УДК 518.25

Л. М. Семчишин, викладач

Чортківський інститут підприємництва і бізнесу, Тернопільський національний економічний університет, м. Тернопіль

РОЗВ'ЯЗАННЯ ПРЯМОКУТНИХ ТА РОЗРІДЖЕНИХ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ З λ-МАТРИЦЯМИ В МОДЕЛЯХ В. ЛЕОНТЬЄВА

У статті розглянено новий підхід до розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь В. Леонтьєва із прямокутними λ – матрицями. Створено оптимізаційну модель з матрицями міжгалузевого балансу та запропоновано ефективний обчислювальний метод реалізації цієї моделі. Проаналізовано деякі нові підходи до обчислювальних алгоритмів. Описано ефективний метод розв'язування розріджених систем лінійних алгебраїчних рівнянь із блочними елементами.

Ключові слова: *статична модель Леонтьєва, прямокутні λ – матриці, розріджені системи, ланцюгові дроби, кількість записів, обчислювальні алгоритми.*

Вступ. Успішне розв'язання численних задач економіки стало можливим лише завдяки широкому використанню математичних моделей, обчислювальних методів і комп'ютерних технологій. Застосування математики в економіці дозволяє виділити й формально описати найголовніші зв'язки між економічними змінними та параметрами об'єктів дослідження, індуктивним шляхом одержати нові відомості про об'єкт, зробити важливі теоретичні висновки і прийняти правильні економічні рішення. Головні переваги математики як засобу наукового пізнання найповніше розкриваються саме у процесі побудови математичних моделей.

Постановка проблеми. Під моделлю економіки розумітимемо опис математичними методами процесів з метою встановлення кількісних і логічних залежностей між різними елементами економічних систем (факторами, інгредієнтами). Залежно від того, на який економічний процес звертається основна увага, при побудові й дослідженні моделі використовується відповідний математичний апарат.

Обчислювальний експеримент дозволяє за найменший час експлуатації ЕОМ із заданою точністю кількісно та якісно описати досліджувану проблему, інакше кажучи побудувати математичну модель, аналіз якої в свою чергу дозволяє глибше проникнути в суть явища, що вивчається.

Процес дослідження певних явищ за допомогою математичного моделювання, можна умовно розділити на 4 етапи.

Перший етап — формулювання і запис у математичних термінах і символах якісних уявлень про зв’язки між параметрами процесу або об’єктами, здійснених на основі глибокого вивчення функціонування досліджуваного явища.

Другий етап — дослідження одержаної математичної моделі. Тут основним є отримання кількісної вихідної інформації, яку дає розв’язання математичної задачі.

Третій етап — з’ясування того, чи задовольняє прийнята гіпотетична модель критерію практики, тобто чи узгоджуються результати спостережень з теоретичними висновками моделі в межах точності спостережень.

Четвертий етап — повторний аналіз моделі у зв’язку з накопиченням даних про досліджуванні явища.

Аналіз останніх публікацій. У роботі [6, с. 128—135] запропоновано новий підхід до розв’язування розріджених систем лінійних алгебраїчних рівнянь із блочними елементами. Проведено підрахунок кількостей записів та операцій при чисельній реалізації алгоритму множення матриць.

Актуальність теми. Розв’язання прямокутних та розріджених систем лінійних рівнянь з λ -матрицями великого розміру в моделях В. Леонтьєва вимагає застосування ефективних чисельних методів.

Слід зауважити, що питання розв’язання розріджених систем лінійних рівнянь з λ -матрицями розглядалися у працях [5]. Однак, лише в окремих з них розглядаються питання щодо розв’язання прямокутних систем лінійних рівнянь [1].

Мета роботи. Метою роботи є проведення аналізу розв’язання, одержання деяких теоретичних оцінок та розгляд підходів розв’язку одержаних систем числових рівнянь.

Основна частина.

У міжгалузевому балансі технологічні зв’язки між галузями визначаються коефіцієнтами прямих матеріальних витрат

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}; i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,n}, \tag{1}$$

які показують витрати продукції i – ої галузі на виробництво одиниці продукції j-ої галузі. Очевидно, що валова продукція кожної i-ої галузі виробника x_i складається з проміжної (продукції виробничого споживання) $\sum_{j=1}^{n} x_{ij}$ та кінцевої продукції y_i, тобто

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_j, \left(i = \overline{1,n}\right) \tag{2}$$

Враховуючи співвідношення (1) запишемо

$$x_i = \sum_{j-1}^{n} a_{ij} x_{ij} + y_j, \left(i = \overline{1,n}\right) \tag{3}$$

або в матрично-векторній формі

$$X = Ax + y, \tag{4}$$

де $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$ та $y = (y_1, y_2, ..., y_n)^T$ — відповідно вектори валової й кінцевої продукції, а матриця $A = (a_{ij}), \left(i, j = \overline{1,n}\right)$ — матриця коефіцієнтів прямих матеріальних витрат. В економіко-математичній літературі систему (4) прийнято називати статичною моделлю Леонтьєва [3, с. 8].

Розглянемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь В. Леонтьєва із прямокутними λ – матрицями. Запишемо систему (4) у вигляді

$$X(\lambda) = A(\lambda)X(\lambda) + y(\lambda), \tag{5}$$

Звідси

$$(A(\lambda) - E)X(\lambda) = -y(\lambda),$$

де $A(\lambda)$ — матриця розміру $n \times m$, елементи якої є поліномами від λ. Припустимо, що значення для λ і коефіцієнтів многочленів беруться з деякого поля F таким чином: елементи матриці $A(\lambda)$ обчислюються для деякого часткового значення λ, наприклад,

$\lambda = \lambda_0 \in F^{n \times m}$. $y(\lambda)$ — вектор $\left(a_{1,m}(\lambda), a_{2,m}(\lambda), ..., a_{n,m}(\lambda)\right)^T$. Матриця $A(\lambda)$ і вектор $y(\lambda)$ мають степінь l, тобто $a_{ij}(\lambda) = \sum_{k=0}^{l} a_{i,j} \lambda^{l-k}, \left(i = \overline{1,n},\ j = \overline{1, m+1}\right)$.

Подамо матрицю $A(\lambda)$ і вектор $y(\lambda)$ у вигляді матричних многочленів:

$$A(\lambda) = \lambda^l A_0 + \lambda^{l-1} A_1 + ... + A_l \text{ та } y(\lambda) = \lambda^l y_0 + \lambda^{l-1} y_1 + ... + y_l.$$

Розв'язок системи шукається у вигляді частки двох поліномів з невідомими коефіцієнтами.

$$X(t) = \frac{\sum_{i=0}^{nl} \lambda^{nl-i} x_i}{\sum_{i=0}^{nl} \lambda^{nl-i} z_i}, \tag{6}$$

де K — ранг матриці $A(\lambda) - E$, $x_0, x_1, ..., x_{\ln}$ — вектори розмірності r, а $z_0, z_1, ..., z_{\ln}$ — скалярні величини. Тоді систему (5) можна записати наступним чином.

$$\frac{\sum_{i=0}^{nl}\lambda^{nl-i}x_i}{\sum_{i=0}^{nl}\lambda^{nl-i}z_i}=\left(\lambda^l A_0+\lambda^{l-1}A_1+\ldots+\lambda A_{l-1}+A_l\right)\cdot\frac{\sum_{i=0}^{nl}\lambda^{nl-i}x_i}{\sum_{i=0}^{nl}\lambda^{nl-i}z_i}+\sum_{i=0}^{l}\lambda^{l-i}y_i$$

Домноживши, праву і ліву частини рівності на $\sum_{i=0}^{nl}\lambda^{nl-i}z_i$ матимемо:

$$\sum_{i=0}^{nl}\lambda^{nl-i}x_i=\left(\lambda^l A_0+\lambda^{l-1}A_1+\ldots+\lambda A_{l-1}+A_l\right)\times$$
$$\times\sum_{i=0}^{nl}\lambda^{nl-i}x_i+\sum_{i=0}^{l}\lambda^{l-i}y_i\cdot\sum_{i=0}^{nl}\lambda^{nl-i}x_i.$$

Звідси,

$$\left(\lambda^{nl}x_0+\lambda^{nl-1}x_1+\lambda^{nl-2}x_2+\ldots+\lambda^2x_{nl-2}+\lambda x_{nl-1}+x_{nl}\right)\times$$
$$\times\left(E-\lambda^l A_0-\lambda^{l-1}A_1-\ldots-\lambda A_{l-1}-A_l\right)+\left(\lambda^l y_0+\lambda^{l-1}y_1+\ldots+y_l\right)\times$$
$$\times\left(\lambda^{nl}z_0+\lambda^{nl-1}z_1+\lambda^{nl-2}z_2+\ldots+\lambda^2z_{nl-2}+\lambda z_{nl-1}+z_{nl}\right)=0.$$

