УДК 517.956.4

©2001 р. **О.Г. Возняк**

Тернопільська академія народного господарства, Тернопіль

ПРО ОДНОЗНАЧНУ РОЗВ'ЯЗНІСТЬ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ ВИРОДЖЕНИХ РІВНЯНЬ У ПРОСТОРАХ УЗАГАЛЬНЕНИХ ФУНКЦІЙ

Встановлена однозначна розв'язність задачі Коші для вироджених рівнянь типу Колмогорова з $\overrightarrow{2b}$-параболічною частиною за основною групою змінних у просторах узагальнених функцій.

The unique solvability of the Cauchy problem for degenerate parabolic equations of the Kolmogorov type with $\overrightarrow{2b}$-parabolic part for basic group of variables in spaces of generalized functions is established.

У працях [1—4] доведені теореми про однозначну розв'язність і властивість локалізації розв'язків задачі Коші для параболічних за І.Г. Петровським, Г.Є. Шиловим і С.Д. Ейдельманом рівнянь і систем рівнянь. При цьому припускалось, що початкові функції належать до просторів узагальнених функцій, для яких за простори основних функцій взяті простори типу S з монографії [5]. Вибір простору узагальнених функцій визначається тим, до якого простору типу S належить фундаментальний розв'язок (ф.р.) задачі Коші для відповідного рівняння. Аналогічні результати одержані в [6] для вироджених параболічних рівнянь, які узагальнюють класичне рівняння дифузії з інерцією А.М. Колмогорова.

Нещодавно С.Д. Ейдельман і С.Д. Івасишен означили й почали дослідження нового класу рівнянь — вироджених рівнянь типу Колмогорова з $\overrightarrow{2b}$-параболічною частиною за основною групою змінних. У працях [7,8] для рівнянь з цього класу у випадку не залежних від просторових змінних коефіцієнтів побудований і досліджений ф.р. задачі Коші. У даній статті для таких рівнянь наводиться теорема про однозначну розв'язність задачі Коші з початковими даними із відповідних просторів узагальнених функцій.

1. Основні позначення. Користуватимемось такими позначеннями: n_1, n_2, n_3, b_1, ..., b_{n_1} — задані натуральні числа, причому $n_1 \geq n_2 \geq n_3$; $n \equiv n_1 + n_2 + n_3$; $N_0 \equiv \{1, 2, 3\}$; $N_l = \{1, ..., n_l\}$, $l \in N_0$; $\overrightarrow{2b} \equiv (2b_1, ..., 2b_{n_1})$; $q_j \equiv 2b_j/(2b_j - 1)$, $j \in N_1$, $q' \equiv \min\limits_{j\in N_1} q_j$, $q'' \equiv \max\limits_{j\in N_1} q_j$; $\mathbb{R}^r$, $\mathbb{R}^r_+$ і $\mathbb{Z}^r_+$ — множини всіх r-вимірних відповідно дійсних векторів, векторів з усіма додатними координатами і векторів з усіма цілими невід'ємними координатами, тобто мультиіндексів (координати векторів з цих множин для $r < n$ будуть відрізнятися тільки одним індексом, а для $r = n$ — двома індексами; вектори з $\mathbb{R}^r$ позначатимуться літерами без стрілки, а з $\mathbb{R}^r_+$ і $\mathbb{Z}^r_+$ — літерами зі стрілкою); $\|\vec{m}_1\| \equiv \sum\limits_{j=1}^{n_1}(m_{1j}/(2b_j))$, якщо $\vec{m}_1 \equiv (m_{11}, ..., m_{1n_1}) \in \mathbb{Z}^{n_1}_+$; $M_{\vec{m}} \equiv \sum\limits_{l=1}^{3}\sum\limits_{j=1}^{n_l}(l - 1 + 1/(2b_j))(m_{lj} + 1)$, якщо $\vec{m} \equiv (m_{11}, ..., m_{1n_1}, m_{21}, ..., m_{2n_2}, \; m_{31}, ..., m_{3n_3}) \in \mathbb{Z}^n_+$; $\{x \equiv (x_1, x_2, x_3), \xi \equiv (\xi_1, \xi_2, \xi_3)\} \subset \mathbb{R}^n$, якщо $\{x_l \equiv (x_{l1}, ..., x_{ln_l}), \xi_l \equiv (\xi_{l1}, ..., \xi_{ln_l})\} \subset \mathbb{R}^{n_l}$, $l \in N_0$; $\partial^{\vec{m}_1}_{x_1} \equiv \prod\limits_{j=1}^{n_1}\partial^{m_{1j}}_{x_{1j}}, \partial^{\vec{m}}_x \equiv \prod\limits_{l=1}^{3}\prod\limits_{j=1}^{n_l}\partial^{m_{lj}}_{x_{lj}}$, якщо $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\vec{m}_1 \in \mathbb{Z}^{n_1}_+$, $\vec{m} \in \mathbb{Z}^n_+$; $x_{lj}(t) = \sum\limits_{r=0}^{l-1}\frac{1}{r!}t^r x_{(l-r)j}$, $j \in N_l$, $l \in N_0$; $x(t) \equiv (x_{11}(t), ..., \; x_{1n_1}(t), x_{21}(t), ..., \; x_{2n_2}(t), x_{31}(t), ...,$

