G''_{t,x}(\xi),$$

де

$$G'_{t,x}(\xi) \equiv t^{-1} \sum_{\vec{r} \le \vec{s}} C_{\vec{s}}^{\vec{r}} \left|\xi^{\vec{k}} \partial_\xi^{\vec{r}} \theta(\xi)\right| \times$$
$$\times \left|\partial_\xi^{\vec{s}-\vec{r}} Z(t,x;0,\xi)\right|,$$
$$G''_{t,x}(\xi) \equiv t^{-1} \left|\xi^{\vec{k}} \partial_\xi^{\vec{s}} Z(t,x;0,\xi)\right|.$$

Оцінимо останні вирази.

Оскільки $\theta \in S_{1/\vec{q}}^{\vec{\beta}}$, то

$$\left|\xi^{\vec{k}} \partial_\xi^{\vec{r}} \theta(\xi)\right| \le \bar{C} \vec{\bar{A}}^{\vec{k}} \vec{\bar{B}}^{\vec{r}} \vec{k}^{\vec{k}/\vec{q}} \vec{r}^{\vec{r}\vec{\beta}},$$

$$\xi \in R^n, \left\{\vec{k}, \vec{r}\right\} \subset Z_+^n \quad (6)$$

з деякими сталими $\bar{C} > 0$, $\left\{\vec{\bar{A}}, \vec{\bar{B}}\right\} \in R_+^n$.

Розглянемо функцію

$$Z_0(t,0,\xi+i\eta) \equiv$$
$$\equiv t^{-M_{\bar{0}}} \left(F^{-1}\left[Q(t,0,\cdot)\right]\right)(t,0,\xi+i\eta),$$
$$t \in (0,T], \quad \{\xi,\eta\} \subset R^n. \quad (7)$$

де Q — функція з [3]. Маємо

$$Z(t,x;0,\xi) = Z_0(t,0,\xi_{t,x}) \quad (8)$$

де $\xi_{t,x} \equiv \left(\xi_{t,x}^{11}, ..., \xi_{t,x}^{1n_1}, \xi_{t,x}^{21}, ..., \xi_{t,x}^{2n_2}, \xi_{t,x}^{31}, ..., \xi_{t,x}^{3n_3}\right)$, $\xi_{t,x}^{lj} \equiv (x_{lj}(t) - \xi_{lj})\, t^{-(l-1)-\frac{1}{2b_j}}$, $j \in N_l$, $l \in N_0$.

Згідно з результатами з [3] функція (7), як функція $\xi+i\eta$, при кожному фіксованому $t \in (0,T]$ є цілою функцією, яка має оцінку

$$|Z_0(t,0,\xi+i\eta)| \le$$

$$\leq C t^{-M_{\vec{0}}} \exp\left\{-c_0 \rho\left(1,\xi,0\right)+c_1 \rho\left(1,\eta,0\right)\right\},$$
$$t\in(0,T]\,,\{\xi,\eta\}\subset R^n,$$

де $C>0$, $c_0>0$ і $c_1>0$ — деякі сталі. Звідси функція $Z_0\left(t,0,\cdot\right)$ при кожному фіксованому $t\in(0,T]$ належить до простору $S_{1/\vec{q}}^{1/\overrightarrow{2b}}$, тому правильні нерівності

$$\left|\partial_\xi^{\vec{s}} Z_0\left(t,0,\xi\right)\right| \leq \bar{\bar{C}}\,\bar{\bar{\vec{B}}}^{\vec{s}}\,\vec{s}^{\vec{s}/\overrightarrow{2b}}\times$$
$$\times t^{-M_{\vec{0}}} \exp\left\{-c_2 \rho\left(1,\xi,0\right)\right\},$$
$$t\in(0,T]\,,\quad \xi\in R^n,\quad \vec{s}\in Z_+^n, \qquad (9)$$

з деякими сталими $\bar{\bar{C}}>0$, $c_2>0$, $\bar{\bar{\vec{B}}}\in R_+^n$.