Відкривши дужки та згрупувавши члени у лівій і правій частинах рівності при однакових степенях λ запишемо:

$$\lambda^{nl}x_0+\lambda^{nl-1}x_1+\lambda^{nl-2}x_2+\ldots+\lambda^2x_{nl-2}+\lambda x_{nl-1}+x_{nl}=$$
$$=\left(\lambda^l A_0+\lambda^{l-1}A_1+\ldots+\lambda A_{l-1}+A_l\right)\cdot\left(\lambda^{nl}x_0+\lambda^{nl-1}x_1+\lambda^{nl-2}x_2+\ldots+\right.$$
$$\left.+\lambda^2x_{nl-2}+\lambda x_{nl-1}+x_{nl}\right)+\left(\lambda^l y_0+\lambda^{l-1}y_1+\ldots+\lambda y_{l-1}+y_l\right)\times$$
$$\times\left(\lambda^{nl}z_0+\lambda^{nl-1}z_1+\lambda^{nl-2}z_2+\ldots+\lambda^2z_{nl-2}+\lambda z_{nl-1}+z_{nl}\right).$$

Звідси,

$$\left[\lambda^{nl}x_0+\lambda^{nl-1}x_1+\lambda^{nl-2}x_2+\ldots+\lambda^2x_{nl-2}+\lambda x_{nl-1}+x_{nl}-\lambda^{l(n+1)}x_0A_0-\right.$$
$$-\lambda^{l(n+1)-1}x_0A_1-\ldots-\lambda^{ln+1}x_0A_{l-1}-\lambda^{ln}x_0A_0-\lambda^{l(n+1)-1}x_1A_0-\lambda^{l(n+1)-2}x_1A_1-\ldots$$
$$-\lambda^{ln}x_1A_{l-1}-\lambda^{ln-1}x_1A_l-\lambda^{l(n+1)-2}x_2A_0-\lambda^{l(n+1)-3}x_2A_1-\ldots-\lambda^{ln-1}x_2A_{l-1}-$$
$$-\lambda^{ln-2}x_2A_l-\ldots-\lambda^{l+2}x_{nl-2}A_0--\lambda^{l+1}x_{nl-2}A_1-\ldots-\lambda^3x_{nl-2}A_{l-1}-\lambda^2x_{nl-2}A_l-$$
$$-\lambda^3x_{nl-1}A_0-\lambda^l x_{nl-1}A_1-\ldots-\lambda^2x_{nl-1}A_{l-1}-\lambda x_{nl-1}A_l-\lambda^l x_{nl}A_0-\lambda^{l-1}x_{nl}A_1-\ldots$$
$$\left.-\lambda x_{nl}A_{l-1}-x_{nl}A_l\right]+\left[\lambda^{l(n+1)}y_0z_0+\lambda^{l(n+1)-1}y_0z_1+\lambda^{l(n+1)-2}y_0z_2+\right.$$
$$+\lambda^{l+2}y_0z_{nl-2}+\lambda^{l+1}y_0z_{nl-1}+\lambda^l y_0z_{nl}+\lambda^{l(n+1)-1}y_1z_0+\lambda^{l(n+1)-2}y_1z_1+$$

$$+\lambda^{l(n+1)-3}y_1z_2+\ldots+\lambda^{l+1}y_1z_{nl-2}+\lambda^{l}y_1z_{nl-1}+\lambda^{l-1}y_1z_{nl}+\ldots+\lambda^{nl}y_lz_0+$$
$$+\lambda^{nl-1}y_lz_1+\lambda^{nl-2}y_lz_2+\ldots+\lambda^{2}y_lz_{nl-2}+\lambda z_{nl-1}y_l+z_{nl}y_l\,\big]=0\,.$$

Оскільки $A(\lambda)\in F^{n\times m}$, а $y(\lambda)\in F^{n}$, то в загальному випадку, прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях, одержимо числову систему $m(l+s+1)$ рівнянь з $m(s+1)$ невідомими x_{ij} і $(s+1)$ невідомими z_j

$$\begin{cases}-A_0x_0-y_0z_0=0;\\ -A_1x_0-A_0x_1-y_0z_1-y_1z_0=0;\\ -A_1x_1-A_0x_2-y_0z_2-y_1z_1=0;\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ -\sum\limits_{s=0}^{l}A_sx_{p-s}-\sum\limits_{s=0}^{l}y_sz_{p-s}=0;\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ x_{nl-1}-A_lx_{nl-1}-x_{nl}A_{l-1}-z_{nl-1}y_l=0;\\ x_{nl}-A_lx_{nl}-z_{nl}y_l=0\end{cases}\tag{7}$$

Даний підхід дозволяє проводити аналіз розв'язання прямокутних систем, а також одержувати деякі теоретичні оцінки.

