УДК 518.25

Розв'язування розріджених систем лінійних алгебраїчних рівнянь із блочними елементами

Лідія Семчишин

Чортківський інститут підприємництва і бізнесу Тернопільського національного економічного університету, вул. С. Бандери, 46, Чортків, Тернопільська область, 48500, e-mail: Lida55718@ukr.net

У роботі запропоновано новий підхід до розв'язування розріджених систем лінійних алгебраїчних рівнянь із блочними елементами. Проведено підрахунок кількостей записів та операцій при чисельній реалізації алгоритму множення матриць. Охарактеризовано складність алгоритму з точки зору комп'ютерної алгебри. Проведено порівняння запропонованого алгоритму та блочного методу прогонки. Обчислено кількість записів для методу прогонки. Показано ефективність запропонованого алгоритму.

Ключові слова: розріджені системи, ланцюгові дроби, кількість записів, складність алгоритму.

Вступ. Математичне моделювання в наукових дослідженнях і практичних застосуваннях є невід'ємною рисою технічного прогресу. Його ефективність визначається продуктивністю ЕОМ та якістю обчислювальних алгоритмів і програм, що використовуються. Обчислювальні методи алгебри є одним із базових інструментів при моделюванні на ЕОМ і є важливою частиною програмного забезпечення для комп'ютерів усіх поколінь.

У значній кількості прикладних задач виникає необхідність розв'язання розріджених систем рівнянь із блочними елементами [1-3]. Розв'язуванню таких систем рівнянь присвячені роботи В. Воєводіна [1-4], В. Воєводіна, Ю. Кузнєцова [5], В. Воєводина, Є. Тиртишнікова [6], В. Дейнеки, І. Сергієнка [8], М. Недашковського [10, 11], Дж. Дзвенпорта, І. Сіре, Є. Турньє [9].

У цій статті розглянемо метод розв'язування розріджених систем із деякими найхарактернішими способами заповнення.

1. Формулювання задачі

Розглянемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{3,2} & A_{3,3} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_{n-1,n-2} & A_{n-1,n-1} & A_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & A_{n,n-1} & A_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{1,n+1} \\ A_{2,n+1} \\ A_{3,n+1} \\ \dots \\ A_{n-1,n+1} \\ A_{n,n+1} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

елементами якої A_{ij} є блоки розмірності $m \times m$. Позначимо через $A\begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_k \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_k \end{bmatrix}$ мінор, розміщений на перетині блочних стрічок $i_1, i_2, \ldots, i_k$ та блочних стовпців $j_1, j_2, \ldots, j_k$. За узагальненим правилом Крамера [4]

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{2,1} & \cdots & A_{1,n+1} & 0 & 0 \\ A_{1,2} & A_{2,2} & \ddots & A_{2,n+1} & \ddots & 0 \\ \ddots & A_{3,2} & \ddots & A_{3,n+1} & \ddots & \cdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & A_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \ddots & A_{n,n+1} & \cdots & A_{n,n} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & 0 & \cdots & 0 \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & \cdots & 0 \\ 0 & A_{3,2} & A_{3,3} & \ddots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & A_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A_{n,n} \end{vmatrix}}$$

Розкладаючи чисельник за мінорами, можна записати

$$x_i = \left(A\begin{bmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{bmatrix} \right)^{-1} \times$$
$$\times \left(\sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} A_{k,n+1} A\begin{bmatrix} 1 & 2 & \ldots & i-1 \\ 1 & 2 & \ldots & i-1 \end{bmatrix} \cdot \prod_{s=i+1}^{k-1} A_{s,s+1} A\begin{bmatrix} k+1 & \ldots & \ldots & n \\ k+1 & \ldots & \ldots & n \end{bmatrix} \right) \tag{2}$$

Введемо позначення

$$\alpha_{ik} = A\begin{bmatrix} 1 & 2 & \ldots & i-1 \\ 1 & 2 & \ldots & i-1 \end{bmatrix} \prod_{s=i+1}^{k-1} A_{s,s+1} A\begin{bmatrix} k+1 & \ldots & \ldots & n \\ k+1 & \ldots & \ldots & n \end{bmatrix}, \quad i,k = \overline{1,n}.$$

Тоді для визначення невідомої маємо співвідношення

$$x_i = \left(A\begin{bmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{bmatrix} \right)^{-1} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} A_{k,n+1} \alpha_{i,k} . \tag{3}$$

Для компактності запису надалі будемо позначати результат виконання операції множення на обернену матрицю зліва у вигляді $C^{-1}D = D / C$. Тоді вираз $D_1 / (C_1 + D_2 / C_2)$ означатиме $(C_1 + C_2^{-1} D_2)^{-1} \cdot D_1$.