На підставі формули (8) і нерівностей (9) одержуємо оцінки

$$\left|\partial_\xi^{\vec{s}} Z\left(t,x;0,\xi\right)\right| \leq \bar{\bar{C}}\,\bar{\bar{\vec{B}}}^{\vec{s}}\,\vec{s}^{\vec{s}/\overrightarrow{2b}}\times$$
$$\times t^{-M_{\vec{s}}} \exp\left\{-c_3 \rho\left(t,x,\xi\right)\right\},$$
$$t\in(0,T]\,,\{x,\xi\}\subset R^n, \vec{s}\in Z_+^n, \qquad (10)$$

де $\bar{\bar{C}}>0$, $c_3>0$, $\bar{\bar{\vec{B}}}\in R_+^n$.

Використаємо далі нерівність

$$\rho\left(t,x,\xi\right)\geq \frac{c_4 d^{q''}}{t^{q'-1}},$$
$$x\in K,\xi\in R^n\backslash K', t\in(0,\gamma)\,, \qquad (11)$$

де $c_4>0$, d — відстань між межами компактів K і K', а γ — досить мале число з $(0,T]$. Доведення нерівності (11) аналогічне доведенню відповідної нерівності з [3].

З нерівностей (10) і (11) випливають оцінки

$$\left|\partial_\xi^{\vec{s}} Z\left(t,x;0,\xi\right)\right| \leq$$
$$\leq \bar{\bar{C}}\,\bar{\bar{\vec{B}}}^{\vec{s}}\,\vec{s}^{\vec{s}/\overrightarrow{2b}} t^{-M_{\vec{s}}} \exp\left\{-\frac{a d^{q''}}{t^{q'-1}}\right\},$$
$$x\in K,\xi\in R^n\backslash K', t\in(0,\gamma)\,, a>0, \vec{s}\in Z_+^n. \qquad (12)$$

За допомогою оцінок (6) і (12) маємо

$$G'_{t,x}\left(\xi\right)\leq t^{-1}\sum_{\vec{r}\leq\vec{s}} C_{\vec{s}}^{\vec{r}}\bar{C}\vec{A}^{\vec{k}}\bar{\vec{B}}^{\vec{r}}\vec{k}^{\vec{k}/\vec{q}}\vec{r}^{\vec{r}\vec{\beta}}\,\bar{\bar{C}}\,\bar{\bar{\vec{B}}}^{\vec{s}-\vec{r}}\times$$
$$\times\left(\vec{s}-\vec{r}\right)^{(\vec{s}-\vec{r})/\overrightarrow{2b}}\, t^{-M_{\vec{s}}} \exp\left\{-\frac{a d^{q''}}{t^{q'-1}}\right\}=$$
$$=\bar{C}\,\bar{\bar{C}}\,\vec{A}^{\vec{k}}\vec{k}^{\vec{k}/\vec{q}}\sum_{\vec{r}\leq\vec{s}} C_{\vec{s}}^{\vec{r}}\bar{\vec{B}}^{\vec{r}}\,\bar{\bar{\vec{B}}}^{\vec{s}-\vec{r}}\,\vec{r}^{\vec{r}\vec{\beta}}\times$$
$$\times\left(\vec{s}-\vec{r}\right)^{(\vec{s}-\vec{r})/\overrightarrow{2b}} t^{-1-M_{\vec{s}}} \exp\left\{-\frac{a d^{q''}}{t^{q'-1}}\right\}\leq$$
$$\leq\bar{C}\,\bar{\bar{C}}\,\vec{A}^{\vec{k}}\vec{k}^{\vec{k}/\vec{q}}\sum_{\vec{r}\leq\vec{s}} C_{\vec{s}}^{\vec{r}}\bar{\vec{B}}^{\vec{r}}\,\bar{\bar{\vec{B}}}^{\vec{s}-\vec{r}}\,\vec{r}^{\vec{r}\vec{\beta}}\times$$
$$\times\left(\vec{s}-\vec{r}\right)^{(\vec{s}-\vec{r})/\overrightarrow{2b}}\prod_{l=1}^{3}\prod_{j=1}^{n_l} L^{\left(s_{lj}-r_{lj}\right)}, \qquad (13)$$