Можна застосувати кілька обчислювальних алгоритмів для розв'язання одержаних систем числових рівнянь (7). Розглянемо деякі найбільш ефективні підходи.

Стрічкова схема розрізання. Схематична матриця числової системи може бути подана у вигляді:

$$\begin{pmatrix}\times & I &&&&&&&&\\ \times & I & \times & I &&&&&&\\ \times & I & \times & I & \times & I &&&&\\ \times & I & \times & I & \times & I & \times & I &&\\ && \times & I & \times & I & \times & I & \times & I\\ &&&& \times & I & \times & I & \times & I\\ &&&&&& \times & I & \times & I\\ &&&&&&&& \times & I\end{pmatrix},\tag{8}$$

де через "×" позначені квадратні клітки, а через "I" — прямокутні блоки.

Для визначеності будемо вважати, що система (7) складається з $m(l+s+1)$ рівнянь і має $m(l+s+1)+k$ невідомих $(k \ge 1)$. Нехай, $rank A_0 = \min\{m,n\}$.

Перестановкою стовпців систему (8) можна перетворити таким чином, щоб її матриця набула заповнення:

$$\begin{pmatrix}
\times & & & & & I & & & & \\
\times & \times & & & & I & I & & & \\
\times & \times & \times & & & I & I & I & & \\
\times & \times & \times & \times & & I & I & I & I & \\
 & \times & \times & \times & \times & & I & I & I & I \\
 & & \times & \times & \times & & & I & I & I \\
 & & & \times & \times & & & & I & I \\
 & & & & \times & & & & & I
\end{pmatrix}, \qquad (9)$$

Загальна стратегія розв’язання цієї системи залежить від її рангу. Спочатку розглянемо найбільш трудомісткий з обчислювальної точки зору варіант числової системи. Для цього припустимо, що всі головні мінори схематично нарисованої матриці не дорівнюють нулю. Тоді перші $m(l+s+1)$ невідомих можуть бути виражені через k останніх розв’язків системи (7). При зроблених припущеннях про характер матриці (9) підматриця, утворена блоками "×" буде невиродженою.

Таким чином, схематично процес перетворення матриці системи може бути представлений у вигляді

$$\begin{pmatrix}
\times & & & & & I & & & & \\
\times & \times & & & & I & I & & & \\
\times & \times & \times & & & I & I & I & & \\
\times & \times & \times & \times & & I & I & I & I & \\
 & \times & \times & \times & \times & & I & I & I & I \\
 & & \times & \times & \times & & & I & I & I \\
 & & & \times & \times & & & & I & I \\
 & & & & \times & & & & & I
\end{pmatrix} \Rightarrow
\begin{pmatrix}
\ddots & & & & & I & & & & \\
 & \ddots & & & & I & I & & & \\
 & & \ddots & & & I & I & I & & \\
 & & & \ddots & & I & I & I & I & \\
 & & & & \ddots & I & I & I & I & I \\
 & & & & & I & I & I & I & I \\
 & & & & & I & I & I & I & I \\
 & & & & & I & I & I & I & I
\end{pmatrix}$$

Для реалізації алгоритму на ЕОМ потрібно виконати з точністю до головного члена $Cm^4 l^3$ арифметичних операцій. При цьому величина константи C залежить від вибраного алгоритму зведення матриці до діагонального вигляду.

Схема діагоналізації. Економічні алгоритми можна також одержати з врахуванням того, що матриця системи (7) має клітково-тепліцеве стрічкове заповнення. Не зважаючи на те, що клітки не є квадратними , а прямокутними, в загальному випадку цю обставину вдається використати досить вдало.

Однорідну кліткову систему з прямокутними блоками (7) для наглядності подальших міркувань, запишемо у матричному вигляді:

$$\begin{pmatrix} A_0 & & & & & -B_0 \\ A_1\ A_0 & & & & & -B_1 \\ A_2\ A_1\ \ A_0 & & & & & -B_2 \\ \ldots\ \ldots\ \ \ldots\ \ldots\ldots & & & & & \ldots \\ A_1 A_{l-1} A_{l-2} \ldots A_0 & & & & & -B_l \\ \quad A_l\ \ A_{l-1} \ldots A_1 A_0 & & & & & \\ \qquad A_l\ \ldots A_2 A_1 A_0 & & & & & \\ & \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ \ldots & & & & \\ & \ \ \ldots\ \ldots\ \ \ldots\ \ \ \ldots & & & & \\ & & A_1 A_{l-1}\ \ldots\ A_0 & & & \\ & & \quad A_l\ \ A_{l-1} \ldots\ A_0 & & & \\ & & & & & \\ & & & A_l A_{l-1} \ldots A_0 & & -B_0 \\ & & & \quad A_l\ \ldots A_1\ A_0 & -B_0 & -B_1 \\ & & & \quad \ldots\ \ldots\ \ \ \ldots & & \ldots \\ & & & \quad A_1 A_{l-1} & -B_{l-1} & -B_l \\ & & & \qquad A_l & -B_l & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ \ldots \\ X_N \\ X_{N+1} \\ X_{N+2} \\ \ldots \\ X_{Nl+N} \\ \ldots \\ y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ \ldots \\ y_{Nl+N-1} \\ y_{Nl+N} \end{pmatrix} = 0,$$

де A_{ij} — прямокутні клітки розмірності $n(n+1)$.

Процес перетворення матриці системи схематично може бути поданий у вигляді

$$\begin{pmatrix} \times & & & & & I & & & \\ \times & \times & & & & I & I & & \\ \times & \times & \times & & & I & I & I & \\ \times & \times & \times & \times & & I & I & I & I \\ & \times & \times & \times & \times & & I & I & I & I \\ & & \times & \times & \times & & & I & I & I \\ & & & \times & \times & & & & I & I \\ & & & & \times & & & & & I \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \ddots & & & & & I & & & & \\ & \ddots & & & & I & I & & & \\ & & \ddots & & & I & I & I & & \\ & & & \ddots & & I & I & I & I & \\ & & & & \ddots & I & I & I & I & I \\ & & & & & I & I & I & I & I \\ & & & & & I & I & I & I & I \\ & & & & & I & I & I & I & I \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$
\Rightarrow \begin{pmatrix}
\ddots & & & & & & & & & I & & & & & \\
& \ddots & & & & & & & & I & I & & & & \\
& & \ddots & & & & & & & I & I & I & & & \\
& & & \ddots & & & & & & I & I & I & I & & \\
& & & & \ddots & & & & & I & I & I & I & I & \\
& & & & & \ddots & & & & I & I & I & I & I & I \\
& & & & & & \ddots & & & I & I & I & I & I & I \\
& & & & & & & \ddots & & I & I & I & I & I & I \\
& & & & & & & & \ddots & I & I & I & I & I & I
\end{pmatrix}.
$$

Опишемо схему обчислень:

Крок 1. Переставимо місцями стовпці матриці таким чином, щоб у лівій частині залишилось $l+s+1$ кліткових стовпців, по m стовпців у кожному. Якщо ранг хоча б однієї з матриць A_0 чи A_l дорівнює m, то в лівому блоці матриць можна позбутись піддіагональних або наддіагональних елементів відповідно.

Крок 2. Без обмеження загальності припустимо, що $rank A_0 = m$ і саме m стовпців, які є лінійно незалежними, залишаються зліва в кожному з кліткових стовпців. Шляхом еквівалентних перетворень можна в лівому блоці матриці системи позбутись піддіагональних елементів. Цей блок матриці має клітково–тепліцеву структуру. З урахуванням цього достатньо провести перетворення одного кліткового стовпця $\begin{pmatrix} A_{m_0} & A_{m1} & A_{ml} \end{pmatrix}^T$ а тоді одержати з його елементів решту. Для виконання елементарних перетворень лівого блоку достатньо виконати $4/3m^3 + lm^2 + l^2m^2$ операцій множення і додавання.

Виявляється, що при цьому достатньо просто можна врахувати і зміни всіх стовпців у правій частині матриці. Оскільки еквівалентні перетворення не змінюють тепліцевої структури заповнення правого блоку матриць [2], то права частина теж залишиться клітково-тепліцевою. В силу цього достатньо виконати всі перетворення над першим клітковим стовпцем правого блоку. А отже, ненульові елементи решти стовпців отримаємо шляхом послідовного зсуву елементів попереднього стовпця на m позицій вниз. Таким чином, для перетворення елементів правого блоку потрібно виконати з точністю до головного члена $\frac{4}{3}(n+1-m)(l+s+1)(m^2+lm^2)$ адитивних і таку ж кількість мультиплікативних операцій на ЕОМ.