$x_{3n_3}(t))$; $\rho(t,x,\xi) \equiv \sum\limits_{l=1}^{3}\sum\limits_{j=1}^{n_l} t^{1-lq_j}|x_{lj}(t)-\xi_{lj}|^{q_j}$; $d(x,\xi) \equiv \left(\sum\limits_{l=1}^{3}\sum\limits_{j=1}^{n_l}|x_{lj}-\xi_{lj}|^{q_j}\right)^{1/q''}$ — спеціальна відстань між точками x і ξ простору $\mathbb{R}^n$; $K_R \equiv \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, d(x,0) \le R\}$; $\Pi_H \equiv \{(t,x)\,|\, t \in H, x \in \mathbb{R}^n\}$, якщо $H \subset \mathbb{R}$; T — задане додатне число; i — уявна одиниця.

Нехай вектори $\vec{\alpha} \equiv (\alpha_1, ..., \alpha_{n_1}) \in \mathbb{R}_+^{n_1}$ і $\vec{\beta} \equiv (\beta_{11}, ..., \beta_{1n_1}, \beta_{21}, ..., \beta_{2n_2}, \beta_{31}, ..., \beta_{3n_3}) \in \mathbb{R}_+^n$ такі, що $\alpha_j + \beta_{lj} \ge 1$, $j \in N_l$, $l \in N_0$. Розглядатимемо простір $S_{\vec{\alpha}}^{\vec{\beta}}$ з [5]. Цей простір складається з нескінченно диференційовних функцій $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, які задовольняють умову

$$\exists\, C > 0\ \exists\, \{\vec{A}, \vec{B}\} \subset \mathbb{R}_+^n\ \forall\, \{\vec{k}, \vec{s}\} \subset \mathbb{Z}_+^n$$

$$\forall\, \xi \in \mathbb{R}^n:\ |\xi^{\vec{k}}\partial_\xi^{\vec{s}} f(\xi)| \le C\vec{A}^{\vec{k}}\vec{B}^{\vec{s}}\vec{k}^{\vec{k}\vec{\alpha}}\vec{s}^{\vec{s}\vec{\beta}}, \quad (1)$$

де $\vec{A}^{\vec{k}} \equiv \prod\limits_{l=1}^{3}\prod\limits_{j=1}^{n_l} A_{lj}^{k_{lj}}, \vec{B}^{\vec{s}} \equiv \prod\limits_{l=1}^{3}\prod\limits_{j=1}^{n_l} B_{lj}^{s_{lj}}$, $\vec{k}^{\vec{k}\vec{\alpha}} \equiv \prod\limits_{l=1}^{3}\prod\limits_{j=1}^{n_l} k_{lj}^{k_{lj}\alpha_j}, \vec{s}^{\vec{s}\vec{\beta}} \equiv \prod\limits_{l=1}^{3}\prod\limits_{j=1}^{n_l} s_{lj}^{s_{lj}\beta_{lj}}$. Тут A_{lj}, B_{lj}, k_{lj} і s_{lj} — координати відповідно векторів $\vec{A}, \vec{B}, \vec{k}$ і $\vec{s}$.