де

$$L^{\left(p_{lj}\right)}\equiv\sup_{t>0}\left(t^{-\frac{1}{n}-\frac{q_{lj}}{2b_j}}\exp\left\{-\frac{a d^{q''}}{n t^{q'-1}}\right\}\right),$$
$$q_{lj}\equiv\left(\left(l-1\right)2b_j+1\right)\left(p_{lj}+1\right), j\in N_l, l\in N_0.$$

Безпосереднім обчисленням знаходимо, що

$$L^{\left(p_{lj}\right)}=\left(\frac{\left(\frac{q_{lj}}{2b_j}+\frac{1}{n}\right)n}{a\left(q'-1\right)d^{q''}}\right)^{\left(\frac{q_{lj}}{2b_j}+\frac{1}{n}\right)\frac{1}{q'-1}}\times$$
$$\times\exp\left\{-\left(\frac{q_{lj}}{2b_j}+\frac{1}{n}\right)\frac{1}{q'-1}\right\}=$$
$$=\left(\frac{\left(\frac{q_{lj}}{2b_j\left(q'-1\right)}+\frac{1}{n\left(q'-1\right)}\right)n}{a e d^{q''}}\right)^{\frac{q_{lj}}{2b_j\left(q'-1\right)}+\frac{1}{n\left(q'-1\right)}}.$$

Нехай число $\varepsilon>0$ таке, що $\dfrac{l-1}{q'-1}+\dfrac{q'}{2b_j\left(q'-1\right)}+\varepsilon<\beta_{lj}$, $j\in N_l$, $l\in N_0$. Для тих p_{lj}, для яких $\varepsilon p_{lj}>a_{lj}+\dfrac{1}{n\left(q'-1\right)}$, де $a_{lj}=\dfrac{l-1}{q'-1}+\dfrac{1}{2b_j\left(q'-1\right)}$, $j\in N_l$, $l\in N_0$, маємо

$$\frac{q_{lj}}{2b_j\left(q'-1\right)}+\frac{1}{n\left(q'-1\right)}<\left(a_{lj}+\varepsilon\right)p_{lj}$$

і, звідси

$$L^{\left(p_{lj}\right)}\leq\bar{D}_{lj}^{p_{lj}}p_{lj}^{\left(a_{lj}+\varepsilon\right)p_{lj}},$$

$$\bar{D}_{lj} \equiv \left(\frac{(a_{lj} + \varepsilon)\, n}{aed^{q''}} \right)^{a_{lj} + \varepsilon}.$$

Якщо $\varepsilon p_{lj} \le a_{lj} + \dfrac{1}{n\,(q'-1)}$, то

$$\frac{q_{lj}}{2b_j\,(q'-1)} = a_{lj}\,(p_{lj}+1) \le$$

$$\le a_{lj} \left(\frac{1}{\varepsilon} \left(a_{lj} + \frac{1}{n\,(q'-1)} \right) + 1 \right)$$

і

$$L^{(p_{lj})} \le \bar{\bar{C}}_{lj} \bar{\bar{D}}_{lj}^{\,p_{lj}} \le \bar{\bar{C}}_{lj} \bar{\bar{D}}_{lj}^{\,p_{lj}}\, p_{lj}^{(a_{lj}+\varepsilon)p_{lj}},$$

де

$$\bar{\bar{D}}_{lj} \equiv \left(\left(a_{lj} \left(\frac{1}{\varepsilon} \left(a_{lj} + \frac{1}{n(q'-1)} \right) + 1 \right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{n(q'-1)} \right) n \left(aed^{q''} \right)^{-1} \right)^{a_{lj}},$$

$$\bar{\bar{C}}_{lj} \equiv \bar{\bar{D}}_{lj}^{\,1+\frac{1}{n a_{lj}(q'-1)}}.$$

Таким чином, для будь-яких $p_{lj} \ge 0$ правильна оцінка

$$L^{(p_{lj})} \le C_{lj} D_{lj}^{p_{lj}} p_{lj}^{(a_{lj}+\varepsilon)p_{lj}}, \qquad (14)$$

де $C_{lj} \equiv \max\left\{1, \bar{\bar{C}}_{lj}\right\}$, $D_{lj} \equiv \max\left\{\bar{D}_{lj}, \bar{\bar{C}}_{lj}\right\}$.