Крок 3. На даному етапі виконаємо зведення матриці до трапецевидної форми. Після виконання попереднього кроку в правому блоці позбудемося піддіагональних елементів в останніх $(l+1)m$ рівняннях. Для цього необхідно виконати не більше, ніж $4/3\,l^3m^3$ операцій множення і додавання.

Крок 4. На цьому етапі розв'язується система з матрицею трапецевидної форми. Для цього потрібно не більше, ніж $(l+s+1)ml^2$ арифметичних дій. Загальна кількість операцій всіх кроків розглянутого алгоритму з точністю до головного члена може бути порахована в наступний спосіб: $Q = 4/3\,m^3 + 2lm^2 + (l+s+1)(n+1-m)m^2(l+1) + 4/3\,l^3m^3$.

На початку було зроблено припущення, що $rank A_0 = \min\{m,n\}$. Нехай також без обмеження загальності найбільший головний мінор $A\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & rank \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & rank \end{bmatrix}$ є ненульовим.

Тоді блок з клітково-тепліцевим заповненням можна звести до трикутної, а потім і до діагональної форми, затративши по $2/3\,n^3 + l\,n^2$ додавань і множень.

У силу тепліцевого заповнення відпадає необхідність у перетворенні решти кліткових стовпців. Виявляється, що при цьому достатньо просто врахувати зміни стовпців правого блоку. Дійсно, оскільки елемент a_{ij} даного стовпця $\left(j = n^2(l+1)+2, n^2(l+1)+3, \ldots\right)$ може бути одержаний з $\left[n^2(l+1)+1\right]$-го стовпця зсувом його елементів на $n^2\left[j - n^2(l+1)+1\right]$ позицій вниз.

Крок 5. Після виключення в системі (6) векторів X_l залишиться система порядку $l\,n$ відносно $y_0, y_1, \ldots, y_{nl}$. Якщо позначити через r її ранг $(r \le l\,n)$, то розв'язання системи у загальному випадку вимагатиме $2nlr + 4/3\,r^3$ операцій.

Таким чином, загальна складність розглянутого алгоритму складає $2/3\left(n^3l^3 + mn^3 + n^3\right)$ адитивних і $2/3\left(n^3l^3 + mn^3 + n^3\right)$ мультиплікативних операцій. Для реалізації методу на ЕОМ потрібно $(l+2)n^2$ комірок пам'яті машини.

Опис блочного варіанту методу розв'язування розріджених систем лінійних рівнянь.

Розглянемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь [6].

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{3,2} & A_{3,3} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_{n-1,n-2} & A_{n-1,n-1} & A_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & A_{n,n-1} & A_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{1,n+1} \\ A_{2,n+1} \\ A_{3,n+1} \\ \dots \\ A_{n-1,n+1} \\ A_{n,n+1} \end{pmatrix},$$

елементи якої A_{ij} — це блоки розмірності m × m. Позначимо через $A\begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_k \\ j_1 & j_2 & \dots & j_k \end{bmatrix}$ мінор, розміщений на перетині блочних стрічок $i_1, i_2, .. i_k$ та блочних стовпців $j_1, j_2, ... j_k$. За узагальненим правилом Крамера [1] і розкладаючи чисельник за мінорами, можна записати

$$x_i = \left(A\begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{bmatrix} \right)^{-1} \left(\sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} A_{k,n+1} \times \right.$$
$$\left. \times A\begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & i-1 \\ 1 & 2 & \dots & i-1 \end{bmatrix} \cdot \prod_{s=i+1}^{k-1} A_{s,s+1} A\begin{bmatrix} k+1 & \dots & \dots & n \\ k+1 & \dots & \dots & n \end{bmatrix} \right) \tag{10}$$

Якщо ввести позначення

$$\alpha_{ik} = A\begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & i-1 \\ 1 & 2 & \dots & i-1 \end{bmatrix} \cdot \prod_{s=i+1}^{k-1} A_{s,s+1} A\begin{bmatrix} k+1 & \dots & \dots & n \\ k+1 & \dots & \dots & n \end{bmatrix}, \ i, k = \overline{1, n}.$$

то тоді для визначення невідомої x_i пропонуються співвідношення

$$x_i = \frac{A\begin{bmatrix} 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 3 & \dots & n \end{bmatrix}}{A\begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{bmatrix}} \times \frac{\alpha_{2,n}}{\alpha_{1,n}} \times A_{1,n+1} \Big/ \Big(E + \dots + A_{n,n+1}\alpha_{1,n} \big/ A_{n-1,n+1}\alpha_{1,n-1} /$$
$$/ E - A_{n,n+1}\alpha_{1,n} \big/ A_{n-1,n+1}\alpha_{1,n-1} \Big), \tag{11}$$