Умову (1) можна замінити такою умовою [5]:

$$\exists C > 0\ \exists \vec{B} \in \mathbb{R}_+^n\ \exists c_0 > 0\ \forall \vec{s} \in \mathbb{Z}_+^n\ \forall \xi \in \mathbb{R}^n:$$

$$|\partial_\xi^{\vec{s}} f(\xi)| \le C\vec{B}^{\vec{s}}\vec{s}^{\vec{s}\vec{\beta}} \exp\left\{-c_0\sum_{l=1}^{3}\sum_{j=1}^{n_l}|\xi_{lj}|^{1/\alpha_j}\right\}.$$

Якщо $\beta_{lj} = \beta_j$, $j \in N_l$, $l \in N_0$, то простір $S_{\vec{\alpha}}^{\vec{\beta}}$ з таким вектором $\vec{\beta}$ позначатимемо також через $S_{\vec{\alpha}}^{\vec{\beta}_0}$, де $\vec{\beta}_0 \equiv (\beta_1, ..., \beta_{n_1})$.

Зауважимо [5], що при $0 < \beta_j < 1$, $j \in N_1$, функція $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ належить до простору $S_{\vec{\alpha}}^{\vec{\beta}_0}$ тоді і тільки тоді, коли вона може бути продовжена до цілої функції $f(\xi + i\eta)$, $\{\xi, \eta\} \subset \mathbb{R}^n$, яка задовольняє нерівність

$$|f(\xi + i\eta)| \le$$

$$\le C\exp\left\{\sum_{l=1}^{3}\sum_{j=1}^{n_l}(-c_0|\xi_{lj}|^{1/\alpha_j} + c_1|\eta_{lj}|^{1/(1-\beta_j)})\right\},$$

$$\{\xi, \eta\} \subset \mathbb{R}^n, \quad (2)$$

з деякими $C > 0, c_0 > 0$ і $c_1 > 0$.

При $\beta_{lj} > 1$, $j \in N_l$, $l \in N_0$, простір $S_{\vec{\alpha}}^{\vec{\beta}}$ містить фінітні функції, тоді як при $\beta_{lj} < 1$ для принаймні однієї пари l, j в числі елементів простору $S_{\vec{\alpha}}^{\vec{\beta}}$ фінітні функції не містяться.

2. Властивості ф.р. задачі Коші. Розглянемо рівняння вигляду

$$\left(\partial_t - \sum_{l=2}^{3}\sum_{j=1}^{n_l} x_{(l-1)j}\partial_{x_{lj}} - \sum_{\|\vec{m}_1\| \le 1} a_{\vec{m}_1}(t)\partial_{x_1}^{\vec{m}_1}\right)\times$$

$$\times u(t,x) = 0, \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \quad (3)$$

де коефіцієнти $a_{\vec{m}_1} : [0,T] \to \mathbb{C}$, $\|\vec{m}_1\| \le 1$, неперервні й такі, що виконується умова $\overrightarrow{2b}$-параболічності за основною групою змінних t, x_1 [8].

Із результатів [8] випливає, що ф.р. $Z(t,x;0,\xi+i\eta)$ задачі Коші для рівняння (3) при будь-яких фіксованих $t \in (0,T]$ і $x \in \mathbb{R}^n$ є цілою функцією аргументу $\xi + i\eta$. Крім того, якщо в одержаних у [8] оцінках

$$\max\{|\partial_x^{\vec{m}} Z(t, x+iy; \tau, \xi+i\eta)|,$$

$$|\partial_\xi^{\vec{m}} Z(t, x+iy; \tau, \xi+i\eta)|\} \le$$

$$\le C_{\vec{m}}(t-\tau)^{-M_{\vec{m}}}\exp\{-c\rho(t-\tau, x, \xi)+$$

$$+c_1\rho(t-\tau, y, \eta)\},$$

$$0 \le \tau < t \le T, \{x, y, \xi, \eta\} \subset \mathbb{R}^n, \vec{m} \in \mathbb{Z}_+^n, \quad (4)$$