Покладемо

$$C_0 \equiv \prod_{l=1}^{3} \prod_{j=1}^{n_l} C_{lj},$$

$$\vec{D} \equiv (D_{11}, ..., D_{1n_1}, D_{21}, ..., D_{2n_2}, D_{31}, ..., D_{3n_3}),$$

$$\vec{a}_\varepsilon \equiv \Big(a_{11} + \varepsilon, ..., a_{1n_1} + \varepsilon, a_{21} + \varepsilon, ...,$$

$$a_{2n_2} + \varepsilon, a_{31} + \varepsilon, ..., a_{3n_3} + \varepsilon \Big)$$

і

$$\vec{p} \equiv (p_{11}, ..., p_{1n_1}, p_{21}, ..., p_{2n_2}, p_{31}, ..., p_{3n_3}).$$

Тоді з оцінки (14) випливає, що

$$\prod_{l=1}^{3} \prod_{j=1}^{n_l} L^{(p_{lj})} \le C_0 \vec{D}^{\vec{p}} \vec{p}^{\vec{p}\vec{a}_\varepsilon}. \qquad (15)$$

За допомогою оцінок (13) і (15) маємо

$$G'_{t,x}(\xi) \le C \vec{A}^{\vec{k}} \vec{k}^{\vec{k}/\vec{q}} \sum_{\vec{r} \le \vec{s}} C_{\vec{s}}^{\vec{r}} \vec{\bar{\bar{B}}}^{\vec{r}} \vec{\bar{\bar{\bar{B}}}}^{\vec{s}-\vec{r}} \vec{D}^{\vec{s}-\vec{r}} \vec{r}^{\vec{r}\vec{\beta}} \times$$

$$\times (\vec{s} - \vec{r})^{(\vec{s}-\vec{r})/\overrightarrow{2b}} (\vec{s} - \bar{r})^{(\vec{s}-\vec{r})\vec{a}_\varepsilon},$$

$$C \equiv \bar{C}\, \bar{\bar{C}}\, C_0. \qquad (16)$$

Оскільки

$$a_{lj} + \varepsilon + \frac{1}{2b_j} = \frac{l-1}{q'-1} + \frac{q'}{2b_j\,(q'-1)} + \varepsilon,$$

$j \in N_l$, $l \in N_0$, а

$$\frac{l-1}{q'-1} + \frac{q'}{2b_j\,(q'-1)} + \varepsilon < \beta_{lj}, j \in N_l, l \in N_0,$$

то

$$\vec{r}^{\vec{r}\vec{\beta}} (\vec{s} - \vec{r})^{(\vec{s}-\vec{r})/\overrightarrow{2b}} (\vec{s} - \vec{r})^{(\vec{s}-\vec{r})\vec{a}_\varepsilon} \le$$

$$\le \vec{r}^{\vec{r}\vec{\beta}} (\vec{s} - \vec{r})^{(\vec{s}-\vec{r})\vec{\beta}} \le \vec{s}^{\vec{s}\vec{\beta}}.$$

Далі маємо, що

$$\sum_{\vec{r} \le \vec{s}} C_{\vec{s}}^{\vec{r}} \vec{\bar{\bar{B}}}^{\vec{r}} \vec{\bar{\bar{\bar{B}}}}^{\vec{s}-\vec{r}} \vec{D}^{\vec{s}-\vec{r}} = \sum_{\vec{r} \le \vec{s}} C_{\vec{s}}^{\vec{r}} \vec{\bar{\bar{B}}}^{\vec{r}} \vec{\bar{\bar{D}}}^{\vec{s}-\vec{r}} \le$$

$$\le \vec{\tilde{B}}^{\vec{s}} \sum_{\vec{r} \le \vec{s}} C_{\vec{s}}^{\vec{r}} = \vec{\tilde{B}}^{\vec{s}} \cdot 2^{|\vec{s}|} = \vec{B}^{\vec{s}},$$