де

$$x_i = \left(A\begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{bmatrix} \right)^{-1} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{1+k} A_{k,n+1}\, \alpha_{i,k} = \frac{A\begin{bmatrix} 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 3 & \dots & n \end{bmatrix}}{A\begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{bmatrix}} \times$$

$$\times\cfrac{A_{1,n+1}}{E+\cfrac{A_{2,n+1}\alpha_{1,2}/A_{1,n+1}\alpha_{1,1}}{E-\cfrac{A_{2,n+1}\alpha_{1,2}}{A_{1,n+1}\alpha_{1,2}}+\cfrac{A_{3,n+1}\alpha_{1,3}/A_{2,n+1}\alpha_{1,2}}{E-\cfrac{A_{3,n+1}\alpha_{1,3}}{A_{2,n+1}\alpha_{1,2}}+\ddots}}}\tag{12}$$

$$\ddots+\cfrac{A_{n,n+1}\alpha_{1,n}/A_{n-1,n+1}\alpha_{1,n-1}}{E-\cfrac{A_{n,n+1}\alpha_{1,n}}{A_{n-1,n+1}\alpha_{1,n-1}}}$$

Тут E — означає одиничну матрицю.

Вираз $\alpha_{1,k+1}^{-1}\cdot\alpha_{1,k}$ $(k=1,2,\ldots)$ також можна розкласти в ланцюгові дроби

$$\frac{\alpha_{1,k}}{\alpha_{1,k+1}}=\frac{A_{1,k}A\begin{bmatrix}1&\ldots&k\\1&\ldots&k\end{bmatrix}}{A_{k+1,k+1}A\begin{bmatrix}1&\ldots&k\\1&\ldots&k\end{bmatrix}-A_{k+1,k}A\begin{bmatrix}1&\ldots&k-1\\1&\ldots&k-1\end{bmatrix}}=$$

$$=\frac{A_{1,k}\begin{bmatrix}1&\ldots&k\\1&\ldots&k\end{bmatrix}}{A_{k+1,k+1}A\begin{bmatrix}1&\ldots&k\\1&\ldots&k\end{bmatrix}-A_{k+1,k}A_{k,k+1}A\begin{bmatrix}1&\ldots&k-1\\1&\ldots&k-1\end{bmatrix}}=$$

$$=\frac{E}{A_{k+1,k+1}-A_{k+1,k}A_{k,k+1}A\begin{bmatrix}1&\ldots&k-1\\1&\ldots&k-1\end{bmatrix}A^{-1}\begin{bmatrix}1&\ldots&k\\1&\ldots&k\end{bmatrix}}=$$

$$=\frac{E}{A_{k+1,k+1}-A_{k+1,k}A_{k,k+1}\left(A^{-1}\begin{bmatrix}1&\ldots&k\\1&\ldots&k\end{bmatrix}^{T}A^{T}\begin{bmatrix}1&\ldots&k-1\\1&\ldots&k-1\end{bmatrix}\right)^{T}}=$$

$$=\ldots=\cfrac{E}{A_{k+1,k+1}-\cfrac{A_{k+1,k}A_{k,k+1}}{A_{k,k}-\cfrac{A_{k-1,k}A_{k,k-1}}{A_{k-1,k-1}-\ddots}}}.\qquad k=\overline{1,n}.$$

$$\ddots-\frac{A_{1,2}A_{2,1}}{A_{1,1}}$$

За аналогічною схемою знаходимо решту невідомих x_i. А для кожного відношення $\alpha_{i,k}/\alpha_{i,k+1}$ в свою чергу можна записати:

$$\frac{\alpha_{i,k}}{\alpha_{i,k+1}}=\frac{A\begin{bmatrix}1&2&\dots&i-1\\1&2&\dots&i-1\end{bmatrix}\prod\limits_{s=i+1}^{k-1}A_{s,s+1}A\begin{bmatrix}k+1&\dots&\dots&n\\k+1&\dots&\dots&n\end{bmatrix}}{A\begin{bmatrix}1&2&\dots&i-1\\1&2&\dots&i-1\end{bmatrix}\prod\limits_{s=i+1}^{k}A_{s,s+1}A\begin{bmatrix}k+2&\dots&\dots&n\\k+2&\dots&\dots&n\end{bmatrix}}=$$