покласти $\vec{m} = \vec{0}$, $y = 0$, $\tau = 0$, вважати фіксованими $t \in (0,T]$ і $x \in \mathbb{R}^n$ та скористатися нерівностями

$$|x_{lj}(t) - \xi_{lj}|^{q_j} \ge$$

$$\ge 2^{-q_j+1}|\xi_{lj}|^{q_j} - |x_{lj}(t)|^{q_j}, j \in N_l, l \in N_0,$$

то дістанемо оцінку

$$|Z(t,x;0,\xi+i\eta)| \le$$

$$\le C\exp\{-c_0\rho(1,\xi,0) + c_1\rho(1,\eta,0)\},$$

$$\{\xi, \eta\} \subset \mathbb{R}^n, \quad (5)$$

в якій

$$C \equiv C(t, x(t)), \quad c_0 \equiv 2^{-q''+1} c \min\{1, T^{1-3q''}\}.$$

З оцінки (5) випливає, що для Z правильні оцінки (2) з $\alpha_j = 1/q_j$, $\beta_j = 1 - 1/q_j = 1/(2b_j), j \in N_1$. Звідси випливає, що ф.р. $Z(t,x;0,\xi)$, як функція $\xi \in \mathbb{R}^n$, належить до простору $S_{1/\vec{q}}^{1/\overrightarrow{2b}}$. Так ми позначаємо простір $S_{\vec{\alpha}}^{\vec{\beta}_0}$, з $\vec{\alpha} = (1/q_1, ..., 1/q_{n_1})$ і $\vec{\beta}_0 = (1/(2b_1), ..., 1/(2b_{n_1}))$. Тому функція $Z(t,x;0,\cdot)$ є абстрактною функцією параметрів $t \in (0,T]$ і $x \in \mathbb{R}^n$ у просторі $S_{1/\vec{q}}^{1/\overrightarrow{2b}}$. Властивості цієї функції описані в наступній лемі, доведення якої проводиться аналогічно доведенню відповідної леми з [6].

Лема. *У просторі* $S_{1/\vec{q}}^{1/\overrightarrow{2b}}$ *функція* $Z(t,x;0,\cdot)$, *як абстрактна функція параметра:*

1) $t \in (0,T]$ *(при фіксованих* $x \in \mathbb{R}^n$*), диференційовна;*

2) $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$ *(при фіксованих* $t \in (0,T]$, $x_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$ *і* $x_3 \in \mathbb{R}^{n_3}$*), нескінченно диференційовна;*

3) $x_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$ *(при фіксованих* $t \in (0,T]$, $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$ *і* $x_3 \in \mathbb{R}^{n_3}$*), нескінченно диференційовна;*

4) $x_3 \in \mathbb{R}^{n_3}$ *(при фіксованих* $t \in (0,T]$, $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$ *і* $x_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$*), нескінченно диференційовна.*

3. Існування і єдиність розв'язків задачі Коші. Для узагальненої функції $\varphi \in (S_{1/\vec{q}}^{1/\overrightarrow{2b}})'$ визначимо $< \varphi, Z(t,x;0,\cdot) >$ як значення узагальненої функції φ на функції з основного простору. Якщо φ — звичайна функція, то

$$< \varphi, Z(t,x;0,\cdot) > = \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;0,\xi)\varphi(\xi)d\xi$$

за умови, що інтеграл існує.

Задамо початкову умову

$$u(t,\cdot)|_{t=0} = \varphi, \quad \varphi \in (S_{1/\vec{q}}^{1/\overrightarrow{2b}})'. \tag{6}$$

Під розв'язком задачі Коші (3), (6) розумітимемо функцію $u(t,x)$, $(t,x) \in \Pi_{(0,T]}$, яка диференційовна один раз за t, x_2 і x_3 та $2b_j$ разів за x_{1j}, $j \in N_1$, задовольняє рівняння (3) і умову (6) у такому розумінні:

$$\forall\ f \in S_{1/\vec{q}}^{1/\overrightarrow{2b}} : \ < u(t,\cdot), f > \underset{t\to 0+}{\to} < \varphi, f > .$$

Теорема. *Задача Коші (3), (6) однозначно розв'язна. Її розв'язок диференційовний за* t, *нескінченно диференційовний за* x *і має вигляд*

$$u(t,x) = < \varphi, Z(t,x;0,\cdot) >, \ (t,x) \in \Pi_{(0,T]}. \tag{7}$$

Доведення. Згідно з лемою функція $Z(t,x;0,\cdot)$, як абстрактна функція параметрів $t \in (0,T]$ і $x \in \mathbb{R}^n$ у просторі $S_{1/\vec{q}}^{1/\overrightarrow{2b}}$, диференційовна за t і нескінченно диференційовна за x. Тому функція (7) є звичайною функцією, яка диференційовна за t і нескінченно диференційовна за x.

Оскільки Z — ф.р. задачі Коші для рівняння (3), то функція (7) задовольняє рівняння (3) у звичайному розумінні.