Якщо до співвідношення (3) застосувати відому рівність Леонарда Ейлера [10], яка пов'язує ланцюгові дроби з рядами та скінченними сумами, то для x_i одержимо

$$x_i = \left(A\begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{bmatrix} \right)^{-1} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{1+k} A_{k,n+1}\alpha_{i,k} = \frac{A\begin{bmatrix} 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 3 & \dots & n \end{bmatrix}}{A\begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{bmatrix}} \times$$

$$\times \frac{A_{1,n+1}}{E + \cfrac{A_{2,n+1}\alpha_{1,2} / A_{1,n+1}\alpha_{1,1}}{E - \cfrac{A_{2,n+1}\alpha_{1,2}}{A_{1,n+1}\alpha_{1,2}} + \cfrac{A_{3,n+1}\alpha_{1,3} / A_{2,n+1}\alpha_{1,2}}{E - \cfrac{A_{3,n+1}\alpha_{1,3}}{A_{2,n+1}\alpha_{1,2}} + \dots \ddots + \cfrac{A_{n,n+1}\alpha_{1,n} / A_{n-1,n+1}\alpha_{1,n-1}}{E - \cfrac{A_{n,n+1}\alpha_{1,n}}{A_{n-1,n+1}\alpha_{1,n-1}}}}}} . \qquad (4)$$

Тут E — одинична матриця.

Вираз $\alpha_{1,k+1}^{-1}\alpha_{1,k}$ $(k = 1, 2, ...)$ також можна розкласти в ланцюгові дроби [4]

$$\frac{\alpha_{1,k}}{\alpha_{1,k+1}} = \frac{A_{1,k} A\begin{bmatrix} 1 & \dots & k \\ 1 & \dots & k \end{bmatrix}}{A_{k+1,k+1} A\begin{bmatrix} 1 & \dots & k \\ 1 & \dots & k \end{bmatrix} - A_{k+1,k} A\begin{bmatrix} 1 & \dots & k-1 \\ 1 & \dots & k-1 \end{bmatrix}} =$$

$$= \frac{A_{1,k}\begin{bmatrix} 1 & \dots & k \\ 1 & \dots & k \end{bmatrix}}{A_{k+1,k+1} A\begin{bmatrix} 1 & \dots & k \\ 1 & \dots & k \end{bmatrix} - A_{k+1,k} A_{k,k+1} A\begin{bmatrix} 1 & \dots & k-1 \\ 1 & \dots & k-1 \end{bmatrix}} =$$

$$= \frac{E}{A_{k+1,k+1} - A_{k+1,k} A_{k,k+1} A\begin{bmatrix} 1 & \dots & k-1 \\ 1 & \dots & k-1 \end{bmatrix} A^{-1}\begin{bmatrix} 1 & \dots & k \\ 1 & \dots & k \end{bmatrix}} =$$

$$= \frac{E}{A_{k+1,k+1} - A_{k+1,k} A_{k,k+1}\left(A^{-1}\begin{bmatrix} 1 & \dots & k \\ 1 & \dots & k \end{bmatrix}^T A^T\begin{bmatrix} 1 & \dots & k-1 \\ 1 & \dots & k-1 \end{bmatrix} \right)^T} =$$

$$= \frac{E}{A_{k+1,k+1} - \cfrac{A_{k+1,k} A_{k,k+1}}{A_{k,k} - \cfrac{A_{k-1,k} A_{k,k-1}}{A_{k-1,k-1} - \dots \ddots - \cfrac{A_{1,2} A_{2,1}}{A_{1,1}}}}}, \qquad k = \overline{1,n} \qquad (5)$$

Аналогічним чином

$$\frac{A\begin{bmatrix}2 & 3 & \dots & n\\ 2 & 3 & \dots & n\end{bmatrix}}{A\begin{bmatrix}1 & 2 & \dots & n\\ 1 & 2 & \dots & n\end{bmatrix}}=\frac{E}{A_{1,1}-A_{2,1}A_{1,2}\left[A^{-1}\begin{bmatrix}2 & 3 & \dots & n\\ 2 & 3 & \dots & n\end{bmatrix}^{T}A\begin{bmatrix}3 & 4 & \dots & n\\ 3 & 4 & \dots & n\end{bmatrix}^{T}\right]}=$$

$$=\dots=\cfrac{E}{A_{1,1}-\cfrac{A_{2,1}A_{1,2}}{A_{2,2}-\cfrac{A_{2,3}A_{3,2}}{A_{3,3}-\dots\ddots-\cfrac{A_{n-1,n}A_{n,n-1}}{A_{n,n}}}}}.$$