$$=\frac{A\begin{bmatrix}k+1&\dots&\dots&n\\k+1&\dots&\dots&n\end{bmatrix}}{A_{k,k+1}A\begin{bmatrix}k+1&\dots&\dots&n\\k+1&\dots&\dots&n\end{bmatrix}}=$$

$$=\dots=\frac{A_{k+1,k+1}}{A_{k,k+1}}-\cfrac{A_{k+1,k+2}A_{k+2,k+1}/A_{k,k+1}}{A_{k+2,k+2}-\cfrac{A_{k+3,k+2}A_{k+2,k+3}}{A_{k+3,k+3}-\cfrac{A_{k+3,k+4}A_{k+4,k+3}}{A_{k+4,k+4}-\ddots}}}.$$

$$\ddots-\frac{A_{n-1,n}A_{n,n-1}}{A_{n,n}}$$

Отже, одержуємо аналітичне розвинення невідомих x_j даної розрідженої системи лінійних алгебраїчних рівнянь у скінчені матричні ланцюгові дроби.

Обчислювальні характеристики алгоритму

Тепер підрахуємо необхідну кількість записів при символьному розв’язуванні задачі та кількість операцій під час чисельної реалізації алгоритму множення матриць $A_{ij}\cdot A_{kl}$.

Використаємо твердження [6, с. 132] для оцінки складності алгоритму з точки зору комп’ютерної алгебри [4]. Для чисел $x_i\ \left(i=\overline{1,n}\right)$ на одному поверсі реалізація алгоритму вимагає одне блочне множення, одне блочне ділення, одне блочне додавання, а для n поверхів — 3n операцій, тобто по n блочних множень, ділень та додавань.

Обчислення показують, що для визначення всіх $A_{i,k}/A_{i,k+1}$ потрібно 5k записів, якщо k < i, і 5(n — k), якщо k > i. Таким чином необхідно виконати

$$5\sum_{k=1}^{i}k+5\sum_{k=i}^{n}n-k=5\left[\frac{(1+i)i}{2}+n(n-i+1)-\frac{(i+n)(n-i+1)}{2}\right]=$$

$$=5\left[i^2+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}-ni\right].$$

Отже, загальна складність методу становить

$$5\sum_{i=1}^{n}\left[i^2+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}-ni\right]=\frac{5}{2}(n^3+n).$$

Висновки. У статті розглянено новий підхід до розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь В. Леонтьєва із прямокутними λ – матрицями. Створено оптимізаційну модель з матрицями міжгалузевого балансу та запропоновано ефективний обчислювальний метод реалізації цієї моделі.

Проаналізовано деякі підходи до обчислювальних алгоритмів. Описано метод розв'язування розріджених систем лінійних алгебраїчних рівнянь із блочними елементами.

Запропонований алгоритм може ефективно використовуватися в системах комп'ютерної алгебри, в економіко-математичних дослідженнях та для аналітично-числового розв'язання інженерних прикладних задач.

На основі запропонованого підходу в пакеті MatLab були проведені числові експерименти для лінійних алгебраїчних рівнянь із блочними елементами. Вони підтверджують ефективність алгоритму.

Список використаних джерел:

1. Беллман Р. Теория матриц / Р. Беллман. — М. : Мир, 1985. — 366 с.
2. Воеводин В. В. Вычислительные процессы с теплицевыми матрицами / В. В. Воеводин, Е. Е. Тыртышников. — М. : Наука, 1987. — 320 с.
3. Григорків В. С. Моделювання економіки. Частина 2. / В. С. Григорків. — Чернівці : Рута, 2006. — 100 с.
4. Дэвенпорт Дж. Компьютерная алгебра / Дж. Дэвенпорт, И. Сирэ, Э. Турнье. — М. : Мир, 1991. — 352 с.
5. Недашковський М. О. Обчислення з λ – матрицями / М. О. Недашковський, О. Я. Ковальчук. — К. : Наук. думка, 2007. — 294 с.
6. Семчишин Л. М. Розв'язання розріджених систем лінійних алгебраїчних рівнянь із блочними елементами / Л. М. Семчишин // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. — Вип. 6. — Львів 2007. — С. 128—135.

New approach to the V. Leontiev's linear algebraic equation with right angled λ – matrix system solution is considered. The optimization models with inter branch balance matrix are made and the effective calculating method of this model realization is suggested. Some new approaches to calculative algorithms are analyzed. The effective method of linear algebraic equation with block elements rarefied system solution is described.

Key words: *Leontiev's static model, right-angled λ – matrix, rarefied system, chain fractions, the number of registrations, calculative algorithms.*

Отримано: 08.04.2009