Нехай $f \in S_{1/\vec{q}}^{1/\overrightarrow{2b}}$. Покладемо

$$g_t(\xi) \equiv \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;0,\xi) f(x) dx =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t, x+\xi_t; 0, \xi) f(x+\xi_t) dx, \ t \in (0,T],$$

де

$$\xi_t \equiv (\xi_t^{11}, ..., \xi_t^{1n_1}, \xi_t^{21}, ..., \xi_t^{2n_2}, \xi_t^{31}, ..., \xi_t^{3n_3}),$$

$$\xi_t^{lj} \equiv \sum_{r=0}^{l-1} \frac{(-1)^r}{r!} t^r \xi_{(l-r)j}, j \in N_l, l \in N_0.$$

Якщо доведемо, що:

1) існує число $\gamma \in (0,T]$ таке, що для будь-яких $t \in (0,\gamma]$ функція g_t належить до простору $S_{1/\vec{q}}^{1/\overrightarrow{2b}}$;

2) $g_t \underset{t\to 0+}{\to} f$ в $S_{1/\vec{q}}^{1/\overrightarrow{2b}}$, то одержимо

$$\lim_{t\to 0+} < u(t,\cdot), f > = < \varphi, f >,$$

тобто функція u задовольняє умову (6) у вищезазначеному розумінні.

Справді, маємо

$$\lim_{t\to 0+} < u(t,\cdot), f >= \lim_{t\to 0+}\int\limits_{\mathbb{R}^n} u(t,x)f(x)dx =$$

$$= \lim_{t\to 0+}\int\limits_{\mathbb{R}^n} < \varphi, Z(t,x;0,\cdot) > f(x)dx =$$

$$= \lim_{t\to 0+} < \varphi, g_t >=< \varphi, f > .$$

Доведемо твердження 1). Для $t\in(0,T]$ і $\{\xi,\eta\}\subset\mathbb{R}^n$ маємо

$$|g_t(\xi+i\eta)| \le \int\limits_{\mathbb{R}^n} |Z(t,x+\xi_t+i\eta_t;0,\xi+i\eta)|\times$$

$$\times|f(x+\xi_t+i\eta_t)|dx, \qquad (8)$$

де

$$\eta_t \equiv (\eta_t^{11},...,\eta_t^{1n_1},\eta_t^{21},...,\eta_t^{2n_2},\eta_t^{31},...,\eta_t^{3n_3}),$$

$$\eta_t^{lj} \equiv \sum_{r=0}^{l-1}\frac{(-1)^r}{r!}t^r\eta_{(l-r)j}, j\in N_l, l\in N_0.$$

Оскільки у просторі $S_{1/\vec{q}}^{1/\overrightarrow{2b}}$ операція зсуву рівномірно обмежена, то для будь-яких $t\in(0,T]$ і $\{x,\xi,\eta\}\subset\mathbb{R}^n$ справджується нерівність

$$|f(x+\xi_t+i\eta_t)| \le C\exp\{-c_0\rho(1,\xi_t,0)+$$

$$+c_1\rho(1,\eta_t,0)\}, \qquad (9)$$

де сталі $C>0$, $c_0>0$ і $c_1>0$ не залежать від x.

За допомогою нерівностей

$$(a+b)^{q_j} \le 2^{q_j-1}(a^{q_j}+b^{q_j}),$$

$$3^{-1}(a^{q_j}+b^{q_j}+c^{q_j}) \le (a+b+c)^{q_j} \le$$

$$\le 3^{q_j-1}(a^{q_j}+b^{q_j}+c^{q_j}),\ a\ge 0, b\ge 0, c\ge 0,$$

так само, як в [6], одержимо

$$\rho(1,\xi_t,0)\ge\delta_0\rho(1,\xi,0), \rho(1,\eta_t,0)\le\delta_2\rho(1,\eta,0) \qquad (10)$$

для будь-яких $t\in(0,\gamma]$, якщо γ досить мале.

