ПЕРІОДИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ СИСТЕМ ДВОХ ЛІНІЙНИХ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ З НЕСИМЕТРИЧНОЮ МАТРИЦЕЮ ЗМІННОГО РАНГУ ПРИ ПОХІДНИХ

В. О. Єрьоменко, А. М. Алілуйко
Тернопільський національний економічний університет, Тернопіль, Україна
aliluyko@imath.kiev.ua

Системи рівнянь виду

$$Lx \equiv A(t)x^{(1)} + B(t)x = f(t), \tag{1}$$

де $x \in \mathbb{R}^n$, $x^{(1)} = dx / dt$, A та B — квадратні матриці,

$$\operatorname{rang} A(t) \equiv \text{const} < n \ \ \forall t \in [0;T], \tag{2}$$

найбільш повно досліджені в Самойленко, Шкіль, Яковець (2000). Задача про періодичні розв'язки вивчена для систем диференціальних рівнянь з додатно визначеною симетричною лінійною частиною (Мозер, 1968), для яких умова (2) може не виконуватися.

У даному повідомленні для $n = 2$ і несиметричної матриці $A(t)$, $0 \le \operatorname{rang} A(t) \le 2$, розглядаються достатні умови існування єдиного періодичного розв'язку системи (1) з періодичними коефіцієнтами для довільного вектора неоднорідності, а також обґрунтовується ітераційний метод Гальоркіна його наближеної побудови (випадок $\operatorname{rang} A \in [1,2]$ досліджувався в Єрьоменко (1998).

Теорема. *Нехай відносно системи двох рівнянь (1) виконуються такі умови:*

1) $A, B, f \in C^r(T_1)$, $T_1 = \left[0;2\pi\right], A^* \ne A$, $r \ge 1 + k,\ k \ge 1$,

де зірочка означає операцію транспонування матриці;

2) для вектора

$$\bar{\alpha} = (a_{12}, a_{22}, -a_{11}, -a_{21}),$$

де a_{ij} *— елементи матриці* A*, можна вказати вектор*

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \in C^r(T_1)$$

такий, що

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} \bar{\alpha} \\ \alpha \end{pmatrix} = 1 \ \ \forall t \in T_1;$$

3) існують скалярні функції $\lambda_i(t) \in C^r(T_1)$, $i = \overline{1,3}$*, такі, що для довільного цілого* $s = \overline{0,r}$ *виконується нерівність*

$$\min_{\|\xi\|=1} \left\langle [V(t)B(t) + (s - 1/2)(V(t)A(t))^{(1)}]\xi, \xi \right\rangle \ge \gamma = \text{const} > 0,$$

де

$$V(t) = \begin{pmatrix} -\lambda_1\alpha_4 + \lambda_2\alpha_2 + \lambda_3\alpha_3 & -\lambda_1\alpha_3 - \lambda_2\alpha_1 - \lambda_3\alpha_4 \\ \lambda_1\alpha_2 + \lambda_2\alpha_4 - \lambda_3\alpha_1 & \lambda_1\alpha_4 - \lambda_2\alpha_3 + \lambda_3\alpha_2 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Тоді система (1) має для будь-якої неоднорідності $f(t)$ *єдиний розв'язок* $x = x_0(t) \in C^k(T_1)$. *Наближення до* $x_0(t)$ *знаходиться із системи рівнянь*

$$S_n L u_n(t) = S_n f(t), \quad (4)$$

де $S_n g(t) = \sum_{|k| \le n} g_k e^{ikt}$, $g_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(t) e^{-ikt} dt$, $u_n(t) = \sum_{|k| \le n} u_k e^{ikt}$.

Система (4) має розв'язок $u_n(t)$ для довільної функції $f \in H^r(T_1)$ і для всіх $n \ge 0$, який при $n \to \infty$ збігається в просторі $C^k(T_1) \cap H^{r-1}(T_1)$ до функції $x_0(t)$, причому швидкість збіжності визначається нерівністю

$$\left| x_0(t) - u_n(t) \right|_s \le c n^{-(k-s+1)} \left\| f(t) \right\|_r$$

для будь-якого $s = \overline{0,k}$ і деякої додатної сталої c, яка не залежить від n та f.

Тут

$$\left\| \cdot \right\|_r^2 = \left(K^r \cdot, \cdot \right)_\circ, \; K = 1 - d^2 / dt^2,$$

$$(\cdot,\cdot)_\circ = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left\| \cdot \right\|^2 dt, \; \left| \Phi(t) \right|_r = \max_{t \in T_1, 0 \le \rho \le r} \left\| \Phi^{(\rho)}(t) \right\|,$$

де $\| \cdot \|$ — евклідова векторна або узгоджена матрична норма.

Як приклад розглянемо систему

$$\begin{cases} (\sin^2 t) x_1^{(1)} + (\sin t \cos^2 t) x_2^{(1)} + p x_2 = f_1(t), \\ -(\sin^3 t) x_1^{(1)} + (\sin t - \sin t \cos t) x_2^{(1)} - p x_1 = f_2(t), \end{cases} \quad (5)$$

де p — додатний параметр. Визначимо, виходячи з умов теореми, таке значення p, щоб система (5) мала при будь-якому векторі неоднорідності гладкий періодичний розв'язок.

Вектор α, для якого виконується умова 2) теореми має такий вигляд

$$\alpha = (\cos^2 t; 1 - \cos t; -\sin t; \sin^2 t).$$

Здійснивши відповідний вибір λ_1, λ_2, λ_3, отримаємо матрицю (3):

$$V(t) = \begin{pmatrix} \beta_1(\cos t - 1) + \beta_2 \sin t & \beta_1 \\ \beta_2 & \beta_1(\cos t - 1) + \beta_2 \sin t \end{pmatrix},$$

де β_1 та β_2 — довільні відмінні від нуля числа різних знаків. Якщо $\beta_1 = -1$, $\beta_2 = 1$, то матриця $(VB + B^* V^*) / 2$ стає додатно визначеною.

Здійснивши відповідні оцінки, отримаємо, що система (5) має періодичний розв'язок $x_0(t,p) \in C^k(T_1)$, $k \geq 1$, якщо параметр p задовольняє умову

$$p \geq \gamma + (1+k)7,4,$$

де γ — деяке додатне число.

Список літератури

Єрьоменко, В. О. (1998). Періодичні розвязки систем двох лінійних звичайних диференціальних рівнянь першого порядку з вироджуваною несиметричною матрицею при похідних. *Укр. мат. журн.*, *50* (3), 350—356.

Мозер, Ю. (1968). Быстросходящийся метод итераций и нелинейные дифференциальные уравнения. *Успехи математической науки*, *23* (4), 179—238.

Самойленко, А. М., Шкіль, М. І., Яковець, В. П. (2000). *Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями: Навчальний посібник.* Київ: Вища школа.