За такою ж схемою знаходимо решта невідомих x_i

$$x_i=\left(A\begin{bmatrix}1 & 2 & \dots & n\\ 1 & 2 & \dots & n\end{bmatrix}\right)^{-1}\left(\frac{A_{i,n+1}}{2}\alpha_{i,i}+\sum_{k=1}^{i-1}(-1)^{i+k}A_{k,n+1}\alpha_{i,k}+\right.$$

$$\left.+\frac{A_{i,n+1}}{2}\alpha_{i,i}+\sum_{k=i+1}^{n}(-1)^{i+k}A_{k,n+1}\alpha_{i,k}\right)=$$

$$=\left[(-1)^{2i-1}A_{i-1,i}\alpha_{i,i-1}\big/\alpha_{i,i}+(-1)^{2i}A_{i,i}+(-1)^{2i+1}A_{i+1,i}\alpha_{i,i+1}/\alpha_{i,i}\right]^{-1}\times$$

$$\times\left[\cfrac{\frac{1}{2}A_{i,n+1}}{E-\cfrac{2\left(A_{i,n+1}\alpha_{i,i}\right)^{-1}A_{i-1,n+1}\alpha_{i,i-1}}{E+2\left(A_{i,n+1}\alpha_{i,i}\right)^{-1}A_{i-1,n+1}\alpha_{i,i-1}-\dots\ddots-\cfrac{\left(A_{2,n+1}\alpha_{i,2}\right)^{-1}A_{1,n+1}\alpha_{i,1}}{E+\left(A_{2,n+1}\alpha_{i,2}\right)^{-1}A_{1,n+1}\alpha_{i,1}}}}-\right.$$

$$\left. - \cfrac{\frac{1}{2} A_{i,n+1}}{E - \cfrac{2\left(A_{i,n+1}\alpha_{i,i}\right)^{-1} A_{i+1,n+1}\alpha_{i,i+1}}{E + 2\left(A_{i,n+1}\alpha_{i,i}\right)^{-1} A_{i+1,n+1}\alpha_{i,i+1} - \dots \ddots - \cfrac{\left(A_{n-1,n+1}\alpha_{i,n-1}\right)^{-1} A_{n,n+1}\alpha_{i,n}}{E + \left(A_{n-1,n+1}\alpha_{i,n-1}\right)^{-1} A_{n,n+1}\alpha_{i,n}}}} \right] .$$

А для кожного відношення $\alpha_{i,\,k} / \alpha_{i,\,k+1}$ своєю чергою можна записати

$$\frac{\alpha_{i,k}}{\alpha_{i,k+1}} = \frac{A\begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & i-1 \\ 1 & 2 & \dots & i-1 \end{bmatrix} \prod\limits_{s=i+1}^{k-1} A_{s,s+1} A\begin{bmatrix} k+1 & \dots & \dots & n \\ k+1 & \dots & \dots & n \end{bmatrix}}{A\begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & i-1 \\ 1 & 2 & \dots & i-1 \end{bmatrix} \prod\limits_{s=i+1}^{k} A_{s,s+1} A\begin{bmatrix} k+2 & \dots & \dots & n \\ k+2 & \dots & \dots & n \end{bmatrix}} =$$

$$= \frac{A\begin{bmatrix} k+1 & \dots & \dots & n \\ k+1 & \dots & \dots & n \end{bmatrix}}{A_{k,k+1} A\begin{bmatrix} k+1 & \dots & \dots & n \\ k+1 & \dots & \dots & n \end{bmatrix}} = \frac{A_{k+1,k+1}}{A_{k,k+1}} -$$

$$- \frac{A_{k+1,k+2} A_{k+2,k+1}}{A_{k,k+1} \left(A^{-1}\begin{bmatrix} k+3 & \dots & n \\ k+3 & \dots & n \end{bmatrix}^{T} A^{T}\begin{bmatrix} k+2 & \dots & n \\ k+2 & \dots & n \end{bmatrix} \right)^{T}} = \dots = \frac{A_{k+1,k+1}}{A_{k,k+1}} -$$

$$- \cfrac{A_{k+1,k+2} A_{k+2,k+1} / A_{k,k+1}}{A_{k+2,k+2} - \cfrac{A_{k+3,k+2} A_{k+2,k+3}}{A_{k+3,k+3} - \cfrac{A_{k+3,k+4} A_{k+4,k+3}}{A_{k+4,k+4} - \dots \ddots - \cfrac{A_{n-1,n} A_{n,n-1}}{A_{n,n}}}}} .$$

Таким чином одержуємо аналітичне розвинення невідомих x_i даної розрідженої системи лінійних алгебраїчних рівнянь у скінченні матричні ланцюгові дроби.