З нерівностей (9) і (10) випливає оцінка

$$|f(x+\xi_t+i\eta_t)| \le$$

$$\le C\exp\{-c_2\rho(1,\xi,0)+c_3\rho(1,\eta,0)\},$$

$$\{x,\xi,\eta\}\subset\mathbb{R}^n, \quad t\in(0,\gamma]. \qquad (11)$$

Для будь-яких $t\in(0,T]$ і $\{x,\xi,\eta\}\subset\mathbb{R}^n$ згідно з оцінкою (4) маємо

$$|Z(t,x+\xi_t+i\eta_t;0,\xi+i\eta)| \le$$

$$\le C_0t^{-M_{\vec{0}}}\exp\{-c_4\rho(t,x+\xi_t,\xi)+c_5\rho(t,\eta_t,\eta)\} =$$

$$= C_0t^{-M_{\vec{0}}}\exp\{-c_4\rho(t,x,0)\}. \qquad (12)$$

Використовуючи нерівності (8), (11), (12) і рівність

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} t^{-M_{\vec{0}}}\exp\{-c_4\rho(t,x,0)\}dx = \tilde{C},$$

$$t>0, x\in\mathbb{R}^n, \delta>0, \qquad (13)$$

одержуємо

$$|g_t(\xi+i\eta)| \le C_1\exp\{-c_2\rho(1,\xi,0)+$$

$$+c_3\rho(1,\eta,0)\}\int\limits_{\mathbb{R}^n} t^{-M_{\vec{0}}}\exp\{-c_4\rho(t,x,0)\}dx =$$

$$= C_2\exp\{-c_2\rho(1,\xi,0)+c_3\rho(1,\eta,0)\},$$

$$t\in(0,\gamma], \quad \{\xi,\eta\}\subset\mathbb{R}^n, \qquad (14)$$

звідки випливає правильність твердження 1).

Твердження 2) означає, що

а) при $t\to 0+$ g_t збігається до f разом з усіма своїми похідними рівномірно в кожній кулі K_R;

б) при досить малому γ функції g_t рівномірно щодо $t\in(0,\gamma]$ обмежені в просторі $S_{1/\vec{q}}^{1/\overrightarrow{2b}}$.

Оскільки в нерівності (14) сталі C_2, c_2 і c_3 не залежать від t, якщо $t\in(0,\gamma]$, то умова б) виконується.

Доведемо, що виконується умова а).

Згідно з означенням функції g_t маємо

$$\partial_\xi^{\vec{k}} g_t(\xi) =$$

$$= \sum_{\vec{s}\le\vec{k}} C_{\vec{k}}^{\vec{s}}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_\xi^{\vec{k}-\vec{s}}Z(t,x+\xi_t;0,\xi)\partial_\xi^{\vec{s}}f(x+\xi_t)dx,$$

$$\vec{k}\in\mathbb{Z}_+^n,\ t\in(0,T],\ \xi\in\mathbb{R}^n.$$

Оскільки $\partial_\xi^{\vec{k}-\vec{s}} Z(t, x+\xi_t; 0, \xi) = 0$ для $\vec{s} < \vec{k}$ [8], то

$$\partial_\xi^{\vec{k}} g_t(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t, x+\xi_t; 0, \xi) \partial_\xi^{\vec{k}} f(x+\xi_t) dx =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t, x+\xi_t; 0, \xi) dx \partial_\xi^{\vec{k}} f(\xi_t) +$$

$$+ \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t, x+\xi_t; 0, \xi)(\partial_\xi^{\vec{k}} f(x+\xi_t) - \partial_\xi^{\vec{k}} f(\xi_t)) dx \equiv$$

$$\equiv I_1(t, \xi) + I_2(t, \xi), \ t \in (0, T], \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (15)$$

Враховуючи те, що [8]

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t, x; 0, \xi) dx \underset{t \to 0+}{\to} 1,$$

причому рівномірно щодо $\xi \in \mathbb{R}^n$, і використовуючи оцінки похідних від f, одержуємо

$$I_1(t, \xi) \underset{t \to 0+}{\to} \partial_\xi^{\vec{k}} f(\xi), \quad (16)$$

рівномірно щодо $\xi \in K_R$.

Доведемо, що

$$I_2(t, \xi) \underset{t \to 0+}{\to} 0, \quad (17)$$

рівномірно щодо $\xi \in \mathbb{R}^n$. Для цього зобразимо інтеграл $I_2(t, \xi)$ у вигляді суми інтеграла $I_2^{'}(t, \xi)$ по K_δ і інтеграла $I_2^{''}(t, \xi)$ по $\mathbb{R}^n \setminus K_\delta$, $\delta > 0$. Нехай ε — довільно взяте додатне число. Виберемо $\delta > 0$ так, щоб

$$|\partial_\xi^{\vec{k}} f(x+\xi_t) - \partial_\xi^{\vec{k}} f(\xi_t)| < \varepsilon \quad (18)$$

для всіх $x \in K_\delta$, $t \in (0, T]$ і $\xi \in \mathbb{R}^n$.