де $\bar{D}_{lj} \equiv \bar{\bar{\bar{B}}}_{lj} D_{lj}$, $\tilde{B}_{lj} \equiv \max\left\{\bar{B}_{lj}, \bar{D}_{lj}, 1\right\}$, $B_{lj} \equiv 2\tilde{B}_{lj}$. Тому з нерівності (16) одержуємо потрібну оцінку

$$G'_{t,x}(\xi) \le C \vec{A}^{\vec{k}} \vec{B}^{\vec{s}} \vec{k}^{\vec{k}/\vec{q}} \vec{s}^{\vec{s}\vec{\beta}},$$

$$\xi \in R^n \backslash K', t \in (0, \gamma), x \in K, \left\{\vec{k}, \vec{s}\right\} \subset Z_+^n.$$

Така сама оцінка правильна для $G''_{t,x}$. Справді, згідно з оцінками (10) і (11) маємо

$$G''_{t,x}(\xi) \le \bar{\bar{C}} \vec{\bar{\bar{B}}}^{\vec{s}} \vec{s}^{\vec{s}/\overrightarrow{2b}} \left| \xi^{\vec{k}} \right| \exp\left\{ -\frac{c_3}{2} \rho(t, x, \xi) \right\} \times$$

$$\times t^{-1-M_{\vec{s}}} \exp\left\{ -\frac{ad^{q''}}{2t^{q'-1}} \right\} \le$$

$$\le \bar{\bar{C}}\, \vec{\bar{\bar{B}}}^{\vec{s}} \vec{s}^{\vec{s}/\overrightarrow{2b}} \prod_{l=1}^{3} \prod_{j=1}^{n_l} L_1^{(s_{lj})} M_{t,x}^{(\vec{k})}(\xi), \qquad (17)$$

де $L_1^{(s_{lj})}$ — вираз, який відрізняється від $L^{(s_{lj})}$ тільки тим, що у ньому a замінено на $\frac{a}{2}$, а $M_{t,x}^{(\vec{k})}(\xi) \equiv \left|\xi^{\vec{k}}\right| \exp\left\{-\frac{c_3}{2}\rho(t,x,\xi)\right\}$.

Оцінимо $M_{t,x}^{(\vec{k})}(\xi)$ для $t \in (0,\gamma)$, $x \in K$ і $\xi \in R^n$, якщо $\gamma < 1$. Оскільки K — компакт в R^n, то існує число $R > 0$ таке, що для будь-яких $x \in K$ правильні нерівності $|x_l| \leq R$, $l \in N_0$. За допомогою нерівностей $(a+b)^{q_j} \leq 2^{q_j-1}(a^{q_j}+b^{q_j})$, $(a+b+c)^{q_j} \leq 3^{q_j-1}(a^{q_j}+b^{q_j}+c^{q_j})$, $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$, так само, як у [1], одержуємо

$$\rho(t,x,\xi) \geq c_5\rho(1,\xi,0) - \left(1+2^{q''}+3^{q''}\right)R^{q''},$$

звідки маємо

$$M_{t,x}^{(\vec{k})}(\xi) \leq E\left|\xi^{\vec{k}}\right|\exp\{-\delta\rho(1,\xi,0)\} =$$

$$= E\prod_{l=1}^{3}\prod_{j=1}^{n_l}\left(|\xi_{lj}|^{k_{lj}}\exp\{-\delta|\xi_{lj}|^{q_j}\}\right) \leq$$

$$\leq E\prod_{l=1}^{3}\prod_{j=1}^{n_l}M^{(k_{lj})},$$

де $E \equiv \exp\left\{\frac{c_3}{2}\left(1+2^{q''}+3^{q''}\right)R^{q''}\right\}$, $\delta \equiv \frac{c_3c_5}{2}$, $M^{(k_{lj})} \equiv \sup\limits_{r\geq 0}\left(r^{k_{lj}}\exp\{-\delta r^{q_j}\}\right)$.