2. Обчислювальні характеристики алгоритму

Тепер підрахуємо необхідну кількість записів при символьному розв'язуванні задачі та кількість операцій під час чисельної реалізації алгоритму множення матриць.

Твердження. Нехай деяка обчислювальна задача з вхідними даними $\{A_i\}$ розв'язується на ЕОМ за алгоритмом $\psi\ (A_1, A_2, \ldots, A_n)$ і складається з k кроків ψ_j $(j=\overline{1,k})$. Якщо на кожному кроці алгоритму $\psi(A)$ реалізується хоча б один запис виду $\psi_{ji_1}(A)\ \psi_{ji_2}(A)$, який використовує результат попереднього кроку, то загальна складність Q_ψ задачі буде не меншою, ніж $2^k m^2$, але не більшою від H^k записів, де H — найбільша ширина алгоритму на k кроках [9].

Використаємо це твердження для оцінки складності алгоритму з точки зору комп'ютерної алгебри [9]. Для чисел x_i $\left(i=\overline{1,n}\right)$ на одному поверсі реалізація алгоритму вимагає одне блочне множення, одне блочне ділення, одне блочне додавання, а для n поверхів — $3n$ операцій, тобто по n блочних множень, ділень та додавань.

Обчислення показують, що для визначення усіх $A_{i,k}/A_{i,k+1}$ потрібно $5k$ записів, якщо $k < i$ та $5(n-k)$ записів, якщо $k > i$. Таким чином необхідно виконати таку кількість записів

$$5\sum_{k=1}^{i} k + 5\sum_{k=i}^{n} n-k = 5\left[\frac{(1+i)i}{2} + n(n-i+1) - \frac{(i+n)(n-i+1)}{2}\right] = 5\left[i^2 + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} - ni\right].$$

Отже, загальна складність методу становить

$$5\sum_{i=1}^{n}\left[i^2 + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} - ni\right] = \frac{5}{2}(n^3+n).$$

Відомо [7, 10, 11], що алгоритм прогонки реалізується співвідношеннями

$$x_i = \alpha_{i+1}x_{i+1} + \beta_{i+1}, \quad \alpha_{i+1} = \frac{a_{i,i+1}}{a_{i,i} - a_{i,i-1}}, \quad \beta_{i+1} = \frac{a_{i,n+1} + a_{i,i-1}\beta_i}{a_{i,i} - a_{i,i-1}}$$

для прямого та зворотного ходу.

Проведемо порівняння запропонованого алгоритму та блочного методу прогонки. Кількість записів для методу прогонки, який реалізується співвідношеннями

$$x_1 = \alpha_2 x_2 + \beta_2, \quad \alpha_2 = a_{1,2}/a_{1,1}, \quad \beta_2 = a_{1,n+1}/a_{1,1},$$

$$x_2 = \alpha_3 x_3 + \beta_3, \quad \alpha_3 = \frac{a_{2,3}}{a_{2,2} - a_{2,1}}, \quad \beta_3 = \frac{a_{2,n+1}}{a_{2,2} - a_{2,1}},$$

$$x_{n-1} = \alpha_n x_n + \beta_n, \quad \alpha_n = \frac{a_{n-1,n}}{a_{n-1,n-1} - a_{n-1,n-2}}, \quad \beta_n = \frac{a_{n-1,n+1}}{a_{n-1,n-1} - a_{n-1,1}},$$

буде оцінюватися відповідно до записаного вище *твердження*. Розрахунки свідчать, що для обчислення α_{i+1} та β_{i+1} необхідно виконати по i операцій блочного додавання, блочного множення та блочного ділення. Тоді для обчислення кожного x_k треба реалізувати $\sum_{k=1}^{i} k = (1+i)i/2$ записів, а для обчислення усіх $x_i \; \left(i = \overline{1,n}\right)$ потрібно $(n^3 + n^2 + 2n)/4$ записів. Таким чином, із точки зору комп'ютерної алгебри запропонований алгоритм суттєво переважає класичний алгоритм прогонки. Він може бути реалізований, як в аналітичному, так і в числовому вигляді. Для реалізації запропонованого алгоритму потрібно по $6n$ блочних додавань і ділень та $4n$ блочних множень, оскільки в цьому випадку результати обчислень проміжних дробів можуть використовуватися багаторазово.