За допомогою оцінки (12) при $\eta = 0$, нерівності (18) та нерівності (22) з [9], а також рівності (13) маємо

$$|I_2^{'}(t, \xi)| \le \varepsilon \int\limits_{K_\delta} |Z(t, x+\xi_t; 0, \xi)| dx \le$$

$$\le C_0 \varepsilon \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\{-c_4 \rho(t, x, 0)\} t^{-M_{\vec{0}}} dx = C\varepsilon,$$

$$\xi \in \mathbb{R}^n, \quad (19)$$

$$|I_2^{''}(t, \xi)| \le \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus K_\delta} |Z(t, x+\xi_t; 0, \xi)| \times$$

$$\times |\partial_\xi^{\vec{k}} f(x+\xi_t) - \partial_\xi^{\vec{k}} f(\xi_t)| dx \le$$

$$\le L_{\vec{k}} C_0 \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus K_\delta} \exp\{-c_4 \rho(t, x, 0)\} t^{-M_0} dx \le$$

$$\le L_{\vec{k}} C_0 \exp\left\{-\frac{c_4}{2} t^{1-q'} \left(\frac{\delta}{2}\right)^{q''}\right\} \times$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\left\{-\frac{c_4}{2} \rho(t, x, 0)\right\} dx =$$

$$= L_{\vec{k}} C \exp\{-c_6 t^{1-q'} \delta^{q''}\}, \ t \in (0, \delta_0), \xi \in \mathbb{R}^n, \quad (20)$$

де

$$L_{\vec{k}} \equiv \sup_{\substack{t \in [0,T] \\ \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n}} |\partial_\xi^{\vec{k}} f(x+\xi_t)| +$$

$$+ \sup_{\substack{t \in [0,T] \\ \xi \in \mathbb{R}^n}} |\partial_\xi^{\vec{k}} f(\xi_t)|, \quad c_6 \equiv 2^{-q''-1} c_4.$$

Із нерівності (20) випливає, що

$$\exists\, \gamma \in (0, T] \ \forall\, t \in (0, \gamma) \ \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n :$$

$$|I_2^{''}(t, \xi)| < \varepsilon.$$

Звідси та з нерівності (19) одержуємо $|I_2(t, \xi)| \le (C+1)\varepsilon$, $t \in (0, \gamma)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$. Оскільки ε довільне, то виконується співвідношення (17). Із співвідношень (15)—(17) випливає правильність умови а).

Тепер доведемо, що розв'язок задачі (3), (6), який одержано вище, єдиний. Розглянемо задачу Коші для спряженого рівняння

$$\partial_\tau v(\tau, \xi) = A_\tau v(\tau, \xi),$$

$$(\tau, \xi) \in \Pi_{[0, t_1)}, \quad v(\tau, \cdot)|_{\tau = t_1} = \psi, \quad (21)$$

де A_τ — оператор, який визначається формулою

$$(A_\tau f)(\tau, \xi) \equiv \left(\sum_{l=2}^{3} \sum_{j=1}^{n_l} \xi_{(l-1)j} \partial_{\xi_{lj}} - \right.$$

$$\left. - \sum_{\|\vec{m}_1\| \le 1} \overline{a_{\vec{m}_1}(\tau)} (-\partial_{\xi_1})^{\vec{m}_1} \right) f(\xi),$$

$$\xi \in \mathbb{R}^n, f \in S_{1/\vec{q}}^{1/\overrightarrow{2b}}; \ 0 < t_1 \le T, \psi \in S_{1/\vec{q}}^{1/\overrightarrow{2b}}.$$

Зауважимо, що $A_\tau f \in S_{1/\vec{q}}^{1/\overrightarrow{2b}}$ при будь-яких $\tau \in [0,T]$ і $f \in S_{1/\vec{q}}^{1/\overrightarrow{2b}}$.

