ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ ОПЕРАТОРИ В ПРОСТОРОВИХ ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧНОЇ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ

Неміш Василь Миколайович[1],
Березька Катерина Миколаївна[2]
[1]*кандидат фізико-математичних наук, доцент*
[2]*кандидат технічних наук, доцент*
Тернопільський національний економічний університет, Тернопіль, Україна
nemish_vm@ukr.net, km.berezka@gmail.com

Розглядається в деякій площині трьохмірного евклідового простору довільний гладкий контур Γ, якому відповідає функція

$$r_0^{-1}\omega(\zeta) = \zeta + \varepsilon f(\zeta) = re^{i\theta} \ \ (\zeta = \rho^{i\gamma}, |\varepsilon| << 1).$$

Вона здійснює конформне відображення зовнішність одиничного круга $|\zeta| \geq 1$ (внутрішність $|\zeta| \leq 1$) на зовнішність (внутрішність) даного контура. Комплексна постійна r_0 характеризує абсолютні розміри і орієнтацію по відношенню до системи координат, а малий параметр ε – його форму. Для однозначності конформного відображення потрібно, щоб корені рівняння $1 + \varepsilon f'(\zeta) = 0$ лежали в середині круга одиничного радіуса ($\rho = 1$) в площині ζ. В трьохмірному просторі контур Γ характеризує клас близьких до сферичних поверхонь, утворених обертанням кривої Γ навколо осі симетрії OZ.

Довільна функція $F(r(\rho,\gamma,\varepsilon),\theta(\rho,\gamma,\varepsilon))$ може бути представлена степеневим рядом Маклорена

$$F(r(\rho,\gamma,\varepsilon),\theta(\rho,\gamma,\varepsilon)) = F(\rho,\gamma) + \frac{\varepsilon}{1!}L^{(1)}F(\rho,\gamma) + \frac{\varepsilon^2}{2!}L^{(2)}F(\rho,\gamma) + \dots$$

Тут $L^{(1)}$, $L^{(2)}$ – диференціальні оператори.

Задачу про напружено деформівний стан однорідного ізотропного середовища обмеженого поверхнями обертання розглянутого вигляду досліджуємо наближеним методом збурення форми границі [1]. Для цього компоненти напружень σ_{kj} і переміщень u_j представимо у вигляді

$$\sigma_{kj} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \sigma_{kj}^{(n)}, \ u_j = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n u_j^{(n)} \ \ (k, j = \rho, \gamma).$$

Компоненти послідовних наближень знаходимо з рекурентних формул

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{\rho\rho}^{(n)} \\ \sigma_{\gamma\gamma}^{(n)} \end{Bmatrix} = \sum_{j=0}^{n} \left[\Lambda_1^{(n-j)} \begin{Bmatrix} \sigma_{rr}^{(j)} \\ \sigma_{\theta\theta}^{(j)} \end{Bmatrix} \pm \Lambda_2^{(n-j)} \left(\sigma_{\theta\theta}^{(j)} - \sigma_{rr}^{(j)} \right) \pm \Lambda_3^{(n-j)} \sigma_{r\theta}^{(j)} \right],$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}^{(n)} = \sum_{j=0}^{n} \Lambda_1^{(n-j)} \sigma_{\alpha\alpha}^{(j)},$$

$$\begin{Bmatrix} u_{\rho}^{(n)} \\ u_{\gamma}^{(n)} \end{Bmatrix} = \sum_{j=0}^{n} \left[\Lambda_5^{(n-j)} \begin{Bmatrix} u_r^{(j)} \\ u_{\theta}^{(j)} \end{Bmatrix} \pm \Lambda_6^{(n-j)} \begin{Bmatrix} u_{\theta}^{(j)} \\ u_r^{(j)} \end{Bmatrix} \right].$$

Тут $\Lambda_i^{(n)}$ $(i = \overline{1,6})$ – диференціальні оператори, які залежать від функції $f(\zeta) = \zeta^{-k}$ і при $n = 0,1,2$ мають вигляд

$$\Lambda_1^{(0)} = \Lambda_5^{(0)} = 1,\ \Lambda_2^{(0)} = \Lambda_3^{(0)} = \Lambda_6^{(0)} = \Lambda_2^{(1)} = 0,\ \Lambda_1^{(1)} = \Lambda_5^{(1)} = L^{(1)},$$

$$\Lambda_3^{(1)} = 2\Lambda_6^{(1)} = \frac{1}{i} A(\zeta, \bar{\zeta}),\ \Lambda_1^{(2)} = \frac{1}{2} L^{(2)},\ \Lambda_2^{(2)} = -\frac{1}{4} A^2(\zeta, \bar{\zeta}),$$

$$\Lambda_3^{(2)} = \frac{1}{i} \left[A(\zeta, \bar{\zeta}) L^{(1)} - \frac{1}{2} B(\zeta, \bar{\zeta}) \right],\ \Lambda_5^{(2)} = \frac{1}{2} \left[L^{(2)} + \frac{1}{4} A^2(\zeta, \bar{\zeta}) \right],$$

$$\Lambda_6^{(2)} = \frac{1}{2i} \left[A(\zeta, \bar{\zeta}) L^{(1)} - \frac{1}{2} B(\zeta, \bar{\zeta}) \right],$$

$$\Bigg(A(\zeta, \bar{\zeta}) = \frac{\overline{f(\zeta)}}{\bar{\zeta}} - \frac{f(\zeta)}{\zeta} + f'(\zeta) - \overline{f'(\zeta)},$$

$$B(\zeta, \bar{\zeta}) = \frac{\overline{f^2(\zeta)}}{\bar{\zeta}^2} - \frac{f^2(\zeta)}{\zeta^2} + [f'(\zeta)]^2 - \overline{[f'(\zeta)]^2} \Bigg).$$

Величини $\sigma_{rr}^{(j)} = \sigma_{rr}^{(j)}(\rho, \gamma)$, $\sigma_{\theta\theta}^{(j)} = \sigma_{\theta\theta}^{(j)}(\rho, \gamma)$, $\sigma_{\alpha\alpha}^{(j)} = \sigma_{\alpha\alpha}^{(j)}(\rho, \gamma)$, $u_r^{(j)} = u_r^{(j)}(\rho, \gamma)$ записуються на основі їх зображення в сферичній системі координат r, θ на ρ, γ в криволінійних ортогональних координатах. При розв'язуванні конкретних задач ця особливість є суттєвою.

Список використаних джерел

1. Гузь А. Н., Немиш Ю. Н. Методы возмущений в пространственных задачах теории упругости. – К.: Вища школа – 1982. – 352 с.