Оскільки $M^{(k_{lj})} = \left(\frac{k_{lj}}{\delta q_j e}\right)^{k_{lj}/q_j} = A_j^{k_{lj}}k_{lj}^{k_{lj}/q_j}$, $A_j \equiv \left(\frac{1}{\delta q_j e}\right)^{1/q_j}$, то

$$M_{t,x}^{(\vec{k})}(\xi) \leq E\vec{A}^{\vec{k}}\vec{k}^{\vec{k}/\vec{q}}. \tag{18}$$

Із оцінок (17), (18), а також оцінки (15) для $\prod\limits_{l=1}^{3}\prod\limits_{j=1}^{n_l}L_1^{(s_{lj})}$ випливає потрібна оцінка для $G''_{t,x}$ і, звідси оцінка (5). Таким чином, твердження теореми доведено у випадку, коли $\psi = 0$ в Ω.

Розглянемо тепер загальний випадок. Нехай θ — використовувана вище функція. Оскільки $\varphi - \psi = 0$ в Ω, то $\theta(\varphi-\psi) = 0$ в Ω, $(1-\theta)\varphi = 0$ на K' і на підставі доведеного $\langle\theta(\varphi-\psi), Z(t,x;0,\cdot)\rangle \underset{t\to 0+}{\to} 0$, $\langle(1-\theta)\varphi, Z(t,x;0,\cdot)\rangle \underset{t\to 0+}{\to} 0$ рівномірно щодо $x \in K$. Але $u(t,x) = \langle\varphi, Z(t,x;0,\cdot)\rangle = \langle\theta(\varphi-\psi), Z(t,x;0,\cdot)\rangle + \langle(1-\theta)\varphi, Z(t,x;0,\cdot)\rangle + \langle\theta\psi, Z(t,x;0,\cdot)\rangle$, а $\langle\theta\psi, Z(t,x;0,\cdot)\rangle = \int\limits_{R^n} Z(t,x;0,\xi)(\theta\psi)(\xi)\,d\xi \underset{t\to 0+}{\to} (\theta\psi)(x)$ рівномірно щодо $x \in K$, тому на підставі того, що $\theta\psi = \psi$ на K, одержуємо, що $u(t,x) \underset{t\to 0+}{\to} \psi(x)$ рівномірно щодо $x \in K$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Андросова Л.Н., Ивасишен С.Д.* Однозначная разрешимость и свойство локализации решений задачи Коши для одного класса вырожденных параболических уравнений в пространствах обобщенных функций // Киев. ун-т.— Киев, 1989.— 40 с.— Деп. в УкрНИИНТИ 01.11.1989, N 2388-Ук89.

2. *Ивасишен С.Д., Эйдельман С.Д.* $\overrightarrow{2b}$-параболические уравнения с вырождением по части переменных // Докл. РАН.— 1998.— **360**, N 3.— С.303—305.

3. *Ивасишен С.Д., Эйдельман С.Д.* О фундаментальных решениях задачи Коши для вырожденных уравнений типа Колмогорова с $\overrightarrow{2b}$-параболической частью по основной группе переменных // Дифференц. уравнения.— 1998.— **34**, N 11.— С.1536—1545.

4. *Ивасишен С.Д., Эйдельман С.Д.* О задаче Коши для вырожденных уравнений типа Колмогорова с $\overrightarrow{2b}$-параболической частью по основной группе переменных // Дифференц. уравнения.— 2000.— **36**, N 4.— С.527—536.

5. *Ивасишен С.Д., Эйдельман С.Д.* Об интегральном представлении решений вырожденных уравнений типа Колмогорова с $\overrightarrow{2b}$-параболической частью по основной группе переменных // Дифференц. уравнения.— 2000.— **36**, N 5.— С.647—655.

6. *Возняк О.Г.* Про однозначну розв'язність задачі Коші для одного класу вироджених рівнянь у просторах узагальнених функцій // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. Вип. 111. Математика.— Чернівці: Рута, 2001.— С.5—10.

Стаття надійшла до редколегії 26.06.2001