Оператор A^*_τ, спряжений до A_τ, діє у просторі $(S_{1/\vec{q}}^{1/\overrightarrow{2b}})'$ і на гладких функціях f визначається формулою

$$(A^*_\tau f)(\tau,\xi) = \Bigg(-\sum_{l=2}^{3}\sum_{j=1}^{n_l} \xi_{(l-1)j}\partial_{\xi_{lj}} - \\ - \sum_{\|\vec{m}_1\|\le 1} \overline{a_{\vec{m}_1}(\tau)}\partial_{\xi_1}^{\vec{m}_1}\Bigg) f(\xi), \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Задачу Коші (3), (6) можна записати у вигляді

$$\partial_t^1 u(t,x) = -A^*_t u(t,x), \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]},$$

$$u(t,\cdot)|_{t=0} = \varphi, \quad \varphi \in (S_{1/\vec{q}}^{1/\overrightarrow{2b}})'. \qquad (22)$$

Згідно із загальною теоремою єдиності з §2 розділу II книги [9] розв'язок задачі (22) єдиний, якщо задача (21) розв'язна для будь-яких $t_1 \in (0,T]$ і $\psi \in S_{1/\vec{q}}^{1/\overrightarrow{2b}}$.

Оскільки ψ — обмежена гладка функція, то розв'язок у звичайному розумінні задачі (21) виражається формулою

$$v(\tau,\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z^*(\tau,\xi;t_1,x)\psi(x)dx, \ (\tau,\xi) \in \Pi_{[0,t_1)},$$

де Z^* — ф.р. задачі Коші для спряженого рівняння.

Враховуючи зв'язок Z^* із Z [8], так само, як при дослідженні властивості функції g_t, доводиться існування такого $\gamma \in [0,t_1)$, що при будь-якому $\tau \in [\gamma,t_1)$ $v(\tau,\cdot) \in S_{1/\vec{q}}^{1/\overrightarrow{2b}}$ і $v(\tau,\cdot) \underset{\tau\to t_1}{\to} \psi$ у просторі $S_{1/\vec{q}}^{1/\overrightarrow{2b}}$. Якщо $\gamma > 0$, то, повторивши аналогічні міркування і використавши формулу згортки [8], одержимо, що при будь-якому $\tau \in [0,t_1)$ $v(\tau,\cdot) \in S_{1/\vec{q}}^{1/\overrightarrow{2b}}$ і $v(\tau,\cdot) \underset{\tau\to t_1}{\to} \psi$ у просторі $S_{1/\vec{q}}^{1/\overrightarrow{2b}}$. Отже, задача (21) розв'язна при будь-яких $t_1 \in (0,T]$ і $\psi \in S_{1/\vec{q}}^{1/\overrightarrow{2b}}$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Городецкий В.В.* Принцип локализации для решений задачи Коши для параболических по Петровскому систем в классах обобщенных функций // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1984.— N10.— С.5—7.

2. *Городецкий В.В.* Принцип локализации для решений задачи Коши для параболических систем в классе обобщенных функций бесконечного порядка // Дифференц. уравнения.— 1985.— **21**, N6.— С.1077—1079.

3. *Городецкий В.В.* О локализации и стабилизации решений задачи Коши для параболических систем в классах обобщенных функций // Изв. вузов. Математика.— 1987.— N6.— С.37—46.

4. *Городецкий В.В.* О локализации решений задачи Коши для $\overrightarrow{2b}$-параболических систем в классах обобщенных функций // Дифференц. уравнения.— 1988.— **24**, N2.— С.348—350.

5. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Пространства основных и обобщенных функций.— М.: Физматгиз, 1958.— 307 с.

6. *Андросова Л.Н., Ивасишен С.Д.* Однозначная разрешимость и свойство локализации решений задачи Коши для одного класса вырожденных параболических уравнений в пространствах обобщенных функций // Киев. ун-т.— К., 1989.— 40 с.— Деп. в УкрНИИНТИ 01.11.1989, N2388-Ук89.

7. *Ивасишен С.Д., Эйдельман С.Д.* $\overrightarrow{2b}$-параболические уравнения с вырождением по части переменных // Докл. РАН.— 1998.— **360**, N3.— С.303—305.

8. *Ивасишен С.Д., Эйдельман С.Д.* О фундаментальных решениях задачи Коши для вырожденных уравнений типа Колмогорова с $\overrightarrow{2b}$-параболической частью по основной группе переменных // Дифференц. уравнения.— 1998.— **34**, N11.— С.1536—1545.

9. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений.— М.: Физматгиз, 1958.— 274 с.

Стаття надійшла до редколегії 15.03.2000