Відзначимо, що описаний алгоритм можна також застосовувати й у випадку систем із проріджениими матрицями наступного вигляду

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & 0 & 0 & A_{1,k} & & & 0 \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & \ddots & A_{2,k+1} & & 0 \\ 0 & & \ddots & 0 & \ddots & & 0 \\ A_{k,1} & \ddots & 0 & \ddots & 0 & \ddots & A_{n-k,n} \\ 0 & A_{k+1,2} & \ddots & & \ddots & 0 & \ddots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{n,n-k} & \ddots & 0 & A_{n,n} \end{pmatrix}$$

Матриці можуть також бути обрамленими з однієї або двох сторін. Системи з подібним заповненням розпадаються на k систем вигляду (1), кожна з яких матиме порядок n/k.

Висновки. У статті розглянуто метод розв'язування розріджених систем лінійних алгебраїчних рівнянь із блочними елементами. Запропонований алгоритм може ефективно використовуватися в системах комп'ютерної алгебри та для аналітично-числового розв'язування інженерних прикладних задач механіки.

На основі такого підходу в пакеті MatLab були проведені числові експерименти для лінійних алгебраїчних рівнянь із блочними елементами, які підтверджують ефективність запропонованого алгоритму.

Література

[1] *Воеводин В. В.*Численные методы алгебры. — М.: Наука, 1966. — 246 с.
[2] *Воеводин В. В.* Ошибки округления и устойчивость в прямых методах линейной алгебры. — М.: Изд-во МГУ,1969.
[3] *Воеводин В. В.* Вычислительные основы линейной алгебры. — М.: Наука, 1977. —303 с.
[4] *Воеводин В. В.* Математические модели и методы в параллельных процессах. — М.: Наука, 1986. — 296 с.

[5] *Воеводин В. В.*, *Кузнецов Ю. А.* Матрицы и вычисления. — М.: Наука, 1984. — 320 с.
[6] *Воеводин В. В.*, *Тыртышников Е. Е.* Вычислительные процессы с теплицевыми матрицами. — М.: Наука, 1987. — 320 с.
[7] *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. — М.: Наука, 1967. — 324 с.
[8] *Дейнека В. С., Сергиенко И. В.* Модели и методы решения задач в неоднородных средах. — К.: Наук. думка, 2001. — 606 с.
[9] *Дэвенпорт Дж., Сирэ И., Турнье Э.* Компьютерная алгебра. — М.: Мир, 1991. — 352 с.
[10] *Недашковський М. О., Скоробогатько В. Я.* Розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь методом гіллястих ланцюгових дробів. В кн.: Теоретичні та прикладні питання алгебри і рівнянь. — К.: Наук. думка, 1977. — С. 84-92.
[11] *Недашковський М. О.* Ознаки збіжності матричних гіллястих ланцюгових дробів // Математичні методи та фізико-механічні поля. — 2003. — Т. 46, № 4. — С. 50-56.

On solving the rarefied systems of linear algebraic equations with block elements

Lidiya Semchyshyn

The new approach to solving rarefied systems of linear algebraic equations with block elements is offered in the work. Calculation of recording amount and amount of matrixes multiplication in the numerical realization of the algorithm is carried out. The algorithm complexity is characterized from the point of view of computer algebra. Comparisons of the suggested algorithm and the block method of marching are carried out. The amount of recording for marching method is counted. Efficiency of the suggested algorithm is shown.

Решение разреженных систем линейных алгебраических уравнений с блочными элементами

Лидия Семчишин

В работе предлагается новый подход к решению разреженных систем линейных алгебраических уравнений с блочными элементами. Проведено подсчет количества записей и количества операций при числовой реализации алгоритма умножения матриц. Охарактеризована сложность алгоритма с точки зрения компьютерной алгебры. Проведены сравнения предложенного алгоритма и блочного метода прогонки. Подсчитано количество записей для метода прогонки. Показана эффективность предложенного алгоритма.

Отримано 12.06.07